ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

"DESARROLLO DE APLICACIONES CON SOFWARE LIBRE MATEMÁTICO Y SU INCIDENCIA EN EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO DIFERENCIAL EN EL I SEMESTRE DE LA ESPE-L"

Norma del Pilar Barreno Layedra.

Tesis presentada ante el Instituto de Postgrado y Educación Continua de la ESPOCH, como requisito parcial para la obtención del grado de Magíster en Matemática Básica

Riobamba – Ecuador

2015

CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DE TESIS CERTIFICA QUE:

El trabajo de investigación titulado "Desarrollo de aplicaciones informáticas con software libre matemático y su incidencia en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en el I semestre de la ESPE-L", de responsabilidad de Norma del Pilar Barreno Layedra ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Tribunal de Tesis:

Dr. Juan Vargas **PRESIDENTE**	______________________ FIRMA
Dr. Dennis Cazar. **DIRECTOR**	______________________ FIRMA
Mat. Marcelo Cortez **MIEMBRO**	______________________ FIRMA
Mat. Alberto Viláñez **MIEMBRO**	______________________ FIRMA
______________________ **COORDINADOR SISBIB ESPOCH**	______________________ FIRMA

Riobamba, marzo 2015

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Norma del Pilar Barreno Layedra, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en la presente Tesis, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

____

Norma del Pilar Barreno Layedra

0603185539

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

DEDICATORIA

Con todo el cariño y aprecio a mi esposo Marcelo y a mis tres hijos Marcelo Daniel, David Alejandro y Andrés Santiago, quienes son el amor y la motivación más grande de mi vida, quienes me apoyaron para terminar este proyecto de tesis.

AGRADECIMIENTO

A Dios por sus bendiciones, a mi tutor de tesis el Dr. Dennis Cazar y a los miembros: el Matemático Marcelo Cortez y Matemático Alberto Viláñez, por haberme brindado la oportunidad de acudir a sus conocimientos, experiencia, amistad, quienes me ayudaron en la dirección de mi proyecto de tesis.

RESUMEN

Elaborar aplicaciones informáticas con la utilización de software libre matemático para verificar su incidencia en el aprendizaje significativo de los temas del Cálculo Diferencial en el I semestre de la carrera de Ingeniería Automotriz. (ESPE-L)

Se analiza las diferentes técnicas e instrumentos de evaluación; y las técnicas de aprendizaje considerados en el modelo educativo institucional; además, se analiza los diferentes software libres matemáticos en función de sus características y la temática a ser tratada en la asignatura de Cálculo Diferencial, considerando al Geogebra como la herramienta informática a ser utilizada.

El diseño de la investigación es de tipo cuasi-experimental, ya que se trabaja con un grupo de control y un grupo de experimentación, a los mismos que se le aplicaron un pretest con la finalidad de medir los conocimientos previos y se valoró los resultados mediante el coeficiente Alfa de Cronbach obteniendo un 76.92% de confiabilidad del test. Posteriormente, se plantearon la hipótesis en función de investigar si la utilización del software libre matemático, mejorará el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial, realizando el análisis estadístico a las notas obtenidas en los diferentes parámetros de evaluación considerados como el test y la nota del examen final considerado como el postest, se obtuvieron un promedio de notas para el grupo de experimentación de 17.08/20 y para el grupo de control de 15.53/20; para la valoración de la hipótesis se consideraron una análisis de varianza mediante la distribución de probabilidad F y se corroboraron los resultados con la Prueba de Hipótesis para dos grupos. Determinándose que la utilización del software libre matemático si incide en el aprendizaje y rendimiento académico de los estudiantes y se recomienda propiciar y motivar la utilización del software libre en el área de Cálculo Diferencial.

SUMMARY

CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

1 CAPÍTULO: Introducción

1.1 Planteamiento del problema

El alto índice de reprobación y deserción en la asignatura de Cálculo Diferencial e Integral en los estudiantes del primer semestre de las carreras técnicas de la Universidad de las Fuerzas Armadas- ESPE, conlleva un problema de carácter social y académico a nivel local y nacional.

De las investigaciones previas, realizadas en el proyecto de iniciación científica "Matemática y Software Libre en la educación secundaria y universitaria de la región central del país" de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, el mismo que fue aprobado con No. 2013-004-ESPE-b1en el Consejo de Investigación y Vinculación con la Colectividad de fecha 3 de junio de 2013, se ha podido identificar factores de incidencia como: los conocimientos previos del estudiante, las dificultades en la conceptualización y formalización de la noción de límite y su utilización en la definición de derivada, la no utilización de las herramientas tecnológicas educativas en el proceso de enseñanza-aprendizaje, aspectos que en primera instancia no le permiten al estudiante; analizar, comprender e implementar la teoría del cálculo diferencial, convirtiéndose éste tema en algo abstracto para él.

Por lo anteriormente expuesto, se evidencia que en el campo de la enseñanza de la matemática en términos generales, y en particular del Cálculo Diferencial, encontramos múltiples dificultades que no permiten alcanzar aprendizajes significativos, partiendo del nivel de los conocimientos previos del estudiante pasando por la no adecuada metodología implementada y llegando hasta el mal manejo didáctico de los docentes.

A lo mencionado se podría añadir factores como:

- Colegios de procedencia de los estudiantes
- Especialidad de bachillerato del estudiante
- Situaciones de ubicación geográfica del estudiante
- Actividades que desempeña el estudiante
- Disponibilidad de recursos, financieros, bibliográficos y de materiales didácticos.
- Perfil profesional del Docente
- Conocimiento y aplicación de las metodologías y estrategias: didácticas, pedagógicas y psicológicas del Docente.
- Grado de formación del Docente en las TIC y su aplicación en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

1.2 Formulación del problema

- ¿Cuáles son los factores que inciden en el rendimiento académico de los estudiantes de CDI durante el período Octubre – Febrero 2015?
- ¿Cómo incide en el rendimiento académico de los estudiantes del I semestre de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE extensión Latacunga, los métodos didácticos que utilizan los Docentes de Cálculo Diferencial?
- ¿Las herramientas informáticas están bien orientadas a fortalecer la conceptualización, aplicación y simulación de las definiciones del Cálculo Diferencial?
- ¿Qué efecto tiene la utilización del Software libre matemático en los procesos de aprendizaje del Cálculo Diferencial?

1.3 Objetivos

1.3.1 Objetivo General

Desarrollar aplicaciones informáticas utilizando software libre matemático, y el estudio de su incidencia en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en el 1er semestre de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE extensión Latacunga.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Analizar las habilidades informáticas de los estudiantes del 1er semestre de las carreras técnicas de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE extensión Latacunga.
- Analizar las características del software libre matemático como base de TICs y su incidencia en el Cálculo Diferencial.
- Desarrollar aplicaciones específicas para el cálculo de límites y procedimientos de derivación utilizando software libre matemático.
- Desarrollar y valorar actividades de generalización de conocimientos, estudios de casos, aplicación de resultados teóricos a problemas prácticos en los temas del Cálculo Diferencial mediante la utilización del Software libre.
- Elaborar un análisis descriptivo de los datos para la verificación de los niveles de rendimiento académico del estudiante.

1.4 Justificación

Los contenidos del Cálculo diferencial constituyen el pilar fundamental en la formación matemática- física de todo estudiante de las carreras técnicas en la Universidad de las Fuerzas Armadas ESPE extensión Latacunga, por lo tanto, una deficiencia en su formación académica contribuirá en su reprobación, deserción o bajo desempeño en las asignaturas que deberá tomar en los semestres superiores.

Este estudio se constituirá en un aporte académico para la Institución, con el cual se pretenderá resolver el problema del bajo nivel de conocimientos en la temática del Cálculo Diferencial e Integral, en los estudiantes de carreras técnicas de la ESPE-L.

Al momento se cuenta con varios grupos de estudiantes que reciben la asignatura, permitiéndonos definir grupos de experimentación y grupos de control. Además, la Institución cuenta con algunos recursos e infraestructura académica como: laboratorios, aula virtual y el Proyecto de la utilización de herramientas web 2.0 en la gestión del Docente, esto permitirá que nuestro proyecto de investigación se enmarque en los objetivos Institucionales.

Al trabajar con software libre, existe la posibilidad para que los estudiantes puedan acceder al código fuente; y así, poder desarrollar e implementar las aplicaciones de acuerdo a sus necesidades, es decir, el estudiante se convierte de un ente pasivo (sólo utilitario), a un ente activo (desarrollador de aplicaciones), tomando en consideración que, el Software Libre permite desarrollar la creatividad, permite que se genere la curiosidad de simular de cómo funcionan las cosas y; por lo tanto, el software permitirá potenciar los procesos de investigación y creación.

CAPÍTULO II

REVISIÓN DE LITERATURA

2 CAPITULO: Revisión de Literatura

2.1 Antecedentes

En la Declaración Mundial sobre Educación para Todos, dado por la UNESCO, en el año 2000, en su artículo I, se determina que: *"Las necesidades básicas de aprendizaje abarcan tanto las herramientas esenciales para el aprendizaje como los contenidos básicos del aprendizaje necesarios para que los seres humanos puedan sobrevivir, desarrollar plenamente sus capacidades, vivir y trabajar con dignidad, participar plenamente en el desarrollo, mejorar la calidad de vida, tomar decisiones fundamentadas y continuar aprendiendo".* Según esta declaración, se espera que los estudiantes obtengan no sólo mejores resultados académicos sino una mayor satisfacción en sus estudios.

Este propósito no es sencillo, pues implica romper con la inercia de prácticas educativas del pasado que muchas veces reproducimos de manera inconsciente y rutinaria.

El presente proyecto de investigación se enmarca en los siguientes objetivos nacionales del Plan Nacional del Buen Vivir, que a continuación se detalla:

Objetivo 4: Fortalecer las capacidades y potenciales de la ciudadanía.- Proponer el establecimiento de una formación integral a fin de alcanzar una sociedad socialista del conocimiento.

Objetivo 10: Impulsar la transformación de la matriz productiva.- Una producción basada en la economía del conocimiento, para la promoción de la transformación de las estructuras de producción.

Tomando en consideración los objetivos del Plan Nacional del Buen Vivir que es una política gubernamental de nuestro país y referenciando los trabajos realizados en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Cádiz, en su proyecto "**Software libre como herramienta para la docencia de las Matemáticas"**, se origina el proyecto de investigación ***"Desarrollo de aplicaciones informáticas con software libre matemático y su incidencia en el aprendizaje del Cálculo Diferencial en el I semestre de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE extensión Latacunga"***, el mismo que propende a generar una alternativa didáctica de solución a la problemática del alto incide de reprobados en la asignatura de Cálculo Diferencial en el I nivel de las carreras técnicas de nuestra Institución.

2.2 Fundamentación Teórica

2.2.1 Los modelos educativos.

Partimos de la pregunta: **¿Qué es un modelo?**

Revisando el diccionario de la Real Academia Española (RAE), se determina que el significado de modelo tiene diferentes usos y significados, pero, para el campo educativo podemos conceptualizarle como el conjunto de lineamientos generales orientadores del accionar universitario, expresado en las funciones de: docencia, investigación y vinculación con la sociedad.

Se determina que los modelos educativos son variantes en el tiempo, ya que varían de acuerdo al desarrollo tecnológico y científico como consecuencia de la globalización de la información y comunicación; que, en la actualidad la denominamos la sociedad del conocimiento, de esta manera se evidencia que la vigencia y utilidad de un Modelo Educativo depende del contexto social que vivimos.

En este sentido, la conceptualización y definición de los modelos educativos parten de la necesidad de identificar el tipo de sociedad que queremos formar; es decir, del tipo de ser humano que permitirá buscar alternativas de solución a la diferente problemática de nuestra sociedad; basados en el esfuerzo del docente y las instituciones de educación que deben propender a conseguir seres humanos altamente motivados, con una gran autoestima, capacidad de liderazgo, críticos, reflexivos y creativos, con alta consciencia ciudadana revestidos de ética y civismo. En este contexto, el modelo educativo de la Universidad de las Fuerzas Armadas - ESPE contribuye de forma consistente, coherente y relevante al desarrollo de los miembros de la comunidad universitaria, en el marco de la misión y visión institucional, proponiendo currículos abiertos, flexibles, dinámicos, contextualizados, inter y transdisciplinarios, desde estrategias participativas, experienciales y cooperativas, para el desarrollo integral del ser humano en su multidimensionalidad.

En la Escuela Politécnica del Ejército, la construcción del modelo educativo está elaborada en función del Plan Nacional del Buen Vivir, la visión y misión institucional. Su ejecución requiere del uso de nuevas metodologías y técnicas didácticas, siendo estas el conjunto de actividades ordenadas y articuladas dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de las asignaturas. Su aplicación permite que el estudiante:

- Se convierta en el responsable de su propio aprendizaje.
- Asuma un papel participativo y colaborativo en el proceso a través de ciertas actividades.
- Tome contacto con su entorno.

- Se comprometa en un proceso de reflexión con lo que hace.
- Desarrolle la autonomía.
- Utilice la tecnología como recurso útil para enriquecer su aprendizaje.

De esta manera se determina que los cuatro aprendizajes fundamentales que en el transcurso de la vida serán los pilares del conocimiento, están dados por:

Pilares del conocimiento	Definición
Aprender a aprender	*Es la parte estratégica.* Más que conocimientos estáticos, estrategias de aprendizaje
Aprender a hacer	*Es la parte práctica. Es* como el vínculo y transformación de la realidad, es decir, el desarrollo de habilidades
Aprender a ser	*Es la parte filosófica.* Es la conciencia de sí mismo y el desarrollo de valores.
Aprender a convivir y a colaborar con los demás.	*Es la parte social. Es el* desarrollo de la conciencia social y la solidaridad, es decir, el aspecto actitudinal.

Cuadro 1. Cuadro de aprendizajes

Revisando algunos tipos de modelos educativos[1], podemos mencionar a:

- **El modelo educativo tradicional**

  Se refiere a la elaboración de un programa de estudios, no se hacen explícitas las necesidades sociales, la intervención de especialistas, las características del educando, ni tampoco se observan las instancias de evaluación del programa de estudios. Se destacan los cuatro elementos siguientes:
  a) El docente
  b) El método
  c) El estudiante
  d) La información

- **El modelo de Ralph Tyler.**

  Se fundamenta en el concepto de objetivos, los cuales se convierten en el núcleo de cualquier programa de estudios, ya que determinan de una manera sistemática el funcionamiento de los componentes de un programa de estudio. Este hecho, cambia sustancialmente el esquema tradicional de las funciones del profesor, del método, del estudiante y de la información, al requerir docentes con amplios dominios de la temática, conocimiento y manejo de

[1] http://es.catholic.net/op/articulos/42269/qu-es-un-modelo-educativo.html

técnicas y recursos didácticos, la enseñanza no puede dirigirse con un solo método o con una misma forma de dar la clase, el estudiante tiene mayor espacio de participación y va tomando protagonismo en el proceso de aprendizaje, la información está elaborada en función de la extensión y profundidad del contenido.

- **Modelo de Popham-Baker**

Busca sistematizar el proceso de enseñanza a partir de la formulación de una hipótesis por parte del Docente, el mismo que selecciona una serie de instrumentos para comprobar su veracidad en función de la experimentación y evaluación de los resultados obtenidos.
El Modelo de Popham-Baker lo podemos visualizar como un sistema que tiene una entrada y una salida de productos o resultados (aprendizajes), los cuales se modifican por medio de un proceso en función de los resultados, éste modelo lo describo mediante el siguiente diagrama.

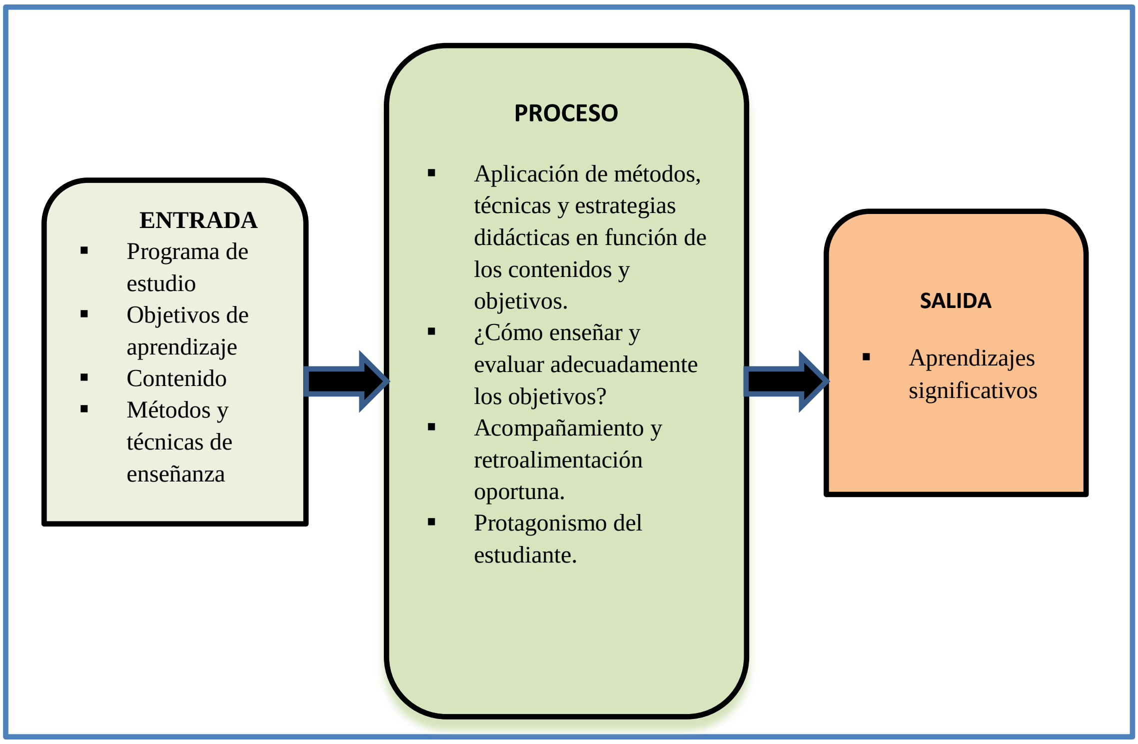

Figura 1. Modelo de Popham-Baker
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

- **Modelo de Roberto Mager.**

  Este modelo hace referencia a los objetivos específicos, que son aquellos con los que comúnmente opera los docentes en el aula de clases, y los mismos que están relacionados con la planeación didáctica-pedagógica.

- **Modelo de Hilda Taba.**

Es un modelo que sintetiza los elementos más representativos de los modelos educativos citados anteriormente. Su aporte está en la organización de los contenido los mismos que deben obedecer a una organización lógica, cronológica o metodológica, permitiendo al docente presentar la información a sus estudiantes, partiendo de lo simple a lo complejo, de lo antecedente a su respectivo consecuente, de la causa al efecto, de lo particular a lo general o viceversa, etc., este hecho redundará en un aprendizaje significativo de los estudiantes.

La propuesta del modelo de Hilda Taba muestra a los docentes las partes más importantes de un programa de estudios y, a su vez, les plantea el reto de elaborar planeaciones didácticas con organización de contenidos y actividades creativas, precisas y eficientes.

2.2.2 Las TIC en el marco de la "sociedad del conocimiento" y la "sociedad de la información".

A lo largo de la historia de la educación en el mundo, han existido muchas revoluciones. Pero la última revolución surge en la década de los ochenta gracias a la aparición de las Nuevas **T**ecnologías de la **I**nformación y las **C**omunicaciones (**TIC**). Debido a este fenómeno tecnológico se configura una nueva estructura social.

Revisando la bibliografía sobre que se entendía por sociedad de la información y sociedad del conocimiento, encontramos que:

- **Sociedad de la información**

El concepto de **"sociedad de la información" a**pareció en 1973, cuando el sociólogo estadounidense Daniel Bell introdujo la noción de la "sociedad de la información" en su libro: "El advenimiento de la sociedad post-industrial", donde formula que el eje principal de ésta, será el conocimiento teórico y advierte que los servicios basados en el conocimiento habrán de convertirse en la estructura central de la nueva economía y de una sociedad apuntalada en la información, donde las ideologías resultarán sobrando.

Por lo tanto, la sociedad de la información surge de la necesidad de promover el desarrollo de la sociedad industrial principalmente en la Unión Europea, la misma que necesitaba evolucionar en el control y optimización de los procesos industriales de sus empresas.

- **Sociedad del conocimiento**

El concepto de "sociedad del conocimiento" aparece por la década de los 90 en los ámbitos académicos, como una alternativa a lo que se denomina la sociedad de la información. Según Alvin Toffler, vivimos en ***una sociedad del conocimiento***, caracterizada porque la base de la producción son los datos, las imágenes, los símbolos, la ideología, los valores, la cultura, la ciencia y la tecnología. El bien más preciado no es la infraestructura, las máquinas y los equipos, sino las ***capacidades de los individuos para adquirir, crear, distribuir y aplicar creativa, responsable y críticamente los conocimientos***, en un contexto donde el veloz ritmo de la innovación científica y tecnológica los hace rápidamente obsoletos.

La UNESCO, adopta el término "sociedad del conocimiento", o su variante "sociedades del saber", desarrollando una reflexión en torno a considerar que: La sociedad de la Información es la piedra angular de las sociedades del conocimiento.

Realizando un análisis entre la terminología conceptual de "sociedad de la información", y "sociedad del conocimiento", puedo identificar que la primera está relacionado con la idea de la innovación tecnológica, mientras que la segunda incluye una dimensión de transformación social, cultural, económica, política e institucional.

Para André Gorz (1927)[2], la "inteligencia" cubre toda la gama de capacidades que permite combinar saberes con conocimientos. Sugiere, entonces, que "knowledge society" se traduzca por "sociedad de la inteligencia"

Como docentes nuestro deseo y compromiso común debe ser, el construir una Sociedad de la Información centrada en la persona, integradora y orientada al desarrollo, en que todos puedan crear, consultar, utilizar y compartir la información y el conocimiento, para que las personas, las comunidades y los pueblos puedan emplear plenamente sus posibilidades en la promoción de su desarrollo sostenible y en la mejora de su calidad de vida, sobre la base de los propósitos y principios de la Carta de las Naciones Unidas, respetando y defendiendo plenamente la Declaración Universal de Derechos Humanos.

---

[2] André Gorz, fue un filósofo y periodista. Autor de un pensamiento que oscila entre filosofía, teoría política y crítica social.

Además, como parte de la motivación del presente trabajo de investigación, se puede mencionar la Declaración de la Sociedad Civil[3] que extiende su visión sobre varios aspectos, pero en lo esencial dice:

"Nos comprometemos a constituir sociedades de la información y la comunicación centradas en la gente, incluyentes y equitativas. Sociedades en las que todas y todos puedan crear, utilizar, compartir y diseminar libremente la información y el conocimiento, así como acceder a éstos, con el fin de que particulares, comunidades y pueblos sean habilitados y habilitadas para mejorar su calidad de vida y llevar a la práctica su pleno potencial".

➢ Las TICs en los ámbitos educativos

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO) establece que las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) pueden contribuir al acceso universal a la educación, la igualdad en la instrucción, el ejercicio de la enseñanza y el aprendizaje de calidad y el desarrollo profesional de los docentes y dicentes.

En consecuencia, las TIC son herramientas que han impactado en todo el quehacer humano, sus efectos en el ámbito organizacional son evidentes, al promover la gestión eficiente primero de la información y posteriormente del conocimiento. En el ambiente educativo se busca incrementar la participación, la equidad y la calidad de la enseñanza-aprendizaje a lo largo de la vida para todos los seres humanos. Según César Coll[4] (2008) los usos que se pueden dar a las TIC en el ámbito educativo son:

- Instrumentos mediadores de las relaciones entre los estudiantes, los contenidos y las tareas de aprendizaje, basados en la búsqueda y selección de contenidos relevantes; elaboración de materiales de autoaprendizaje.
- Instrumentos de seguimiento, regulación y control de la actividad de profesores y estudiantes en torno a los contenidos y tareas.
- Instrumentos para la configuración de contextos de actividad y espacios de trabajo individual, en grupo, colaborativo o simultáneos.

De acuerdo con lo anterior, las TIC son susceptibles de utilizarse en los siguientes ámbitos del quehacer educativo:

---

[3] http://www.vecam.org/edm/article.php3?id_article=94

[4] http://www.escritoriomdyh.educ.ar/recursos/articulos/aprender_y_ensenar_con_tic.pdf

- **Enseñanza-aprendizaje**
  Las TIC tienen el potencial de transformar los procesos enseñanza-aprendizaje de manera innovadora para apoyo de la formas tradicionales y no tradicionales, ya que en diversos estudios se ha demostrado que fomentan un modelo centrado en el estudiante, apoyan las estrategias de trabajo colaborativo y favorecen el desarrollo de proyectos de investigación, los cuales derivan en aprendizajes más reflexivos, profundos y participativos; asimismo elevan el nivel de accesibilidad lo que favorece el aprendizaje a lo largo de la vida.

- **Gestión del conocimiento**
  Apoyar las redes entre docentes, que nos permitan compartir nuestras opiniones, experiencias y materiales didácticos con otros docentes universitarios, motivando a mejorar la calidad de los materiales o recursos didácticos desarrollados mediante la utilización del software libre matemático.

En este sentido es necesario apoyar aún más la investigación y desarrollo de líneas tecnopedagógicas creativas derivadas de la práctica docente, de la formación integral docente y de actividades de reflexión de la misma práctica, que fomente la innovación, base fundamental para que la universidad participe en la Sociedad del Conocimiento.

2.2.3 Paradigma teórico educativo. El constructivismo[5]

El aprendizaje no es un sencillo asunto de transmisión y acumulación de conocimientos, sino "un proceso activo" en el que el estudiante ensambla, extiende, restaura e interpreta, y por lo tanto "construye" conocimientos, utilizando su propia experiencia previa (práctica e intelectual) como fuente clave para aprender.

El aprendizaje en el constructivismo

La concepción del aprendizaje desde el constructivismo consiste en que:

- **El estudiante elabora representaciones o interpretaciones de la realidad**. Sin embargo, no siempre lo hace solo, pero en sus trabajos se evidenciaran sus características personales.
- **El aprendizaje es esencialmente activo-subjetivo**. Una persona que aprende algo nuevo, lo incorpora a sus experiencias previas y a sus propias estructuras mentales.

[5] MODULO 3 Diplomado Internacional en Competencias Docentes, Tecnológico Monterrey – Cambridge. Estudios realizados por Norma Barreno L.

- **Una vez que se le ha dado significado a un contenido** se “construye una representación mental, ya sea en imágenes o de manera verbal; o bien, elabora un modelo mental que sirve de marco explicativo a dicho conocimiento”.

El estudiante en el constructivismo

Algunas de las principales características asignadas al estudiante o aprendiz son:

- Deja de ser un mero receptor de información, en el que el conocimiento parece ser independiente de él, para convertirse en constructor de su propio conocimiento, como consecuencia de su actividad cognitiva, experiencial o subjetiva.
- Se convierte en el responsable de su propio aprendizaje, mediante su participación y la colaboración con sus compañeros.
- El estudiante que verdaderamente aprende: internaliza, reacomoda, o transforma la información nueva. Esta transformación ocurre a través de la creación de nuevos aprendizajes y esto resulta del surgimiento de nuevas estructuras cognitivas que permiten enfrentarse a situaciones iguales o parecidas en la realidad.

El estudiante juega un rol imprescindible para su propia formación, un protagonismo que es imposible ceder y que habrá de proporcionarle una infinidad de herramientas significativas que se pondrán a prueba en su propio futuro.

El docente en el constructivismo

El aprendizaje es una actividad personal enmarcada en contextos funcionales, significativos y auténticos, en los cuales el docente:

- Cede su protagonismo tradicional al estudiante para que éste pueda jugar un papel más activo en su propio proceso de formación.
- Funge como mediador o facilitador de la construcción cognitiva de los estudiantes ofreciendo oportunidades de aprendizaje, espacios para la discusión y la reflexión, materiales, retroalimentación, modelos, analogías y otros elementos que apoyen la construcción del conocimiento, y que no lo muestren como producto terminado.

2.2.4 Las técnicas didácticas aplicadas en la investigación.

Se debe tener presente que la aplicación de las técnicas didácticas está en función del campo disciplinar o área de conocimiento y del nivel de formación de los estudiantes. Por lo tanto, para nuestro estudio se considera únicamente dos técnicas descritas a continuación:

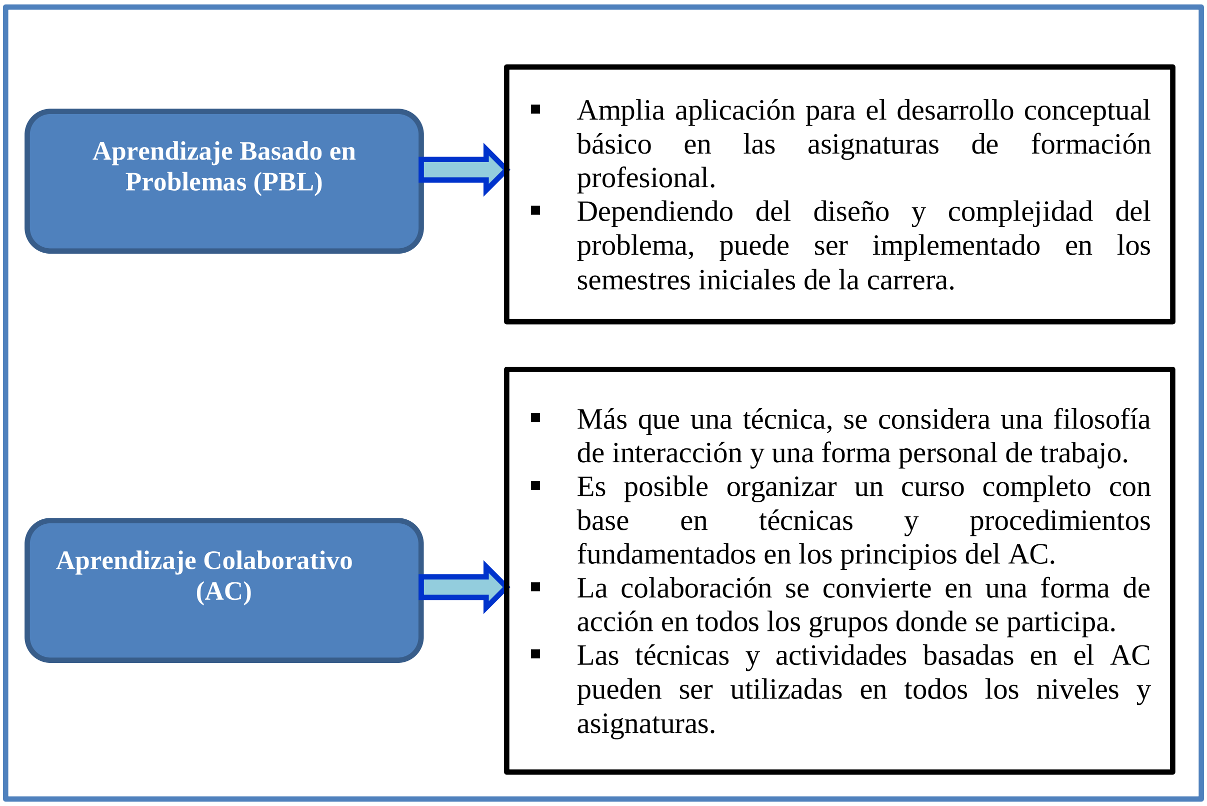

Figura 2. Las técnicas didácticas aplicadas en la investigación
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Aprendizaje Basado en Problemas (PBL)

Es un enfoque educativo orientado al aprendizaje y a la instrucción en el que los estudiantes abordan problemas reales en grupos pequeños y bajo la supervisión de un tutor.

Elementos del proceso en el PBL

a) Módulos temáticos
b) Docente para la construcción de los módulos
c) Descripción de los problemas y las tareas elaboradas por el docente
d) Discusión en grupos pequeños
e) Guía del tutor
f) Activación del conocimiento previo
g) Generación de preguntas y motivación
h) Formulación de objetivos de aprendizaje
i) Aprendizaje auto – dirigido
j) Reporte

Organización de la técnica

1. Clarificación de los términos y conceptos en la descripción del problema.
2. Definición del problema.

3. Análisis del problema (lluvia de ideas)
   Uso de los conocimientos previos y el sentido común para tratar de dar el mayor número de explicaciones que sea posible.
4. Organización de las ideas propuesta en el paso 3
   Construir una estructura para los resultados de la lluvia de ideas, formular hipótesis y establecer un modelo o elaborar una descripción que sea coherente.
5. Formulación de objetivos de aprendizaje.
6. Obtención de nueva información
   Llevar a cabo estudio individual a través del uso de una variedad de recursos de información.
7. Reporte de los resultados en el grupo tutorial
   Integrar el conocimiento y verificar que la información que se obtuvo cumpla con los objetivos del problema.

Roles del estudiante y del profesor

Dado que el PBL es un proceso de aprendizaje centrado en el estudiante, se espera que muestre una serie de conductas que usualmente no son indispensables en el aprendizaje convencional.

Profesor	Estudiante
▪ Asesor o guía ▪ Responsable de generar los problemas ▪ Da seguimiento a las actividades desarrolladas	▪ Propone actividades a desarrollar ▪ Define los conocimientos a adquirir ▪ Define la investigación a seguir ▪ Recolecta información con su equipo de trabajo

Cuadro 2. Rol estudiante –profesor

Conductas o cualidades de los estudiantes

- Motivación profunda y clara sobre la necesidad de aprendizaje.
- Disposición para trabajar en grupo.
- Tolerancia para enfrentarse a situaciones ambiguas.
- Habilidades para la interacción personal tanto intelectual como emocional.
- Desarrollo de los poderes imaginativo e intelectual.
- Habilidades para la solución de problemas.
- Ver su campo de estudio desde una perspectiva más amplia.
- Habilidades de pensamiento crítico, reflexivo, imaginativo y sensitivo.

Responsabilidades de los estudiantes:

- Lograr una integración responsable en torno al grupo y tener una actitud entusiasta en el abordaje del problema.
- Aportar información sobre el tema que el grupo discute, para facilitar el entendimiento detallado y específico sobre todos los conceptos implicados en la atención al problema.
- Buscar información que consideran necesaria para entender y resolver el problema, lo cual les obliga a poner en práctica habilidades de análisis y de síntesis.
- Investigar a través de diversos medios, por ejemplo: biblioteca, medios electrónicos, maestros, expertos y compañeros.
- Identificar los mecanismos básicos que puedan explicar cada aspecto importante de cada problema.
- Mostrar apertura para aprender de los demás, compartir su conocimiento y sus habilidades para analizar y sintetizar la información.
- Identificar las prioridades de aprendizaje y no el mero diagnóstico o la solución del problema.
- Retroalimentar el proceso de trabajo grupal.
- Participar en discusiones eficaces y no desviar las intervenciones a otros temas.
- Compartir información durante las sesiones, estimulando la comunicación y participación de los otros miembros del grupo.

Aprendizajes que se fomentan

- La adquisición de conocimientos, valores, actitudes y habilidades en base a problemas reales.
- El desarrollo de la capacidad de aprender por cuenta propia.
- La capacidad de análisis, síntesis y evaluación.
- La capacidad de identificar y resolver problemas.

Evaluación del aprendizaje[6]

La evaluación es esencial para poder determinar el impacto en el aprendizaje. Se espera que el tutor evalúe la preparación, organización y aportación de cada uno de los estudiantes en los procesos del grupo tutorial. Los estudiantes tienen la oportunidad de brindarse retroalimentación unos a otros en forma regular. Es conveniente que cada sesión termine con un espacio para discutir los avances y para aclarar los objetivos que se han de lograr en la siguiente reunión. La evaluación ha de representar para el estudiante una oportunidad para recibir retroalimentación específica de sus fortalezas y

[6] MODULO 4 Diplomado Internacional en Competencias Docentes, Tecnológico Monterrey – Cambridge. Estudios realizados por Norma Barreno L.

debilidades, y así poder rectificar las deficiencias y aprovechar las fortalezas identificadas.

Análisis entre la evaluación tradicional y la evaluación por competencias.

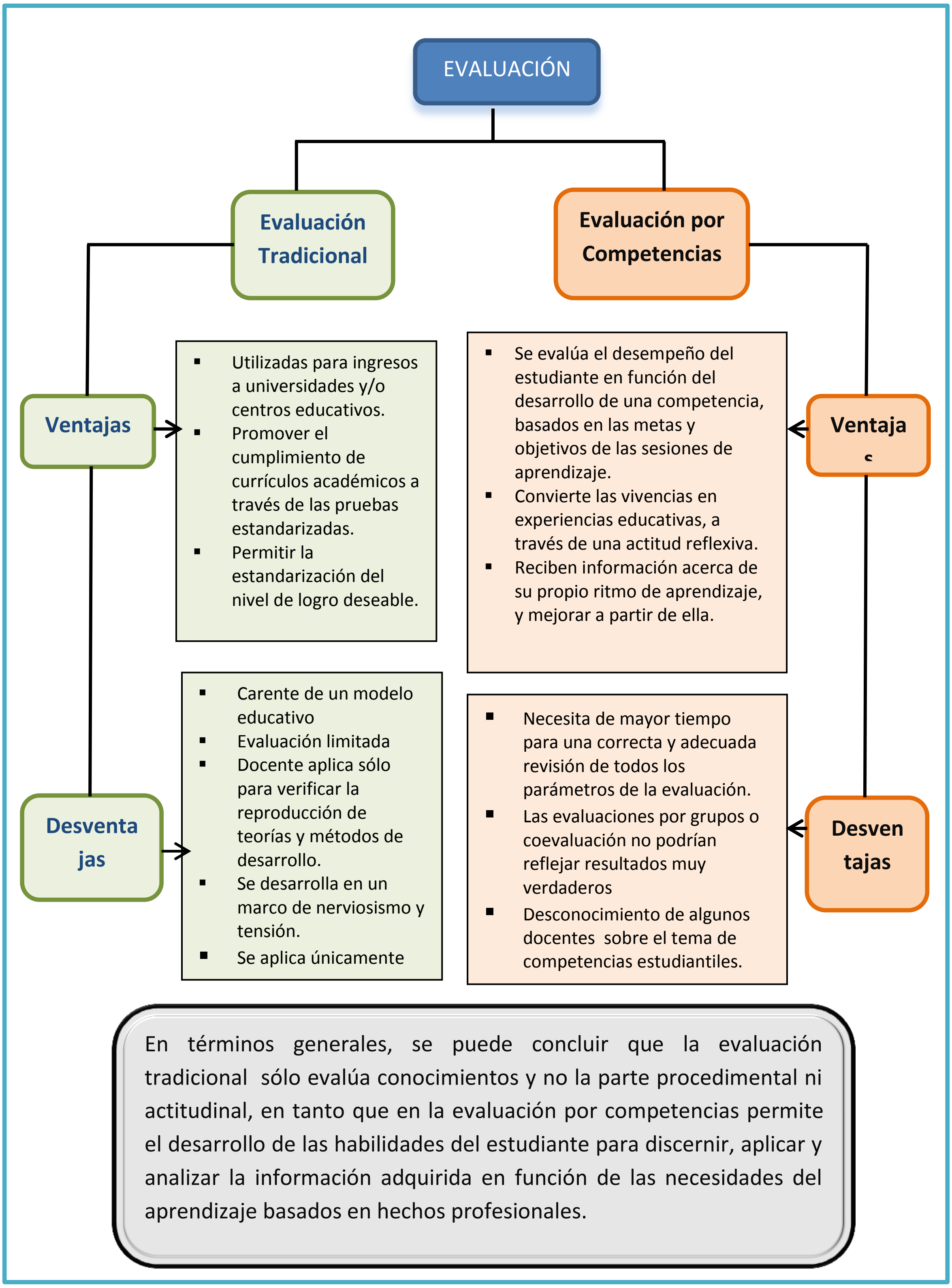

Figura3. Análisis entre la evaluación tradicional y la evaluación por competencias. Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Descripción de técnicas de evaluación

Técnica de evaluación	Descripción
Examen escrito	Pueden ser aplicados a libro cerrado o a libro abierto. Las preguntas deben ser diseñadas para garantizar la transferencia de habilidades a problemas o temas similares.
Examen práctico	Son usados para garantizar que los estudiantes sean capaces de aplicar habilidades aprendidas durante el curso.
Mapas conceptuales	Los estudiantes representan su conocimiento y crecimiento cognitivo a través de la creación de relaciones lógicas entre los conceptos y su representación gráfica.
Co-evaluación	El estudiante recibe una guía de categorías de evaluación que le ayuda en el proceso de evaluar a su compañero. Este proceso, también, enfatiza el ambiente cooperativo del PBL.
Auto-evaluación	Permite al estudiante pensar cuidadosamente acerca de lo que sabe, de lo que no sabe y de lo que necesita saber para cumplir determinadas tareas.
Evaluación al tutor	Retroalimentación al tutor respecto a la manera en que participó con el grupo. Puede ser dada por el grupo o por un observador externo.
Presentación oral	El ABP brinda a los estudiantes una oportunidad para practicar sus habilidades de comunicación. Las presentaciones orales son un medio por el cual se pueden observar esas habilidades.
Reporte escrito	Permite a los estudiantes practicar la comunicación por escrito. Pueden ser considerados los informes de laboratorio o prácticas experimentales.
Portafolio	Representa la colección de trabajos de los estudiantes que refleja el historial de sus esfuerzos, su evolución, el reporte de sus procesos, sus bitácoras, sus diseños, el resultado de sus tareas, etc. Tiene la ventaja de favorecer la autenticidad, estimular la responsabilidad, brindar una medición longitudinal y estimular el aprendizaje de por vida. Las desventajas son que se requiere de una actitud particular por parte de los estudiantes y los profesores y que se espera cierto nivel de meta-conocimiento (reflexión sobre los productos y los procesos).

Cuadro 3. Técnicas de evaluación

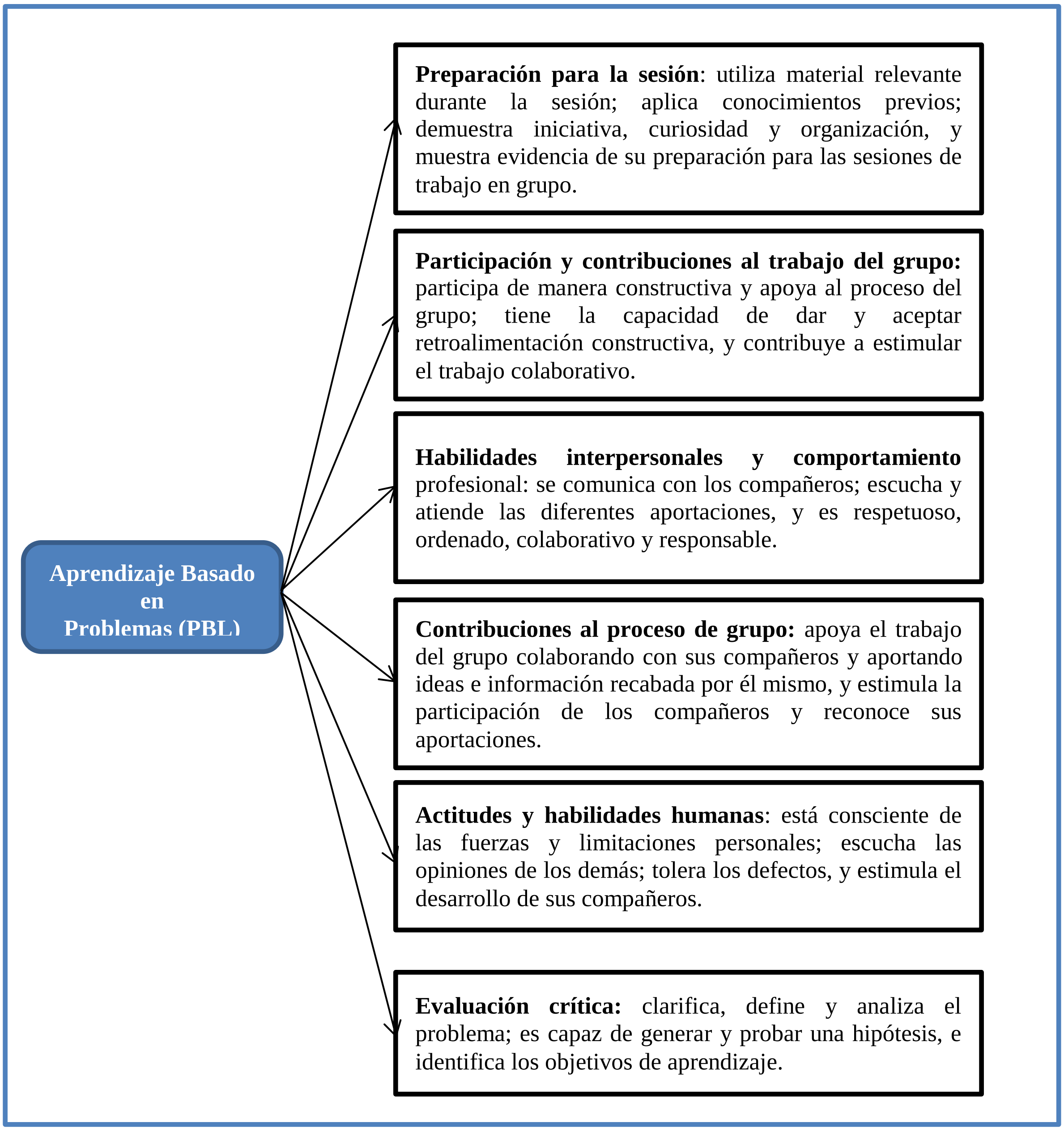

Figura 4. Aprendizaje basado en problemas (PBL)
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

2.2.5 Análisis del software matemático libre.

Programas de cálculo simbólico

Existen varios programas matemáticos que se dedican al cálculo simbólico catalogados como comerciales entre ellos el Maple, Mathematica, Derive, MatLab, etc., y programas a nivel de software libre como el Maxima, Scilab, Octave, Geogebra, Wiris, etc., los mismos que permiten modelizar varios escenarios académicos para tratar los temas del cálculo diferencial, generando un ambiente de aprendizaje dinámico entre el docente, el estudiante y la utilización de las TICs.

Debido a la disponibilidad de recursos económicos de los estudiantes y sus instituciones educativas y, considerando la **Ley de Propiedad Intelectual** se determina la necesidad de utilizar el software libre matemático como un recurso didáctico que apoye la realización de nuestra actividad académica con la finalidad de lograr aprendizajes significativos en nuestros estudiantes.

Por tal motivo, procedemos analizar algunos softwares libre matemáticos en función de sus características y la temática a ser abordada en el presente proyecto de investigación, tomando en consideración las teorías de aprendizaje y los modelos instructivos de los mismos.

TIPOS DE PROGRAMAS	TEORÍAS DEL APRENDIZAJE	MODELOS INSTRUCTIVOS
✓ Maxima ✓ Wiris ✓ Scilab	➢ Conductismo ➢ Cognitivismo	➢ Aprendizaje basado en la enseñanza programada. ➢ Aprendizaje basado en el almacenamiento y la representación de la información.
✓ Geogebra	➢ Cognitivismo ➢ Constructivismo ➢ Teorías sociales del aprendizaje	➢ Aprendizaje basado en el almacenamiento y la representación de la información. ➢ Aprendizaje basado en el descubrimiento. ➢ Aprendizaje colaborativo.

Cuadro 4. Análisis de software libre

2.3 Contenidos del Cálculo Diferencial

2.3.1 Origen del Cálculo Diferencial

La importancia del estudio de la matemática en la búsqueda y aplicación del conocimiento humano resulta un tema de relevancia trascendental. El cálculo diferencial surge como una herramienta de la mecánica clásica desarrollada fundamentalmente por Newton y el aporte notable de Leibniz, basados en los siguientes problemas:

- Determinar la recta tangente a una curva en uno de sus puntos.
- Encontrar el valor de la velocidad instantánea en movimientos no uniformes.

El Cálculo diferencial constituye la piedra angular sobre los que desarrollaran gran parte de los contenidos del cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, etc. Su campo de aplicación se encuentra presente en diferentes áreas del conocimiento y su aporte ha permitido el desarrollo tecnológico de la física, la biología, sicología, economía, etc.

2.3.2 Definición de Límite de una función real y sus aplicaciones

Objetivo.

Desarrollar las habilidades para resolver problemas que le lleven a plantear funciones y a darles solución por medio de tablas de valores o de gráficas, mediante el análisis e interpretación de las relaciones que se establecen entre las variables. Que, a partir del análisis del comportamiento local y para valores muy grandes de la variable independiente, trace gráficas de funciones y describa los comportamientos utilizando la notación de límites.

Fundamento teórico

1. ***Límite de una función:*** sea f(x) una función real de variable real definida en el intervalo abierto I = (a, b), y sea $c \in (a, b)$, f no tiene por qué estar necesariamente definida en c, entonces decimos que tiene límite en el punto c, y escribimos $\exists \lim_{x \to c} f(x) = L$, si $\exists\ \varepsilon > 0\ y\ \delta > 0$,con el entorno de L y c, tales que $|L - f(x)| < \varepsilon$ siempre que $|c - x| < \delta$, es decir:

$$\exists \lim_{x \to c} f(x) = L \leftrightarrow \forall \delta > 0, \quad \exists \varepsilon > 0\ tq\ |x - c| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

2. ***Límites laterales:*** siempre nos podemos acercar a un punto del intervalo por dos sentidos, por la derecha y por la izquierda del punto c, los cuales nos permiten aproximar al punto c.

   1. Límite lateral por la derecha:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = L \to (\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists\ \delta\ > 0\ tq\ si\ c < x < c + \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon)$$

   2. Límite lateral por la izquierda:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L \to (\forall\ \varepsilon > 0, \quad \exists\ \delta\ > 0\ tq\ si\ c - \delta < x < c \to |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Existe el límite de una función real sí y solo sí, los límites laterales existen y son iguales.

$$\exists \lim_{x \to c} f(x) = L \ \leftrightarrow\ \lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

Ejemplo:

Calcular si existe $\lim_{x \to 5}$ f(x), donde: *f(x)*= $\begin{cases} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}, & x \geq 5 \\ \frac{x^2-12x+35}{x-5}, & x < 5 \end{cases}$

Solución

$$\lim_{x \to 5} f(x) = L \ \leftrightarrow\ \lim_{x \to 5^-} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}} = \lim_{x \to 5^+} \frac{x^2 - 12x + 35}{x - 5}.$$

Por tanto $\exists \lim_{x\to 5} f(x) = -2$

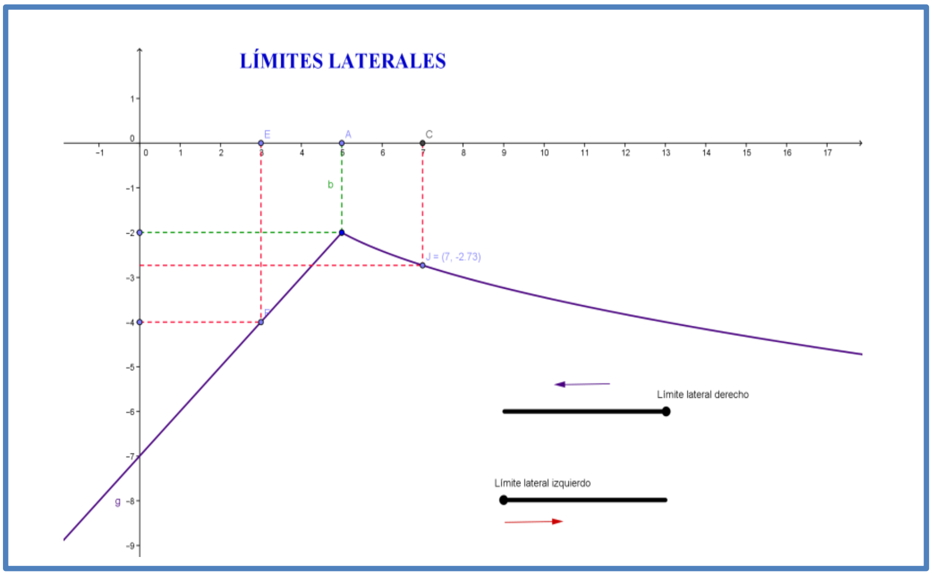

Figura 5. Interpretación geométrica de límites laterales.
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

- ***Límites y continuidad:*** una función real de variable real $f: R \to R$, se dice que es continua en el punto x=c, si y solo si, cumple las tres condiciones:

  a. Exista $f(c), \; con \; c \; \in Dom._f$
  b. Exista $\lim_{x\to c} f(x)$.
  c. $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$

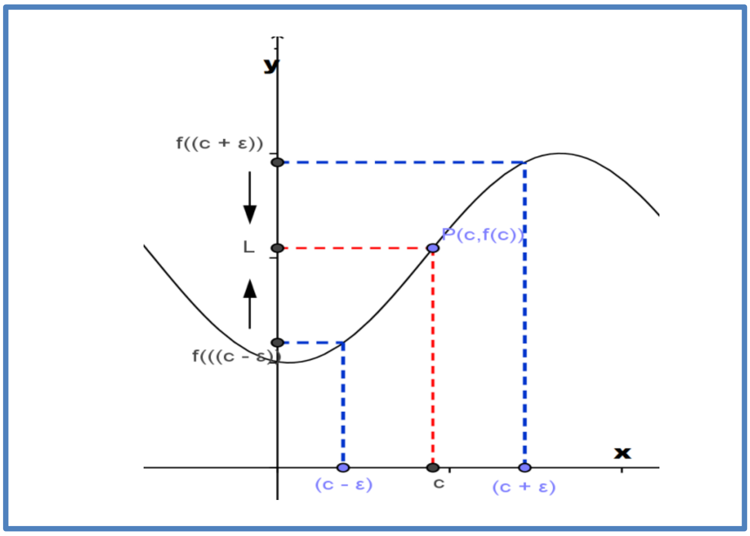

Figura 6. Límites y Continuidad de una función
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

3. ***Clasificación de los puntos de discontinuidad***:

1. ***Discontinuidad evitable o removible***: tenemos una discontinuidad evitable en el punto *x* = *c* si:

1. Existe el $\lim_{x \to c} f(x)$.
2. $c\ no\ pertenece\ Dom_{f(x)}$ o $c \in Dom_{f(x)}$ entonces tenemos: $\lim_{x \to c} f(x) \neq f(c)$.
3. Los límites laterales deben ser iguales, es decir:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x)$$

Para este caso se debe definir la función de la siguiente manera:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & si\ x \neq c \\ \lim_{x \to c} f(x), & si\ x = c \end{cases}$$

- ***Discontinuidad no evitable o irremovible:*** tenemos dos casos:

1. Discontinuidad de primera especie.- cuando la función *f(x)* tiene los límites laterales finitos y diferentes.
$$\lim_{x \to c^-} f(x) \neq \lim_{x \to c^+} f(x)$$
2. Discontinuidad de segunda especie.- cuando la función *f(x)* en el punto *c, no existe* $\lim_{x \to c} f(x)$. O si uno de sus límites laterales tiende hacia el ±∞.

Ejemplos:

Determinar los valores de x para los cuales la función es discontinua y construir la gráfica

$$f(x) \equiv \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 5 \\ -6 & \text{si } 5 < x < 7 \\ 13 - x & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

Solución:

Analizamos la discontinuidad en el punto 5

a. $f(5) = 6$

b. $\exists \lim_{x \to 5} f(x) \leftrightarrow \lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x).$

$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^-} x + 1. = 6$

$\lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5^+} -6 = -6$

Por tanto $\lim_{x \to 5^-} f(x) \neq \lim_{x \to 5^+} f(x)$, entonces tenemos una discontinuidad inevitable de primera especie.

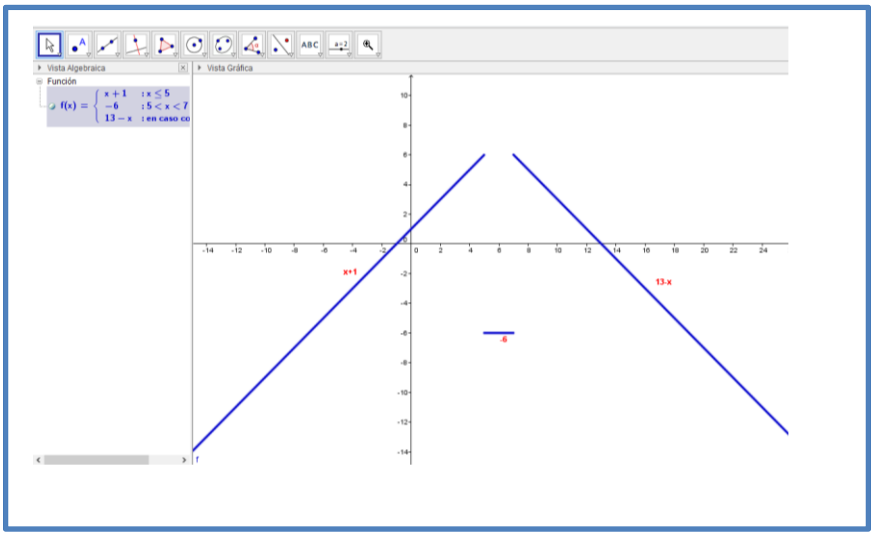

Figura 7. Discontinuidad inevitable de primera especie.
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

4. ***Propiedades de límites de funciones***: sean f(x) y g(x) dos funciones reales de variable real, ambas definidas en un intervalo abierto I =(a, b) y sea $c \in (a, b)$ tal que las dos funciones tienen límite. $\exists \lim_{x \to c} f(x) = L \ y \ \exists \lim_{x \to c} g(x) = M$

- Límite de una suma de funciones:
  $\exists \lim_{x \to c} f(x) \pm g(x) = L \pm M$

- Límite de un producto de funciones:
  $\exists \lim_{x \to c} f(x). g(x) = L . M$

- Límite de un cociente de funciones:

  $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M} \ \ con\ M \neq 0 \ , g(x) \neq 0$

- Límite de la potencia de una función:
  $\exists \lim_{x \to c} (f(x))^n = (\lim_{x \to c} f(x))^n = L^{\ n}$, ∀ entero positivo.

- Límite de una potencia racional:

$\exists \lim_{x \to c} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x \to c} \text{f(x)}} = \sqrt[n]{L}$, $\forall$ n par positivo

- Límite de un valor absoluto

  $\exists \lim_{x \to c} |f(x)| = \left|\lim_{x \to c} \text{f(x)}\right| = |L|$

- ***Límites e indeterminaciones:*** Las formas indeterminadas más usuales son:
  1. $\frac{0}{0}$
  2. 1^{∞}
  3. $\frac{\infty}{\infty}$
  4. $\infty - \infty$
  5. $0 * \infty$
  6. 0^0
  7. ∞^{∞}

- Límites indeterminados de la forma $\frac{0}{0}$

Si $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, para evitar la indeterminación $\frac{0}{0}$, debemos realizar alguna operación en el denominador y/ o al numerador de tal forma que se pueda simplificar el binomio ***(x- c)***. Se presentan los siguientes casos:

- Cuando f(x) y g(x) son polinomios de grado n y m respectivamente, y $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces la indeterminación se evita factorizando en numerador y/o denominador:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{(x-c)f_1(x)}{(x-c)g_1(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

- Cuando f(x) y g(x) son radicales y $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces la indeterminación se evita racionalizando en el denominador y/o denominador.
- Cuando f(x) y g(x) son funciones trigonométricas y $\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$, entonces la indeterminación se evita utilizando los teoremas $\lim_{u \to 0} \frac{sen\, u}{u} = 1$, $\lim_{u \to 0} \frac{tg(x)}{x} = 1$ y algunas identidades trigonométricas.

Ejemplos:

Calcular los siguientes límites:

1. $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x) - sen(x)}{x^3}$

Solución

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sen(x)}{x^3}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)(1-\cos(x))}{x^3\cos(x)}\left(\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right)=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3(x)}{x^3\cos(x)(1+\cos(x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen^3(x)}{x^3} * \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x)(1+\cos(x)}=\frac{1}{2}$$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{a+b}}{x},\ a>0\ ,\ b>0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{a+b}}{x}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x+a+b}-\sqrt{a+b}}{x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+a+b}+\sqrt{a+b}}{\sqrt{x+a+b}+\sqrt{a+b}}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{x\sqrt{x+a+b}+\sqrt{a+b}}\right)=\frac{1}{2\sqrt{a+b}}$$

- Límites indeterminados de la forma 1^∞

Si al calcular el límite resulta la indeterminación de la forma 1^∞, se debe tratar de formar una función de la forma: $(1+u(x))^{\frac{1}{u(x)}}$ o de la forma $\left(1+\frac{1}{u(x)}\right)^{u(x)}$ de tal manera que el límite resulte el número e.

Ejemplo:

1. Calcular el $\lim_{x\to 0}(1+sen(x))^{\frac{1}{x}}$

$\lim_{x\to 0}(1+sen(x))^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$

$$\lim_{x\to 0}\left((1+sen(x))^{\frac{1}{sen(x)}}\right)^{\frac{sen(x)}{x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}} = e^1 = e$$

2. Calcular: $\lim_{x\to 0}(\cos(x)+sen(x))^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}(1+sen(x))^{\frac{1}{x}} = 1^{\infty}$$

$$\lim_{x\to 0}\left((1+sen(x)-sen^2(x)^{\frac{1}{sen(x)-sen^2(x)}}\right)^{\frac{sen(x)-sen^2(x)}{x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)-sen^2(x)}{x}}$$

$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{sen^2(x)}{x}}$$

$$e^{1-0} = e$$

5. Límites infinitos, asíntotas verticales: se dice que una función tiene límite infinito cuando $x \to c$ y $f(x) \to +\infty$, si y solo si, dado un número N>0, existe un δ > 0 tal que $0 < |x-c| < \delta$ entonces f(x)>N. Es decir:

$$\lim_{x\to c} f(x) = +\infty \leftrightarrow (\forall\, N > 0, \exists\, \delta > 0)\ tq\ sí\ \ 0 < |x-c| < \delta \to f(x) > N)$$

6. Y si la función tiene límite hacia el menos infinito cuando $x \to c$ y $f(x) \to -\infty$, sí y solo si, dado un número N < 0, existe un δ > 0 tal que $0 < |x-b| < \delta$ entonces f(x) < N. Es decir:

$$\lim_{x\to c} f(x) = -\infty \leftrightarrow (\forall\, N < 0, \exists\, \delta > 0)\ tq\ sí\ \ 0 < |x-b| < \delta \to f(x) < N)$$

La recta x = a es una asíntota vertical para la función f(x).

- De igual modo pueden ocurrir uno de los siguientes casos:

1. $\exists \lim_{x\to a^+} f(x) = L_1$ pero $\lim_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$
2. $\exists \lim_{x\to a^-} f(x) = L_2$ pero $\lim_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

3. $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$

4. $\exists \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \neq \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \mp\infty$

7. Límites en el infinito, asíntotas horizontales: cuando al tender la variable a más o menos infinito las imágenes se mantienen en un entorno de un valor finito, así:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N > 0)\ tq\ sí\ \ x > \ N\ \ \to |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Para f: $]a, +\infty[\, \to R$, la función definida en el intervalo]a, - ∞[.

Y si consideramos a f: $]-\infty, b[\, \to R$ en el intervalo]- ∞, b[. Tendremos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \leftrightarrow (\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M < 0)\ tq\ sí\ \ x < \ M\ \ \to |f(x) - L| < \varepsilon)$$

En ambos casos la recta y = L es una asíntota horizontal para la función.

8. Límites en el infinito, asíntotas oblicuas: cuando al tender la variable a más o menos infinito las imágenes de $\frac{f(x)}{x}$ se mantienen en un entorno de un valor finito, así:

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = L \to \exists\, \varepsilon > 0\ y\ M > 0,\ \ cuando\ x > M$, y de igual modo:

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = L \to \exists\, \varepsilon > 0\ y\ M < 0,\ \ cuando\ x < M$

En ambos casos hay una asíntota oblicua para la función de pendiente L y ordenada en el origen $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax) = b$, es decir, de ecuación y = mx+b.

2.3.3 Definición de derivada de una función real y sus aplicaciones

Objetivo.

Identificar las propiedades de la derivada a partir de sus interpretaciones física y geométrica. Que emplee la definición en el cálculo de derivadas sencillas y aplique éstas en la solución de problemas de razón de cambio, cálculo de tangentes y aproximación de funciones.

Fundamento teórico

Se define la Tasa de variación media (TVM) de una función real $y = f(x)$ en un intervalo $[a,b]$ como el cociente:

$$TVM_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Frecuentemente el intervalo $[a,b]$ se designa: $[a, a+h]$ en el que h es la longitud del intervalo. En tal caso tendremos que:

$$TVM_{[a,a+h]} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Geométricamente la TVM de la función $y = f(x)$ en un intervalo $[a, a+h]$ nos da la pendiente de la recta secante que une los puntos A y B siendo: $A(a, f(a))$ y $B(a+h, f(a+h))$

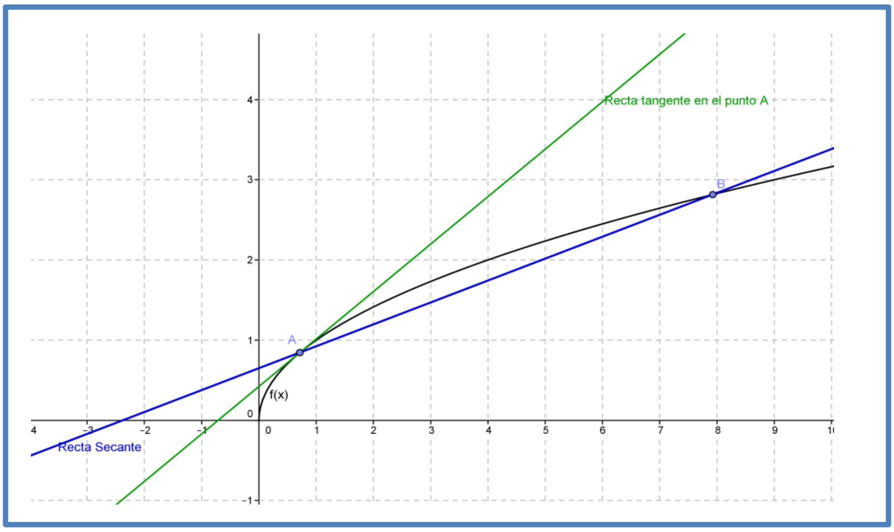

Figura 8. Interpretación geométrica TVM.
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Así pues, si el incremento medio de una función en un intervalo se mide por la TVM de dicha función en ese intervalo, el incremento instantáneo de una función en un punto se mide por la pendiente de la recta tangente a esa función en dicho punto.

Esa pendiente de la recta tangente a $f(x)$ en el punto $A = (a, f(a))$, que se designa por $f'(a)$, se obtiene mediante el siguiente límite:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Acabamos de ver que la derivada de una función en un punto, $f'(a)$, se obtiene como un límite. Para que este límite exista, sabemos que han de existir los límites laterales correspondientes, que en este caso se les denomina derivadas laterales y se obtienen:

$f'(a^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ que es la derivada por la izquierda de $f(x)$ en A

$f'(a^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ que es la derivada por la derecha de $f(x)$ en A.

Si las derivadas laterales existen y valen lo mismo, es decir, $f'(a^-) = f'(a^+)$ diremos que la función $f(x)$ es derivable en A y su valor es: $f'(a) = f'(a^-) = f'(a^+)$

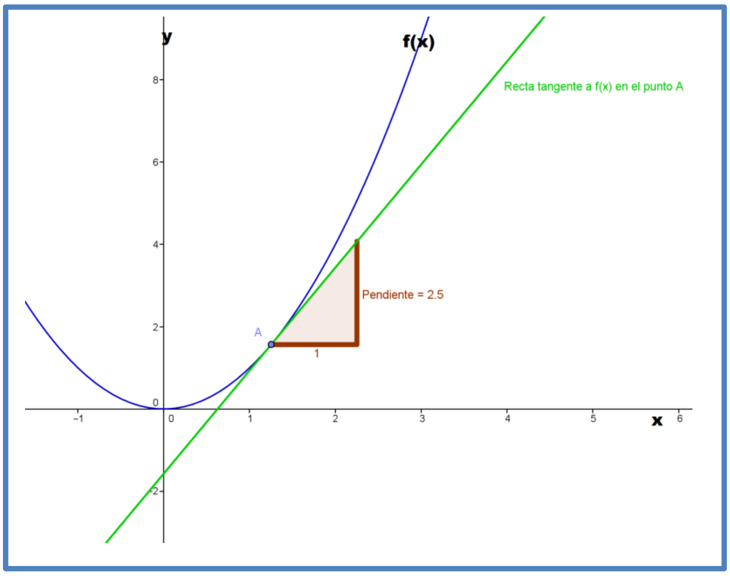

Figura 9. Recta tangente en el punto A
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Derivabilidad y continuidad.-

Sea f una función y $x_0 \in D_{f,}$ f es diferenciable en x_0 entonces f es continúa en x_0.

Pero una función puede ser continua en un punto y no ser derivable en él.

Ejemplo:

Determinar si $f(x) = |x|$ es derivable en $x_0 = 0$

La función: $f(x)=|x|=\begin{cases} x & si \quad x\geq 0 \\ -x & si \quad x<0 \end{cases}$

La función es continúa en todo su dominio.

Pero la función no es derivable en $x_0 = 0$, porque sus derivadas laterales no son iguales:

$$f'(0^-)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=-1$$

$$f'(0^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=1$$

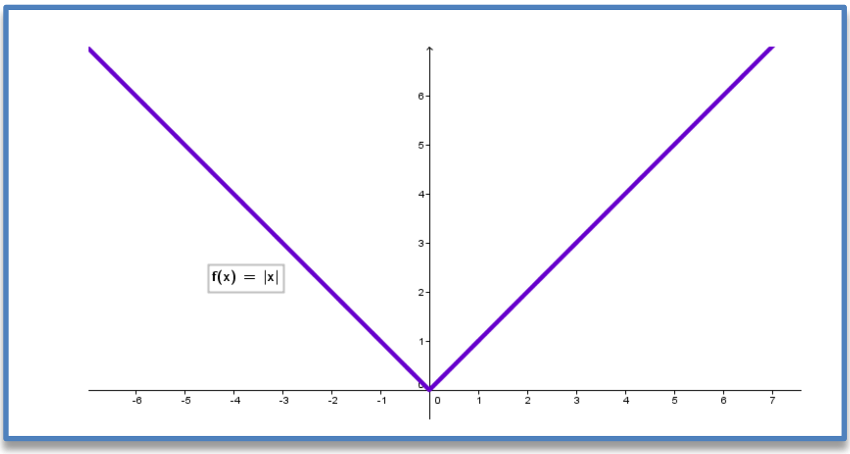

Figura 10. Derivabildad y Continuidad de una función
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Si una función es Derivable en $x = x_0$ entonces es continua en x_0.

2.3.4 La función derivada y su construcción

Objetivo.

Analizar, interpretar y construir la función derivada de varias funciones reales mediante la utilización del software libre Geogebra; además, evidenciar la aplicación de la regla de la cadena para derivar funciones algebraicas tanto explícitas como implícitas.

Fundamento teórico

A $f'(x)$ se le denomina **Función Derivada de la función** $f(x)$**.** El nombre de derivada viene de que esta función $f'(x)$ deriva (proviene) de la función $f(x)$.

Mediante la utilización del software Geogebra podemos observar que se trata de una función $f'(x)$ que asocia a cada abscisa el valor de la derivada de $f(x)$ en ese punto (la pendiente de la recta tangente a f en el punto dado).

Para probarlo basta con obtener la expresión de la derivada de $f(x)$ en un punto cualquiera x mediante el cálculo del límite que ya conocemos.

Ejemplo

La función $f(x) = x^2 - 2x$. Entonces la función derivada se encontrará mediante la utilización de la definición; es decir:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2 - 2(x+h) - (x^2-2x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-2x-2h-x^2+2x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(2x+h-2)h}{h} = \lim_{h\to 0}(2x+h-2) = 2x-2.$$

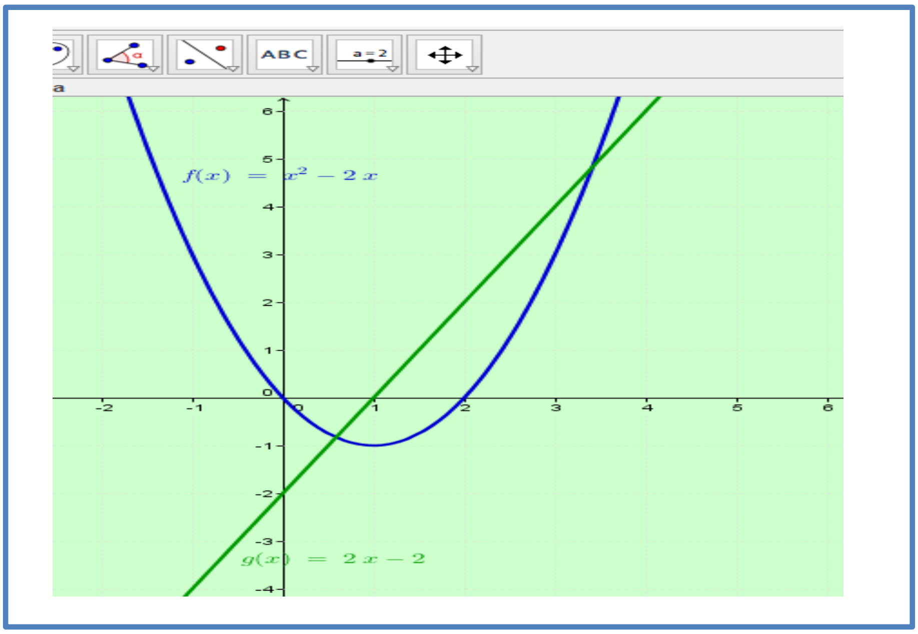

Figura 11. Función derivada de $f(x) = x^2 - 2x$
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Ejemplo.-

Dada la función cuya expresión analítica es: $f(x)=\frac{1}{x}$. Calcular:

a) Su función derivada mediante el límite del cociente incremental.

b) Los valores de $f'\left(\frac{1}{2}\right)$ $\quad f'\left(\sqrt{5}\right)$

c) Para qué valor(es) de x es $f'(x)=-1 \quad f'(x)=1 \quad f'(x)=0$

a) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-(x+h)}{(x+h).x.h}$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{(x+h).x.h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{(x+h).x.h}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h).x}=\frac{-1}{x^2}$$

b) $f'(\frac{1}{2})=\frac{-1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{-1}{\frac{1}{4}}=-4 \qquad f'(\sqrt{5})=\frac{-1}{\left(\sqrt{5}\right)^2}=\frac{-1}{5}$

c) $f'(x)=-1\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=-1\Rightarrow x^2=\frac{-1}{-1}\Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$

$f'(x)=1\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=1\Rightarrow x^2=-1\Rightarrow x=\sqrt{-1}$ $\quad$ *no existe en los reales*

$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-1}{x^2}=0\Rightarrow$ $\quad$ *falso*

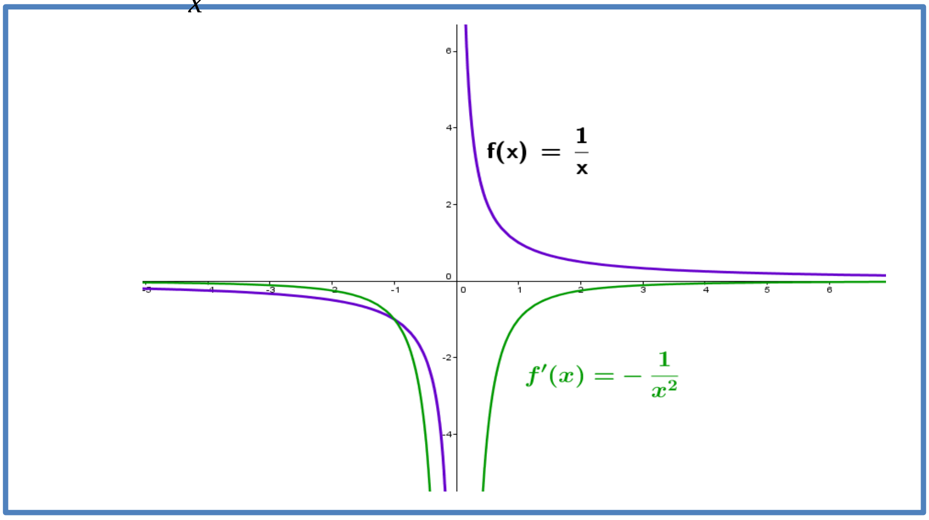

Figura 12. Función derivada de $f(x)=\frac{1}{x}$

Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

2.3.5 Aplicaciones de la Derivada

Objetivo.

Fortalecer los conocimientos de la derivada por medio de las aplicaciones a través del trazado de curvas, problemas de optimización, coeficientes de variación ligados.

Fundamento teórico

1. Obtención de la recta tangente a una curva en uno de sus puntos

Sabemos que la ecuación de una recta, que tiene de pendiente ***m*** y pasa por el punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ es $y = y_0 + m(x - x_0)$

La recta tangente a una curva $f(x)$ en un punto de coordenadas $P(x_0, y_0)$ tiene por pendiente en ese punto, entonces, $m = f'(x_0)$ y por tanto su ecuación es:

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0)$$

Ejemplo.-

Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = 4 - x^2$ en los puntos de corte con el eje de abscisas.

Solución.-

Los puntos de corte de la función $f(x) = 4 - x^2$ se determinan resolviendo la ecuación: $4 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ por tanto esos puntos de corte de la función con el eje X son: $Q(2,0) \quad \wedge \quad P(-2,0)$

Calculamos la derivada de la función:

$f'(x) = -2x$.

La pendiente de la recta tangente en los puntos ***Q*** y ***P:***

$m_1 = f'(2) = -2.2 = -4$ y $m_2 = f'(-2) = -2.-2 = 4$

Las rectas tangentes en los puntos $Q(2,0)\ y\ P(-2,0)$ son respectivamente:

$y = 0 - 4(x - 2) = -4x + 8$; $y = 0 + 4(x - (-2)) = 4x + 8$

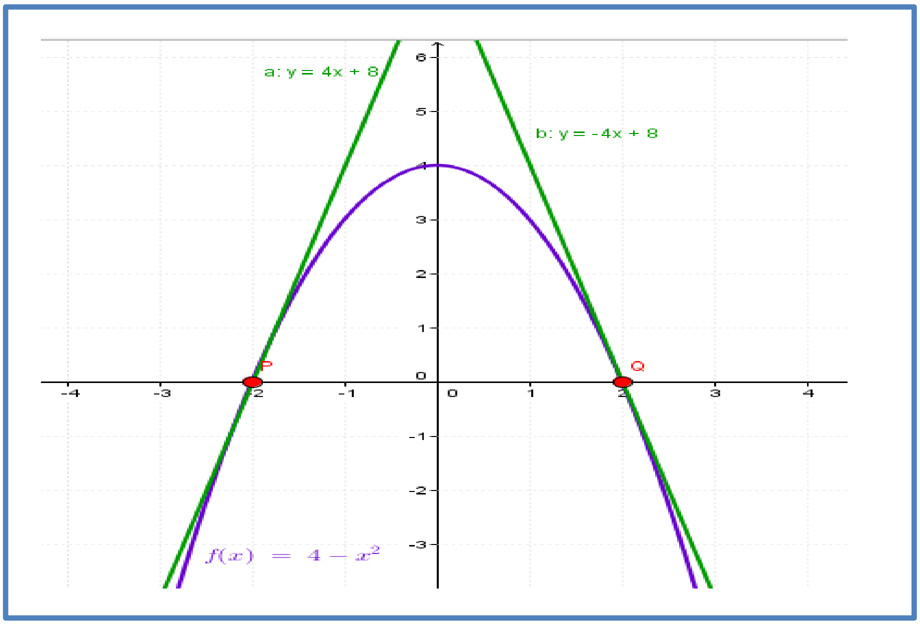

Figura 13. Rectas tangentes en los puntos P y Q.
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

2. Estudio de la monotonía de una curva y la obtención de sus extremos.-

1. Función creciente y decreciente de una función en un punto.

Sea ***f*** una función continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$, si $\forall\ x\ \in]a, b[$ se cumple:

a. $f'(x_0) > 0$, entonces la función es creciente en el punto x_0
b. $f'(x_0) < 0$, entonces la función es decreciente en el punto x_0

2. Máximos y mínimos relativos de una función.-

Sea f una función continua $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$

Criterio de la primera derivada

Punto máximo

a. Si $f'(x_0) > 0,\ \ \forall\ x_0\ \in]x_0 - \varepsilon, x_0[$
b. $Si\ f'(x_0) < 0,\ \forall\ x_0 \in]x_0, x_0 + \varepsilon[$

Por tanto $\exists$ un punto máximo en el intervalo $]a, b[$

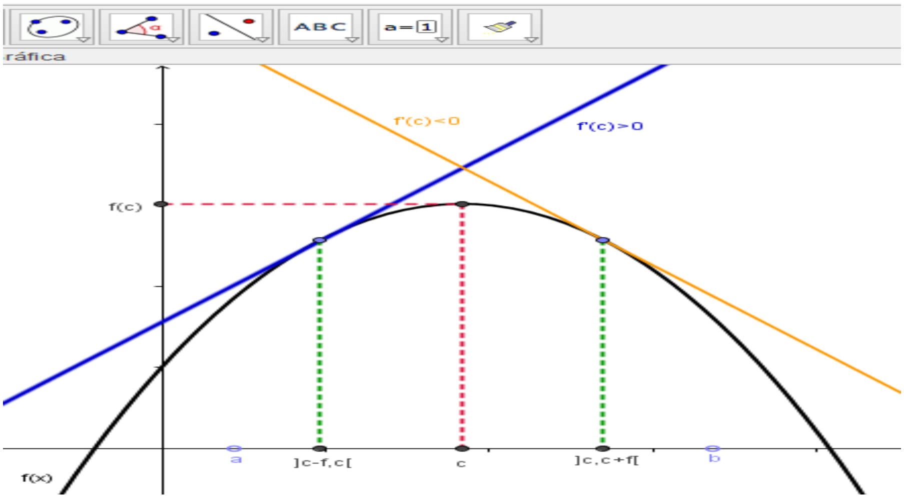

Figura 14. Punto máximo
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Punto mínimo

a. Si $f'(x_0) < 0, \quad \forall\, x_0 \in \,]x_0 - \varepsilon, x_0[$
b. $f'(x_0) > 0, \forall\, x_0 \ \in \,]x_0, x_0 + f[$

Por tanto $\exists$ un punto mínimo en el intervalo $]a, b[$

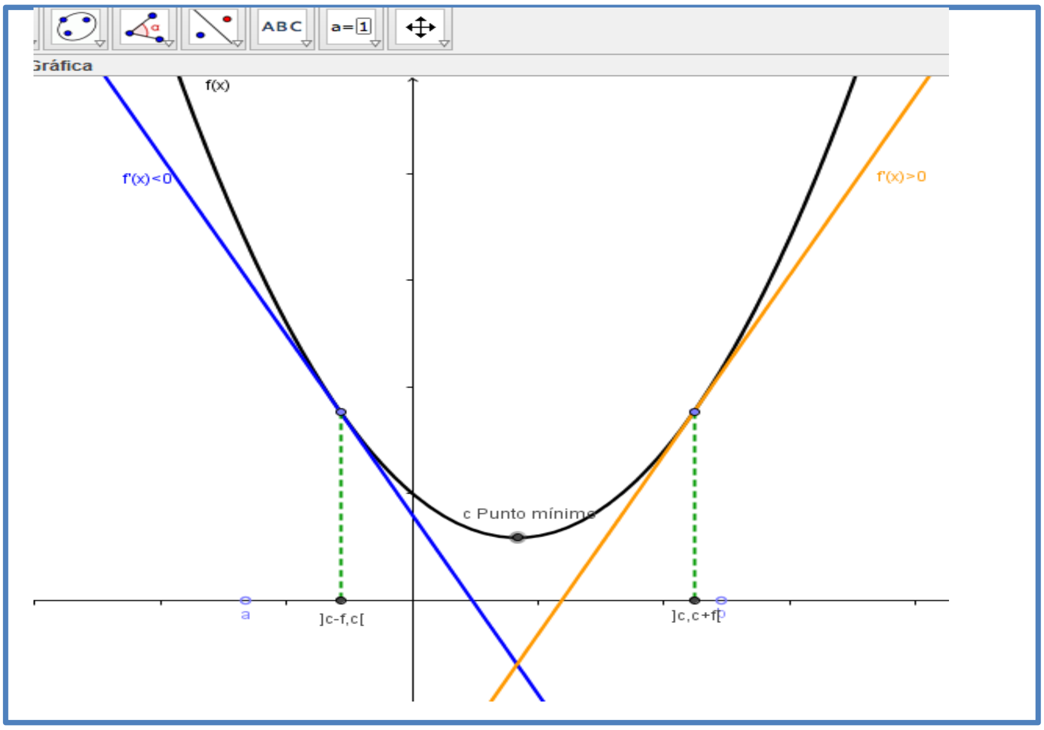

Figura 15. Punto mínimo
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Criterio de la segunda derivada

a. Si $f''(x_0) > 0$, entonces existe un punto mínimo de la función *f(x)*, $\forall\, x \in]a,b[$

b. $f''(x_0) < 0$, entonces existe un punto máximo de la función *f(x)*, $\forall\, x \in]a,b[$

Definimos **puntos singulares o puntos críticos** de una función, como aquellos en los que la primera derivada se anula: $f'(x) = 0$ (o sea, los puntos de tangente horizontal).

Cuando f tiene una sola tangente en **P** y **f** es cóncava en todos los puntos muy cercanos a **P** situados a un solo lado y es convexa en todos los puntos cercanos a **P** situados al otro lado de **P,** entonces **P** recibe el nombre de **punto de inflexión.**

Por tanto los puntos críticos pueden ser: máximos, mínimos o puntos de inflexión, no en todas las funciones se puede hallar estos puntos.

Ejemplo.-

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$ estudiar su monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) y determinar los puntos críticos.

Solución.-

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$. Estudiamos el signo de la derivada

$en \quad (-\infty,-1)\ f' > 0 \Rightarrow f\ creciente$

$en \quad (-1,1) \quad f' < 0 \Rightarrow f\ decreciente$

$en \quad (1,\infty) \quad f' > 0 \Rightarrow f\ creciente$

Como la función en $x = -1$ pasa de creciente a decreciente, $f(x)$ tiene en x=-1 un máximo relativo que vale:($f(-1) = 4$).

Como la función en $x = 1$ pasa de decreciente a creciente, $f(x)$ tiene en $x = 1$ un mínimo relativo que vale:($f(1) = 0$)

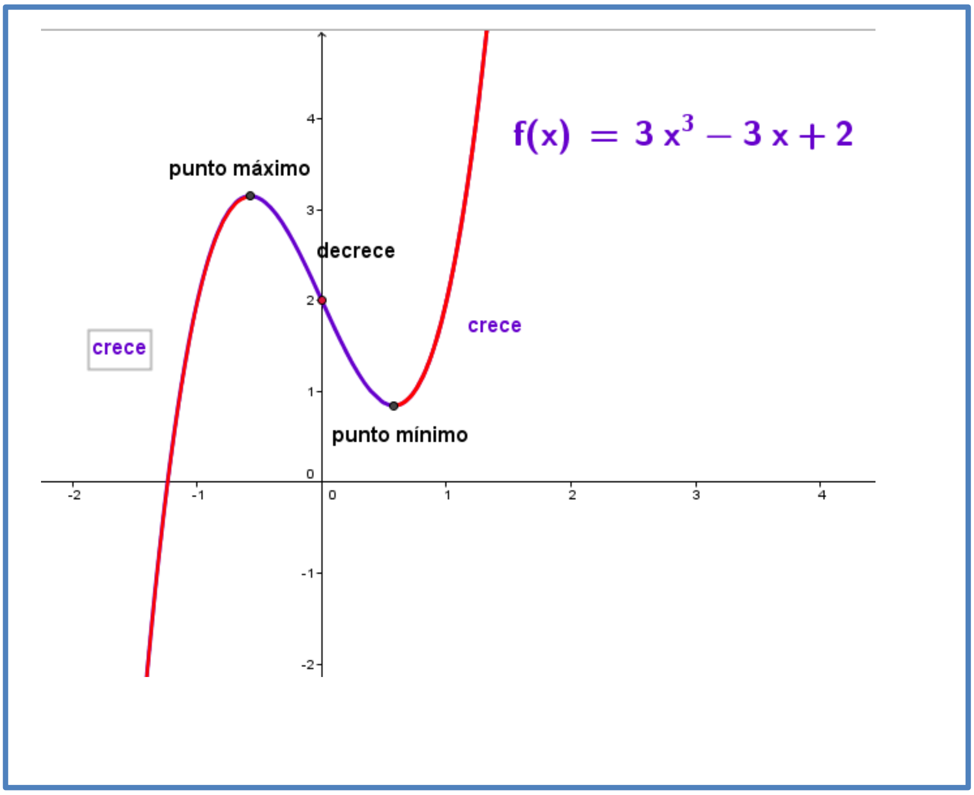

Figura 16. Monotonía de la función
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

3. Estudio de la curvatura y la obtención de los puntos de inflexión.-

Dada la curva $y = f(x)$. Si trazamos la recta tangente a la curva en el punto $P(x_0, y_0)$, que tiene de ecuación: $y = mx + b$. Se tiene que:

- Si todos los puntos muy cercanos a P están por encima de la recta tangente a *f* en el punto **P,** entonces curva es cóncava en P
- Si todos los puntos muy cercanos a P están por debajo de la recta tangente en el punto **P,** entonces curva es convexa en P
- Si la tangente en P atraviesa a la curva, es decir, si a la izquierda de P se cumple: $mx + b > f(x)$ y a la derecha de P se cumple $mx + b < f(x)$ (o viceversa) se dice que: la curva $y = f(x)$ tiene en P un punto de Inflexión.

Se analizará un criterio para detectar el tipo de curvatura basado en el signo de la segunda derivada de la función.
El criterio para determinar la concavidad y convexidad de una curva es:

$$\begin{array}{l} f \ y \ f' \ \ derivables\, en\ x_0 \\ Si \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \ es \quad cóncava\ en\ x_0 \\ Si \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \ es \quad convexa\ en\ x_0 \end{array}$$

Si la segunda derivada de la función en el punto x_0 vale cero y la tercera derivada de la función en dicho punto es distinta de cero, ese punto es de inflexión para $f(x)$.

$$f''(x_0) = 0\ ;\ f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow P(x_0, y_0)\ es \quad Inflexión$$

Ejemplo.-

Estudiar la curvatura de la curva $f(x) = x^3 - 3x + 2$ y calcular los puntos de inflexión.

Solución.-

La derivada es: $f'(x) = 3x^2 - 3$ y la segunda derivada es: $f''(x) = 6x$

Resolvemos los valores que anulan la derivada segunda, es decir, $6x = 0 \Rightarrow x = 0$

$$\begin{array}{l} en \quad (-\infty,0)\ f'' < 0 \Rightarrow f\ convexa \\ en \quad (0,+\infty) \quad f'' > 0 \Rightarrow f\ concava \end{array}$$

En consecuencia, en el punto de abscisa $x = 0$ (punto $P = (0,2)$) tiene un punto de inflexión puesto que cambia la curva de convexa a cóncava en ese punto $P = (0,2)$. También se puede determinar que el punto P es de inflexión, calculando la tercera derivada de la función y comprobando que no se anula en la abscisa de P, tenemos:

$f'''(x) = 6 \neq 0$, por tanto el punto $P = (0,2)$ es un punto de inflexión de la curva dada.

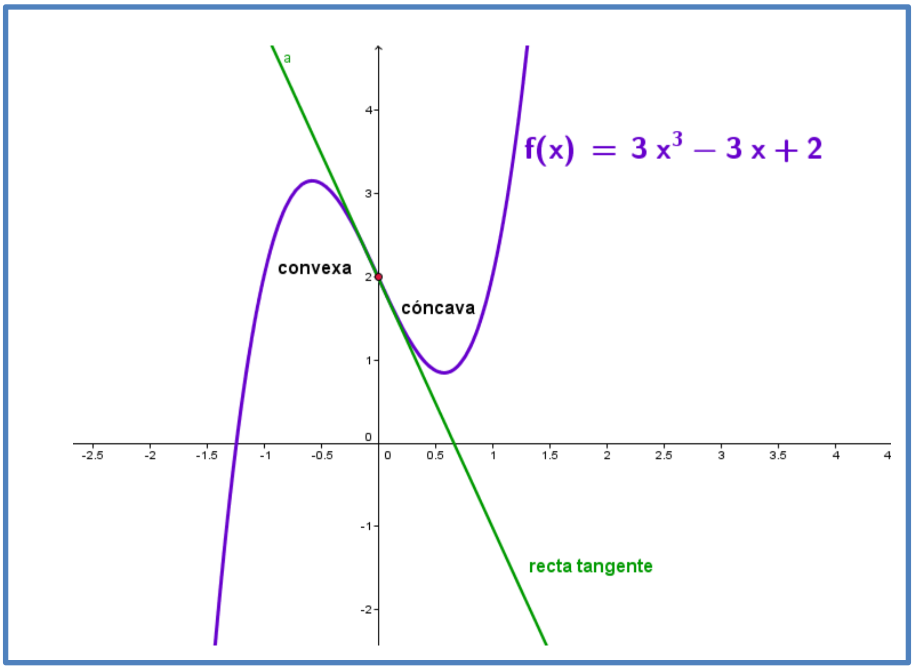

Figura 17. Concavidad y punto de inflexión
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

4. Resolución de problemas de optimización.-

Los problemas en que es necesario optimizar una función son muy frecuentes en Economía, Física, Biología, Geometría etc. Así en muchas ocasiones se trata de calcular máximos o mínimos los beneficios, una población, un volumen, costos, áreas, fuerzas, etc.
La dificultad de estos problemas, normalmente, no estriba en optimizar una función conocida sino en hallar la expresión analítica de la función que tenemos que optimizar.

Para resolver convenientemente este tipo de problemas tenemos que:
Aprender la técnica más conveniente de calcular los extremos de una función que viene dada por su expresión analítica en un intervalo.

Para el primer punto señalaremos las siguientes orientaciones:
Si tenemos que optimizar $f(x)$ en un intervalo $[a,b]$, no nos interesa determinar los extremos relativos en dicho intervalo sino los extremos absolutos.

a) Si f es derivable en dicho intervalo, los extremos absolutos se encuentran entre los puntos críticos y los extremos del intervalo, de ahí que tengamos que calcular:
   $f(a)$, $f(b)$ y todos los valores $x \in (a,b)$ que anulan la derivada ($f'(x)=0$)

Con estos valores se podrá determinar cuál es el máximo y cuál es el mínimo.

b) Si hay algún punto del intervalo $x_0 \in (a,b)$ en que la función no sea derivable, aunque sí continúa, calcularíamos además el valor $f(x_0)$, porque, habría la posibilidad de ser un valor extremo.

c) Si hay algún punto del intervalo $x_0 \in (a,b)$ en que la función no sea continua, estudiamos el comportamiento de la función en las proximidades de x_0

Todos estos puntos señalados es muy importante la utilización de un software matemático para que puedan visualizar la continuidad, derivabilidad en los valores críticos de la función real, y puedan resolver con éxito los problemas propuestos de optimización.

Se debe recordar que es muy importante que al plantear analíticamente el enunciado nos surgirán varias variables, pero para hallar la función óptima debemos dejar en dos variables, es decir, la variable dependiente y la variable independiente las cuales deben tener relación entre sí.

Los valores críticos obtenidos se deben comprobar para que verdaderamente sean los óptimos. Para esto se verifica con los criterios de la derivada en el punto y obtener un punto máximo o punto mínimo.

Ejemplos.-

- Una Empresa automotriz ha estimado que anualmente sus ingresos en dólares vienen dados por la función: $I = 28x^2 + 36000x$, mientras que sus gastos vienen dados por la función $G(x) = 44x^2 + 12000x + 700000$, donde ***x*** representa la cantidad de unidades vendidas. Determinar:

  a) La función que define el beneficio anual.
  b) La cantidad de unidades que deben ser vendidas para que el beneficio sea máximo.
  c) El beneficio máximo.

  Solución.-

  a) Los beneficios de una empresa vienen dados por la diferencia entre los ingresos y los gastos anuales, es decir:
  $B(x) = I(x) - G(x) = -16x^2 + 24000x - 700000$

b) Queremos obtener el máximo de la función $B(x)$ para ello calculamos:

$B'(x) = -32x + 24000$

Calculamos los puntos críticos:

$-32x + 24000 = 0 \Rightarrow x = 750$

Comprobamos con el criterio del signo de la segunda derivada que es un máximo:

$B''(x) = -32 \Rightarrow B''(750) = -32 \Rightarrow en\ x = -32\ hay\ máximo$

Para obtener el máximo beneficio se han de vender $x = 750$ unidades.

c) Para calcular el beneficio máximo evaluamos la función del beneficio en $x = 750$

$B(750) = -9000000 + 18000000 - 700000 = 8300000$

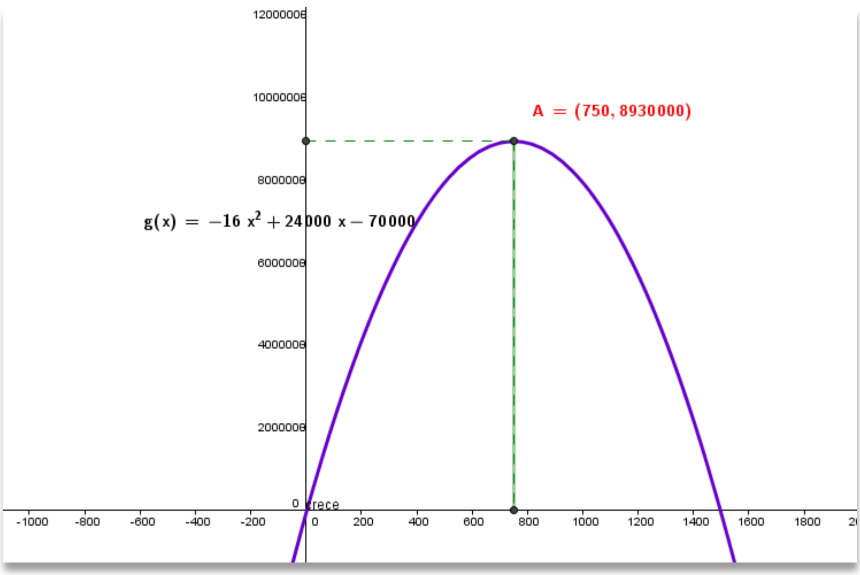

Figura 18. Máximo beneficio
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

- Se tiene una hoja rectangular de papel, de lados 8 y 15, se desea hacer con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas iguales y doblando convenientemente la parte restante. Determinar el lado de los cuadrados que deben ser cortados, afín de que el volumen sea el mayor posible.

Solución.-

Se desea maximizar el volumen de la caja: V= (área de la base)*(altura).

$V(x)= [(8 – 2x)(15 – 2x)]x$

$V(x)= 4x^3 – 46x^2 + 120x$

Derivamos e igualamos a cero la función V(x).

$V'(x) = 12x^2 – 92x +120 = 0$

Calculamos los valores críticos

$(x – 6)\ (x - \frac{5}{3}) = 0$

Comprobamos con el criterio de la segunda derivada que es un máximo:
$V''(x) = 24x – 92$
$V''(6) = 24(6) – 92 = 52$, el $52 > 0$ por tanto es un valor mínimo

$V''(\frac{5}{3}) = 24(\frac{5}{3}) – 92 = -52$, el $-52 < 0$ por tanto es un valor máximo.

Entonces, los lados de los cuadrados que deben ser cortados: $x = \frac{5}{3}$

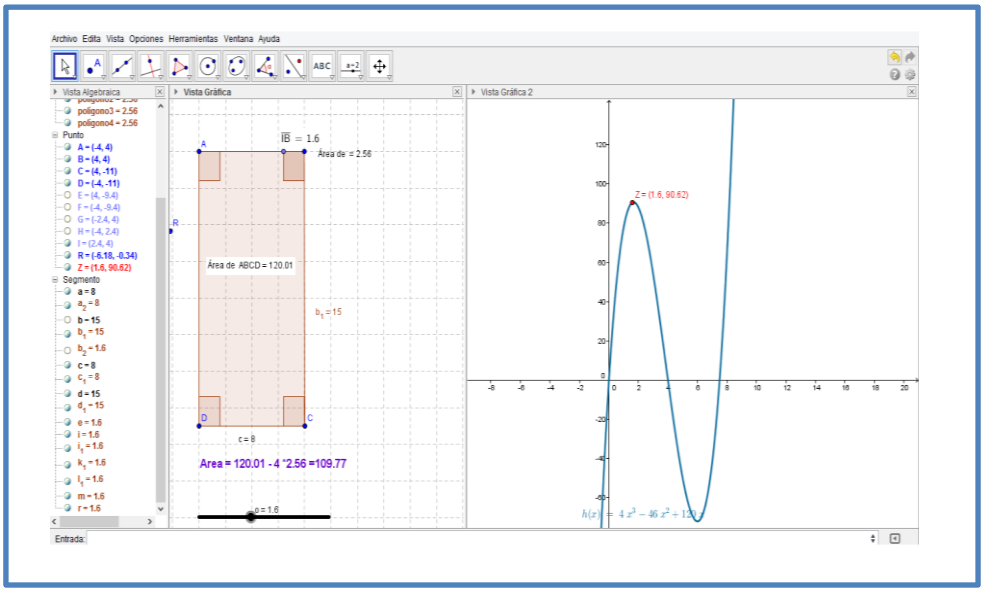

Figura 19. Máximo del volumen de la caja
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

CAPÍTULO III

MATERIALES Y MÉTODOS

3 CAPÍTULO: Materiales y Métodos

3.1 Planteamiento de hipótesis

Hipótesis

La utilización del software libre matemático, mejorará el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial.

Variable Dependiente

Rendimiento académico de los estudiantes del primer nivel en la asignatura de Cálculo Diferencial, de la carrera de Ingeniería Automotriz de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE Extensión Latacunga.

Variable Independiente

Desarrollo de aplicaciones informáticas con la utilización de software libre matemático, en temas relacionados con el contenido de Cálculo Diferencial.

3.2 Operacionalización conceptual de las variables

VARIABLES	CONCEPTOS
Variable Independiente Desarrollo de aplicaciones informáticas con la utilización de software libre matemático, en temas relacionados con el contenido de Cálculo Diferencial.	Es una variable que constituye el conjunto de aplicaciones educativas que el Docente realizará con los estudiantes para facilitar el aprendizaje significativo.
Variable Dependiente Rendimiento académico de los estudiantes del primer nivel en la asignatura de Cálculo Diferencial, de la carrera de Ingeniería Automotriz de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE Extensión Latacunga.	Es una variable que identifica el rendimiento académico, en términos de aprendizajes significativos considerando el esfuerzo y la capacidad de trabajo e investigación del estudiante para aprender hacer, saber para qué sirve y cómo se utiliza.

Cuadro 5.Operacionalización de variables

3.3 Operacionalización metodológica de las variables

VARIABLE INDEPENDIENTE	DIMENSIÓN	INDICADOR	INSTRUMENTOS
Desarrollo de aplicaciones informáticas con la utilización de software libre matemático, en temas relacionados con el contenido de Cálculo Diferencial.	Factibilidad de implantación del Software	Muestra destrezas para la instalación y manejo de los principales comandos.	▪ Observación ▪ Test ▪ Encuesta
	Estrategias de enseñanza	▪ Motivación ▪ Planificación ▪ Seguimiento y acompañamiento académico.	▪ Guía Didáctica ▪ Cuestionarios ▪ Test ▪ Encuesta
	Estrategias de aprendizaje	▪ Aprendizaje basado en problemas. ▪ Capacidad de lectura y comprensión. ▪ Análisis y síntesis.	▪ Actuación ▪ Reflexión ▪ Teorización ▪ Experimentación

Cuadro 6. Operacionalización metodológica de la variable independiente

VARIABLE DEPENDIENTE	DIMENSIÓN	INDICADOR	INSTRUMENTOS
Incidencia en el Rendimiento académico de los estudiantes	Aprendizaje de los contenidos del Cálculo Diferencial y su aplicación.	* Alto * Medio * Bajo	▪ Exámenes ▪ Pruebas escritas ▪ Trabajos prácticos ▪ Trabajos Experimentales
	Nivel de dominio del software libre matemático	* Alto * Medio * Bajo	▪ Instalación y configuración ▪ Programación de casos de estudio experimental.

Cuadro 7. Operacionalización metodológica de la variable dependiente

3.4 Enfoque y tipo de estudio

El enfoque de la investigación es cuantitativo, ya que, se utilizará la recolección de datos para validar la hipótesis en función del análisis estadístico de los registros de rendimiento académico obtenidos entre el grupo de control y el grupo de experimentación.

Además, la presente investigación es de tipo explicativo, porque se pretende establecer la incidencia de la utilización del software libre matemático como una causa de mejoramiento del rendimiento académico de los estudiantes; de esta manera se pretende es ir más allá de la propia descripción de la enseñanza tradicional del cálculo diferencial.

3.5 Diseño de estudio

La investigación tiene un enfoque Analítico – Cuantitativo y Experimental. Por lo tanto, en el presente estudio se empleará el diseño cuasi-experimental, ya que se trabajará con grupos de estudiantes que están formados por paralelos, en dónde se definirá el grupo de control y el grupo de experimentación.

Se considera el diseño cuasi-experimental. El criterio que le falta a este tipo de experimentos para llegar al nivel de experimental es que no existe ninguna manera de asegurar la equivalencia inicial de los grupos experimental y de control, es decir, no asegura a aleatorización.

Revisando la bibliografía sobre diseños experimentales, se puede afirmar que los métodos cuasi-experimentales son los más adecuados para el ámbito educativo ya que se acepta la carencia de un control total de las variables, es decir, no se tiene un control experimental completo.

Este diseño es pre y post test, porque se establecerá un grupo de estudiantes a los que se les explicará la temática de derivadas con la utilización de la nueva tecnología del software libre (grupo experimental) y un segundo grupo al que se le explicará la temática utilizando la metodología tradicional (grupo control), considerando el siguiente procedimiento:

- **Pretest. Verificar que no exista diferencias en los conocimientos previos de los grupos.**
  Este diseño es el más conveniente para estudios en el campo de la investigación educativa debido a las facilidades que supone el no depender de la elección de los sujetos al azar para obtener la muestra.
  En nuestra investigación se incluyen dos grupos, uno de control y otro experimental, en primera instancia se aplica un pretest a los dos grupos para ***evaluar y verificar los conocimientos previos*** para el estudio de la temática del

Cálculo Diferencial, de existir novedades se aplica un sistema de tutorías con la finalidad de nivelar los conocimientos previos y que no existan diferencias de conocimientos entre los grupos de tal manera que estas diferencias puedan influenciar en los resultados de la investigación, afectando a los objetivos y conduciéndonos a la toma de decisión de una manera errónea.

- **Test. Desarrollo de prácticas y aplicaciones, evaluaciones escritas.**
  Contando con los grupos de control y experimentación nivelados en conocimientos se procedió al **grupo experimental** aplicar la metodología didáctica basada en la resolución de problemas mediante la utilización del software libre matemático y al **grupo de control** se desarrolló las clases con la metodología didáctica basada en la resolución de problemas pero sin la utilización del software libre matemático.

- **Post-Test. Permitirá evidenciar los resultados finales de la investigación**
  Se tiene de referencia al grupo experimental quienes son los que recibieron el estímulo (capacitación mediante la utilización del software libre) y, el grupo de control quienes nos servirán como punto de referencia para apreciar las variaciones que se produzcan en la investigación.

  En resumen presentó el diseño del estudio de investigación.

GRUPO	Nivelación de conocimientos previos	Pretest	Tratamiento	Postest
Grupo A: NRC 2095	X	X	X	X
Grupo B: NRC 2093	X	X	O	X

X.- Se aplica
O.- No se aplica

3.6 Determinación de la Población y Muestra

POBLACIÓN:
Estudiantes del primer semestre de la carrera de ingeniería Automotriz.

Institución: Universidad de las Fuerzas Armadas-ESPE Extensión Latacunga
Carrera: Ingeniería Automotriz
Período Académico: Octubre 2014 - Febrero 2015
Nivel: Primero
Docente: Ing. Norma Barreno L.

Ord.	GRUPOS DE ESTUDIANTES	PARALELOS	NÚMERO DE ESTUDIANTES
1	DE EXPERIMENTACIÓN	NRC 2095	30
2	DE CONTROL	NRC 2093	24
		TOTAL	54

MUESTRA:

Se considera a todos los estudiantes del primer nivel de la carrera que están matriculados en la asignatura de Cálculo Diferencial.

3.7 Método, técnicas e instrumentos

Método

- Cuantitativo
- Analítico

Técnicas

- Observación directa en cada una de las actividades de aprendizaje.
- Experimentación: Para verificar si la utilización del recurso didáctico, el software libre matemático, hace más interesantes y dinámicas las sesiones de aprendizaje.
- Comparación entre el grupo control y el grupo experimental.
- Lista de Cotejo: El cual nos permitirá observar las características y el comportamiento de los estudiantes.

3.8 Recolección y Procesamiento de datos

Para la recolección de datos, se utilizaron los siguientes instrumentos:

- Cuestionarios
- Test
- Evaluaciones escritas
- Desarrollo de prácticas experimentales con la utilización del software libre

Para el procesamiento de datos se utilizó el software libre estadístico y la hoja electrónica Calc.

3.9 Desarrollo de la metodología didáctica.

La metodología presentada se desarrolló para la ejecución del trabajo final de maestría, la misma que se encuentra discriminada en Fases y Actividades.

FASE	OBJETIVOS	ACTIVIDADES
Fase 1: Caracterización	Identificar y caracterizar metodologías para la enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial empleando como propuesta didáctica la utilización del software libre matemático.	1.1. Elaborar una revisión bibliográfica de las teorías del Álgebra. 1.2. Elaborar una revisión bibliográfica acerca del software libre matemático y su relación con las TIC´s en la enseñanza del Cálculo Diferencial.
Fase 2: Diseño e Implementación.	Diseñar e implementar actividades didácticas e interactivas apoyadas con la utilización del software libre matemático y las TIC´s para la enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial.	2.1 Diseño y construcción de actividades didácticas como plataforma para la enseñanza-aprendizaje del Cálculo Diferencial en temas de la función derivada, máximos y mínimos, coeficientes de variación ligados, aplicaciones geométricas. 2.2 Diseño y construcción de guías de clase utilizando la metodología basada en el desarrollo de problemas con la utilización de herramientas informáticas.
Fase 3: Aplicación	Desarrollar la estrategia metodológica por medio del desarrollo de ejercicios propuestos y la generación de un caso de estudio propuestos por el estudiante.	3.1 Desarrollo de las clases aplicando la estrategia planteada. 3.2 Desarrollo de animaciones para verificar el concepto de variación. 3.3 Realización de simulaciones en la que se verifique la teoría con la práctica.
Fase 4: Análisis y Evaluación	Evaluar la estrategia planteada mediante el aprendizaje significativo y la motivación obtenida por los estudiantes del primer nivel de la carrera de Ingeniería Automotriz en la asignatura de Cálculo Diferencial.	4.1 Evaluar el desempeño alcanzado durante la implementación de la estrategia didáctica desde el aspecto curricular. 4.2 Evaluar el grado de motivación de los estudiantes hacia el estudio de la derivación de una función real.

Cuadro 8. Desarrollo de la metodología didáctica

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4. CAPÍTULO IV: Resultados y Discusión

En el trabajo realizado se debe considerar un aspecto muy importante en el **diseño**, es la equivalencia entre los grupos. Esto permitió asegurar que los valores en sus calificaciones fueron resultado de considerar para un grupo la utilización del software libre como estratégica didáctica y al otro grupo no; garantizando que no existen otros factores que influyan en el rendimiento académico. Para mantener la equivalencia en ambos grupos se:

- Asignó el mismo instructor
- Impartió el mismo contenido
- Utilizó la misma calendarización de actividades de aprendizaje.
- Dedicó el mismo tiempo de atención a los dos grupos por parte del tutor.
- Evaluó a los dos grupos con los mismos exámenes, que fueron aplicados el mismo día en aulas con características similares.

Una vez aplicada la metodología didáctica a los dos grupos considerados para el análisis se procedió a aplicar los instrumentos de recolección de datos, basados en cuestionarios, test, desarrollo de prácticas experimentales y examen de Unidad Didáctica.

Investigando sobre la definición de "Rendimiento Académico" de los estudiantes, se encontró que el Diccionario de uso del Español, manifiesta que el concepto de rendimiento proviene del vocablo latín "Relatio" que es referido al "producto o utilidad dado por una cosa en relación con lo que consume, cuesta, trabaja"; en tanto que en Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, se refiere como la proporción entre el producto o el resultado obtenido y los medios utilizados.

En este contexto, conceptualizamos el **Rendimiento Académico** como la **"relación de correspondencia existente entre el trabajo realizado por los profesores y estudiantes en función de los objetivos de aprendizaje y con la correcta utilización de los diferentes medios didácticos, estrategias pedagógicas y recursos tecnológicos; en un contexto socioeconómico y cultural en el que se desenvuelven nuestra sociedad**".

Considerando que en la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE, el registro de notas se lo realiza por tres Unidades Didácticas, las mismas que deben reflejar el Rendimiento Académico en función de la escala de las capacidades o puesta en práctica de los conocimientos, destrezas y actitudes alcanzados por el estudiante al final de la Unidad, dichas capacidades están definidas en los objetivos del curso y han sido enunciadas en el presente trabajo de investigación.

Al realizar el análisis, interpretación y presentación de resultados, se consideró el rendimiento académico como la forma cuantitativa que permite evidenciar en qué medida se ha cumplido con los indicadores de evaluación propuestos, los mismos que están representados con una nota o calificación proveniente de una variable continua ordinal, la cual es definida en una escala de 0 a 20 puntos con un rango aprobatorio entre 14 a 20 puntos. Además, se establecen rangos de rendimiento de la siguiente manera:

Ord	CATEGORIZACIÓN ORDINAL	RANGO DE NOTAS	DESCRIPTOR
1	MUY SATISFACTORIO	18.1 – 20.0	El estudiante evidencia el logro del aprendizaje previsto, demostrando manejo eficiente y eficaz de las tareas propuestas, y propone diferentes aplicaciones de la temática estudiada.
2	SATISFACTORIO	14.1 – 18.0	El estudiante evidencia logro de aprendizaje en la temática tratada y cumple únicamente con lo propuesto en la planificación.
3	REGULAR	10.1 – 14.0	Cuando el estudiante está encaminado hacia la consecución de los logros de aprendizaje, pero necesita de tutorías y acompañamiento y seguimiento académico.
4	DEFICIENTE	0 – 10.0	Cuando el estudiante evidencia el no mantener el ritmo de aprendizaje con respecto a la planificación en tiempo y contenidos, siendo necesario realizar un mayor número de ejercicios y resolución de problemas, el proporcionarle mayores insumos académicos para que se vaya apropiando del conocimiento y pueda utilizarlo.

Cuadro 9. Rangos de rendimiento para el análisis de resultados

4.1 Diagnóstico de conocimientos previos del grupo de control (NRC 2095) y de experimentación (NRC 2093), previa la realización de la investigación.

Resultados de Test aplicado para la verificación y nivelación de conocimientos previos.

El cuestionario utilizado se valoró su confiabilidad en función del **coeficiente Alfa de Cronbach**.
La fórmula utilizada es:

$$\alpha = \frac{np}{1 + p(n-1)}$$

Donde:

- α = es el Coeficiente de Alfa de Cronbach
- n = número de ítems
- p = promedio de correlaciones lineales entre cada uno de los ítems

Por tanto utilizando un Software libre estadístico y la matriz de correlación se obtuvo el siguiente resultado;

$$\alpha = \frac{10 * 0.25}{1 + 0.25(10-1)}$$

$\alpha = 0.7692$ equivalente a 76.92%

Lo que le indica que existe muy buena correlación entre los ítems del cuestionario, por lo tanto es válido para ser considerado en el pretest.

Los resultados obtenidos de la prueba de diagnóstico se ilustran en el siguiente cuadro, lo que identifica que existen las condiciones similares para iniciar con nuestra investigación.

En especial si nos fijamos del análisis descriptivo de los datos el estadístico de la media (promedio de calificaciones) que son: para el grupo de experimentación **(NRC 2093)** con un promedio de 16.21 sobre 20 y para el grupo de control (**NRC 2095)** con un promedio de 15.94, teniendo una diferencia entre las medias de:

$$Dm = 16.21 - 15.94 = 0.27$$

Considerado como una diferencia de media baja, que significa un indicador de condiciones aceptables para empezar a realizar el trabajo de investigación.

ANÁLISIS DESCRIPTIVO DE LOS DATOS

ESTADÍSTICO	*GRUPO DE EXPERIMENTACIÓN*	GRUPO DE CONTROL
Media	16,21	15,94
Error típico	0,36	0,38
Mediana	16,4	16,3
Moda	16,3	18,2
Desviación estándar	1,98	1,88
Varianza de la muestra	3,91	3,54
Curtosis	0,73	-0,90
Coeficiente de asimetría	-0,86	-0,26
Rango	8,2	6,8
Mínimo	11	12,3
Máximo	19,2	19,1
Suma	486,3	382,5
Cuenta	30	24

Cuadro 10. Análisis de resultados

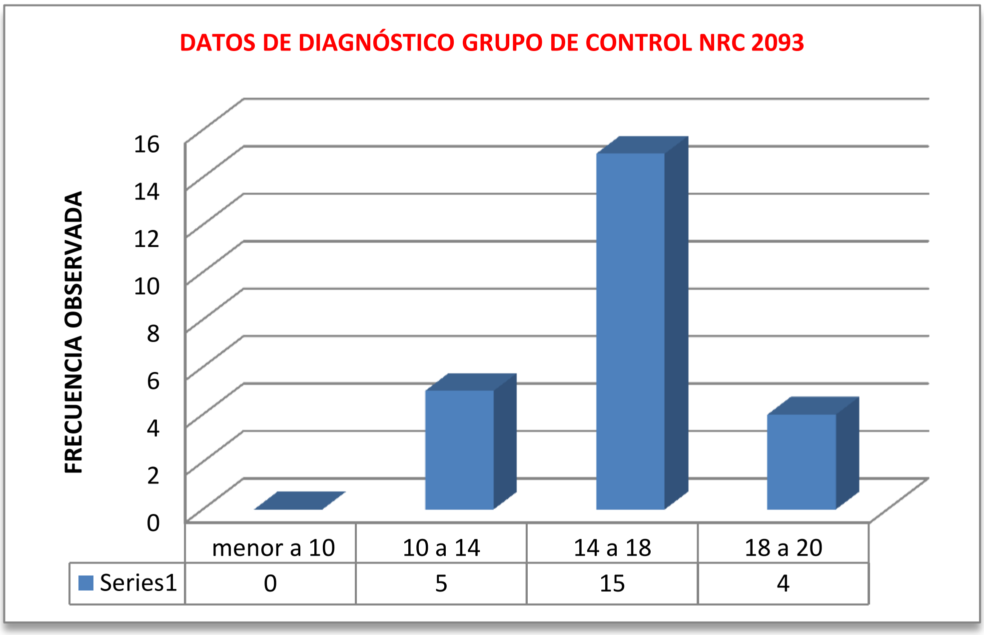

Figura 20. Representación de notas por categorías
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

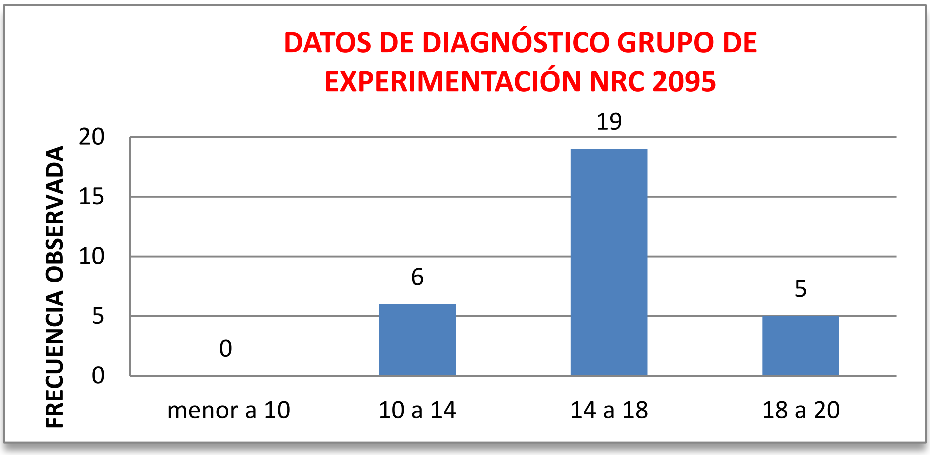

Figura 21. Representación de notas por categorías
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

4.2 Análisis de resultados académicos durante la investigación

Se presentan las notas académicas obtenidas por los estudiantes en función de los diferentes parámetros de evaluación. Para definir los diferentes parámetros de evaluación, se consideró el documento del CEAACES Guía para el desarrollo de Resultados de Aprendizaje - Criterio F[7] (Pág. 7-8), en las que se definen las competencias del educando vs los resultados de aprendizaje.

Uno de los aspectos importantes de éste documento es que puntualiza que las universidades deben entregar a la sociedad profesionales con un conjunto integrado de conocimientos, habilidades y valores en su campo de formación que les permita resolver problemas en su ámbito de acción.

4.3 Prueba de Hipótesis

4.3.1 Hipótesis

La utilización del software libre matemático, mejorará el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial.

H_0: La utilización del software libre matemático, no mejorará el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial.

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

H_1: La utilización del software libre matemático, mejorará el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial.

[7] http://www.uce.edu.ec/documents/22994/5f96b84b-5224-4acb-bfc6-9fa79523738c

$H_1: \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

Donde:

- σ_1^2 = varianza del grupo de experimentación
- σ_2^2 = varianza del grupo de control

4.3.2 Nivel de significancia

$\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ es decir al 95% de confiabilidad

4.3.3 Estadístico de Prueba

La distribución F

Utilizaremos la **distribución de probabilidad F**, para probar si los dos grupos considerados tienen varianzas iguales y medias poblacionales iguales, ya que el objetivo de la presente investigación es determinar el nivel de incidencia en el rendimiento académico en los estudiantes del primer nivel de la carrera de Ingeniería Automotriz, en la asignatura de Cálculo Diferencial, tomando en consideración que el tratamiento de la información académica se lo realiza exactamente en las mismas condiciones a excepción de la utilización del software libre en el grupo considerado de experimentación.

Presentamos los promedios obtenidos por los estudiantes en los diferentes instrumentos de evaluación como son:

1. Lección oral
2. Prueba escrita
3. Talleres
4. Proyecto
5. Portafolio estudiantil (desarrollo de problemas matemáticos)
6. Examen de Unidad

Todos estos instrumentos han sido evaluados sobre 20 puntos.

Promedio de las notas

ORD	PROMEDIO NOTAS NRC 2095 GRUPO DE EXPERIMENTACIÓN	PROMEDIO NOTAS NRC 2093 GRUPO DE CONTROL	
1	16.8	15.3	
2	15.3	15.2	
3	16.7	15.7	
4	16.5	16.3	
5	18.0	16.6	
6	16.5	15.2	
7	15.5	15.8	
8	17.2	16.0	
9	15.8	15.2	
10	17.3	15.7	
11	17.1	15.5	
12	17.0	15.3	
13	16.7	14.9	
14	18.7	14.2	
15	18.3	15.2	
16	18.5	16.0	
17	19.0	15.7	
18	17.8	15.2	
19	18.5	15.9	
20	16.5	14.8	
21	18.0	15.0	
22	18.7	15.8	
23	16.1	15.3	
24	14.8	17.2	
25	17.3	**15.53**	PROMEDIO
26	16.7		
27	16.0		
28	18.3		
29	17.4		
30	15.3		
PROMEDIO	**17.08**		

Cuadro 11. Promedios de los estudiantes

Prueba F para varianzas de dos muestras

ESTADÍSTICOS	PROMEDIO GRUPO DE EXPERIMENTACIÓN	PROMEDIO GRUPO DE CONTROL
Media	17,08	15,53
Varianza	1,30	0,39
Observaciones	30	24
Grados de libertad	29	23
F	**3,28**	
P(F<=f) una cola	0,00	
Valor crítico para F (una cola)	**1,97**	

Cuadro 12. Prueba F

Cómo comparamos la varianza de dos poblaciones determinamos el **ERROR DE ESTIMACIÓN** dado por:

$$F = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = \frac{varianza\ del\ grupo\ de\ experimentación}{varianza\ del\ grupo\ de\ control} = \frac{1,30}{0.39} = 3.33 > 1$$

Lo que nos orienta a un rechazo en la cola derecha de la distribución de probabilidad.

4.3.4 Regla de decisión

Rechazar H_0 si la prueba F calculada es mayor que el valor crítico de la prueba F.

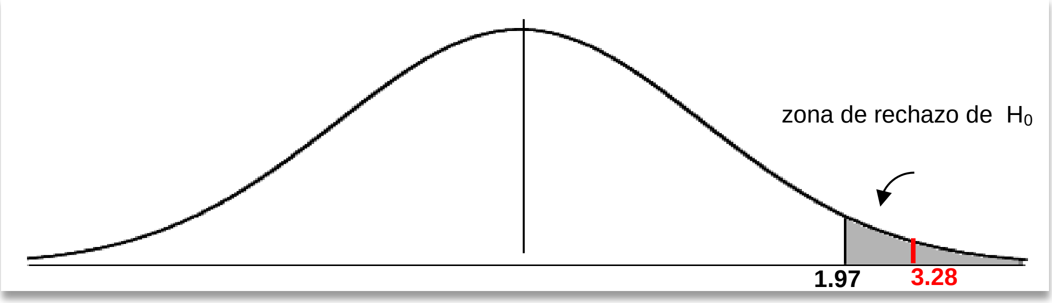

Figura 22. Distribución de probabilidad de la prueba F
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

4.3.5 Toma de decisión

Como el F calculado (3.28) es mayor que el valor de la F crítica (1.97). Entonces se rechaza la hipótesis nula **(H_0)** y se acepta la hipótesis de investigación **(H_1)**.

Es decir, la utilización del software libre matemático si incide en el rendimiento académico de los estudiantes, demostrando un aprendizaje más significativo.

4.4 Validación de la Hipótesis de investigación mediante el método de Prueba de Hipótesis para dos muestras.

4.4.1 Formulación de la Hipótesis

La utilización del software libre matemático, mejorará el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial.

H_0: La utilización del software libre matemático, no mejorará el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial.

H_0: $\mu_1 \leq \mu_2$

H_1: La utilización del software libre matemático, mejorará el rendimiento académico de los estudiantes en la asignatura de Cálculo Diferencial.

H_1: $\mu_1 > \mu_2$

Donde:

- μ_1 = media poblacional para el grupo de experimentación
- μ_2 = media poblacional para el grupo de control

4.4.2 Nivel de significancia

$\boldsymbol{\alpha = 0.05}$ es decir al 95% de confiabilidad, prueba a una cola.

4.4.3 Estadístico de Prueba para la diferencia entre dos medias muestrales La distribución de probabilidad Z

Varianza de la distribución de las diferencias en media muestrales:

ESTADÍSTICOS	***PROMEDIO GRUPO DE EXPERIMENTACIÓN***	***PROMEDIO GRUPO DE CONTROL***
Media	17,08	15,53
Varianza	1,30	0,39
Observaciones	30	24

Cuadro 13. Distribución de probabilidad z

$$S^2_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}$$

Donde:

- s_1^2 **= varianza del grupo de experimentación**
- n_1 **= tamaño del grupo de experimentación**
- s_2^2 **= varianza del grupo de control**
- n_2 **= tamaño del grupo de control**

$$S^2_{\overline{x_1}-\overline{x_2}} = \frac{1.30}{30} + \frac{0.39}{24} = 0.05958$$

Estadístico de Prueba para la diferencia entre dos medias muestrales

$$z = \frac{\overline{x_1} - \overline{x_2}}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Donde:

- $\overline{x_1}$ **= Media del grupo de experimentación**
- $\overline{x_2}$ **= Media del grupo de control**

$$z = \frac{17.08 - 15.53}{\sqrt{\frac{1.30}{30} + \frac{0.39}{24}}} = 6.35$$

4.4.4 Regla de decisión

Rechazar H_0 si la **prueba Z** calculada es mayor que el valor crítico de la prueba Z.

Como se está trabajando al 95% y se tiene una prueba a una sola cola en la derecha, se tiene que el valor crítico es: **Z=1.65**

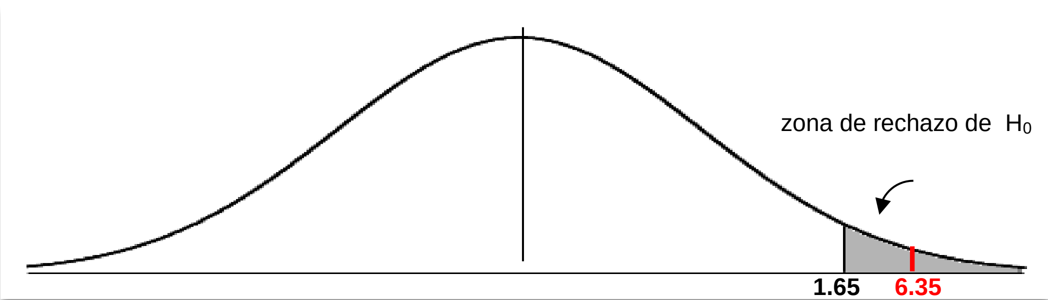

Figura 23. Distribución de probabilidad de la prueba Z

Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

4.4.5 Toma de decisión

Como el **Z** calculado (6.35) es mayor que el valor del Z crítico (1.65). Entonces se rechaza la hipótesis nula **(H_0)** y se acepta la hipótesis de investigación **(H_1)**.

Es decir, la utilización del software libre matemático si incide en el rendimiento académico de los estudiantes, demostrando un aprendizaje más significativo.

4.5 Resultados de encuesta de satisfacción aplicados a los estudiantes del grupo de experimentación.

Los Datos se procesaron tomando en cuenta los instrumentos y las técnicas utilizadas mediante la utilización del software estadístico libre. En esta etapa de la investigación, se recolecto los datos de rendimiento de los estudiantes de Ingeniería Automotriz en la asignatura de Cálculo Diferencial durante el periodo académico octubre 2014 – Febrero 2015; tomando el promedio ponderado de la asignatura; además se creó un instrumento que consta de 10 preguntas de selección múltiple que involucran los contenidos de límites y derivadas de una función real, el mismo que servirá para el post test. Se debe señalar que el instrumento es validado por pares; es decir, compañeros docentes del Área de conocimiento de Matemática y que dictan la asignatura.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

CONCLUSIONES

- Realizado el estudio previo para determinar si los estudiantes disponen de computadores para sus estudios, se determinó que el 100% de ellos poseen computadores.
- En el pretest se determina que tanto el grupo de control como el grupo de experimentación tienen muy buenas habilidades en la parte informática y la utilización de los recursos tecnológicos y redes sociales.
- En el pretest al evaluar los conocimientos previos de los estudiantes y realizar el análisis estadístico descriptivo se obtuvieron los siguientes promedios de calificaciones, para el grupo de experimentación **(NRC 2095)** un promedio de 16.21 sobre 20 y para el grupo de control (**NRC 2093)** un promedio de 15.94, teniendo una diferencia entre las medias de 0.27 equivalente a un 27%, considerado como un indicador favorable para iniciar nuestro estudio de investigación.
- Al realizar el análisis sobre las características del software libre entre ellos el Geogebra, Scilab y Maxima y su relación con el tratamiento de la temática del cálculo diferencial, se determinó que la mejor opción es utilizar el Geogebra, porque tiene varias funciones desarrolladas que permiten realizar las
- modelaciones y simulaciones de los conceptos, definiciones y propiedades de temas sobre límite, continuidad y derivación de una función real; así como, permite realizar una serie de prácticas experimentales sobre el tema de las aplicaciones de la derivada de una función real, especialmente en temas como: interpretación geométrica de la derivada, cálculo de máximos y mínimos, aproximación de raíces y problemas de coeficientes de variación ligados, este hecho motivo sobre manera a los estudiantes, porque les permitió fortalecer su capacidad de análisis, reflexión, criticidad y creatividad.
- Para los dos grupos considerados en la presente investigación se desarrollaron **entornos creativos de aprendizaje** a través de la construcción de habilidades básicas, adquisición de conocimientos y el aprendizaje interactivo; mediante la motivación se propició un ambiente lúdico, generando un equilibrio entre desafíos, habilidades y oportunidades, fomentando la libertad de acción y autocontrol, de esta manera el estudiante se constituye en el principal actor del proceso de enseñanza-aprendizaje; y mi persona actuó como la orientadora, facilitadora y responsable de conseguir aprendizajes significativos en mis estudiantes.
- Para los grupos de control y experimentación, los instrumentos didácticos considerados para la recolección de información académica como lecciones, prácticas experimentales, proyectos, examen, etc., se enfocaron en medir las diferentes habilidades como: psicomotrices, asimilación y retención de información, búsqueda de información, creativas, analíticas y resolución de problemas, las mismas que fueron evaluadas mediante rúbricas.

- En función del análisis estadístico aplicado para la valorización la hipótesis como es el análisis de varianza a través de la Distribución de probabilidad F; y para garantizar los resultados se procedió a realizar una prueba de hipótesis para dos muestras diferentes sobre las calificaciones obtenidas en el grupo de control y en el grupo de experimentación, se puede establecer que la utilización del software libre matemático, se constituye en la herramienta informática que permite al estudiante desarrollar sus aplicaciones, dinamizando su aprendizaje; pero, para conseguir esto, el estudiante está obligado a conocer y dominar los fundamentos teóricos del cálculo diferencial; ya que sin estos conocimientos no podría desarrollar las prácticas; y de nada serviría que el estudiante conozca muy bien el manejo del software libre.
- De acuerdo a la valoración estadística de la hipótesis de investigación planteada en el presente trabajo, se concluye que la utilización del software libre matemático si incide en el aprendizaje y rendimiento académico de los estudiantes del I semestre de la carrera de Ingeniería Automotriz de la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE Extensión Latacunga; ya que se obtuvieron promedios generales de notas de curso para el grupo de experimentación (**NRC 2095)** es de 17.08 y para el grupo de control (**NRC 2093)** con un promedio de 15.53.

RECOMENDACIONES

- Propiciar y motivar la utilización del software libre en las diferentes áreas del conocimiento; ya que, para el desarrollo de las prácticas experimentales, el estudiante está obligado a conocer los fundamentos teóricos de la asignatura.
- Propiciar en la región central del país redes de instituciones educativas a nivel secundario y superior, para generar una comunidad educativa dedicada a la capacitación del personal docente, el desarrollo de aplicaciones en función de los contenidos descritos en cada una de las asignaturas del área de matemática.
- Difundir la Guía Didáctica desarrollada en el presente trabajo de investigación con los docentes del área de matemática, a través de capacitaciones al personal docente y la tutorización de los estudiantes mediante el sitio web de la institución. Y para alcanzar los resultados obtenidos en el presente trabajo de investigación se provee de 4 meses, para lograr aprendizajes significativos en los estudiantes.
- Involucrar a la Universidad de las Fuerzas Armadas – ESPE Extensión Latacunga, en la formulación y desarrollo de proyectos de iniciación científica basados en la utilización y producción de aplicaciones matemáticas mediante la utilización del software libre.

Bibliografía

Bibliografía

- Araoz, Guerrero, Villaseñor. Galindo. Estrategias para aprender a aprender. México, Pearson Educación, 2010. p. pp 10 – 80.

- Castellano, H. Enseñando con las TIC. Argentina. CENGAGE Learning. 2010. p. pp. 20-100.

- Clarés López, J. Diseño pedagógico de un Programa Educativo Multimedia Interactivo. Colombia, La U, 2011. p. pp 18 - 55.

- Espinoza, E. Análisis Matemático I. 4ª. Ed. Perú, Servicio gráficos J.J. 2005. p. pp. 255 – 680.

- Gallego y Peña. Las Tic en Geometría. Colombia, Ediciones de la U, 2012. p. pp. 34 – 98.

- Haeussler, E. y Paul, R. Matemáticas para Administración y Economía. México, Pearson Educación, 2003. p. pp. 155 – 703.

- Ricotti, S. Juegos y Problemas para construir ideas Matemáticas. México, Novedades educativas de C.V, 2011. p. pp. 23 – 64.

- Serrat, M. Ubuntu Linux. México, Alfaomega, 2010. p. pp. 32 – 112.

- Zorrilla, M. Didáctica de las Matemáticas. México, Trillas, 2010. p. pp. 13-95.

Web grafía.

- ANADES Á, MIGUEL A., BOTANA F, ESCRIBANO J Y TABERA L. Software matemático libre [en línea], Consultado el 1 de 03 de 2014, La Gaceta de la RSME: http://geogebra.es/pub/OpenSourceMath-Gaceta-baja-res.pdf
- COOLL C. (2004). Aprender y enseñar con las TIC: expectativas, realidad y potencialidades. Consultado 03 de 03 de 2014. Biblioteca digital: http://bibliotecadigital.educ.ar/uploads/contents/aprender_y_ensenar_con_tic0.pdf
- DE NÁPOLI P. (agosto 2007). Software libre para enseñar o aprender matemática. Consultado el 1 de 03 de 2014. Licencia de documentación libre GNU:
  h t t p : / /www. um. e s / c amp u s v i r t u a l e s / i n f o rme . h tml

- MOLERO A. (Febrero 2009). Los medios tecnológicos y la enseñanza de las matemáticas. Consultado el 21 de 02 de 2014, Instituto Juan de la Cierva de Madrid:

http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/MAIC/CONGRESOS/SEGUNDO/009%20Los%20medios.pdf.

- PARDINI A., “Fundamentación del uso de software libre en la universidad pública. enseñando matemática con herramientas alternativas”, Consultado 03/03/2014. Universidad Nacional de La Plata. Departamento de Fisicomatemática: http://www.fahce.unlp.edu.ar/academica/Areas/cienciasexactasynaturales/descargables/ponencias-en-las-jornadas/Pardini.pdf
- PRENDES M. (2010). Análisis comparativo de la situación actual en las universidades españolas. Recuperado el 03 de 03 de 2014. Proyecto EA-2008-0257:
- SALAZAR L. (febrero 2009), Tic's, software libre y educación matemática. Recuperado el 1 de 03 de 2014, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia:http://www.alammi.info/2congreso/memorias/Documentos/martes/ponenciaLuisJ_cong_int_math.pdf
- TORRES M. (abril 2005). Sociedad de la información /Sociedad del Conocimiento. Recuperado el 03 de 03 de 2014. Artículos: http://www.ub.edu/prometheus21/articulos/obsciberprome/socinfsoccon.pdf
- WILLGI P., ASTUDILLO G. (2008). Software libre para matemática: en búsqueda de alternativas. Consultado el 2 /03 / 2014. Universidad Nacional de La Pampa: http://repem.exactas.unlpam.edu.ar/cdrepem08/memorias/comunicaciones/Trabinvest/C17.pdf

ANEXOS

ANEXOS 1

PROPUESTA DE LA GUÍA DIDÁCTICA

LÍMITES Y CONTINUIDAD

1 DATOS INFORMATIVOS

Departamento: CIENCIAS EXACTAS	**Carrera:** Ing. Automotriz	**Tema de la clase:** ▪ Límite de una función ▪ Límites laterales ▪ Límites y continuidad ▪ Tipos de discontinuidad de una función.
Área de Conocimiento: Matemática	**Asignatura:** Cálculo Diferencial e Integral	
Docente : Ing. Norma Barreno	**Curso/Paralelo:** Primero "A"	
Fecha: 22 Octubre de 2014	**Duración de la clase:** 2h	
Periodo académico: Octubre 2014 - Febrero 2015		

2 DESPLIEGUE DEL PROCESO:

OBJETIVO DE LA CLASE:	**LOGROS DE APRENDIZAJE**
• Desarrollar las habilidades para resolver problemas que le lleven a plantear funciones. • Dar solución por medio de tablas de valores o de gráficas, mediante el análisis e interpretación de las relaciones que se establecen entre las variables. • Analizar el comportamiento local y para valores muy grandes de la variable independiente. • Trazar gráficas de funciones y describa los comportamientos utilizando la notación de límites. • Utilizar el software Geogebra para la verificación de los cálculos y la visualización del Límite de una función real.	• Identificar, analizar, resolver diferentes tipos de límites y aplicar en el análisis de funciones • Identificar, formular y resolver problemas de ingeniería. • Usar técnicas, habilidades y herramientas prácticas para la ingeniería.

MATRIZ DE PLANIFICACIÓN:

<table>
<tr><th rowspan="2">FASES DE LA CLASE</th><th colspan="2">PROCESO METODOLÓGICO</th><th rowspan="2">TIEMPO
APROX.</th><th rowspan="2">INSTRUMENTO DE
EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><th>ACTIVIDADES DOCENTES</th><th>ACTIVIDADES ESTUDIANTES</th></tr>
<tr><td>INICIAL</td><td>Motivación:
Para que nos ayudan los Límites.
Diagnóstico:
▪ Analizar conocimientos previos del estudiante con respecto al tema que se va a tratar.
Planteamiento del Tema:
▪ Límite de una función
▪ Límites laterales
▪ Límites y continuidad
▪ Tipos de discontinuidad de una función</td><td>▪ Argumentar, preguntar y responder acerca del tema.</td><td>40 min</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>DESARROLLO</td><td>Aplicación de métodos, técnicas, procedimientos y actividades:
▪ Desarrollo de ejercicios de aplicación.
Medios: Pizarra, marcadores, software matemático Geogebra</td><td>▪ Identificar, analizar la existencia o no del límite de una función real.</td><td>40 min</td></tr>
<tr><td>FINAL</td><td>Evaluación:
▪ Se realizan preguntas y respuestas sobre la temática al estudiante, de la cual se valora su respuesta
▪ Resolver ejercicios propuestos en forma analítica.
▪ Verificar los resultados en el Software libre Geogebra
▪ Buscar campos de aplicación del tema tratado.</td><td>▪ Realización de preguntas y respuestas.
▪ Elaboración de organizadores gráficos de la temática tratada.</td><td>40 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">TIEMPO TOTAL DE LA CLASE</td><td>2 H</td></tr>
</table>

DESARROLLO

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN REAL

Sea $f: A \to B$ una función real, $x_0 \in A = D_f \subset R$, un punto de acumulación. Se dice que f tiene límite L cuando x tiende a x_0 y se denota $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si y solo si:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \leftrightarrow \forall \delta > 0, \quad \exists \varepsilon > 0 \; tq \; |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

Interpretación geométrica de la definición del límite de una función real

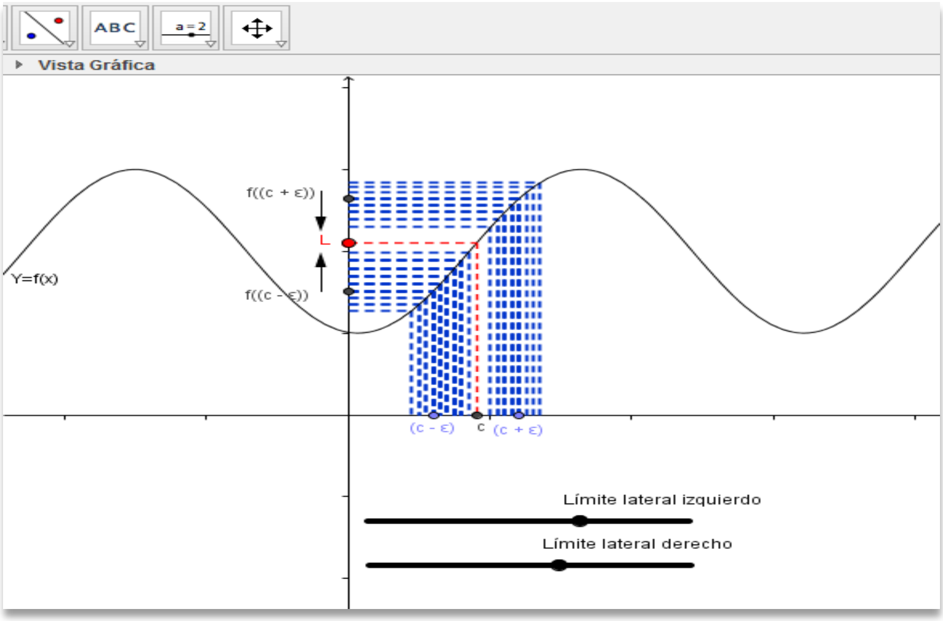

Figura 24. Interpretación geométrica de Límite.
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

LÍMITES LATERALES

El límite de una función $f(x)$, se analiza en el comportamiento de sus imágenes, es decir, cuando x se aproxima hacia x_0 ya sea por la izquierda o por la derecha de x_o. Si los límites laterales son iguales, entonces existe el Límite.

$$\exists \lim_{x \to a} f(x) = L \;\leftrightarrow\; \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

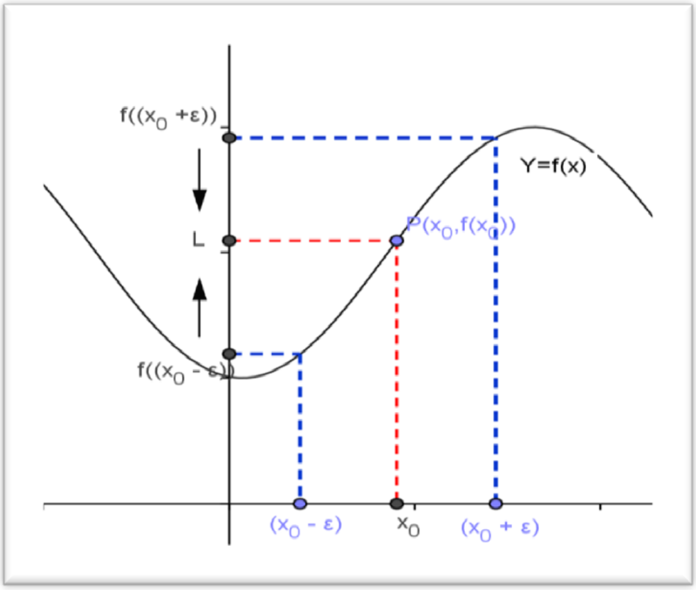

Figura 25. Interpretación geométrica de Límites laterales
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Práctica.

Calcular si existe $\lim_{x\to 5} f(x)$, donde: $f(x) = \begin{cases} \frac{x-5}{1-\sqrt{x-4}}, x \geq 5 \\ \frac{x^2-12x+35}{x-5}, x < 5 \end{cases}$

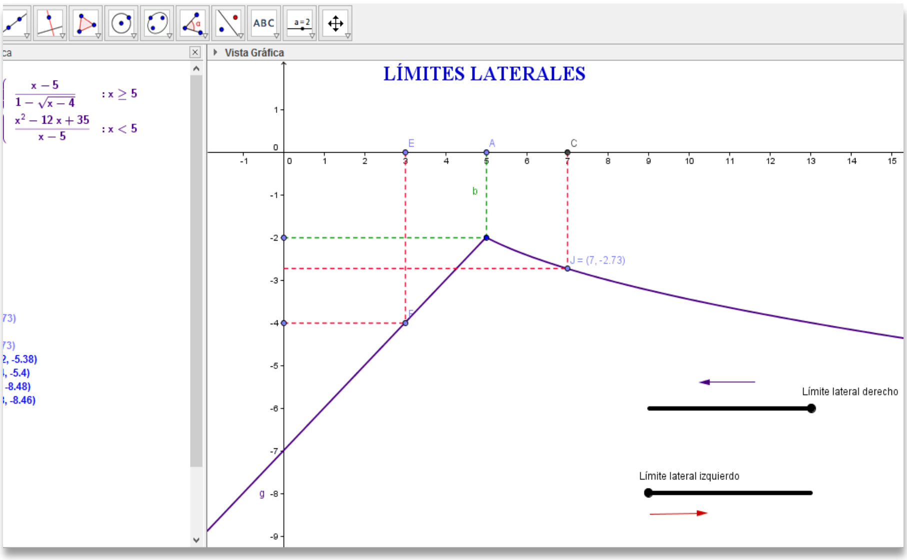

Figura 26. Ejercicio de Límites laterales
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Calcular si existe $\lim_{x\to 5} f(x)$, donde: $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \geq 5 \\ -6, & si\ 5 < x < 7 \\ 13 - x, & con\ x \geq 7 \end{cases}$

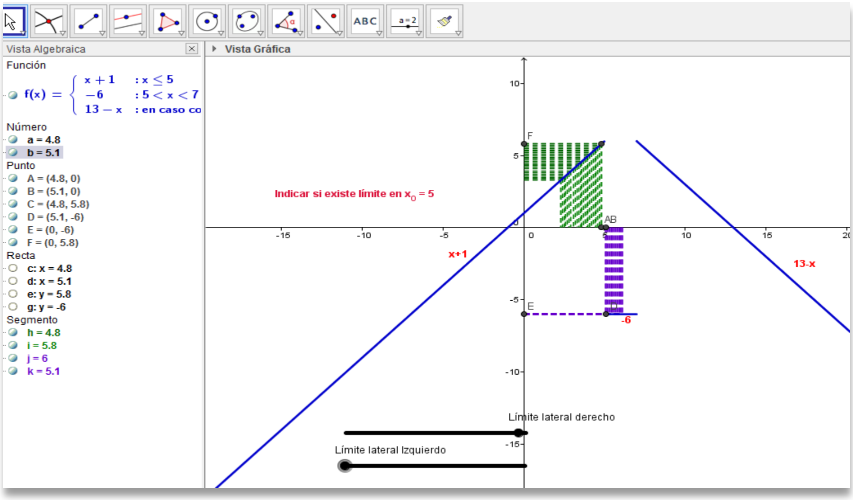

Figura 27. No existe límite en el punto x_0=5
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN REAL

Sea $f: A \to B$ una función real, se dice que *f* es continua en algún punto x_0 si y solo sí, se cumple las tres condiciones siguientes:

1. $f(x_0)$ este definido
2. Exista $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
3. Se cumpla $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Por lo tanto, si se cumple las tres condiciones se dirá que la función *f* es continua en algún $x = x_0$. En caso de que no cumpla una de las tres condiciones se dirá que la función *f* es discontinua en $x = x_0$.

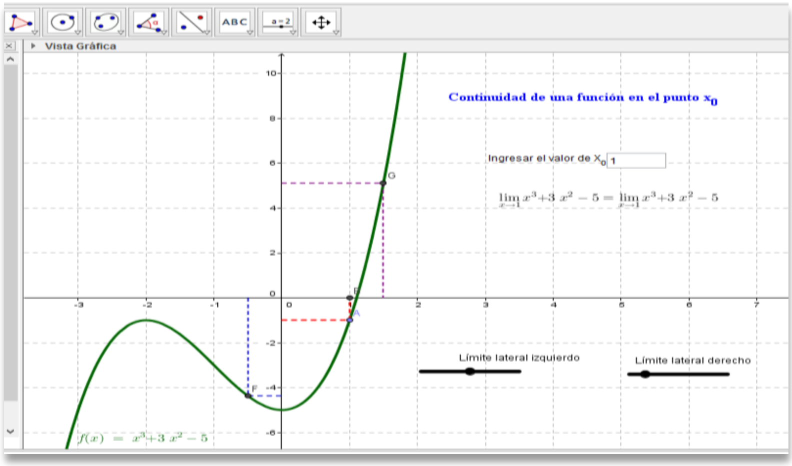

Figura 28. Continuidad de una función en el punto x_0
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

TIPOS DE DISCONTINUIDAD

Discontinuidad evitable o removible

Sea $f: A \to B$ una función real, se dice que f tiene una discontinuidad evitable o removible en $x = x_0$ si:

1. $f(x_0)$ este definido
2. Exista $\lim_{x \to x_0} f(x)$
3. Pero $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$

Discontinuidad no evitable o irremovible

1. **Discontinuidad de primera especie**
   Se dice que f tiene una discontinuidad de primera especie si existen los límites laterales pero estos son diferentes, es decir:

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$$

2. **Discontinuidad de segunda especie**
   Diremos que f tiene una discontinuidad de segunda especie en el punto $x = x_0$, si no existe $\lim_{x \to x_0} f(x)$; o, si uno de los límites laterales tienden hacia el $\pm\infty$.

EVALUACIÓN

Utilizar el software Geogebra y responder lo siguiente:

1. El $\lim_{x\to -1} \frac{x^2-9x+20}{x^2-3x-4} = \infty$	**V (__)**	**F(__)**
2. El límite existe cuando $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$	**V (__)**	**F(__)**
3. La función $f(x) = \frac{x-5}{\sqrt{x-1}-2}$; es continua en $x_0 = 5$	**V (__)**	**F(__)**
4. La función $f(x) = \frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}{x}$ es discontinua no evitable de primera especie en $x_0 = 0$	**V (__)**	**F(__)**
5. $f(x) = \begin{cases} x^2-9 & si\ x < 3 \\ 5 & si\ x = 3 \\ 9-x^2 & si\ \ 3 < x \end{cases}$ *f(x)* es continua en $x_0 = 3$	**V (__)**	**F(__)**
6. $\lim_{x\to 1^-} \frac{[\![x^2]\!]-1}{x^2-1} = +\infty$	**V (__)**	**F(__)**
7. Si $\begin{cases} x^2-9\ ; & si\ x \neq -3 \\ 4 & ; si\ x = -3 \end{cases}$ entonces $\lim_{x\to -3} f(x) = f(-3)$	**V (__)**	**F(__)**
8. Las asíntotas verticales las podemos determinar en el rango de la función.	**V (__)**	**F(__)**
9. Para hallar el $\lim_{x\to x_0} f(x)$, x_0 debe estar definido en el dominio de *f(x).*	**V (__)**	**F(__)**
10. El límite de una función es único	**V (__)**	**F(__)**

CÁLCULO DIFERENCIAL

1. DATOS INFORMATIVOS:

<table>
<tr><td>Departamento: CIENCIAS EXACTAS</td><td>Carrera: Ing. Automotriz</td><td rowspan="5">Tema de la clase:
Definición de derivada de una función real y sus aplicaciones.</td></tr>
<tr><td>Área de Conocimiento: Matemática</td><td>Asignatura: Cálculo Diferencial</td></tr>
<tr><td>Docente : Ing. Norma Barreno</td><td>Curso/Paralelo: Primero “A”</td></tr>
<tr><td>Fecha: 22 Octubre de 2014</td><td>Duración de la clase: 2h</td></tr>
<tr><td colspan="2">Periodo académico: Octubre 2014 - Febrero 2015</td></tr>
</table>

2. DESPLIEGUE DEL PROCESO:

OBJETIVO DE LA CLASE:	LOGROS DE APRENDIZAJE
• Identificar las propiedades de la derivada a partir de sus interpretaciones física y geométrica. • Que emplee la definición en el cálculo de derivadas sencillas y aplique éstas en la solución de problemas de razón de cambio, cálculo de tangentes y aproximación de funciones. • Desarrollar modelaciones y simulaciones mediante el software Geogebra que permitan optimizar una función determinada.	• El estudiante mostrará soltura para plantear, analizar, resolver y concluir un problema de optimización con creatividad y criticidad, aplicando los criterios sobre máximos y mínimos de una función real. • Usar técnicas, habilidades y herramientas prácticas para la ingeniería.

3. MATRIZ DE PLANIFICACIÓN:

<table>
<tr><th rowspan="2">FASES DE LA CLASE</th><th colspan="2">PROCESO METODOLÓGICO</th><th rowspan="2">TIEMPO APROX.</th><th rowspan="2">INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><th>ACTIVIDADES DOCENTES</th><th>ACTIVIDADES ESTUDIANTES</th></tr>
<tr><td>INICIAL</td><td>Motivación:
Videos de noción de la derivada
Diagnóstico:
▪ Analizar conocimientos previos del estudiante con respecto al tema que se va a tratar.
Planteamiento del Tema:
▪ La Derivada
▪ Recta tangente y recta Normal</td><td>▪ Preguntas-guía (o guías de estudio)</td><td>40 min</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>DESARROLLO</td><td>Aplicación de métodos, técnicas, procedimientos y actividades:
▪ Desarrollo de ejercicios de aplicación.
Medios: Pizarra, marcadores, software matemático Geogebra</td><td>▪ Problemas a resolver mediante modelaciones y simulaciones con el uso del software libre.</td><td>40 min</td></tr>
<tr><td>FINAL</td><td>Evaluación:
▪ Pueda interpretar geométricamente la Derivada, recta tangente y recta normal.
▪ Desarrollar de forma analítica y compruebe los resultados mediante la utilización del software Geogebra.</td><td>▪ Realización de preguntas y respuestas.</td><td>40 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">TIEMPO TOTAL DE LA CLASE</td><td>2 H</td></tr>
</table>

DESARROLLO

La derivada de una función es un tema muy importante que vincula varios campos de conocimiento como:

- En la Geometría, se podría mencionar en determinar la recta tangente a una curva en un punto.
- En Física, se puede citar la velocidad, la aceleración entre otras magnitudes de variación.
- En la Economía su aplicación en la utilidad marginal.

Motivación Geométrica:

Sea f una función continua en]a b[y [x_0, x_0+h] C]a, b[.

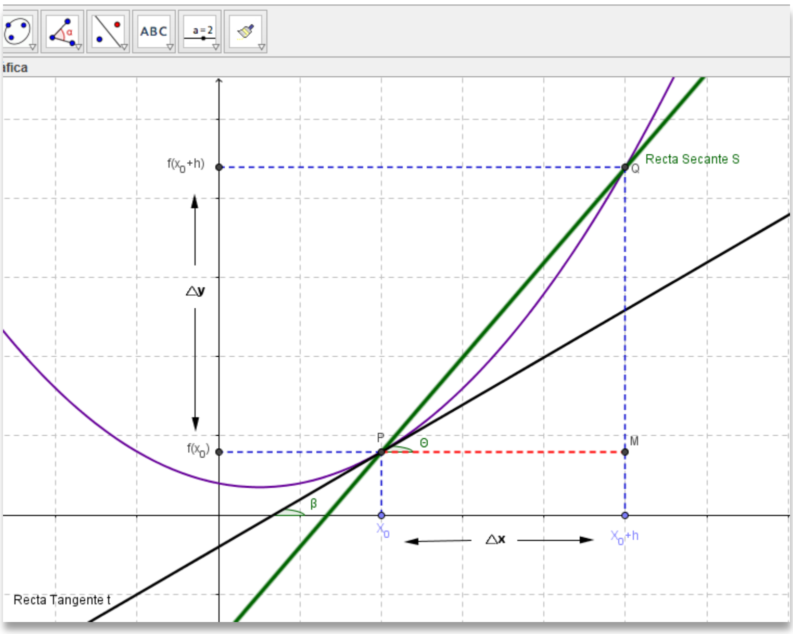

Figura 29. Interpretación geométrica de la Derivada
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

La recta **t** se convierte en el límite de la recta secante **s**, cuando el punto **Q** varíe sobre la curva *f(x)* hasta el punto **P**

Consideramos el triángulo **PMQ**, el ángulo **Θ** que es el ángulo de inclinación entre el segmento $\overline{PM}$ y la recta secante **s.**

La tangente está definida como: $\frac{Cateto\ opuesto}{Hipotenusa} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ entonces el ángulo **ϴ** se aproxima al ángulo **α** cuando **h** tiende a cero, es decir, $m_s \cong m_t$.

Por tanto:

$$f'(x) = m_t = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Y para que exista $f'(x_0)$ debe existir el límite de la función $f(x)$ es decir:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

Podemos concluir que existe la derivada en un punto **P** si sus derivadas laterales son iguales.

La pendiente recta normal es perpendicular a la pendiente de la recta tangente.

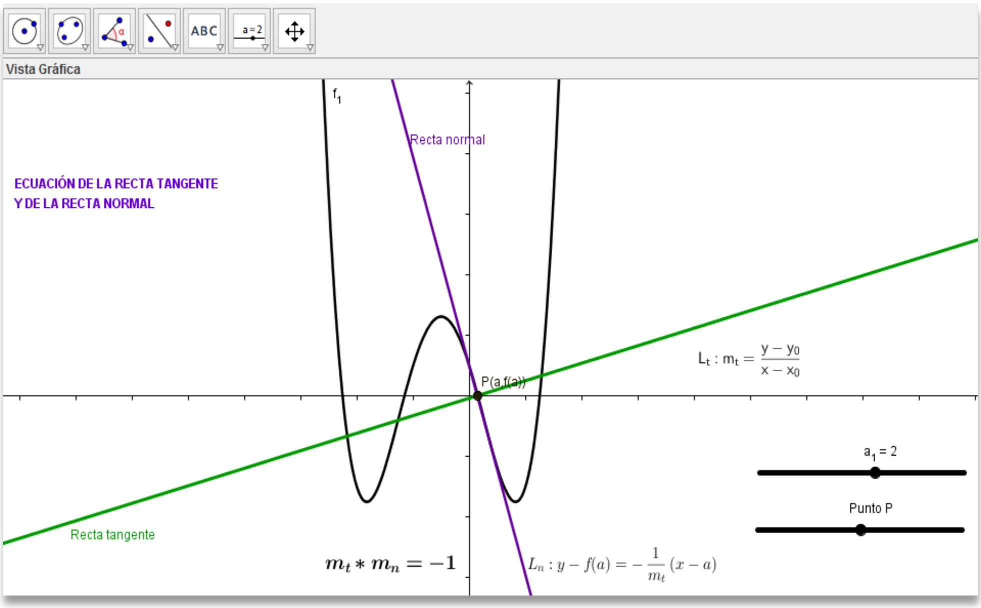

Figura 30. Ec. recta tangente y recta normal
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

PRÁCTICA 1

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^3 + 3x^2 - 5$, y que sea perpendicular a la recta $2x - 6y + 1 = 0$.

Solución:

Tenemos la ecuación de la recta de la forma $ax + by + c = 0$, entonces la $m_r = \frac{-a}{b}$
La recta tangente y la recta normal deben cumplir $m_r * m_t = -1$ por regla de perpendicularidad.

$m_r * m_t = -1$

$\frac{1}{3} * m_t = -1$

$m_t = -3$

$m_t = f'(x_0)$

$-3 = 3x^2 + 6x$

$3x^2 + 6x + 3 = 0$

$(x+1)^2 = 0$

$x = -1$

$x = -1$ reemplazamos en *f(x)*

$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 5$

$f(-1) = -3$ y tenemos el **P(-1,-3)**

La ecuación: $y - y_0 = m(x - x_0)$

$y + 3 = -3(x + 1)$

$\boldsymbol{y = -3x - 6}$

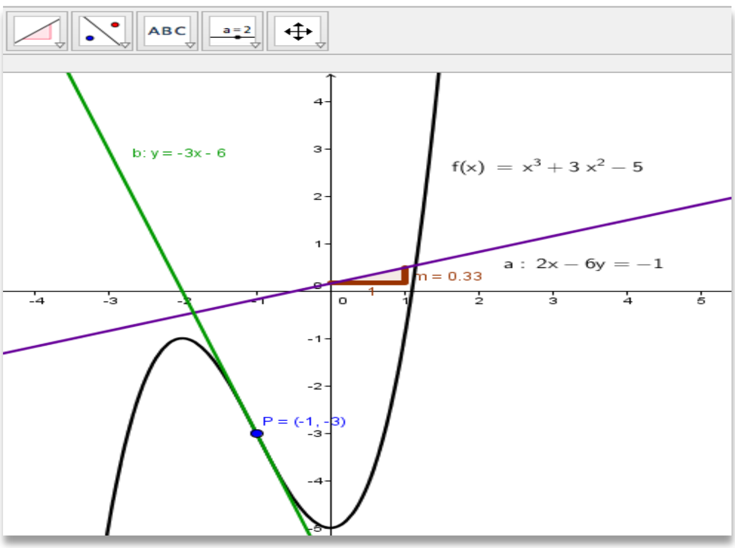

Figura 31. Comprobación geométrica de la práctica 1
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

PRÁCTICA 2

Utilizando el software, graficar la derivada de la función sen(x), cos(x), tan(x)

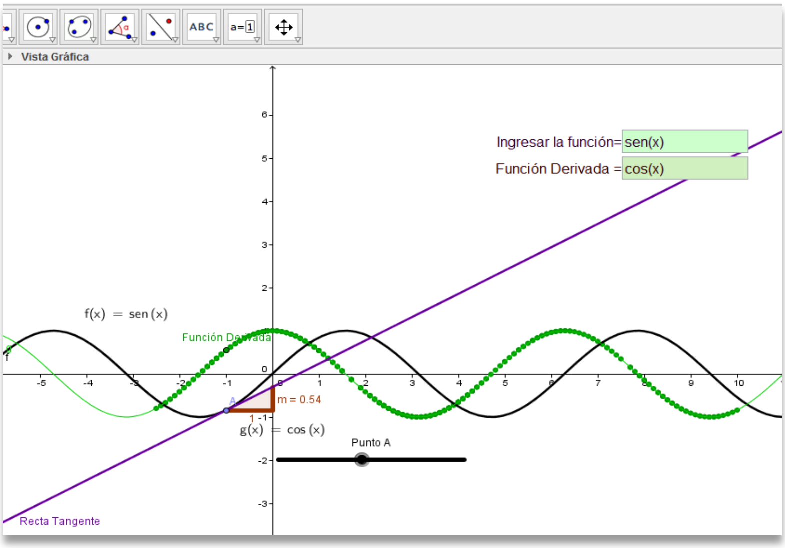

Figura 32. Derivada de f(x)=sen(x)
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

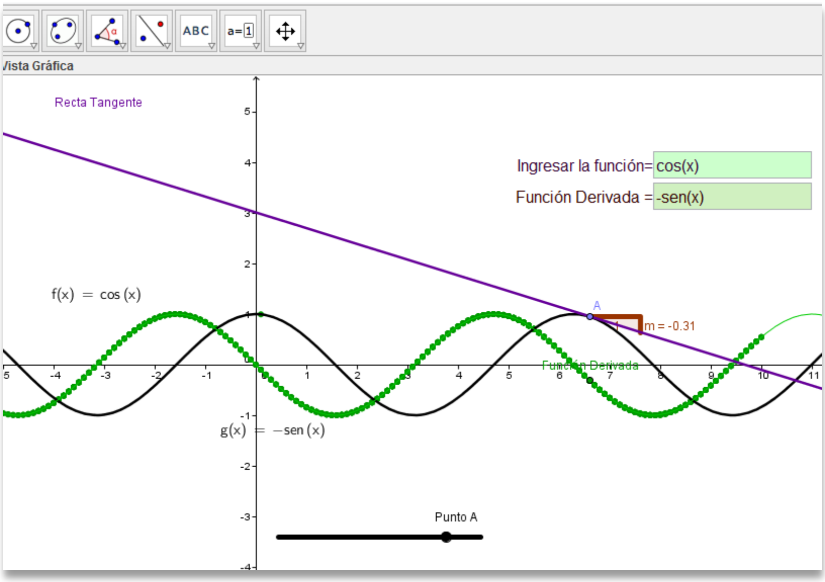

Figura 33. Derivada de f(x)=cos(x)
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

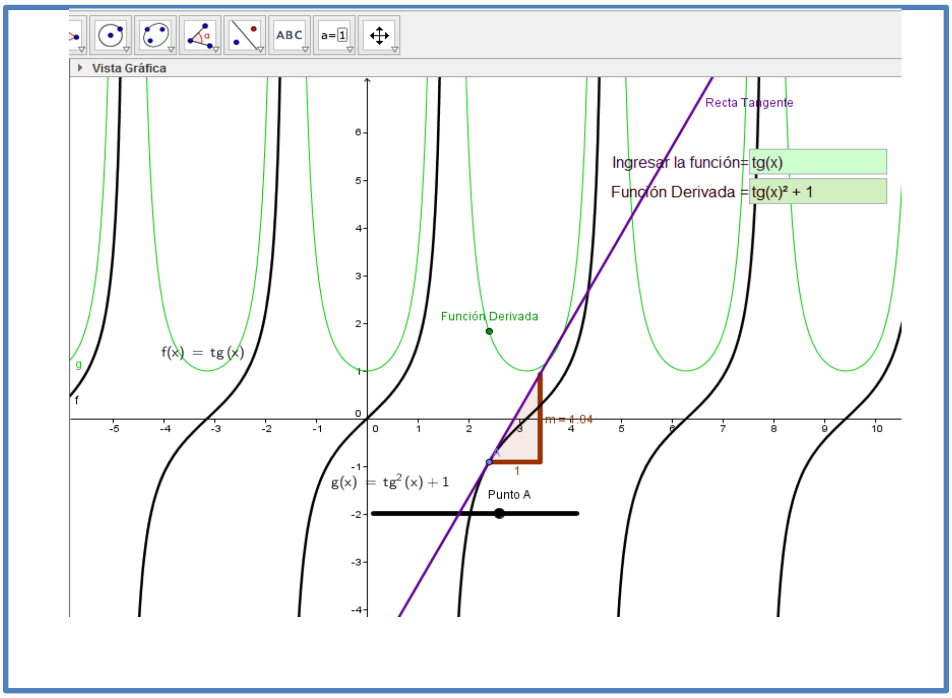

Figura 34. Función derivada de f(x)=tan(x)

Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

CÁLCULO DIFERENCIAL

1. DATOS INFORMATIVOS:

Departamento: CIENCIAS EXACTAS	**Carrera:** Ing. Automotriz	**Tema de la clase:** • Trazado de curvas
Área de Conocimiento: Matemática	**Asignatura:** Cálculo Diferencial	
Docente : Ing. Norma Barreno	**Curso/Paralelo:** Primero "A"	
Fecha: 22 Octubre de 2014	**Duración de la clase:** 2h	
Periodo académico: Octubre 2014 - Febrero 2015		

2. DESPLIEGUE DEL PROCESO:

OBJETIVO DE LA CLASE:	LOGROS DE APRENDIZAJE
• Identificar las propiedades de la derivada a partir de sus interpretaciones física y geométrica. • Que emplee la definición en el cálculo de derivadas sencillas y aplique éstas en la solución de problemas de trazado de curvas. • Desarrollar modelaciones y simulaciones mediante el software Geogebra que permitan optimizar una función determinada.	• El estudiante mostrará soltura para plantear, analizar, resolver y concluir un problema de optimización con creatividad y criticidad, aplicando los criterios sobre máximos y mínimos de una función real. • Usar técnicas, habilidades y herramientas prácticas para la ingeniería.

3. **MATRIZ DE PLANIFICACIÓN:**

<table>
<tr><th rowspan="2">FASES DE LA CLASE</th><th colspan="2">PROCESO METODOLÓGICO</th><th rowspan="2">TIEMPO APROX.</th><th rowspan="2">INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN</th></tr>
<tr><th>ACTIVIDADES DOCENTES</th><th>ACTIVIDADES ESTUDIANTES</th></tr>
<tr><td>INICIAL</td><td>Motivación:
Simulaciones en software libre Geogebra.
Diagnóstico:
▪ Analizar conocimientos previos del estudiante con respecto al tema que se va a tratar.
Planteamiento del Tema:
▪ Trazado de curvas</td><td>▪ Preguntas-guía (o guías de estudio)
▪ Preguntas o ejercicios propuestos en clase o en los textos.</td><td>40 min</td><td rowspan="4"></td></tr>
<tr><td>DESARROLLO</td><td>Aplicación de métodos, técnicas, procedimientos y actividades:
▪ Desarrollo de ejercicios de aplicación.
Medios: Pizarra, marcadores, software matemático Geogebra</td><td>▪ Problemas a resolver mediante modelaciones y simulaciones con el uso del software libre.</td><td>40 min</td></tr>
<tr><td>FINAL</td><td>Evaluación:
▪ Pueda determinar la monotonía de una función, sus puntos mínimos y máximos, punto de inflexión, regiones de concavidad y convexidad.
▪ Lo pueda desarrollar de forma analítica y compruebe los resultados mediante la utilización del software Geogebra.</td><td>▪ Realización de preguntas y respuestas.</td><td>40 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">TIEMPO TOTAL DE LA CLASE</td><td>2 H</td></tr>
</table>

DESARROLLO

Monotonía de una curva y valores críticos

Función creciente y decreciente de una función en un punto.

Sea ***f*** una función continua en $[a, b]$ y ***f*** derivable en $]a, b[$ Si $\forall\ x\ \in]a, b[$ se cumple:

- $f'(x_0) > 0$, entonces la función es creciente en el punto x_0
- $f'(x_0) < 0$, entonces la función es decreciente en el punto x_0

Máximos y mínimos relativos de una función.-

Sea f una función continua $[a, b]$ y ***f*** derivable en $]a, b[$

Criterio de la primera derivada

Punto máximo

- Si $f'(x_0) > 0, \quad \forall\ x\ \in]c - f, c[$
- Si $f'(x_0) < 0, \forall\ x\ \in]c, c + f[$

Por tanto $x = c$ $\exists$ un punto máximo en el intervalo $]a, b[$

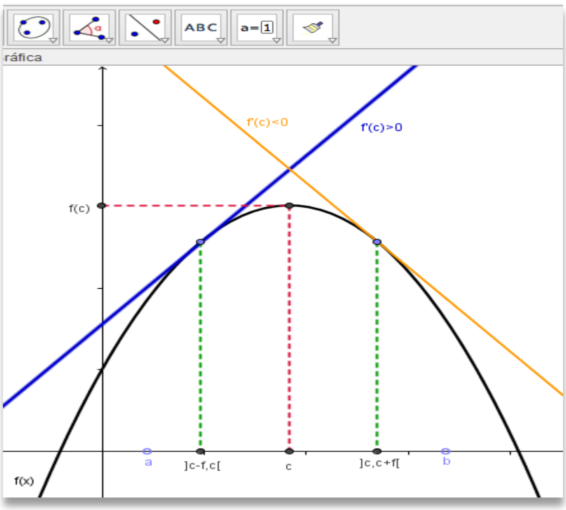

Figura 35. Punto máximo
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Punto mínimo

- Si $f'(x_0) < 0, \quad \forall\, x \ \in]c - f, c[$
- $f'(x_0) > 0, \forall\, x \ \in]c, c + f[$

Por tanto $x = c$ $\exists$ un punto mínimo en el intervalo $]a, b[$

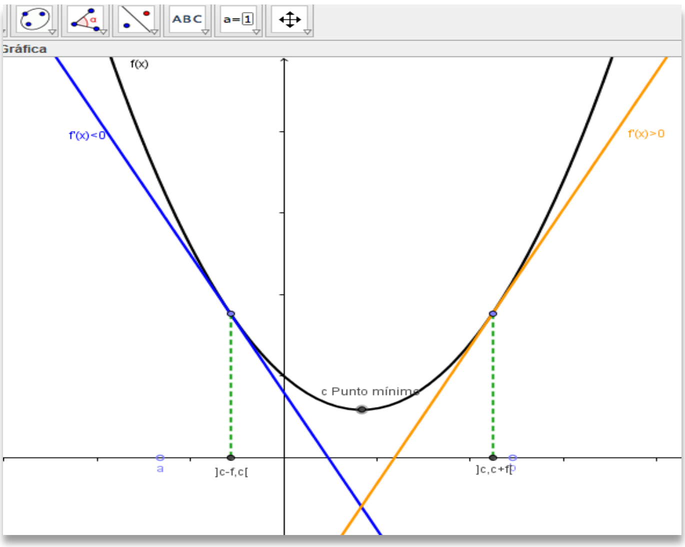

Figura 36. Punto mínimo
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Criterio de la segunda derivada

- Si $f''(x_0) > 0$, entonces existe un punto mínimo de la función *f(x)*, $\forall\, x \ \in]a, b[$

- $Si\ f''(x_0) < 0$, entonces existe un punto máximo de la función *f(x)*, $\forall\, x \ \in]a, b[$

Definimos **puntos singulares o puntos críticos** de una función, como aquellos en los que la primera derivada se anula: $f'(x) = 0$ (o sea, los puntos de tangente horizontal).

Ahora vamos a enunciar una condición necesaria de extremo relativo que dice:

$$Si\ f(x)\ tiene\ máximo\ o\ mínimo\ en \quad x_0 \Rightarrow f'(x_0) = 0$$

Ahora ya podemos enunciar la regla para identificar los puntos extremos de la función:

$$
\begin{aligned}
&Un\ punto\ crítico\ es:\\
&Máximo\quad f'>0\ a\ su\ izquierda\quad f'<0\ a\ su\ derecha\\
&mínimo\quad f'<0\ a\ su\ izquierda\quad f'>0\ a\ su\ derecha
\end{aligned}
$$

Observación.- Si en el punto crítico la derivada primera presenta el mismo signo a su izquierda que a su derecha se dice que el punto es de Inflexión (veremos que un punto de inflexión es aquel en el que cambia la curvatura de la curva).

Los puntos críticos puede ser: Máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Ejemplo.-

Dada la función $f(x)=x^3-3x+2$ estudia su monotonía (intervalos de crecimiento y decrecimiento) determina los puntos críticos e indicar si son máximos, mínimos o puntos de inflexión.

Solución.-

Sabemos que una función es creciente en un punto si su derivada es positiva en dicho punto y en consecuencia será creciente en un intervalo cuando su derivada sea positiva en todos los puntos de dicho intervalo.
Por tanto tendremos que calcular los puntos en los que la derivada de la función es cero y a partir de aquí (por ser continua la función derivada) determinar en qué intervalos la derivada es positiva y por tanto la función creciente y en que intervalos la derivada es negativa y en consecuencia la función es decreciente.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x^2-3=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$. Estudiamos el signo de la derivada

$$
\begin{aligned}
&en\quad (-\infty,-1)\ f'>0 \Rightarrow f\ creciente\\
&en\quad (-1,1)\quad f'<0 \Rightarrow f\ decreciente\\
&en\quad (1,\infty)\quad f'>0 \Rightarrow f\ creciente
\end{aligned}
$$

Como la función en $x=-1$ pasa de creciente a decreciente, $f(x)$ tiene en x=-1 un máximo relativo que vale:($f(-1)=4$).

Como la función en $x=1$ pasa de decreciente a creciente, $f(x)$ tiene en $x=1$ un mínimo relativo que vale:($f(1)=0$)

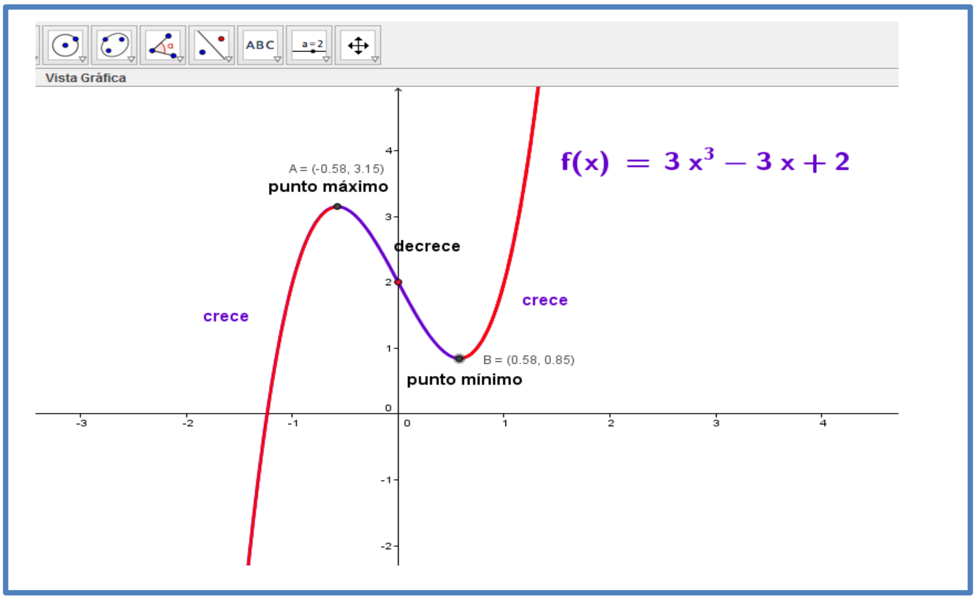

Figura 37. Puntos máximos y puntos mínimos
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Estudio de la curvatura y la obtención de los puntos de inflexión.-

Dada la curva $y = f(x)$. Si trazamos la recta tangente a la curva en el punto $P(x_0, y_0)$, que tiene de ecuación: $y = mx + b$. Se tiene que:

- Si todos los puntos muy cercanos a P están por encima de la recta tangente a *f* en el punto **P,** entonces curva es cóncava en P
- Si todos los puntos muy cercanos a P están por debajo de la recta tangente en el punto **P,** entonces curva es convexa en P
- Si la tangente en P atraviesa a la curva, es decir, si a la izquierda de P se cumple: $mx + b > f(x)$ y a la derecha de P se cumple $mx + b < f(x)$ (o viceversa) se dice que: la curva $y = f(x)$ tiene en P un punto de Inflexión.

Si estudiamos el signo de la segunda derivada de la función podemos determinar los intervalos de concavidad y convexidad, así:

$$f \;\; y \;\; f' \;\; derivables\; en\; x_0$$
$$Si \quad f''(x_0) > 0 \Rightarrow f \;\; es \quad cóncava\; en\; x_0$$
$$Si \quad f''(x_0) < 0 \Rightarrow f \;\; es \quad convexa\; en\; x_0$$

Si la segunda derivada de la función en el punto x_0 = 0 y la tercera derivada de la función en dicho punto es diferente de cero, entonces tenemos un punto de inflexión para la función $f(x)$.

$$f''(x_0) = 0\,;\; f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow P(x_0, y_0)\; es\;\; punto\, de \quad Inflexión$$

CÁLCULO DIFERENCIAL

1. DATOS INFORMATIVOS:

<table>
<tr><td>Departamento: CIENCIAS EXACTAS</td><td>Carrera: Ing. Automotriz</td><td rowspan="5">Tema de la clase:
Optimización
Razón de cambio</td></tr>
<tr><td>Área de Conocimiento: Matemática</td><td>Asignatura: Cálculo Diferencial</td></tr>
<tr><td>Docente : Ing. Norma Barreno</td><td>Curso/Paralelo: Primero “A”</td></tr>
<tr><td>Fecha: 22 Octubre de 2014</td><td>Duración de la clase: 2h</td></tr>
<tr><td colspan="2">Periodo académico: Octubre 2014 - Febrero 2015</td></tr>
</table>

2. DESPLIEGUE DEL PROCESO:

OBJETIVO DE LA CLASE:	**LOGROS DE APRENDIZAJE**
• Identificar las propiedades de la derivada a partir de sus interpretaciones física y geométrica. • Que emplee la definición en el cálculo de derivadas sencillas y aplique éstas en la solución de problemas de trazado de curvas. • Desarrollar modelaciones y simulaciones mediante el software Geogebra que permitan optimizar una función determinada.	• El estudiante mostrará soltura para plantear, analizar, resolver y concluir un problema de optimización con creatividad y criticidad, aplicando los criterios sobre máximos y mínimos de una función real. • Usar técnicas, habilidades y herramientas prácticas para la ingeniería.

3. **MATRIZ DE PLANIFICACIÓN:**

FASES DE LA CLASE	PROCESO METODOLÓGICO		TIEMPO APROX.	INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN
	ACTIVIDADES DOCENTES	**ACTIVIDADES ESTUDIANTES**		
INICIAL	**Motivación:** Simulaciones en software libre Geogebra. **Diagnóstico:** ▪ Analizar conocimientos previos del estudiante con respecto al tema que se va a tratar. **Planteamiento del Tema:** ▪ **Trazado de curvas**	▪ Preguntas-guía (o guías de estudio) ▪ Preguntas o ejercicios propuestos en clase o en los textos.	**40 min**	
DESARROLLO	**Aplicación de métodos, técnicas, procedimientos y actividades:** ▪ Desarrollo de ejercicios de aplicación. **Medios:** Pizarra, marcadores, software matemático Geogebra	▪ Problemas a resolver mediante modelaciones y simulaciones con el uso del software libre.	**40 min**	
FINAL	**Evaluación:** Desarrollar ejercicios propuesto de optimización de forma analítica y que compruebe los resultados mediante la utilización del software Geogebra.	▪ Realización de preguntas y respuestas.	**40 min**	
TIEMPO TOTAL DE LA CLASE			**2 H**	

DESARROLLO

Por medio del estudio de trazado de curvas, podemos resolver problemas que nos permita maximizar o minimizar cantidades, estas pueden ser: dimensiones, áreas, volúmenes, ganancias etc.

Se sugiere el siguiente algoritmo para resolver ejercicios de optimización:

- Realizar un bosquejo con los datos que indique el problema
- Formular una función con los datos para hallar la cantidad a maximizar o minimizar.
- La función encontrada dejar en dos variables es decir: la variable dependiente y la variable independiente.
- Hallar los valores críticos con la primera derivada
- Concluir el problema con los valores máximos o mínimos, verificados en la segunda derivada.

PRÁCTICA

Se tiene una hoja rectangular de papel, de lados 8 y 15, se desea hacer con ella una caja sin tapa, cortando en sus esquinas y doblando convenientemente la parte restante. Determinar el lado de los cuadrados que deben ser cortados, afín de que el volumen sea el mayor posible.

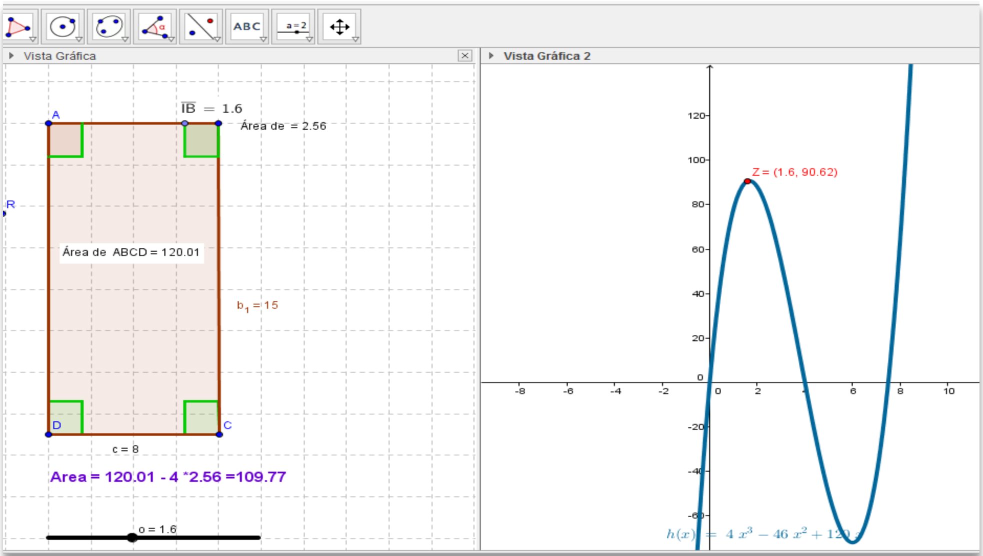

Figura 38. Ejercicio de optimización 1
Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Hallar las dimensiones de un rectángulo de mayor área y con los lados paralelos a los ejes coordenados que puede inscribirse en la figura limitada por las dos parábolas $3y = 12 - x^2$ y $6y = x^2 - 12$

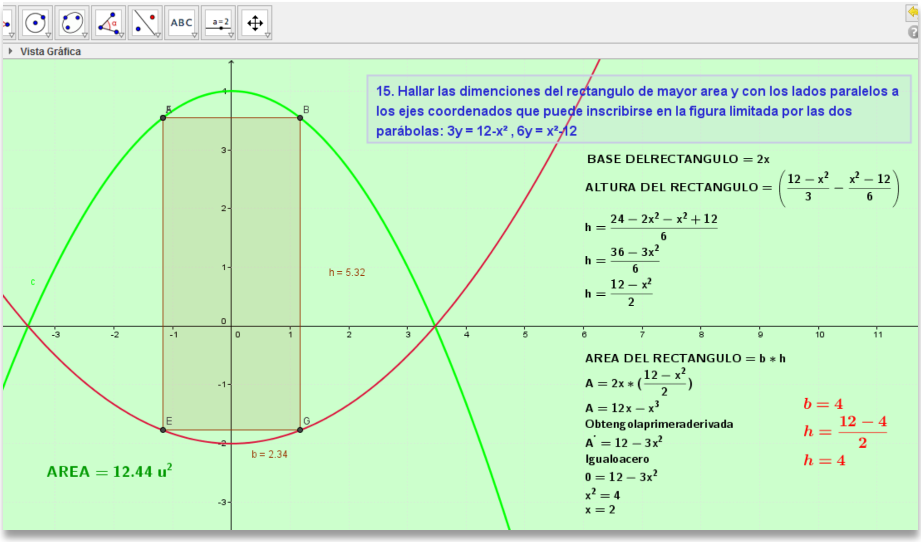

Figura 39. Ejercicio de optimización 2

Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

Huyendo de un perro una ardilla trepa por un árbol, corre a 12 mm/seg. Y la ardilla a 6 m/seg. ¿Cuál será el cambio de distancia relativa entre los dos cuando el perro está a 12 m. del árbol y la ardilla ha trepado 5 metros?

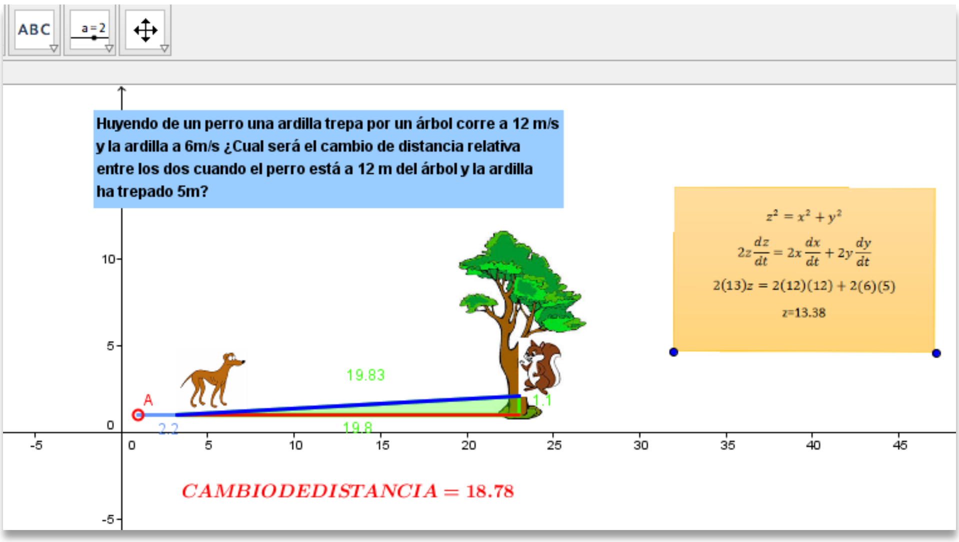

Figura 40. Ejercicio de razón de cambio

Fuente: Norma Barreno. Trabajo de investigación

ANEXOS 2

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE
EXTENSIÓN LATACUNGA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

CARRERA: Ing. Automotriz **NRC 2095**
ASIGNATURA: Cálculo Diferencial e Integral

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS APLICADOS A LOS ESTUDIANTES EN LA ASIGNATURA DE CÁLCULO DIFERENCIAL

GRUPO DE EXPERIMENTACIÓN		INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN						
ORD.	NOMBRE ESTUDIANTE	LECCIÓN ORAL	TALLERES	PRUEBA ESCRITA	PROYECTO	PORTAFOLIO ESTUDIANTIL	EXAMEN	PROMEDIO
1	ACERO GUZMAN CARLOS ANDRES	15	15	19	20	17	15	16.8
2	ALMEIDA SOTOMAYOR DAVID SANTIAGO	12	18	17	20	10	15	15.3
3	CAIZATOA ALDAZ JADI JOHANA	16	16	19	20	13	16	16.7
4	CALVO MULLO JIMY BRYAN	16	16	17	20	14	16	16.5
5	CAMAS ALVAREZ JAIRO GUSTAVO	17	17	20	20	17	17	18.0
6	CANDO GUTIERREZ JUAN CARLOS	15	15	19	20	15	15	16.5
7	CHANGOLUISA TIPAN LUIS FELIPE	14	14	18	19	14	14	15.5
8	ESPINOZA CUADRADO JONATHAN STALIN	16	16	19	20	16	16	17.2
9	GRANADA MOLINA JHONNY PATRICIO	18	18	19	18	10	12	15.8
10	HERRERA LLAMBA FAVIO ANDRE	17	17	19	20	14	17	17.3
11	LOPEZ ALOMOTO KEVIN OMAR	14.5	18	20	20	15	15	17.1
12	LOPEZ BENAVIDES JOSEPH ANDRES	17	17	17	20	14	17	17.0
13	MENA FALCONÍ ERIKA NATHALY	18	18	18	19	15	12	16.7
14	MOYANO PEREZ AZAEL GUALBERTO	18	18	20	20	18	18	18.7
15	NARANJO CHISAGUANO KEVIN ISMAEL	18	18	19	20	17	18	18.3
16	OÑATE PILCO CARLOS ANDRES	18	18	20	20	17	18	18.5
17	ORDOÑEZ ESPINOSA JONATHAN PATRICIO	19	19	19	20	18	19	19.0
18	PANTOJA VILLACIS DANIEL ALEJANDRO	18	18	17	20	16	18	17.8
19	PAREDES SANCHEZ DANIELA ALEJANDRA	18	18	19	20	18	18	18.5
20	PEÑA VACA OSCAR ISRAEL	15	17	19	20	16	12	16.5
21	PEREZ GUZMAN ERIK SEBASTIAN	17	17	19	20	18	17	18.0
22	PILCO GUACHIZACA RICARDO GONZALO	18	18	19	20	19	18	18.7
23	QUIGUANGO PINCHAO JONATHAN AUGUSTO	16	15	14.6	18	17	16	16.1
24	RAMOS TORRES DANIEL ALEJANDRO	15	17	10	18	15	14	14.8
25	ROMAN ZAVALA ERIK BENITO	17	16.5	14	18	19	19	17.3
26	SANCHEZ MEZA CHRITIAN ROBERTO	15	18	15	18	16	18	16.7
27	SANGOVALIN CHILUISA JHONATAN	15	17	15	18	17	14	16.0
28	TRAVEZ BASTIDAS DIEGO FERNANDO	18	18	17	20	19	18	18.3
29	VALENZUELA MAILA WELINTON ALFREDO	18	17.5	16	18	17	18	17.4
30	VALVERDE ESTEVEZ CRISTIAN JAVIER	15	15	11.5	18	18	14	15.3
						PROMEDIO		17.08

ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS	*LECCIÓN ORAL 1*	*TALLERES*	*PRUEBA ESCRITA*	*PROYECTO*	*PORTAFOLIO ESTUDIANTIL*	*EXAMEN*
Media	16,5	17	17,5	19,4	16,0	16,1
Error típico	0,3	0,2	0,5	0,2	0,4	0,4
Mediana	17	17	19	20	16,5	16,5
Moda	18	18	19	20	17	18
Desviación estándar	1,63	1,2	2,5	0,9	2,3	2,1
Varianza de la muestra	2,66	1,5	6,3	0,8	5,3	4,3
Curtosis	0,10	-0,2	2,1	-1,1	1,2	-0,6
Coeficiente de asimetría	-0,66	-0,8	-1,5	-0,9	-1,1	-0,6
Rango	7	5	10	2	9	7
Mínimo	12	14	10	18	10	12
Máximo	19	19	20	20	19	19
Suma	493,5	510	525,1	582	479	484
Cuenta	30	30	30	30	30	30

UNIVERSIDAD DE LAS FUERZAS ARMADAS - ESPE

EXTENSIÓN LATACUNGA

DEPARTAMENTO DE CIENCIAS EXACTAS

CARRERA: Ing. Automotriz NRC 2093

ASIGNATURA: Cálculo Diferencial e Integral

RESULTADOS DE LA EVALUACIÓN EN FUNCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS APLICADOS A LOS ESTUDIANTES EN LA ASIGNATURA DE CÁLCULO DIFERENCIAL

GRUPO DE CONTROL		INSTRUMENTOS DE EVALUACIÓN						
ORD.	NOMBRE ESTUDIANTE	LECCIÓN ORAL 1	TALLERES	PRUEBA ESCRITA	PROYECTO	PORTAFOLIO ESTUDIANTIL	EXAMEN	PROMEDIO
1	BAYAS FREIRE LUIS ANTONIO	17	20	10	18	17	10	15.3
2	CARRILLO VIVANCO RONNY ALEXANDER	17	19	11	17	18	9	15.2
3	CHAMORRO RIASOS JOHN JAIRO	17	18	10	16	18	15	15.7
4	GALARRAGA MAILA LILY CAMILA	15	20	14	18	18	13	16.3
5	GAMBOA JACOME FRANCISCO XAVIER	17	19	12.5	17	18	16	16.6
6	GAVILANES CORDOVA ALEX DANIEL	16	20	12	18	17	8	15.2
7	GONZALEZ HERAS DAVID MOISES	15	20	14	18	18	10	15.8
8	GUALLE QUISAGUANGO CARLOS ISAAC	16	18	13	16	18	15	16.0
9	GARCES JIMENEZ VÍCTOR	15	18	14	16	18	10	15.2
10	HERNANDEZ PANTOJA SEBASTIAN	17	20	10	18	17	12	15.7
11	JARRÍN SANCHEZ RAMIRO GABRIEL	17	18	10	16	18	14	15.5
12	LOZADA CHIGUANO JHON ROBERTO	17	20	8.5	18	18	10	15.3
13	MENA ALVAREZ JEFFERSON	16	18	8.5	16	18	13	14.9
14	MONTEROS ALMEIDA CARLOS ANDRÉS	18	19	3	17	18	10	14.2
15	OBANDO ZAPATA SAÚL MARCELO	18	18	12	17	16	10	15.2
16	OTOYA ESTEVES ANIBAL ESTUARDO	15	20	13	18	17	13	16.0
17	PAREDES YEPEZ BRANDON ISAAC	15	18	12	17	16	16	15.7
18	PERALTA CAGPATA EDWIN DENNIS	15	18	13	17	16	12	15.2
19	QUIÑA EGAS CÉSAR ESTEBAN	14	20	10.5	18	18	15	15.9
20	SANCHEZ REINOSO RICARDO ANDRES	15	19	10	17	18	10	14.8
21	VARGAS YASELGA FRANCISCO DANIEL	16	18	9	17	16	14	15.0
22	VÁSQUES MAFLA LUIS EDUARDO	16	18	13	17	16	15	15.8
23	YEPEZ LEMA AGUIRRE JAIRO ALEXIS	13	19	15	17	18	10	15.3
24	ZUÑIGA LEMA JORGEE DAVID	18	20	15	18	18	14	17.2
						PROMEDIO		15.53

ESTADÍSTICOS DESCRIPTIVOS	*LECCIÓN ORAL 1*	*TALLERES*	*PRUEBA ESCRITA*	*PROYECTO*	*PORTAFOLIO ESTUDIANTIL*	*EXAMEN*
Media	16,0	19,0	11,4	17,2	17,4	12,3
Error típico	0,3	0,2	0,5	0,2	0,2	0,5
Mediana	16	19	12	17	18	12,5
Moda	17	18	10	17	18	10
Desviación estándar	1,3	0,9	2,7	0,8	0,8	2,5
Varianza de la muestra	1,7	0,8	7,1	0,6	0,7	6,0
Curtosis	-0,3	-1,9	2,9	-1,1	-0,8	-1,4
Coeficiente de asimetrí	-0,3	0,1	-1,2	-0,3	-1,0	0,0
Rango	5	2	12	2	2	8
Mínimo	13	18	3	16	16	8
Máximo	18	20	15	18	18	16
Suma	385	455	273	412	418	294
Cuenta	24	24	24	24	24	24

RESULTADOS DEL ESTUDIO PRETEST A LOS GRUPOS QUE PARTICIPAN EN LA INVESTIGACIÓN.

		RANGO DEL PROMEDIOS DE EVALUACIÓN POR ITEMS									
CONTENIDOS	ITEM DE EVALUACIÓN	NRC 2095 GRUPO DE EXPERIMENTACIÓN					NRC 2093 GRUPO DE CONTROL				
		menor a 10	10 a 14	14 a 18	18 a 20	TOTAL	menor a 10	10 a 14	14 a 18	18 a 20	TOTAL
ÁLGEBRA	Funciones Reales	0	4	20	6	30	0	5	16	3	24
	Monotonía de una función	0	8	18	4	30	0	4	17	3	24
	Operaciones entre funciones	0	6	21	3	30	0	2	18	4	24
	Funciones Trascendentes	0	5	19	6	30	0	2	17	5	24
GEOMETRIA ANALÍTICA	La Recta	0	3	23	4	30	0	4	17	3	24
	La circunferencia	1	5	22	2	30	0	5	17	2	24
	Secciones cónicas	1	4	21	4	30	0	4	19	1	24
TRIGONOMETRÍA	Funciones Trigonométricas	0	3	23	4	30	0	2	18	4	24
	Identidades trigonométricas	0	6	18	6	30	0	3	20	1	24
	Ecuaciones trigonométricas	1	7	20	2	30	0	4	17	3	24
	TOTAL	3	51	205	41		0	35	176	29	