CAPÍTULO I

INTRODUCCIÓN

La Matemática Recreativa a través de los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático, ponen a prueba nuestra capacidad de razonar. Esta experiencia es maravillosa, porque a pesar de que no haya resuelto ninguno de este tipo de ejercicios durante su etapa estudiantil los entenderá y los resolverá. Muchas de las veces los problemas no se resuelven inmediatamente pero la constancia y darle vueltas y vueltas le permitirán encontrar la solución. No desanimarse es "el lema" ningún problema es fácil, todos exigen concentración, dedicación y una gran capacidad razonativa, pero esto es lo hermoso de los ejercicios de razonamiento, el pensamiento lógico, el que nos automotiva y nos da confianza para seguir adelante.

El objetivo de éste trabajo de investigación es contribuir con el desarrollo de la capacidad de razonamiento de los estudiantes de nivel superior, para que desenvuelva sus facultades de inteligencia, porque aquel que razona con eficacia es capaz de hallar los medios más seguros para resolver o desarrollar cualquier problema o actividad con eficiencia y efectividad.

Cuando uno busca el por qué y el cómo de las cosas es entonces cuando ya se ha aprendido a razonar y es ésta actividad la que nos ayuda a desarrollar nuestra inteligencia, nuestras destrezas y en especial la seguridad y la confianza en nuestro yo interior.

Estoy seguro que todos aquellos que llegan a este nivel de razonar y el no aceptar las cosas sin una justificación o demostración, sin un por qué, son personas que cada vez adquirirán confianza en sí mismo y dirán “yo, sí puedo, esto y mucho más, y lo demostraré”. Es éste momento el que quiero que lo tengan, porque a partir de éste instante se auto motivarán para aprender muchas cosas más sin importar cuán difíciles sean.

1.1. Planteamiento del problema

Los estudiantes que ingresan al primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH poseen falencias en cuanto al razonamiento lógico-matemático se refiere, esto puede deberse a muchos factores que están relacionados con las estrategias metodológicas que utilizan los docentes en las escuelas y colegios.

La deficiencia de razonamiento lógico-matemático en los estudiantes de los primeros semestres es preocupante, ya que la mayoría de ellos no pueden hacer cálculos mentales con facilidad no razonan adecuadamente, lo que conlleva a que realicen un mal planteamiento de los problemas, todo lo hacen de forma mecánica, solo aplican fórmulas y muy pocas veces resuelven un ejercicio que implica: comprender el problema, concebir un plan para resolverlo, plantearlo y examinar la solución obtenida.

1.2. Formulación del problema

¿Cómo incide la matemática recreativa en el desarrollo del razonamiento lógico- matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH?

1.3. Objetivos general y específicos

1.3.1. General

Determinar la incidencia de la matemática recreativa en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH.

1.3.2. Específicos

- Realizar un diagnóstico a los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH
- Determinar el nivel de razonamiento lógico-matemático que poseen.
- Determinar a través de técnicas estadísticas, cómo incide la matemática recreativa en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático.
- Proponer diversos juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático y la forma secuencial en que deben ser resueltos.

1.4. Justificación

La matemática recreativa, con los juegos de razonamiento lógico ayudará a desarrollar el razonamiento lógico-matemático, lograr éste objetivo equivaldrá a que el estudiante de aquí en adelante adquiera destrezas para lograr un aprendizaje eficiente y significativo de la matemática el mismo que aumentará su confianza para resolver problemas de la vida diaria.

Con los juegos recreativos de razonamiento lógico se fortalecerá la capacidad de razonar, abstraer, analizar, discrepar, reconocer, calcular y diseñar estrategias para resolver los problemas y presentar cada uno de los pasos que implica la solución del juego. Planteamientos como el siguiente nos ayudarán a incrementar el razonamiento lógico-matemático de los estudiantes.

Una chica invitó recientemente a cenar a 5 de sus mejores amigas, ellas son: Jenny, Ivon, Margarita, Anita, Liliana y Myrian (la anfitriona), las cuales se sentaron alrededor de una mesa hexagonal. Una de ellas es doctora en química, otra es ingeniera en sistemas, otra es doctora en matemáticas, otra es ingeniera estadística, otra es doctora en física, y la otra es diseñadora gráfica.

La señorita que es diseñadora gráfica se sentó frente a Jenny. La que es doctora en química se sentó frente a Myrian, quien a su vez se sentó entre la señorita que es ingeniera en sistemas y la diseñadora gráfica. La señorita que es ingeniera en estadística se sentó frente a Ivon, junto a la doctora en química y a la izquierda de la diseñadora gráfica. La ingeniera en sistemas se sentó entre la señorita Myrian y la señorita que se sentó enfrente de la diseñadora gráfica. Liliana, que es doctora en química, se sentó junto a la ingeniera en estadística y frente a la señorita que es doctora en matemáticas. La doctora en física se sentó entre Ivon y Liliana, y al frente de Anita. ¿Puede Ud. determinar la posición y las profesiones de estas encantadoras chicas?

En la resolución de juegos recreativos como el anterior y de los que se halla en la propuesta final se utiliza el razonamiento lógico y los conocimientos básicos de matemática para hallar la solución del juego.

1.5. Viabilidad

De la experiencia docente con los estudiantes de los primeros semestres, se ha detectado que los juegos recreativos de razonamiento lógico ayudan al estudiante a desarrollar su capacidad razonativa. Por lo que resulta interesante investigarlo.

Para la investigación propuesta se dispone del material bibliográfico necesario, al igual que los recursos: humanos, materiales, económicos y del tiempo necesario para realizar el estudio.

1.6. Marco hipotético

La matemática recreativa es una área de las matemáticas que se centra en obtener resultados cualitativos y cuantitativos de diversos juegos recreativos, y difunde de manera entretenida conocimientos y problemas matemáticos.

Para el tesista, la matemática recreativa es una herramienta pedagógica poderosa que debe ser aprovechada, porque los juegos de razonamiento lógico es una actividad divertida, capaz de transmitir emociones, que ponen a prueba la capacidad de razonar, y esto es lo divertido de los juegos de razonamiento lógico, porque motivan a aprender muchas cosas más, sin importar cuán difíciles sean.

Una de las personas que más ha contribuido a la divulgación de las matemáticas recreativas en nuestro tiempo fue Martin Gardner, con libros como “El ahorcamiento inesperado y otros entretenimientos matemáticos”, “Nuevos pasatiempos matemáticos”. Y Perelmann con su libro “El divertido juego de las matemáticas” y otros más.

Los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático pretenden desarrollar hábitos de razonamiento y de pensamiento crítico, factores muy importantes para el aprendizaje de la matemática.

La investigación aspira dar una mayor significación de la matemática recreativa como estrategia de aprendizaje que facilitará el desarrollo del razonamiento lógico-matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Esta investigación puede definirse como inductiva, descriptiva y explicativa. Los métodos que se utilizarán para recoger datos son test y observación directa que se aplicarán en la muestra de estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH, seleccionada de manera aleatoria.

1.7. Hipótesis

La matemática recreativa incide significativamente en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH

1.7.1. Operacionalización conceptual de las variables

Tabla 1-1 Conceptos de variables de investigación

Variable	Concepto
Variable Independiente: Matemática recreativa	La matemática recreativa es una área de las matemáticas que se dedica, a través de los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático, a difundir de manera entretenida y divertida los conocimientos, ideas o problemas matemáticos.
Variable Dependiente: Desarrollo del razonamiento lógico-matemático.	Razonamiento lógico-matemático: La agilidad mental y la capacidad de raciocinio ante situaciones de la vida cotidiana que necesitan solución lógica y oportuna.

1.7.2. Operacionalización metodológica de las variables

Tabla 1-2 Operacionalización de variables

Variable	Dimensiones	Indicadores	Técnicas	Ítems básicos
Variable independiente: Matemática recreativa	Diversos juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático	Evaluación de los test en % dado por: (Número de preguntas contestadas / Número total de preguntas)* 100	Test Observación	Juegos recreativos de cálculo mental, lógico y abstracto
Variable dependiente: Desarrollo del razonamiento lógico-matemático	Razonamiento lógico-matemático	Evaluación de los test en % dado por: (Número de preguntas contestadas / Número total de preguntas)* 100	Test Observación	Cálculo mental, razonamiento lógico y abstracto

CAPÍTULO II

MARCO DE REFERENCIA

2.1. Historia de la matemática recreativa

La matemática recreativa, está ligada a todas las áreas de la matemática que hoy conocemos. Problemas tan conocidos como "piensa un número", "el caracol que sube por la pared del pozo" o "unir nueve puntos con cuatro segmentos rectos seguidos", ya se encontraban en obras muy antiguas, particularmente en trabajos de autores del renacimiento italiano.

En las matemáticas egipcias y babilónicas, encontramos problemas recreativos de números. Uno de los primeros es el problema 29 del papiro de Rhind (escrito por Ahmes aproximadamente en 1650 a.c.): "Pienso un número, le sumo sus 2/3 y a dicha suma le resto su tercera parte; con ello obtengo el número 10. ¿Cuál es el número que había pensado?" (Deulofeu, 2011).

Para resolver el problema anterior, supongamos que, sea x el número pensado, le sumo $\frac{2}{3}x$ y le resto $\frac{1}{3}x$, y obtengo 10.

Al plantear el problema nos queda: $x+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}x=10$ donde $x=\frac{15}{2}$.

En número pensado es $\frac{15}{2}$.

Un problema bien conocido es el cuadrado mágico de 9 casillas que consiste en situar los dígitos del 1 al 9 de forma que tanto filas, columnas, y diagonales sumen 15.

Tabla 2-1 Cuadrado mágico de 3x3, cuya suma es 15

15	15	15	15
6	1	8	15
7	5	3	15
2	9	4	15

Si utilizamos la misma lógica de ubicación de los números del cuadrado anterior se puede crear muchos cuadrados mágicos de tres por tres, se necesita de 9 números consecutivos de una sucesión aritmética, se ordena en forma ascendente y se les ubica tanto en filas, columnas y diagonales de tal forma que la suma sea constante. La cantidad constante se determina como la suma de los extremos con el número central de los 9 términos ordenados.

Ejemplo

Coloquemos los números **1**, 3, 5, 7, **9**, 11, 13, 15 y **17** en un cuadrado de tres por tres de tal forma que en cada fila, columna y diagonal la suma sea 27 (1+17+9=27).

Tabla 2-2 Cuadrado mágico de 3x3, cuya suma es 27

27	27	27	27
11	1	15	27
13	9	5	27
3	17	7	27

La obra recreativa de Mezirac es un compendio de las principales recreaciones de su época, y en ella encontramos, entre otros, problemas sobre cuadrados mágicos, sobre como atravesar un río (el lobo, la cabra y la col), sobre números enteros en general y los problemas llamados de pesadas (por ejemplo, hallar el mínimo número de pesas, y sus pesos, para poder pesar cualquier cantidad entera entre 1 y 40, en una balanza de dos platos).

El libro de Mezirac fue el primero de una larga lista, en la que destacan las obras de Van Etten (1624), Ozanam (1694), Jean E. Montucla (1725), sin olvidar que muchos de los grandes matemáticos de los siglos XVII y XVIII, como Isaac Newton, Nicolás Bernoulli o Leonard Euler, plantearon algunos problemas aislados que se convertirían en clásicos del género. Sin embargo, la época de mayor esplendor de las recreaciones matemáticas, y aquella en la que empiezan a participar no sólo matemáticos sino personas ajenas a esta ciencia pero interesadas en la resolución de acertijos, es el siglo XIX y principios del XX.

En efecto, en el primero de estos siglos empiezan a aparecer los grandes clásicos del género, entre los que destacan Eduard Lucas (1842-1891), autor de un extraordinario compendio "Récréations mathématiques", en cuatro volúmenes, en el cual aparece por primera vez, entre muchos otros, el conocido problema de las torres de Hanói.

Contemporáneo del francés Lucas, es el inglés Lewis Carrol, famoso por sus cuentos sobre Alicia, que fue un gran amante de las recreaciones, especialmente de carácter lógico, y en cuyas obras no se restringe a las matemáticas sino que aborda también aspectos relacionados con la física y con los juegos lingüísticos.

Los autores más importantes son los ingleses Henry E. Dudeney (1857-1930) y Sam Loyd (1841-1911). El primero de ellos es autor, entre otras, de la obra Amusements in Mathematics (1917), libro que contiene una de las mejores y más variadas colecciones de recreaciones matemáticas de toda la historia. El segundo publicó gran parte de sus problemas en periódicos y revistas de su tiempo, y fue su hijo, que se llamaba igual que el padre, el que recopiló gran parte de la obra de aquel, poco después de su muerte, bajo el curioso título de: Sam Loyd's Cyclopaedia of 5000 Puzzles, Tricks and Conundrums, publicado en 1914.

Entre los principales autores de recreaciones matemáticas del siglo XX tenemos a Martin Gardner, Yakov Perelman, Pierre Berloquin, Ian Stewart, Brian Bolt y David Wells. Algunos autores españoles, como Rafael Rodríguez Vidal o Mariano Mataix, y entre los actuales, Miguel de Guzmán y Fernando Corbalán. Todos ellos son autores y recopiladores de una obra enorme que en su conjunto, y añadida a la de nuestros antepasados, constituye una fuente inagotable de problemas, juegos y recreaciones matemáticas (Deulofeu, 2011).

2.2. Juegos y matemática

Los juegos, como una actividad humana lúdica, podemos encontrar en todas las culturas, desde las más primitivas a las más avanzadas tienen una estrecha relación con las matemáticas. Por un lado muchos juegos tanto tradicionales como modernos, utilizan las matemáticas en su desarrollo ya sea por sus relaciones numéricas (por ejemplo, el dominó o muchos juegos de cartas), por sus relaciones geométricas (en juegos donde las fichas se colocan y se mueven sobre un tablero), pero sobre todo, por las características de muchos juegos, especialmente los llamados juegos de tablero, y por el tipo de estrategias que hay que desarrollar cuando intentamos ganar una partida. Estas estrategias, que son muy variadas y que dependen de las características de cada juego, tienen una gran similitud con algunas de las más importantes estrategias utilizadas en la resolución de problemas de matemáticas.

El filósofo Platón (siglo IV a.c.) dijo que "la vida merece ser vivida para jugar a los más bellos juegos (...), y ganar en ellos", el matemático francés del siglo XX Dieudonné, afirmó que "las nueve décimas partes de las matemáticas, aparte de las que tienen su origen en las necesidades de orden práctico, consisten en la resolución de adivinanzas", es decir, de juegos y recreaciones (Deulofeu, 2011).

2.3. Impacto de los juegos en las matemáticas

La historia ha sido inclinada a preservar los elementos solemnes de la actividad científica, muchas de las profundas reflexiones de los pitagóricos tuvieron lugar jugando con configuraciones diferentes que formaban con las piedras. El álgebra de Arquímedes (212 a.c.- 287 a.c.) hecha con procedimientos rudimentarios, tiene un cierto sabor lúdico, así como otras muchas de sus creaciones matemáticas originales. Euclides (265 a.c.- 325 a.c.) fue al parecer, no sólo el primer gran pedagogo que supo utilizar, en una obra perdida llamada Pseudaria (Libro de Engaños), el gran valor didáctico en matemática de la sorpresa producida por contradicciones o paradojas irresolubles.

En la edad media Leonardo de Pisa (1170-1250), conocido como Fibonacci, cultivó una matemática numérica con sabor a juego con la que, gracias a las técnicas aprendidas de los árabes, asombró poderosamente a sus

> contemporáneos hasta el punto de ser proclamado oficialmente por el emperador Federico II como Stupor Mundi (De Guzmán, 2010, p.4).

En matemáticas, la sucesión de Fibonacci que comienza con los números 0 y 1, y a partir de estos, «cada término es la suma de los dos anteriores», es la relación de recurrencia que la define:

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377,…

La sucesión fue descrita por Fibonacci como la solución a un problema de la cría de conejos: "Cierto hombre tenía una pareja de conejos juntos en un lugar cerrado y uno desea saber cuántos son creados a partir de este par en un año cuando es su naturaleza parir otro par en un simple mes, y en el segundo mes los nacidos parir también".

La sucesión de Fibonacci tiene numerosas aplicaciones en ciencias de la computación, matemáticas y teoría de juegos. También aparece en configuraciones biológicas, como por ejemplo en las ramas de los árboles, en la disposición de las hojas en el tallo, en la flora de la alcachofa y en el arreglo de un cono.

> En la edad moderna Gerónimo Cardano (1501-1576), el mejor matemático de su tiempo, escribió el Líber De Ludo Aleae, un libro sobre juegos de azar, con el que anticipó en más de un siglo a Pascal y Fermat en el tratamiento matemático de la probabilidad.
>
> El famoso problema del Caballero de Meré, consistente en saber cómo deben ser las apuestas de los jugadores que, habiendo de alcanzar n puntos con sus dados, uno ha obtenido p y el otro q en una primera jugada, fue

propuesto por Antoine Gobaud (1610-1685) conocido como Caballero de Meré a Pascal (1623-1662).

Leibniz (1646-1716) fue un gran promotor de la actividad lúdica intelectual: “Nunca son los hombres más ingeniosos que en la invención de los juego. Sería deseable que se hiciese un curso entero de juegos, tratados matemáticamente”, escribía en una carta en 1715. En otra carta en 1716 comenta lo mucho que le agrada el ya entonces popular solitario de la cruz, y lo interesante que le resulta el jugarlo al revés.

Johann Bernoulli (1667-1748) lanza el problema de la braquistócrona como un reto a los mejores matemáticos de su tiempo. En este duelo participaron con ardor nada menos que Jakod Bernoulli, Leibnitz (1646-1716), Newton (1643-1727), y Huygens (1629-1695).

Hamilton (1805-1865) sólo recibió dinero por un juego llamado “Viaje por el Mundo”. Se trataba de efectuar por todos los vértices de un dodecaedro regular, las ciudades de ese mundo, un viaje que no repitiese visitas a ciudades circulando por los bordes del dodecaedro y volviendo al punto de partida (camino Hamiltoniano).

Karl Gauss (1777-1855) se dice que era un gran aficionado a jugar a las cartas y que cada día anotaba cuidadosamente las manos que recibía para analizarlas después estadísticamente. Hilbert (1862-1943) tiene un teorema que tiene que ver con los juegos de disección: dos polígonos de la misma área admiten disecciones en el mismo número de triángulos iguales.

John Von Neumann (1903-1957), escribió con Oskar Morgenstern en 1944 un libro titulado Teoría de Juegos y Conducta Económica, en él se analizan los juegos de estrategia donde aparece en particular el teorema de minimax, pieza fundamental para los desarrollos matemáticos sobre el comportamiento económico (De Guzmán, 2010, pp.4-5).

2.4. Fundamento matemático de los juegos

Los juegos matemáticos tienen un contenido matemático profundo y sugerente, una porción de la matemática tiene un sabor lúdico que la asimila extraordinariamente al juego. La aritmética está inmersa en los cuadrados, cambios de monedas, juegos sobre pesadas, adivinación de números, etc. La teoría elemental de números es la base de muchos juegos de adivinación fundamentados en criterios de divisibilidad, aparece en juegos que implican diferentes sistemas de numeración. La combinatoria es el núcleo básico de todos los juegos en los que se pide enumerar las distintas formas de realizar una tarea, muchos de ellos sin resolver aún, como el de averiguar el número de formas distintas de plegar una tira de sellos, el problema del viajante. El álgebra interviene en muchos acertijos sobre edades, medidas, en el famoso juego de los 15, en el problema de las ocho reinas. La teoría de grupos, en particular el grupo de Klein, es una herramienta importante para analizar ciertos juegos con fichas en un tablero. La teoría de grafos es una herramienta que aparece más frecuentemente en el análisis matemático de los juegos. Nació con los puentes de Königsberg, se encuentra en el juego de Hamilton, da la estrategia adecuada para los acertijos de cruces de ríos, como el del pastor, la oveja, la col y el lobo, el de los maridos celosos, y otros como el de los cuatro cubos de la locura instantánea. La teoría de matrices está íntimamente relacionada con los grafos y juegos emparentados con ellos. Diversas formas de topología aparecen en juegos como el de las tres granjas y tres pozos, la banda de Mobius, problemas de coloración, nudos, rompecabezas de alambre y anillas. La teoría del punto fijo en acertijos como el del monje que sube a la montaña, el pañuelo que se arruga y se coloca sobre una réplica suya sin arrugar. La geometría aparece en innumerables formas de falacias, disecciones, transformación de configuraciones con cerillas. La probabilidad es la base de todos los juegos de azar. La lógica da lugar a un sinfín de acertijos y paradojas muy interesantes que llaman la atención por su profundidad y por la luz que arrojan sobre la estructura misma del pensamiento y del lenguaje (De Guzmán, 2010, p.6).

2.5. Importancia de los juegos recreativos

Los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático es una fuente de ideas con innumerables ventajas que motivarán y despertarán el interés por resolverlos, exigiéndolos concentración, dedicación y una gran capacidad razonativa para resolverlos.

La importancia de los juegos recreativos radica en su eficacia para desarrollar la mente y sus potencialidades intelectuales, sensitivas, afectivas, creativas y de concentración.

Es un hecho frecuente que muchas personas que se declaran incapaces de toda la vida para la matemática, disfrutan intensamente con juegos recreativos cuya estructura en poco difiere de la matemática. Bien se puede pensar que muchas de estas personas, adecuadamente motivadas desde un principio, tal vez a través de esos mismos elementos lúdicos aprendan los conocimientos básicos de la matemática y de esta forma ser guiados para adquirir conocimientos matemáticos más complicados (Ortiz, 2005, p.36)

2.6. Utilización de juegos recreativos en la enseñanza de la matemática

En el juego recreativo se busca la diversión y la posibilidad de entrar en acción rápidamente. Muchos problemas matemáticos, incluso aquellos abstractos, pueden ser abordados de forma sencilla e ingenua, pero la matemática no es solo diversión, sino ciencia e instrumento de explicación de su realidad propia mental y externa y así ha de plantearse, no las preguntas que quiere, sino las que su realidad le plantea de modo natural. Por eso muchas de sus cuestiones espontáneas le estimulan a crear instrumentos sutiles cuya adquisición no es tarea fácil.

Sin embargo, es claro que, en la labor matemática con los estudiantes, el sabor a juego puede quedar impregnado y hacer la clase mucho más motivada, estimulante, incluso agradable y, para algunas más divertidas.

En la clase de matemáticas, es evidente que el diseño, la selección y la gestión de actividades de aprendizaje constituyen un elemento clave para el desarrollo del proceso de aprendizaje. En este sentido los juegos recreativos pueden constituirse en una herramienta pedagógica de gran valor (Deulofeu, 2011).

2.7. Jugando para desarrollar el razonamiento lógico- matemático

El razonamiento lógico es la forma del pensamiento mediante la cual, partiendo de uno o varios juicios verdaderos, denominados premisas, llegamos a una conclusión conforme a ciertas reglas. Las capacidades que favorecen el pensamiento lógico-matemático son la atención, la memoria, la creatividad y la reflexión:

La atención se trata de un proceso mediante el cual seleccionamos la información, para procesar sólo la parte que nos interesa de la multitud de datos que nos llegan.

La memoria es la capacidad o habilidad mental que posibilita el recuerdo de experiencias o acontecimientos previamente vividos.

La creatividad se trata del proceso mental que produce una idea original, una respuesta no convencional ante la aparición de un problema o situación.

La reflexión, nos permite captar mejor la propuesta del problema y dar una respuesta con más posibilidades de éxito (Vidigal, 2010, p.38)

La selección de juegos recreativos donde se ponga de manifiesto la idea de reto, de sorpresa, de descubrimiento y de creatividad en su resolución puede ser de gran ayuda para plantear problemas que consideramos matemáticamente significativos para el desarrollo del razonamiento lógico-matemático

2.8. Algunos juegos recreativos

2.8.1. Adivinar los puntos de tres dados

Lanzan tres dados al aire y quieres saber y decirle cuántos puntos tiene cada dado, dile que multiplique por 2 los puntos de un dado y que a este doble le añada 5. Que multiplique el total por 5 y que añada 10, así como el número de puntos del segundo dado, a este producto. Que multiplique el resultado por 10 y que al producto le añada los puntos del tercer dado y que te diga el resultado. Para que puedas adivinar los puntos de cada dado, debes restar 350. Entonces, las centenas de esta diferencia son los puntos del primer dado, las decenas son los puntos del segundo dado y las unidades son los puntos del tercer dado.

Justificación matemática

Supongamos que **x, y** y **z** son los puntos que salieron al ser lanzados los tres dados respectivamente, tenga en cuenta que: $1 \leq \mathbf{x} \leq 6$, $1 \leq \mathbf{y} \leq 6$, $1 \leq \mathbf{z} \leq 6$ con **x, y** y **z** números enteros. Por las condiciones del problema la expresión resultante es:

$[(2x + 5)5 + 10 + y]10 + z = (10x + 25 + 10 + x)10 + z = 100x + 10y + z +350$

Ahora para poder decir cuáles son los números, debemos restar 350 quedándonos: 100x + 10y + z, que es la representación del número **xyz** en función de las centenas, decenas y unidades.

Por lo tanto **x** es el número que salió en el primer dado, **y** en el segundo y **z** en el tercero (Meavilla, 2008, p.222),

2.8.2. Adivinar el número que alguien ha pensado

El número pensado eleve al cuadrado y a su cuadrado añada el cuádruple del mismo número y sume 4, extraiga la raíz cuadrada de todo eso y restar 2. El resultado será el número que pensó al inicio.

Justificación matemática

Supongamos que x es el número pensado.

Elevemos al cuadrado: x^2

Sumemos el doble del número, y más 4: $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$

Saquemos la raíz cuadrada de ese resultado: x+2

A esa raíz le restamos 2: x

Como pudimos comprobar matemáticamente siempre llegaremos al número pensado, siempre y cuando hagamos todos los pasos y cálculos en forma correcta

2.8.3. La cifra tachada

Una persona piensa un número de varias cifras, por ejemplo el 847. Propóngale que halle la suma de los valores absolutos de las cifras de, este número (8 + 4 + 7 = 19) y que la reste del número pensado. Le resultará: 847 - 19 = 828**.** Que tache una cifra cualquiera del resultado obtenido, la que desee, y que le comunique a usted las restantes. Le dirá usted inmediatamente la cifra tachada, aunque no sepa el número pensado y no haya visto lo que ha hecho con él. ¿En qué forma se hace esto y en qué consiste la clave del truco?

La solución es muy fácil. Se busca una cifra que adicionada a las que le comunica su interlocutor forme el número más próximo divisible por 9. Si, por ejemplo, en el número 828 ha sido tachada la primera cifra (8) y le comunica a usted las cifras 2 y 8, usted, una vez sumados 2 + 8 = 10, calcula el número más próximo divisible por 9, que es el 18, como para 10 le falta 8. Esta es la cifra tachada.

¿Por qué resulta así? Porque si a cualquier número le restamos la suma de sus cifras, debe quedar un número divisible por 9; en otras palabras, un número en el que la suma de los valores absolutos de sus cifras se divida por 9. En efecto, representemos por **c** la cifra de las centenas del número pensado, por **d** la de las decenas y por **u** la de las unidades. Este número tendrá en total:

$$100c + 10d + u \quad \text{unidades}$$

Restémosle la suma de los valores de sus cifras c + d + u. Obtendremos:

$100c + 10d + u - (c + d + u) = 99c + 9d = 9(11c + d)$

Pero 9(11c + d) está claro que es divisible por 9; por lo tanto, al restar de un número la suma de los valores de sus cifras, debe resultar siempre un número divisible por 9, sin residuo.

Al presentar el truco, puede suceder que la suma de las cifras que le comuniquen sea divisible entre nueve (por ejemplo 4 y 5). Esto indica que la cifra tachada es o un cero o un nueve. Así, que debe usted responder cero o nueve (Perelmann, 1968, pp.112-113).

2.8.4. Adivinar un número sin preguntar nada

Propone usted a alguien que piense un número cualquiera de tres cifras que no termine en cero, y le pide que ponga las cifras en orden contrario. Hecho esto, debe restar del número mayor el menor y la diferencia obtenida sumarla con ella misma, pero con las cifras escritas en orden contrario. Sin preguntar nada, adivina usted el número resultante.

Si, por ejemplo, se había pensado el número 467, deben realizarse las siguientes operaciones:

$$467; \quad 764; \quad 764 - 467 = 297; \quad 297 + 792 = 1089$$

Este resultado final, 1089, es el que comunica usted. ¿Cómo puede saberlo?

Analicemos el problema en su aspecto general.

Tomemos un número con las cifras a, b y c.

El número será: 100a + l0b + c.

El número con las cifras en orden contrario será: 100c + l0b + a.

La diferencia entre el primero y el segundo será igual a 99a - 99c.

Hagamos las siguientes transformaciones:

99a - 99c = 99 (a - c) = 100 (a - c) - (a - c)

= 100 (a - c) - 100 + 100 - 10 + 10 - a + c

= 100 (a - c - 1) + 90 + (10 - a + c).

Es decir, que la diferencia consta de las tres cifras siguientes:

cifra de las centenas: a - c – 1

decenas: 9

unidades: 10 + c - a

El número con las cifras en orden contrario se representa así:

100 (10 + c - a) + 90 + (a - c - 1)

Sumando las expresiones:

$$100 (a - c- 1) + 90 + 10 + c - a + 100(10 + c - a) + 90 + a - c - 1.$$

Resulta: $100 \times 9 + 180 + 9 = 1089$.

Cualesquiera que sean las cifras a, b, c, una vez hechas las operaciones mencionadas se obtendrá siempre el mismo número: 1089. Por ello no es difícil adivinar el resultado de estos cálculos. Está claro que este truco no debe presentarse a la misma persona dos veces porque entonces el secreto quedará descubierto (Perelmann, 1968, pp.114-115).

Gardner, decía: “El mejor método para mantener despierto a un estudiante es seguramente proponerle un juego matemático intrigante, un pasatiempo, un truco mágico, una chanza, una paradoja, un trabalenguas o cualquiera de esas mil cosas que los profesores aburridos suelen rehuir porque piensan que son frivolidades”.

2.8.5. Matriz mágica

En (Gardner, 1988, p. 15-18) encontramos la primera referencia a los juegos de magia. Bajo el título “Magic with a matrix”, describe un original juego de adivinación de una suma con números elegidos de forma “arbitraria” por un espectador. Observe la tabla de la figura adjunta:

Tabla 2-3 Matriz Mágica

19	8	11	25	7
12	1	4	18	0
16	5	8	22	4
21	10	13	27	9
14	3	6	20	2

Selecciona cualquier número trazando un círculo alrededor de él. Tacha ahora el resto de los números que están en su misma fila y columna. Repite la misma operación: traza un círculo alrededor de cualquier número no tachado y tacha todos los números que están en su misma fila y columna. Al repetir la operación cinco veces, habrá cinco números con un círculo alrededor. Suma todos ellos y comprueba que el resultado es 57. ¿Cómo puede saberse de antemano?

La explicación es sencilla, basta observar que el cuadro anterior es simplemente la tabla de sumar de ciertos números, donde se han ocultado los sumandos. La tabla completa sería así:

Tabla 2-4 Tabla completa de la matriz mágica

+	12	1	4	18	0
7	19	8	11	25	7
0	12	1	4	18	0
4	16	5	8	22	4
9	21	10	13	27	9
2	14	3	6	20	2

De este modo, el proceso anterior hace que la suma de los números resultantes sea siempre la suma de los números que encabezan la tabla (Ezquerra, 2011, pp. 21-22).

2.8.6. Sucesión mágica

(Gardner, 1995, p. 100), en el capítulo 19 describe algunas propiedades mágicas del número cinco. A modo de ejemplo, describiremos la siguiente.

Sean x_1 y x_2 dos números reales positivos arbitrarios. A continuación construimos la sucesión recurrente: $x_{n+1} = \frac{x_n + 1}{x_{n-1}}$, n=2,3,…

La sucesión no es convergente ya que, curiosamente, se trata de una sucesión 5-periódica: todos los valores se repiten cada cinco términos (Ezquerra, 2011, p. 24).

Por ejemplo supongamos que $x_1 = 2$ y $x_2 = 7$ entonces la sucesión mágica sería:

$$2,\ 7,\ 4,\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{7},\qquad 2,\ 7,\ 4,\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{7},\qquad 2,\ 7,\ 4,\ \frac{5}{7},\ \frac{3}{7},\ \ldots$$

Ahora supongamos que $x_1 = \frac{3}{5}$ y $x_2 = -\frac{7}{4}$ la sucesión sería:

$$\frac{3}{5},-\frac{7}{4},-\frac{5}{4},\frac{1}{7},-\frac{32}{35},\qquad \frac{3}{5},-\frac{7}{4},-\frac{5}{4},\frac{1}{7},-\frac{32}{35},\qquad \frac{3}{5},-\frac{7}{4},-\frac{5}{4},\frac{1}{7},-\frac{32}{35},\ldots$$

Los libros de Gardner están repletos de métodos novedosos de utilización de rompecabezas y juegos con los que introduce conceptos matemáticos.

Así, por ejemplo, la paradoja de Zenón le servía de excusa para llevar la discusión hacia los conceptos del continuo y del límite, con la geometría proyectiva y las sombras que produce el giro de una rueda iluminada por una lámpara introducía la idea del infinito. Peirce reconoció, antes de 1900, el gran valor de la topología elemental para estimular la imaginación matemática de un niño. La fórmula de Euler para los esqueletos de los poliedros, la teoría de nudos, la teoría de grafos, la conjetura del mapa de los cuatro colores (que Peirce trató en vano de probar durante varias décadas), la banda de Möbius, son sólo algunos de los temas topológicos que usó para excitar el interés de los estudiantes. Le encantaba pedir a los profesores que le dejaran instruir grupos de jóvenes que detestaban las matemáticas y parecían incapaces de aprenderlas. Para enseñar aritmética, Peirce recomendaba el uso constante de cuentas, la introducción temprana de la notación binaria, el uso de tarjetas numeradas y otros dispositivos que son ahora comunes en la instrucción escolar (Ezquerra, 2011, p. 27).

Las **falacias,** afirmaciones absurdas y contradictorias que aparentan ser consecuencia lógica de un razonamiento correcto, pero que esconden un error en el mismo, son las paradojas más inocuas y, probablemente, las más divertidas. A veces se presentan en forma de acertijo o problema, una especie de reto al lector para que descubra dónde se encuentra el error en el razonamiento. Su uso razonado puede ser muy útil en la enseñanza: la confusión e inseguridad que provocan en el estudiante pueden ser utilizadas para despertar el espíritu crítico y aumentar la capacidad de análisis.

2.8.7. Falacias de cálculo

1. La función $f(x)=\frac{1}{x}$ tiene derivada $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ en todo su dominio de definición. Por tanto, f es una función decreciente en el dominio ($R-\{0\}$).

Sabemos que -1 < 1, y f(-1) = -1 < 1 = f(1) entonces f(-1) < f(1)

Si integramos por partes $\int \frac{1}{x}dx$ con $\mathrm{u}=\frac{1}{x}$ y $\mathrm{dv}=\mathrm{dx}$ obtenemos:

$$\int \frac{1}{x}dx=\frac{1}{x}.x-\int\left(-\frac{1}{x^2}\right).xdx,$$

$$\int \frac{1}{x}dx=1+\int \frac{1}{x}dx$$

$$0=1$$

2. Si f es una función arbitraria y en la integral $I = \int_0^{\pi} f(\theta)\cos\theta \, d\theta$ hacemos el cambio $t = sen\theta$ de donde $dt = \cos\theta \, d\theta$ y como $sen\,0 = sen\,\pi = 0$ se tiene que: $I = \int_0^0 f(arc\,sen\,t)\,dt = 0$. En particular, tomando $f(\theta) = \cos\theta$, tenemos:

$$0 = I = \int_0^{\pi} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} (1+\cos 2\theta)d\theta = \left[\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}sen\,2\theta\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}$$

Algunos alumnos utilizan argumentos similares para resolver algún ejercicio, sin percatarse de las consecuencias de los mismos.

La utilización indiscriminada de los automatismos formales (basada en una aceptación implícita de la ley de continuidad) dio lugar a un sin fin de controversias entre los matemáticos. Por ejemplo, Johann Bernoulli sostenía que $\log(-n) = \log(n)$, ya que:

$$\begin{aligned} \log(-n)^2 &= \log(n)^2 \\ 2\log(-n) &= 2\log(n) \\ \log(-n) &= \log(n) \end{aligned}$$

Otro de sus argumentos estaba basado en la idea de integral como antiderivada:

Como $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{d(-x)}{-x}$ entonces $\begin{aligned} \int \frac{1}{x}dx &= \int \frac{1}{-x}d(-x) \\ \ln(x) &= \ln(-x) \end{aligned}$

Los ejemplos anteriores son muy simples, y reposan esencialmente en una utilización formal de algún resultado teórico, olvidándose de las hipótesis de validez del mismo. Sin embargo, argumentos parecidos a los anteriores provocaron grandes controversias, entre los matemáticos de los siglos XVI al XVIII y, que contribuyeron en gran medida a la clarificación de conceptos básicos en la Matemática, como son los de función, límite, derivada o integral. Y esta es una de las principales funciones de las paradojas en matemáticas:

estimular el espíritu crítico y contribuir a clarificar y fundamentar sólidamente las nociones y técnicas utilizadas (www.mat.ucm.es, s.f.)

2.8.8. Puzzles de cuadraturas

Los puzles y rompecabezas ocupan un lugar primordial entre los juegos predilectos de todas las edades. En relación con las Matemáticas, muchas divisiones de figuras están en la base de materiales, tanto en su aspecto lúdico para jugar, como para utilizarlos didácticamente.

El más conocido de los puzles es el Tangram Chino llamado "Chi Chiao Pan", que significa tabla de la sabiduría, consta de siete piezas que salen de cortar un cuadrado en cinco triángulos de diferentes formas, un cuadrado y un paralelogramo. El juego consiste en usar todas las piezas para construir diferentes formas

La cuadratura del triángulo

Una primera aproximación la dio el especialista inglés en juegos Henry Ernest Dudeney (1857-1930), quien estudió la cuadratura del triángulo equilátero, presentando en 1905 en la Real Sociedad de Londres, un modelo construido en caoba. Con regla y compás, como exigían los antiguos griegos, Dudeney encontró la manera de dividir un triángulo equilátero en cuatro piezas que también forman un cuadrado. En su diseño podemos seguir los siguientes pasos:

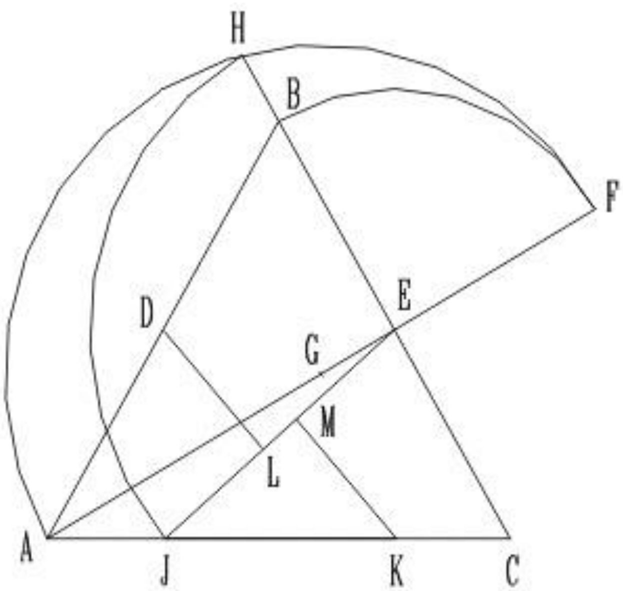


Figura 2-1 División del triángulo en cuatro piezas

1. Dibujar el triángulo equilátero ABC.

2. Obtener los puntos medios de AB y BC (serán los puntos D y E).

3. Prolongar AE hasta F, para que EF= EB

4. Hallar el punto medio de AF (será el punto G).

5. Con centro en G dibujar el arco AF.

6. Prolongar EB hasta cortar el arco, obteniendo el punto H

7. Con centro en E dibujar un arco de radio EH. Llamar J al punto en que corte al lado AC.

8. Trazar el segmento JE.

9. Sobre la base AC del triángulo marcar K, de forma que JK = BE.

10. Dibujar las perpendiculares sobre JE desde D y K, obteniendo los puntos L y M

11. El triángulo queda dividido en cuatro piezas: los tres cuadriláteros BDLE, DLJA, ECKM y el triángulo JMK, con las que podemos formar un cuadrado.

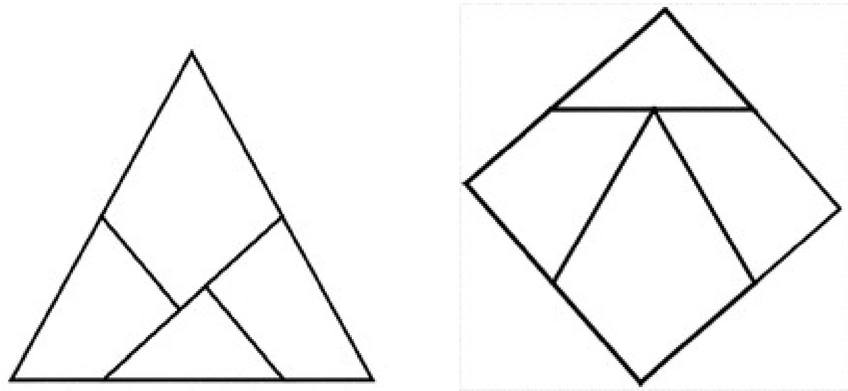


Figura 2-2 Cuadratura del triángulo y su reordenación de piezas en un cuadrado

Esta cuadratura del triángulo equilátero es quizás la más conocida, hasta el punto de que se puede encontrar en anuncios publicitarios.

Cuadraturas de otros polígonos regulares

Se incluye otras cuadraturas sin especificar la construcción completa con regla y compás. Para trabajar con ellas basta copiar los dibujos, recortarlos y jugar con las piezas obtenidas como un puzle cualquiera.

Cuadratura del pentágono

Existen varias divisiones del pentágono que después de reordenar las piezas dan lugar a un cuadrado, esta es realizada también por Dudeney.

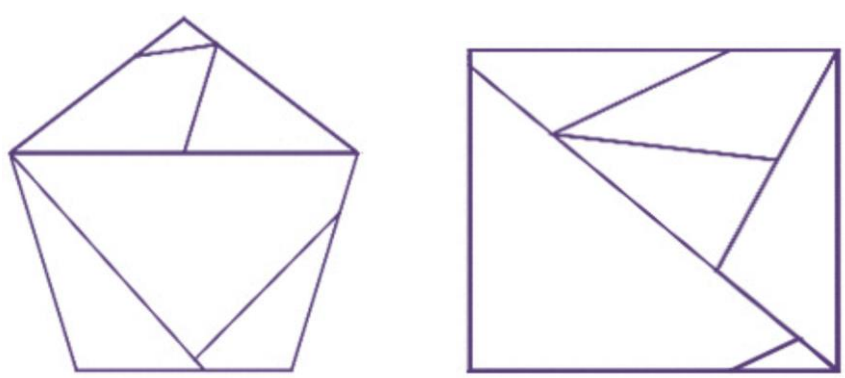


Figura 2-3 Cuadratura del pentágono y su reordenación de piezas en un cuadrado

Cuadratura del hexágono

Del hexágono también existen varias divisiones, una de ellas es ésta.

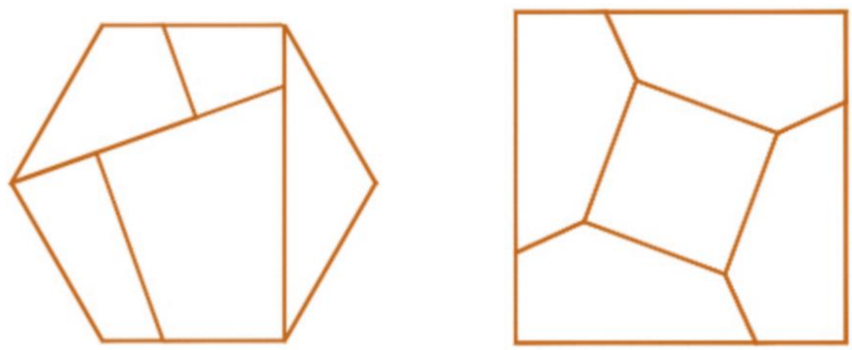


Figura 2-4 Cuadratura del hexágono y su reordenación de piezas en un cuadrado

Si nos preguntamos qué polígonos admiten una cuadratura, el teorema de Wallace-Bolyai-Gerwein responde a ésta pregunta: Dados dos polígonos de igual área existe una disección de uno en un número finito de piezas poligonales que recubre exactamente el otro. Todos los polígonos se pueden cuadrar; el interés radica en encontrar cuadraturas con el mínimo número de piezas o que sean especialmente bellas (por la forma de sus piezas, su simetría).

Se puede utilizar este material como puzles, es decir, entregar las piezas troqueladas a los alumnos y pedirles que construyan por un lado el cuadrado y por otro el polígono que le corresponda. Este planteamiento es muy atractivo y motivante para quien se enfrenta a ese reto (Grupo Alquerque. 2006).

En el libro el "EL HOMBRE QUE CALCULABA" se encuentran algunos problemas clásicos que atraen la atención y que envuelven por su forma de contar y resolver, he aquí uno de ellos.

2.8.9. Las ocho monedas de oro

El amigo de Beremiz nos cuenta que: Un rico jeque, malherido y hambriento nos propone pagar 8 monedas de oro por los ocho panes que llevaba Beremiz y Yo. Se llamaba Salem Nassair, y era uno de los más ricos mercaderes de Bagdad. Al regresar de Basora, pocos días antes, con una gran caravana, por el camino de el-Hilleh, fue atacado por una chusma de nómadas persas del desierto. La caravana fue saqueada y casi todos sus componentes perecieron a manos de los beduinos. Él consiguió escapar milagrosamente, se ocultó en la arena, entre los cadáveres de sus esclavos. Al concluir la narración de su desgracia, nos preguntó con voz ansiosa: ¿Traéis quizá algo de comer? Me estoy muriendo de hambre…

Me quedan tres panes –respondí. Yo llevo cinco, dijo a mi lado el Hombre que Calculaba. Pues bien, sugirió el jeque, yo os ruego que juntemos esos panes y hagamos un reparto equitativo. Cuando llegue a Bagdad prometo pagar con ocho monedas de oro por el pan que coma.

Al llegar a Bagdad, nos dijo os agradezco por el gran auxilio que me habéis prestado. Y para cumplir la palabra dada, os pagaré lo que tan generosamente disteis.

Y dirigiéndose al Hombre que Calculaba le dijo: Recibirás cinco monedas por los cinco panes.

Y volviéndose a mí, añadió: Y tú, ¡Oh, bagdalí!, recibirás tres monedas por los tres panes.

Mas con gran sorpresa mía, el calculador objetó respetuoso: ¡Perdón, oh, jeque! La división, hecha de ese modo, puede ser muy sencilla, pero no es matemáticamente cierta. Si yo entregué 5 panes he de recibir 7 monedas, mi compañero bagdalí, que dio 3 panes, debe recibir una sola moneda.

¡Por el nombre de Mahoma!, ¿Cómo vas a justificar tan disparatado reparto? Si contribuiste con 5 panes ¿por qué exiges 7 monedas?, y si tu amigo contribuyó con 3 panes ¿por qué afirmas que él debe recibir solo una moneda?

El Hombre que Calculaba se acercó y habló así:

Voy a demostrar que la división de las 8 monedas por mí propuesta es matemáticamente cierta. Cuando durante el viaje, teníamos hambre, yo sacaba un pan de la caja en que estaban guardados, lo dividía en tres pedazos, y cada uno de nosotros comía uno. Si yo aporté 5 panes, aporté, por consiguiente, 15 pedazos ¿no es verdad? Si mi compañero aportó 3 panes, contribuyó con 9 pedazos. Hubo así un total de 24 pedazos, correspondiendo por tanto 8 pedazos a cada uno. De los 15 pedazos que aporté, comí 8; luego di en realidad 7. Mi compañero aportó, como dijo, 9 pedazos, y comió también 8; luego solo dio 1. Los 7 que yo di y el restante con que contribuyó al bagdalí formaron los 8 que corresponden al jeque Salem Nassair. Luego, es justo que yo reciba siete monedas y mi compañero solo una. El gran jeque, después de hacer los mayores elogios del Hombre que Calculaba, entrego las siete monedas, pues a mí, por derecho, solo me correspondía una. La demostración presentada por el matemático era lógica, perfecta e incontestable. Sin embargo, si bien el reparto resultó equitativo, no debió satisfacer plenamente a Beremiz, pues éste dirigiéndose nuevamente al sorprendido jeque, añadió:

Esta división, que yo he propuesto, de siete monedas para mí y una para mi amigo es, como demostré ya, matemáticamente cierta, pero no perfecta a los ojos de Dios. Y juntando las monedas nuevamente las dividió en dos partes iguales. Una me la dio a mí –cuatro monedas- y él se quedó con la otra.

Este es un ejemplo de tas tres divisiones de Beremiz: la división simple, la división exacta y la división perfecta (Malba, 2000, pp. 16-19).

2.8.10. Cuadrados mágicos

Se debe dividir un cuadrado en cierto número de casillas también cuadradas, y en cada una de ellas se colocan números sin repetir, de modo de obtener siempre la misma suma, en cada fila, en cada columna y cada diagonal.

1. Coloquemos los números 1 al 16 en un cuadrado de tal forma que en cada fila, columna y diagonal la suma sea 34

Tabla 2-5 Cuadrado mágico de 4x4, cuya suma es 34

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

2. Coloquemos los números 1 al 25 en un cuadrado de tal forma que en cada fila, columna y diagonal la suma sea 65 (Malba, 2000, pp. 250-251).

Tabla 2- 6 Cuadrado mágico de 5x5, cuya suma es 65

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	13	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

2.8.11. Los siete puentes de Königsberg

Euler (1707-1782) es considerado el originador de la teoría de grafos, cuando en 1736 resolvió un problema famoso en su tiempo, llamado el problema de los puentes de Königsberg. El río Pregel formaba islas en esa ciudad, y había 7 puentes:

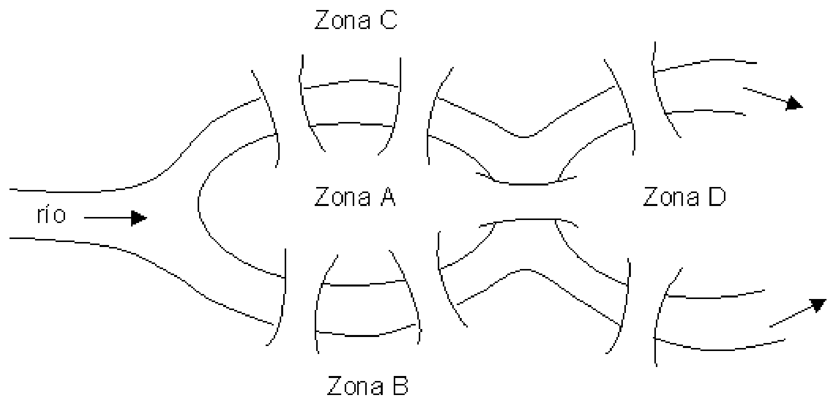


Figura 2-5 Una representación de los siete puentes de Königsberg

El problema consistía en comenzar en cualquiera de las cuatro zonas de tierra (A, B, C o D), atravesar sólo una vez por cada puente y volver al punto de partida.

Para resolver este problema, Euler reemplazó cada zona de tierra por un punto, y cada puente por una línea uniendo los puntos correspondientes y produciendo un *grafo.*

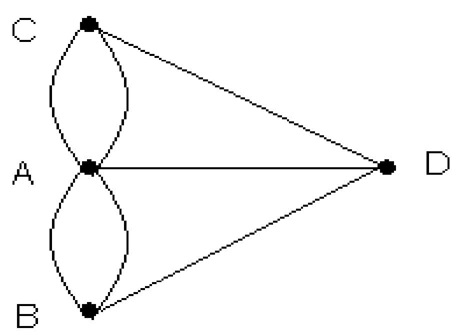


Figura 2-6 Grafo con vértices de grado impar

El problema se ha convertido entonces en demostrar que el grafo no se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel, ni pasar dos veces por el mismo arco (users.dcc.uchile.cl, s.f.).

Al analizar el grafo asociado al problema de los puentes de Königsberg, se observa que hay tres vértices con grado 3 y uno con grado 5. Como todos los vértices son impares el problema es imposible de resolver, conclusión a la que llego Euler.

2.8.12. Figuras de un solo trazo

Para construir una figura de un solo trazo, es decir, sin levantar el lápiz del papel ni pasar dos veces por el mismo lugar, debemos identificar la cantidad de vértices pares (punto en el cual concurren un número par de líneas) e impares (punto en el cual concurren un número impar de líneas) que tiene la figura.

Si todos los vértices son pares, la figura puede ser dibujada de un solo trazo.

Si tiene dos vértices impares, la figura puede ser dibujada de un solo trazo. Se comienza en un vértice impar y se termina en el otro vértice impar.

Si tiene más de 2 vértices impares, la figura no se puede dibujar de un solo trazo

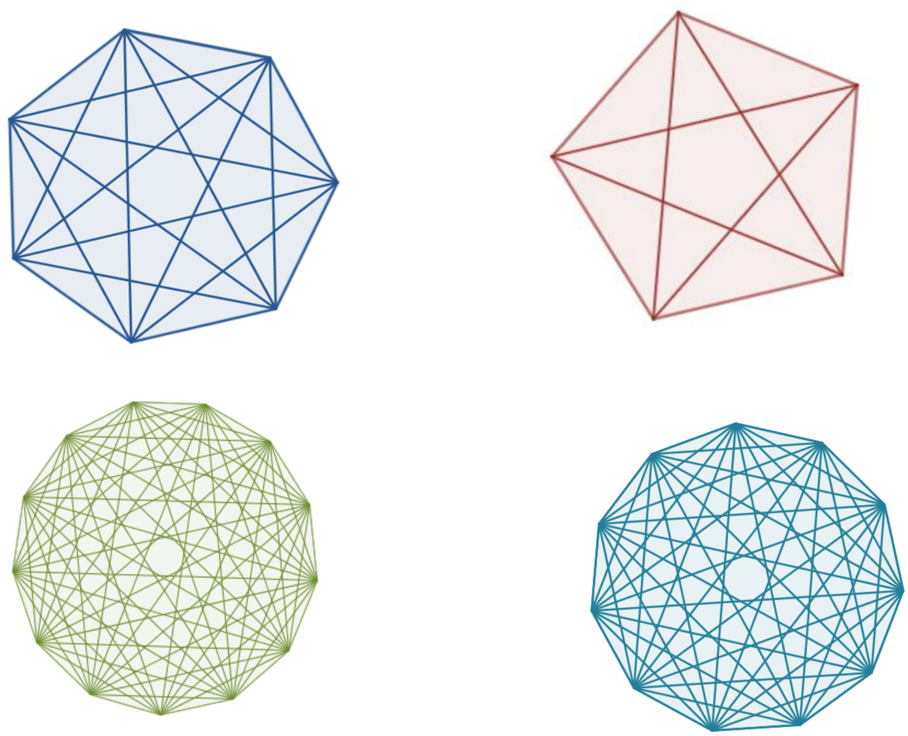


Figura 2-7 Figuras de un solo trazo 1

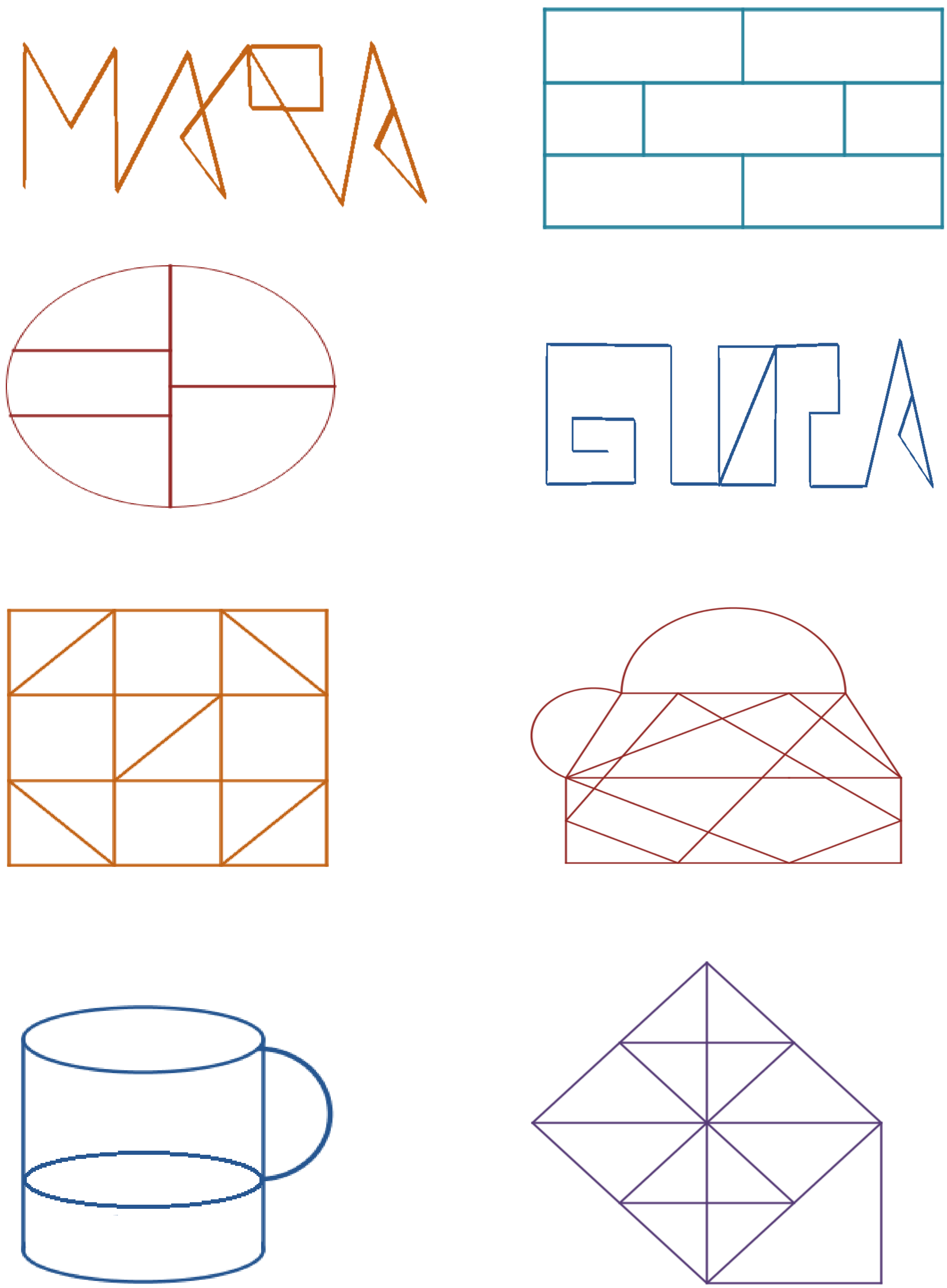


Figura 2-8 Figuras de un solo trazo 2

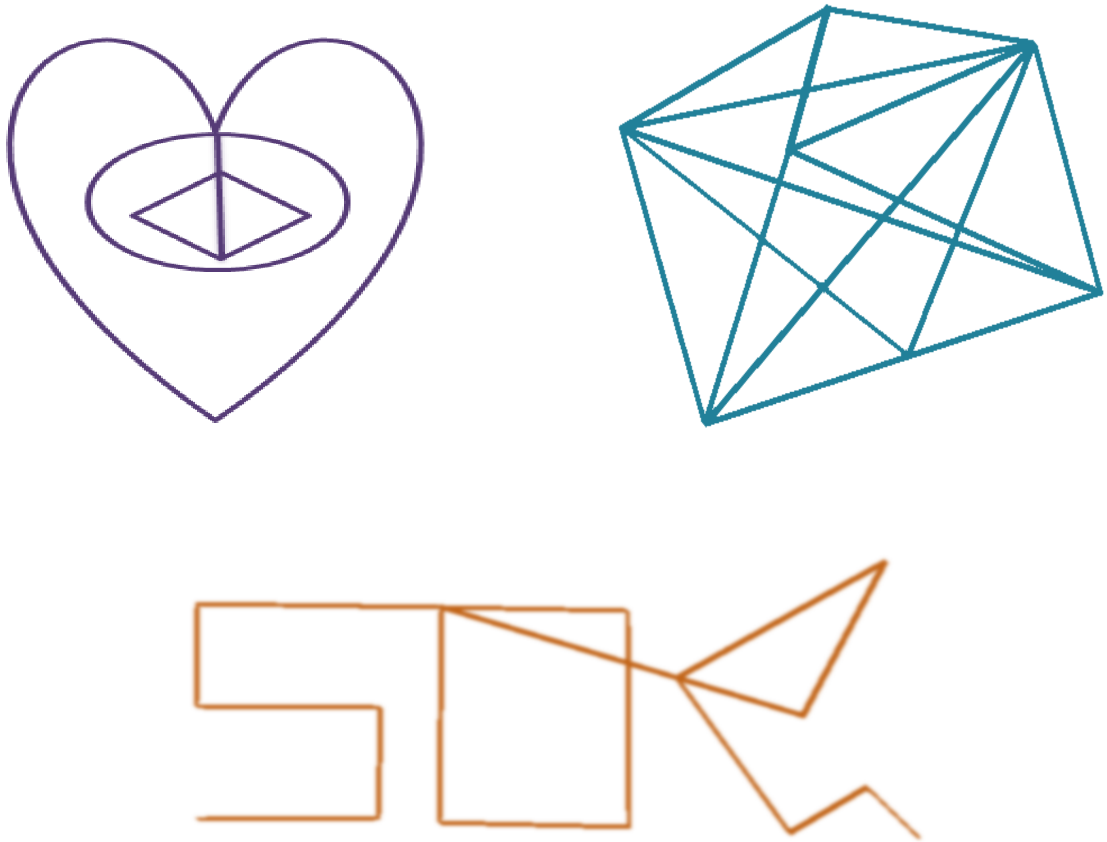


Figura 2-9 Figuras de un solo trazo 3

CAPÍTULO III

MARCO METODOLÓGICO

3.1. Población

La población considerada fue los 27 estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH, periodo Marzo-Julio 2013.

3.2. Muestra

Para hallar el tamaño de la muestra se utilizó:

$$n = \frac{K^2 Npq}{e^2 (N-1) + K^2 pq}$$

N = Tamaño de la población.

K = Constante que depende del nivel de confianza que asignemos.

p = Proporción de individuos que poseen en la población la característica de estudio, este dato es generalmente desconocido por lo que se usa p=0.5.

q = Proporción de individuos que no poseen esa característica, es decir $q = 1 - p$.

e = Límite aceptable de error muestral, suele utilizarse un valor que varía entre el 1% y 9%, valor que queda a criterio del investigador.

n = tamaño de la muestra

Para la investigación se utilizó un nivel de confianza del 95 % con su valor crítico $K = 1.96, \quad N = 27, \quad p = q = 0.5 \quad y \quad e = 0.05$.

Obteniéndose un tamaño muestral de 25 estudiantes. Para la selección de la muestra se utilizó el muestreo aleatorio simple.

3.3. Tipo de Investigación

La investigación es descriptiva-explicativa, se aplicó dos Test de razonamiento lógico-matemático, el Test 1 para hacer un diagnóstico de los niveles de razonamiento en que se encuentran los estudiantes y las posibles causas o razones de esos niveles. Una vez procesados los resultados obtenidos en el Test 1 se resolvió con los estudiantes todas aquellas preguntas que obtuvieron bajos resultados de respuestas correctas.

En el proceso de la investigación se trabajó con algunos de los ejercicios recreativos que son parte de la propuesta y de la bibliografía utilizada. Para cada clase de matemáticas, durante un semestre, se escogió uno o dos juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático para ser resueltos con los estudiantes e indicar y redactar paso a paso los razonamientos lógicos que se siguen para llegar a la solución.

Los juegos para cada clase se seleccionaron por nivel de dificultad con la finalidad de determinar la influencia de estos juegos recreativos en el incremento de razonamiento lógico-matemático de los estudiantes.

También se integró equipos de tres y cuatro estudiantes para que investiguen y defiendan los tres o cuatro ejercicios que se les asignaba a cada grupo, cabe señalar que en la defensa los estudiantes debían indicar paso a paso el como llegaron a la solución.

Finalmente se aplicó el Test 2 para determinar la relación existente con el trabajo de los juegos recreativos, durante el semestre, y el desarrollo del razonamiento lógico matemático de los estudiantes. Para la calificación del

Test 2 los estudiantes tenían que redactar paso a paso los razonamientos que realizaron para llegar a la solución que lo señalaron.

3.4. Diseño de la Investigación

El diseño de la investigación es de validación del instrumento, ya que se evalúa a los estudiantes de primer semestre de la Escuela de diseño Gráfico de la ESPOCH en este instrumento, lo que ayudo a tomar decisiones.

3.5. Métodos

Método descriptivo con el propósito de hacer un análisis del nivel de razonamiento lógico-matemático que tiene los estudiantes, después de cuantificar estadísticamente los resultados obtenidos por los alumnos en los Test de razonamiento lógico-matemático 1 y 2.

Método explicativo e inductivo con la finalidad de llegar al conocimiento de sus causas, de por qué de los niveles de razonamiento lógico que poseen los estudiantes una vez que se hayan obtenido los resultados de los dos Test de razonamiento lógico-matemático aplicados a los estudiantes.

El método estadístico para la tabulación de los datos obtenidos y la validación de la hipótesis de investigación.

3.6. Técnicas

Se utilizaron los Test de razonamiento lógico-matemático 1 y 2 para la obtención de la información que permitió validar la hipótesis de investigación.

La inferencia estadística permitió extraer conclusiones de los resultados obtenidos en los Test 1 y 2, y los posibles cambios que se deben hacer en una ampliación de la investigación.

3.7. Análisis de las variables investigadas

Las variables en que se fundamenta la investigación son: la variable independiente que son los juegos de razonamiento lógico-matemático (matemática recreativa), y la variable dependiente el desarrollo del razonamiento lógico-matemático (el progreso del estudiante en el razonamiento)

Los juegos de razonamiento lógico-matemático son problemas con enunciados divertidos que desarrollan en el estudiante ingenio y creatividad. Estos problemas al ser introducidos en cada clase de matemática ayudarán a incrementar el nivel de razonamiento lógico, y harán que cada clase de matemática sea más atractiva, y que los conocimientos adquiridos sean significativos.

3.8. Comprobación de la hipótesis

Pasos para comprobar la hipótesis de investigación:

1. **Establecimiento de la hipótesis**

Planteamos la hipótesis nula Ho y alternativa Ha de la siguiente manera

Ho: El promedio de las notas del Test 1 es igual a la media de las notas del Test 2

Ha: El promedio de las notas del Test 1 es menor a la media de las notas del Test 2

Es decir:

$$H_0 : \mu_{T1} = \mu_{T2}$$

$$H_a : \mu_{T1} < \mu_{T2}$$

2. Definición del nivel de significancia

Se desea probar las hipótesis al nivel de significancia del 5%, es decir, $\alpha = 0{,}05$

3. Tamaño de la muestra y definición del test que se utiliza

El tamaño de la muestra es de 25 estudiantes, se conoce la media y la desviación estándar de la muestra, se trata de una prueba unilateral (izquierda) de la media, que no se conoce la desviación estándar poblacional, con $n < 30$, luego se aplicará el estadístico t de Student.

4. Especificación de la región rechazo y no rechazo

Las regiones de rechazo y no rechazo de Ho se definen por el valor crítico t visto en la tabla t-Student, con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, $n < 30$ y 24 (25-1) grados de libertad. El valor crítico t es igual 1.711

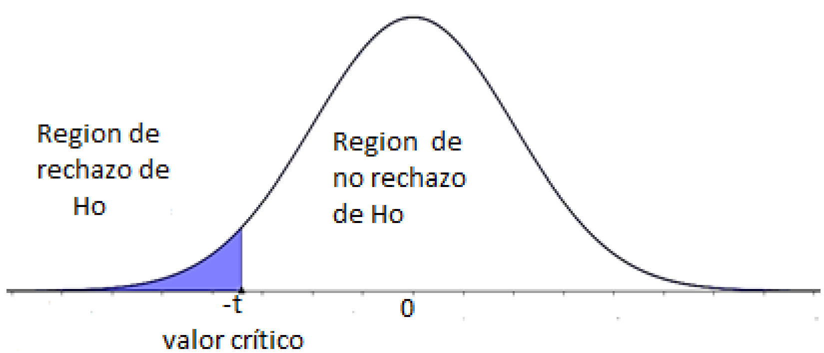


Figura 3-1 Región de rechazo y no rechazo de Ho. Prueba de una cola

5. Decisión estadística

Si el estadístico de prueba cae en la región de no rechazo, no se rechazará **Ho**, es decir, aceptamos que la media de las evaluaciones del Test 1 es igual a las del Test 2. Este resultado, implicaría que el trabajo con los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático no ayudaron a incrementar el razonamiento lógico de los estudiantes, y que la diferencia existente en las medias de las evaluaciones de los dos Test puede deberse al azar.

Si el estadístico de prueba cae en la región de rechazo, se rechaza **Ho** y se acepta la hipótesis alternativa, es decir, que la media de las evaluaciones del Test 1 es menor a las del Test 2. De éste resultado se inferiría que el trabajo con los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático ayudaron significativamente en el desarrollo del razonamiento lógico de los estudiantes. Este resultado comprobaría la hipótesis de investigación "La matemática recreativa incide significativamente en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH".

3.9. Conclusión

Solo la aplicación adecuada de los métodos y técnicas durante la investigación permitirán comprobar o rechazar la hipótesis de investigación.

3.10. Fuentes de Información

Para la fundamentación teórica de la investigación se ha consultado libros de matemática recreativa de autores que se han dedicado por muchos años a su divulgación y hacernos saber la importancia de la misma. Las fuentes consultadas se detallan en la Bibliografía.

CAPÍTULO IV

RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1. Test de encuestas a estudiantes

Para determinar los niveles de razonamiento lógico-matemático que poseen los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH se aplicaron dos Test de razonamiento lógico-matemático.

El Test de razonamiento lógico-matemático 1, cuyo objetivo principal es diagnosticar el nivel de razonamiento que poseen los estudiantes, consta de 25 preguntas de razonamiento lógico-matemático, cada pregunta es de selección múltiple y tiene 4 distractores, el tiempo promedio para resolver cada una ellas es de 3 minutos. Tiempo de duración que tuvo el estudiante para contestar el Test 1 es de 75 minutos.

Con los resultados obtenidos en el Test 1, se resolvió conjuntamente con los estudiantes todas aquellas preguntas que no pudieron contestar correctamente.

Para trabajar durante la investigación se seleccionaron juegos recreativos de la propuesta final y de la bibliografía utilizada, con diversos niveles de dificultad. En la resolución de cada juego recreativo se detallaba paso a paso los razonamientos lógicos que se hicieron para llegar a la solución. De la misma manera se debía hacer, con los ejercicios que se les asignó a cada equipo de trabajo, en la defensa de su investigación.

Para determinar los resultados del trabajo con la matemática recreativa, se aplicó un Test de razonamiento lógico-matemático 2, cuyo objetivo principal es determinar el nivel de razonamiento lógico matemático que poseen al momento de la aplicación del test., mismo que consta de 15 preguntas de razonamiento lógico-matemático, cada pregunta es de selección múltiple y tiene 4 distractores, el tiempo promedio para resolver cada una ellas de 8 minutos. Tiempo de duración que tuvo el estudiante para contestar el Test 2 es de 120 minutos. Para justificar la respuesta el estudiante tenía que redactar todos y cada uno de los razonamientos que hizo para hallar la solución.

TEST DE RAZONAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO 1

"Tomado de Santillana, Aptitud Numérica 1 y 2."

1. Si has entrado cuatro veces a un lugar, ¿cuántas veces has tenido que salir?

   a) 5 b) 4 c) 3 d) 6

2. Hay dos gatos delante de un gato, dos gatos detrás de un gato, y un gato en el medio. ¿Cuál es el menor número de gatos que hay?

   a) 3 b) 2 c) 5 d) 4

3. Un pintor cobra 25 dólares por escribir VALORA MI CASA. ¿Cuántos dólares cobrará por escribir A VOLAR CAMISA?

   a) 12 b) 20 c) 50 d) 25

4. Si COMIDA PARA DOS equivale a $50 y VIVI equivale a $8, ¿cuánto equivaldrá OSCAR DA POCA SODA A MI PRIMO DAVID?

   a) 104 b) 58 c) $54 d) 108

5. En una sala hay perros. Si cada perro mira a tres perros, ¿cuántos perros hay?

a) 5 b) 4 c) 6 d) 8

6. Yo tengo cinco hijos varones, y cada uno de ellos tiene una hermana. ¿Cuántos hijos tengo como mínimo?

a) 9 b) 7 c) 8 d) 6

7. En una empresa, a las 9h00, el gerente general trasmite en diez minutos una orden a dos empleados. Si cada empleado transmite la orden a otros dos en diez minutos, ¿cuántas personas sabrán de la orden a las 9h30, incluyendo al gerente general?

a) 14 b) 6 c) 15 d) 12

8. Hay 3 cuadernos: A, B y C; dos de ellos son azules y uno es blanco. Si A y B son de diferente color, ¿cuál de las afirmaciones es totalmente cierta?

a) A es blanco c) C es blanco

b) B es azul d) C es azul

9. Con sus cubos numéricos, Julio ha formado un número de tres cifras, que comienza por 5 y termina en 3. Su hermana cambia estas dos cifras por el número 2. ¿En cuánto disminuye el número de tres cifras?

a) 212 b) 201 c) 301 d) 102

10. Hay una promoción de una gaseosa; por tres tapas dan una gaseosa de regalo, si Marcela tiene 19 tapas, ¿cuántas gaseosas puede canjear Marcela como máximo?

a) 5 b) 10 c) 7 d) 9

11. Lily ha juntado 31 bolsas vacías de un detergente. Si con siete bolsas vacías puede canjear una bolsa llena de dicho detergente, y si utiliza el máximo número de bolsas, ¿cuántas bolsas vacías le sobran?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

12. Si por cada dos tapas de gaseosa me dan una gaseosa de regalo más dos caramelos, ¿cuántos caramelos como máximo podré tener si tengo 10 tapas y no me presto ninguna?

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20

13. ¿Cuántas ventanas hay en un edificio de seis pisos y cuatro fachadas, si en cada piso hay doce ventanas hacia cada una de las cuatro calles?

a) 388 b) 412 c) 288 d) 165

14. A un número se le extrae la raíz cuadrada. Después de agregarle uno, el resultado se multiplica por tres y se obtiene 12. ¿Cuál es el número?

a) 8 b) 9 c) 16 d) 25

15. Luis desea pasar por un puente un zorro, un carnero y un paquete de pasto, que están en un coche de ruedas. El peso de cada uno incluyendo el de Luis, varía entre 70 y 80 kilogramos. Si el puente resiste a lo mucho 200 kg. ¿cuántas veces tiene Luis que cruzar el puente para pasar todo al otro lado?

a) 6 b) 8 c) 7 d) 9

16. Al entrar una noche de mucho viento en un refugio, Wilmer tiene un solo palito de fósforo en su caja. Hay sobre la mesa, una vela, y en la pared una antorcha. ¿Qué encendería primero?

a) La vela
b) El palito de fósforo
c) La antorcha
d) La caja de fósforo

17. Si siete personas toman siete tazas de café en siete minutos, ¿en cuánto tiempo tomará tres tazas de café una persona?

a) 7 min b) 3 min c) 21 min d) 1 min

18. Un libro de matemáticas tiene 446 páginas. Si mi hermano le arranca 6 hojas, ¿cuántas hojas le quedan al libro?

a) 218 b) 217 c) 220 d) 216

19. ¿Cuántos postes hay en un campo de forma hexagonal que tiene un poste en cada vértice y seis postes en cada lado?

a) 36 b) 30 c) 24 d) 18

20. Roxana recibe una carta de su hermano en la que dice "He regresado de pie de la mina, donde tuve la mala suerte de fracturarme un miembro". ¿Cuál de sus miembros ha sido fracturado?

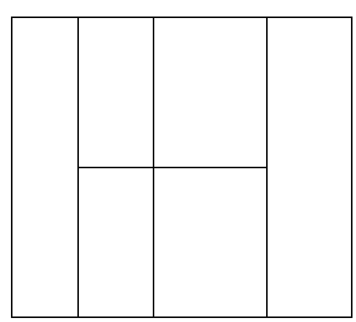
a) Pierna derecha c) Uno de sus brazos

b) Brazo izquierdo d) Pierna izquierda

21. Pedro realizó 4 compras y en cada una gastó $ 8 más que en la anterior. Si en la segunda compra adquirió 5 pares de medias, ¿cuánto cuesta cada par, si en su última compra pagó $ 50?

a) 7.75 b) 7.50 c) 6.80 d) 8.50

22. Lucía desea pintar el cuadro adjunto de modo que no existan 2 cuadriláteros contiguos, del mismo color. ¿Cuál es el menor número de colores que debe utilizar?



a) 2 b) 3 c) 4

d) 5

23. Un herrero da un golpe con su martillo cada seis segundos. ¿En cuánto tiempo dará 37 martillazos?

a) 3 min 36 s
c) 3 min 7 s
b) 3 min 42 s
d) 6 min 17 s

24. Ana debe medir un litro de leche. Si dispone de dos baldes, uno de 3 litros y otro de 5 litros, ¿cuántas mediciones como mínimo debe hacer para obtener exactamente un litro?

a) 5 b) 4 c) 2 d) 3

25. Hay 34 hombres y dos niños que deben cruzar un rio en una canoa. En cada viaje, solo puede ir uno de los hombres o los dos niños, pero no un hombre y un niño a la vez. ¿Cuál es el menor número de veces que la canoa tendrá que cruzar el rio en cualquier sentido para que pasen todos?

a) 134 b) 132 c) 133 d) 146

TEST DE RAZONAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO 2

“Tomado de Santillana, Aptitud Numérica 1 y 2, y de la Propuesta”

1. Si una araña sube 3m y resbala 2m sobre una pared y si por cada 3m en subir se demora 2 horas ¿En cuánto tiempo alcanzará una altura de 10 m?

   a) 7 b) 8 c) 6 d) 10

2. En una empresa, a las 10h00, el gerente general trasmite en 15 minutos una orden a tres empleados. Si cada empleado transmite la orden a otros tres en quince minutos. ¿Cuántas personas sabrán de la orden a las 10h45, incluyendo al gerente general?

   a) 39 b) 36 c) 37 d) 40

3. Un jardinero cobra $ 2 por plantar un árbol. Si planta árboles cada 2 m alrededor de un terreno rectangular de 30 m de largo y 20 m de ancho, de modo que en cada esquina haya un árbol. ¿Cuánto deberá cobrar el jardinero?.

   a) $ 60 b) $ 80 c) $ 70 d) $ 100

4. Si subo una escalera de dos en dos, doy nueve pasos más que subiendo de tres en tres. ¿Cuántos peldaños tiene la escalera?

   a) 40 b) 45 c) 44 d) 54

5. Una empresa encargada del alumbrado público debe poner postes de luz cada 10 m y a ambos lados de una avenida que mide 0.75 km. ¿Cuántos postes de luz pondrá? Si los postes están conectados por cables de alta tensión y el electricista tiene rollos de cable de 300 m de longitud. ¿Cuántos cortes tendrá que hacer en cada rollo de cable?

   a) 148; 29 b) 152; 29 c) 150; 30 d) 148; 30

6. Cuatro jóvenes jalan una soga tan fuerte como cinco señoritas. Dos señoritas y un joven jalan la soga tan fuerte como un perro. El perro y tres señoritas se enfrentan en la final con cuatro jóvenes. ¿Quiénes ganan?
   a) El perro y las tres señoritas
   b) Los cuatro jóvenes
   c) Empates
   d) No se puede deducir
7. Hay cuarenta hombres y dos niños que deben cruzar un rio en una canoa. En cada viaje, solo puede ir uno de los hombres o los dos niños, pero no un hombre y un niño a la vez. ¿Cuál es el menor número de veces que la canoa tendrá que cruzar el rio en cualquier sentido para que pasen todos?
   a) 161 b) 132 c) 164 d) 146
8. Ángel, Bernardo y Carlos tienen una mascota cada uno: gato, perro y gallo. Bernardo le dice al que tiene el gato que el otro tiene un perro, y Carlos le dice al que tiene el perro que en la ciudad hay una campaña antirrábica. Entonces es cierto que:
   a) Carlos tiene un gallo
   b) Ángel tiene un gato
   c) Carlos tiene un gato
   d) Bernardo tiene un perro
9. Cuatro amigos: Pedro, Luis, Mateo y Germán, practican un deporte diferente cada uno. Pedro quisiera practicar básquet en lugar de fútbol; Luis le pide prestada su raqueta de tenis a Germán, y Mateo no sabe nadar. ¿Qué deporte practica Luis? ¿Quién practica fútbol?

a) Natación - Mateo

b) Tenis - Luis

c) Natación - Pedro

d) Básquet - Germán

10. Andrea avanza cada hora la mitad del camino que le falta recorrer. Si aún le quedan por recorrer 3 km y ya lleva 4 horas caminando. ¿Qué distancia total ha recorrido?

a) 48 b) 45 c) 51 d) 50

11. Un vendedor inició su jornada con cierta cantidad de dinero. Hacia el mediodía ya había ganado \$20, y por la tarde, \$12 más. Por último, pagó \$5 y guardo la tercera parte de lo que se le quedó. Si al finalizar el día el vendedor tenía \$25. ¿Con cuántos dólares inicio su jornada?

a) 10.5 b) 12 c) 9 d) 11.5

12. En un mercado de frutas, el precio de 3 naranjas equivale al de 2 manzanas; el de 4 chirimoyas al de 5 manzanas, y el de 8 chirimoyas al de 10 mangos. ¿A cuántos mangos equivale el precio de 15 naranjas?

a) 12 b) 10 c) 16 d) 18

13. Se tiene 6 libros en un estante: Razonamiento matemático, Razonamiento verbal, Comunicación, Física, Historia y Geografía. Se sabe que:

I. El de Razonamiento verbal está junto y a la derecha del de Comunicación

II. El de Física está a la derecha del de Razonamiento verbal y a la izquierda del de Historia

III. El de Historia está junto y a la izquierda del de Geografía

IV. El de Razonamiento matemático está a la izquierda del de Comunicación

¿Qué libro ocupa el cuarto lugar si contamos de izquierda a derecha?

a) Historia b) Física

c) Comunicación d) Geografía

14. En una mesa circular hay 6 asientos colocados simétricamente, en los cuales se sientan 5 amigos: Andrés, Bryan, Carlos, Daniela y Elisabeth. Se sabe que:

I. Andrés se sienta frente a Bryan y junto a Carlos

II. Daniela se sienta frente a Carlos y a la izquierda de Bryan

III. Elisabeth no se sienta junto a Daniela

Entonces, podemos afirmar:

a) Elisabeth no se sienta junto a Andrés

b) Carlos se sienta junto a Elisabeth

c) Daniela se sienta junto al lugar vacío

d) Todas las anteriores son verdaderas

15. ¡¡¡ALERTA EN EL PARAISO!! Los diablos lograron forzar la puerta guardada por San Pedro e introducen al paraíso disfrazado de ángeles; para sembrar el desorden. Cinco sospechosos acaban de ser apresados. Pero no se sabe quién es el diablo y quien es el ángel. Comienza el interrogatorio. Lógicamente; los ángeles dicen la verdad, y los diablos siempre mienten.

I. Rubén dice que Miguel es un diablo.

II. Miguel jura que Wilson es un ángel

III. Wilson sostiene que Jaime es un diablo

IV. Jaime afirma que Mario es un ángel

V. Para Mario; Miguel y Wilson diablos

¿Quiénes son los ángeles y quiénes son los diablos?

a) Ángeles: Mario, Jaime, Rubén; Diablos: Miguel, Wilson

b) Ángeles: Mario, Jaime; Diablos: Miguel, Wilson, Rubén

c) Ángeles: Mario, Rubén; Diablos: Miguel, Wilson, Jaime

d) Ángeles: Miguel, Wilson; Diablos: Mario, Jaime, Rubén

4.2. Análisis e interpretación de resultados de los Test

Resultados obtenidos en el test de razonamiento lógico-matemático 1

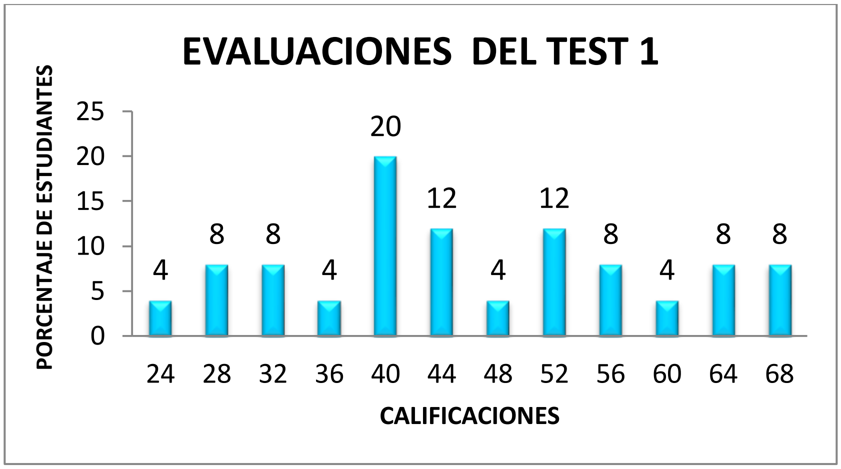


Figura 4-1 El gráfico muestra las evaluaciones de los estudiantes en el Test 1

De la figura se observa que un 20% de los estudiantes obtuvieron una nota de 40 puntos y el 4 % notas de 24, 36, 48 y 60 puntos. Además el 8% de los estudiantes obtuvieron notas de 28, 32, 56, 64 y 68 puntos; el 12 % notas de 44 y 52 puntos.

Resultados obtenidos en el test de razonamiento lógico-matemático 2

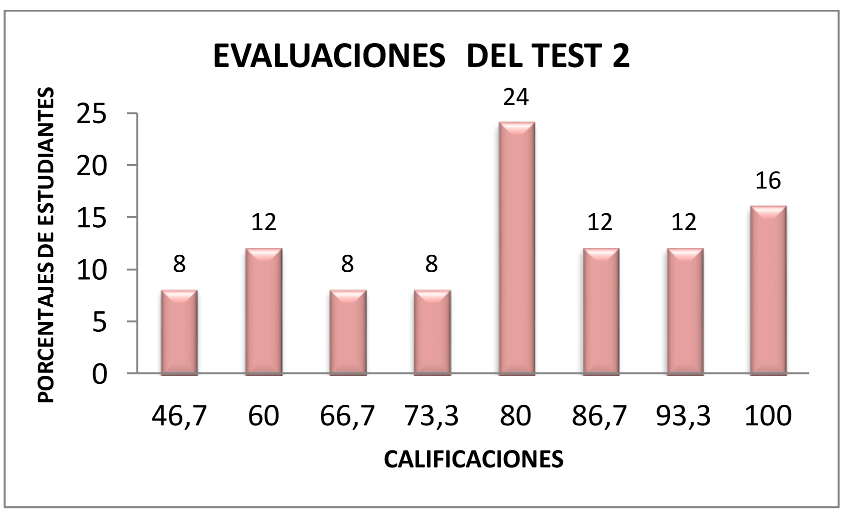


Figura 4-2 El gráfico muestra las evaluaciones de los estudiantes en el Test 2

De la figura se observa que un 24% de los estudiantes obtuvieron una nota de 80 puntos y el 8 % notas de 46.67, 66.7 y 73.3 puntos. Además el 12% de los estudiantes obtuvieron notas de 60, 86.7 y 93.3 puntos; el 16 % notas de 100 puntos.

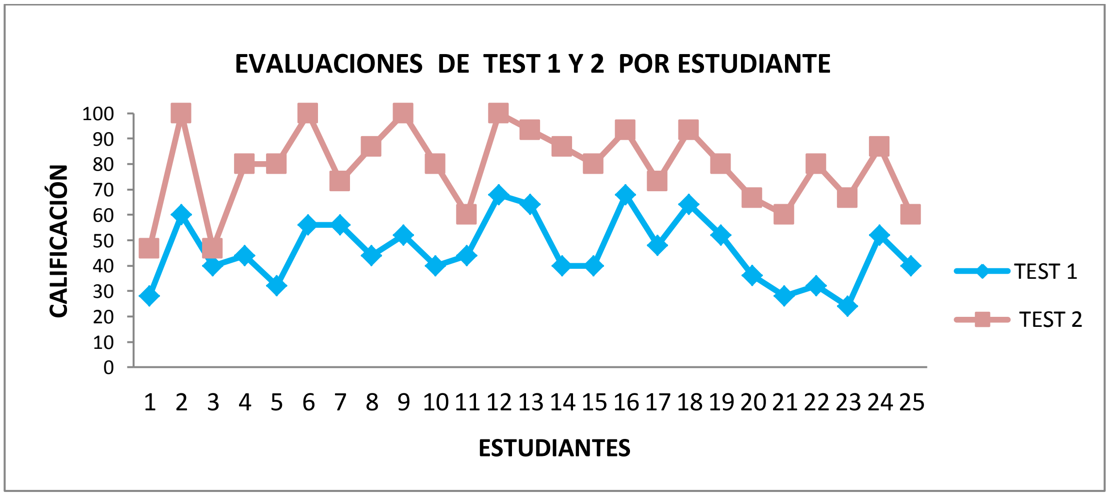


Figura 4-3 Gráfico comparativo de las evaluaciones por estudiante de los Test 1 y 2

De la figura se observa que las calificaciones por estudiante del test 2 son superiores a las del Test 1, esto se cumple para todos los estudiantes.

Tabla 4-1 Estadística descriptiva de Test 1 y Test 2

MEDIDAS	CALIFICACIONES DE TEST 1	CALIFICACIONES DE TEST 2
Media	46,08	78,94
Error típico	2,56	3,19
Mediana	44	80
Moda	40	80
Desviación estándar	12,81	15,94
Varianza de la muestra	164,16	254,10
Curtosis	-0,88	-0,50
Coeficiente de asimetría	0,16	-0,49
Rango	44	53,30
Mínimo	24	46,7
Máximo	68	100
Suma	1152,00	1973,40
Cuenta	25	25

PRUEBA DE HIPÓTESIS

1) Establecimiento de la hipótesis

Planteamos la hipótesis nula, H_0 y la hipótesis alternativa, H_a de la siguiente manera:

H_0: La media de las calificaciones del Test 1 es igual a la media de las calificaciones del Test 2;

H_a: La media de las calificaciones del Test 1 es menor a la media de las calificaciones del Test 2.

De manera simbólica:

$$H_0 : \mu_{T1} = \mu_{T2} \quad \text{y} \quad H_a : \mu_{T1} < \mu_{T2} ,$$

donde μ es la media de las evaluaciones tanto del Test 1 y Test 2.

2) Definición del nivel de significancia

Para probar las hipótesis tomamos el nivel de significancia del 5%, es decir, $\alpha = 0{,}05$

3) Tamaño de la muestra y cálculos estadísticos

El tamaño de la muestra es de 25 estudiantes, se trata de una prueba unilateral (izquierda) de la media, que no se conoce la desviación estándar poblacional, con n < 30, luego se aplicará el estadístico t de Student.

Tabla 4-2 Resultados de la prueba de hipótesis

Prueba t para medias de dos muestras emparejadas		
	CALIFICACIONES DE TEST 1	CALIFICACIONES DE TEST 2
Media	46,08	78,936
Varianza	164,16	254,10
Observaciones	25	25
Coeficiente de correlación de Pearson	0,71	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	24	
Estadístico t	-14,43	
P(T<=t) una cola	1,252E-13	
Valor crítico de t (una cola)	1,71	
P(T<=t) dos colas	2,503E-13	
Valor crítico de t (dos colas)	2,06	

4) Especificación de las regiones de rechazo y no rechazo

Las regiones de rechazo y no rechazo de Ho se definen por el valor crítico t hallado en la tabla t-Student, con un nivel de significancia $\alpha = 0.05$, n < 30 y 24 (25-1) grados de libertad. El valor crítico t es igual a 1.71

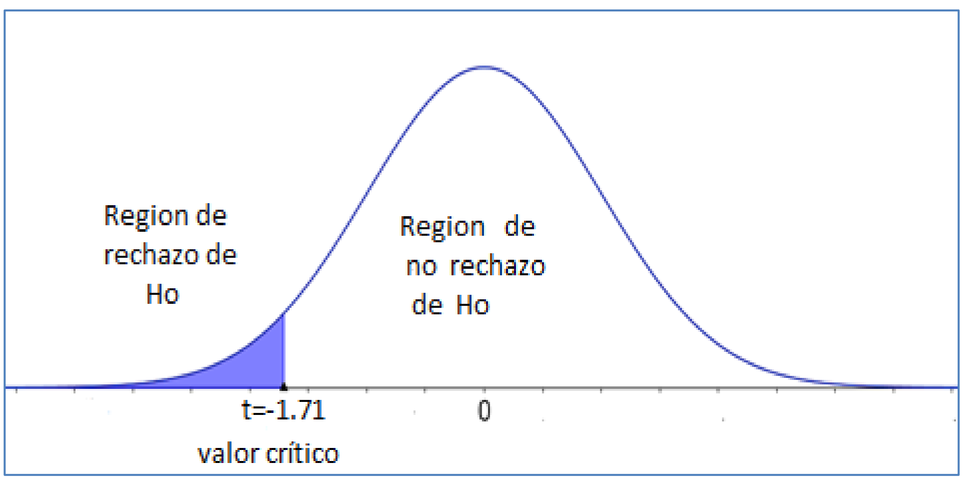


Figura 4-4 Región de rechazo y no rechazo de Ho. Prueba de una cola izquierda

5) Decisión estadística

El estadístico calculado $\mathrm{t} = -14{,}43$ se halla en la región de rechazo de H_0, por tanto se rechaza $H_0 : \mu_{T1} = \mu_{T2}$ y se acepta la hipótesis $H_a : \mu_{T1} < \mu_{T2}$. Además la probabilidad a una cola $p = 1{,}252\,\mathrm{E}{-13}$ es menor que el nivel de significancia $\alpha = 0.05$, por lo que se rechaza H_0, y se acepta H_a. Es decir, que la media de las calificaciones del Test 1 es menor a la media de las calificaciones del Test 2

De la prueba de hipótesis, se infiere que el trabajo con los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático ayudaron significativamente en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático de los estudiantes de primer semestre de la Escuela de Diseño Gráfico de la ESPOCH.

4.3. Conclusiones

En base al análisis estadístico del ítem 4.2 tenemos:

1. La matemática recreativa, a través de los juegos de razonamiento lógico-matemático, es una herramienta metodológica que estimula y motiva la enseñanza-aprendizaje de la matemática y fortalece la capacidad de razonar y resolver problemas.
2. Una de las formas de adquirir, entender, construir conocimiento y desarrollar un razonamiento lógico matemático, es trabajando con juegos recreativos de razonamiento lógico

4.4. Recomendaciones

1. A los maestros en todos los niveles, que aprovechen las bondades del trabajo con la matemática recreativa para obtener aprendizajes significativos en las matemáticas.
2. En cada clase de matemáticas se trabaje con uno o dos juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático con el afán de motivar el aprendizaje de la matemática y desarrollar el razonamiento lógico de sus estudiantes.

CAPÍTULO V

> El elemento lúdico que hace recreativa a la matemática recreativa puede tomar muchas formas: un problema para resolver, un juego competitivo, un truco de magia, una paradoja, una falacia o simplemente matemática con alguna vuelta curiosa o divertida. ¿Son estos ejemplos de matemática pura o aplicada? Es difícil decirlo. En un sentido la matemática recreativa es matemática pura, incontaminada de utilidad. En otro sentido es matemática aplicada, ya que responde a la necesidad humana de jugar.
>
> Martin Gardner

PROPUESTA

INTRODUCCIÓN

Cada uno de los juegos recreativos para desarrollar el razonamiento lógico-matemático, los propongo como una manera de apoyar a los docentes con una herramienta que ayude a motivar la clase de matemática, y muy especialmente para desarrollar el razonamiento lógico de los estudiantes.

Cabe señalar que cada juego recreativo son recopilaciones de muchos años de trabajo como docente, los mismos que han sido adaptados a nuestro medio y realidad, algunos de ellos son creaciones originales.

utilizar estos juegos en cada clase de matemática me ha traído muchas satisfacciones, porque la motivación que adquieren los estudiantes es contagiante, motiva al maestro a crear más para que cada clase, con un juego recreativo propuesto, sea un reto para el estudiante, cuando logran sacar un ejercicio que les parece complicado se motivan los estudiantes, y piden más…, pero en ese momento aprovecho para iniciar mi clase de matemática, diciéndoles que para la siguiente clase habrá otro juego que pondrá a prueba la capacidad, ingenio y creatividad de resolución.

Los juegos recreativos de razonamiento lógico-matemático han sido seleccionados para que sean resueltos en una forma práctica y lo más importante que realmente les ayude a razonar, es decir, que exija un pensamiento lógico, el ser imaginativos y creativos para resolver y presentar en lo posible todos y cada uno de los pasos que implica la solución del juego.

La experiencia de ésta investigación me gustaría que sea aprovechada por los docentes y que utilicen la matemática recreativa para desarrollar ese razonamiento que tantas veces criticamos los profesores y decimos "estos estudiantes no saben razonar".

5.1 JUEGOS RECREATIVOS DE RAZONAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

5.1.1. LOS ÁNGELES Y LOS DIABLOS

¡Alerta en el Paraíso! Los diablos lograron forzar la puerta guardada por el buen anciano San Pedro y se introducen disfrazados de ángeles para sembrar el desorden.

Cinco sospechosos acaban de ser apresados. Pero no se sabe quién es el diablo y quién es el ángel. Comienza el interrogatorio. Lógicamente, los ángeles dicen siempre la verdad, mientras los diablos mienten siempre.

Jorge dice que Hugo es un diablo

Hugo jura que Luis es un ángel

Luis sostiene que Danilo es un diablo

Danilo afirma que Carlos es un ángel

Para Carlos, Hugo y Jorge son diablos

¿Quiénes son los diablos? y ¿Quiénes son los ángeles?

Solución

¿Quién miente y quién dice la verdad? Debemos tener un punto de partida en una de las afirmaciones anteriores, la misma que nos permitirá deducir quién es ángel y quién es diablo; por consiguiente, para resolver el problema empecemos analizando las afirmaciones de cada uno de los sospechosos:

Analicemos lo que dice Hugo, él "jura" que Luis es un ángel. Pensemos un poco: si los ángeles dicen siempre la verdad, no tienen necesidad alguna de jurar; por lo tanto, Hugo es un diablo y, lógicamente lo que él afirma es mentira, es decir, Luis no es un ángel, es un diablo.

¡Bueno!. A partir de estas deducciones empezaremos a descubrir quiénes son los otros ángeles y los otros diablos.

Analicemos primero la declaración de Jorge, él afirma, que Hugo es un diablo. Por nuestra deducción anterior, Hugo es un demonio, lo que significa que Jorge está diciendo la verdad, por lo tanto él es un ángel.

Ahora analicemos la tercera declaración, la que hace Luis, por la deducción anterior él es un diablo, por lo tanto, lo que él dice es mentira, es decir Danilo no es un diablo, sino un ángel.

Sabiendo que Danilo es un ángel, analicemos su declaración, él sostiene que Carlos es un ángel; afirmación que lógicamente es verdadera, es decir, Carlos también es un ángel. Por nuestros razonamientos anteriores concluimos que:

Tabla 5-1 El cuadro muestra quienes son los ángeles y los diablos. Solución 1

Jorge	Ángel
Hugo	Diablo
Luis	Diablo
Danilo	Ángel
Carlos	Ángel

Antes de dar por terminada la solución del problema, debemos analizar bien en lo que dice Carlos; para él, Jorge y Hugo son dos diablos. Según el cuadro anterior esto no se cumple, por lo tanto, Carlos sería un diablo. Pero ¿no contradice esto a la afirmación de Danilo?

Pues sí, esto deja en evidencia que Danilo miente, por lo tanto es un diablo. Luis sostiene que Danilo es diablo; estaría diciendo la verdad y de aquí se deduce que Luis es un ángel. Como Hugo jura que Luis es un ángel, está diciendo la verdad, y se puede concluir que es un ángel también.

Esta deducción contradice también al punto desde el cual partimos. Jorge dice que Hugo es diablo, por lo mismo miente; entonces Jorge es diablo al igual que Carlos y Danilo. Según el resultado anterior, la solución sería:

Tabla 5-2 El cuadro muestra quienes son los ángeles y los diablos. Solución 2

Jorge	Diablo
Hugo	Ángel
Luis	Ángel
Danilo	Diablo
Carlos	Diablo

Como podemos apreciar, la solución al problema no es única y esto da lugar a que sea interpretado de varias maneras, todo se obtiene a raíz de la última hipótesis, es decir, de la afirmación de Carlos, la cual contradice nuestro primer resultado y deja en evidencia el segundo. Para que la solución al problema sea única, y la interpretación del mismo no dé lugar a ambigüedad alguna, tendríamos que modificarlo precisamente en la afirmación contradictoria hecha por Carlos. Cambiemos entonces: “Para Carlos, Jorge y Hugo son Diablos” por: “Para Carlos Jorge es ángel y Hugo es diablo”; con ello logramos confirmar nuestra primera solución y la hacemos única.

5.1.2. LAS MOTOS

Valeria, Mariela, y Carmita se pasean en moto. Cada una está en la moto de una de sus amigas y tiene puesto el casco de la otra. La que lleva el casco de Carmita conduce la moto de Mariela.

¿Quién está en la moto de Valeria?

Empecemos haciendo un análisis general del problema pero tomando en cuenta la condición inicial del mismo: que cada amiga lleve la moto de la una y tenga puesto el casco de la otra, es decir, en ningún momento ellas tendrán puesto su propio casco ni manejarán su propia moto, en pocas palabras:

- Valeria puede llevar puesto el casco de Mariela o Carmita y conducir la moto de Mariela o Carmita.
- Mariela puede llevar puesto el casco de Valeria o Carmita y conducir la moto de Valeria o Carmita.
- Carmita puede llevar puesto el casco de Valeria o Mariela y conducir la moto de Valeria o Mariela.

Según las condiciones que exige el problema: si una de ellas lleva el casco de una amiga entonces debe conducir la moto de la otra. Nuestro análisis anterior da lugar a dos posibilidades:

Tabla 5-3 Primera posibilidad: Conductor, casco de…y moto de…

Conductor	Casco	Moto
Valeria	Mariela	Carmita
Mariela	Carmita	Valeria
Carmita	Valeria	Mariela

Según la tabla, Valeria puede llevar puesto el casco de Mariela y conducir la moto de Carmita. Mariela puede llevar puesto el casco de Carmita y conducir la moto de Valeria. Y Carmita puede llevar puesto el casco de Valeria y conducir la moto de Mariela.

Tabla 5-4 Segunda posibilidad: Conductor, casco de…y moto de...

Conductor	**Casco**	**Moto**
Valeria	Carmita	Mariela
Mariela	Valeria	Carmita
Carmita	Mariela	Valeria

Según la tabla, Valeria puede llevar puesto el casco de Carmita y conducir la moto de Mariela. Mariela puede llevar puesto el casco de Valeria y conducir la moto de Carmita. Y Carmita puede llevar puesto el casco de Mariela y conducir la moto de Valeria.

Hasta el momento, lo único que hemos deducido son las dos soluciones que tiene el problema, pero sólo necesitamos aquella que cumple con la segunda condición que exige, esto es: la que lleva el casco de Carmita debe conducir la moto de Mariela. Según ésta última condición, la solución que satisface con todos los requerimientos del problema está resumido en la tabla de la segunda posibilidad. Entonces, la solución definitiva sería:

- Valeria lleva puesto el casco de Carmita y conduce la moto de Mariela.
- Mariela lleva puesto el casco de Valeria y conduce la moto de Carmita.
- Carmita lleva puesto el casco de Mariela y conduce la moto de Valeria.

Por lo tanto, la que está en la moto de Valeria es Carmita

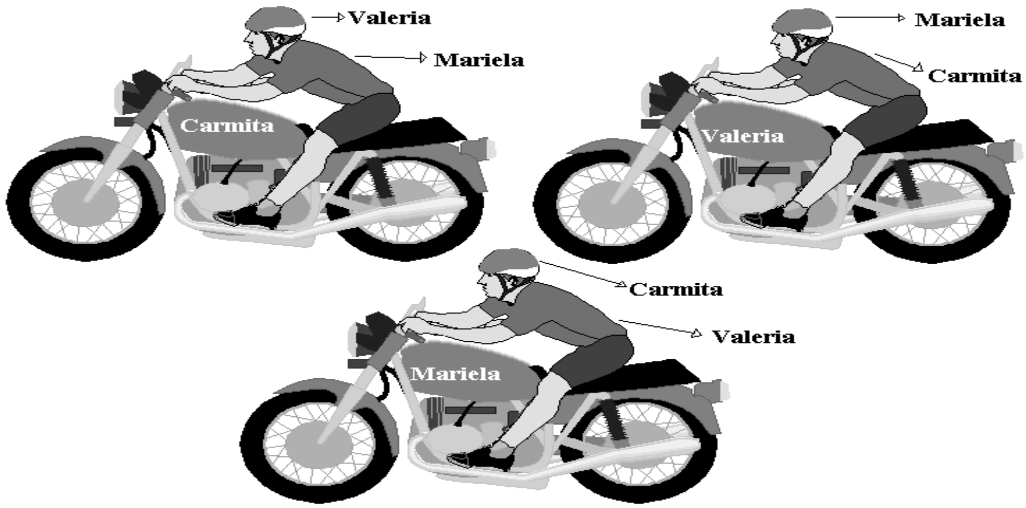


Figura 5-1 La gráfica muestra al conductor que lleva la moto de… y lleva el caso de…

5.1.3. LA CAJA DE JOYAS

El mayordomo de la señorita Diana decide robar las joyas de su patrona. Estas están guardadas en 4 cajas de colores diferentes: negra, roja, blanca y verde.

El mayordomo recuerda que cada caja contiene dos objetos diferentes. Una caja guarda un reloj y un brazalete; otra un anillo y un collar. En una tercera se halla un collar y un brazalete. La caja blanca contiene un reloj y un anillo. La caja negra está situada entre la roja y la blanca. La caja roja está a la izquierda de la verde. Cada una de las dos cajas de la derecha contienen un collar y en cada una de las cajas de la izquierda hay un reloj. Al momento del robo por miedo a ser sorprendido, el mayordomo solo coge la caja negra y escapa. ¿Qué joyas robo?

Solución

Empecemos nuestro razonamiento, nuestra tarea principal es ubicar las cajas según el enunciado del problema, es decir, negra, roja, blanca y verde.

Según nuestro problema en cada caja existen dos objetos diferentes, y se nos da a conocer que una caja guarda un reloj y un brazalete, otra posee un anillo y un collar y en una tercera un collar y un brazalete; además la caja blanca posee un reloj y un anillo, con lo cual ya se conoce lo que contiene cada caja, faltándonos por deducir que color de caja contiene dichos objetos.

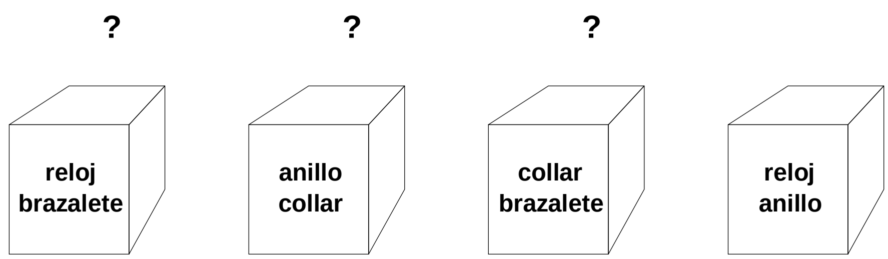


Figura 5-2 Las cajas sin su color y los objetos que poseen

Como la caja negra está situada entre la roja y la blanca, y la caja roja está a la izquierda de la verde, estas quedan ubicadas en el siguiente orden: blanca, negra, roja y verde, con lo cual podemos determinar lo que contiene cada caja. Cada una de las dos cajas de la derecha contiene un collar, es decir que la caja roja y la caja blanca poseen un collar, y en cada caja de la izquierda hay un reloj, lo que significa que la caja blanca y la caja negra contienen un reloj; debemos recordar que la caja blanca contiene un reloj y un anillo y además que una de las cajas contiene un reloj y un brazalete, de lo que se deduce que la caja negra contiene un reloj y un brazalete, siendo estos los objetos que el mayordomo robó.

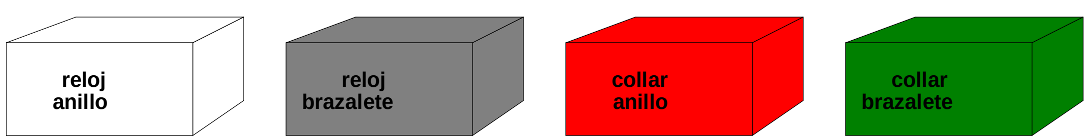


Figura 5-3 Las cajas con su color y los objetos que poseen

5.1.4. LOS CROMOS DE JUAN

Juanito sale de la casa con un montón de cromos y vuelve sin ninguno. Su madre le pregunta que ha hecho con ellos y el niño contesta: A cada amigo que me encontré le di la mitad de los cromos que tenía más uno.

¿Y a cuántos amigos te has encontrado? A seis.

¿Cuántos cromos tenía Juanito al salir de casa?

El número de cromos que tenía Juanito al salir de su casa puede ser encontrado procediendo a la inversa de la repartición del niño, es decir desde que el pequeño se quedó sin ningún cromo.

Juanito dio a cada amigo la mitad de sus cromos más uno, representamos con **n** al número de cromos que tenía Juanito antes de entregar $\frac{n}{2}+1$ cromos al siguiente amigo.

Por lo tanto, los cromos que tenía el niño, menos la mitad más uno que da al siguiente amigo, nos da como resultado el número de cromos con los que se queda el chico después de cada entrega, es decir:

$$n - \left(\frac{n}{2}+1\right) \text{ cromos después de cada entrega}$$

Al entregar los cromos al último amigo Juanito volvió a su casa con las manos vacías, es decir:

$$n - \left(\frac{n}{2}+1\right) = 0$$

De esta ecuación obtenemos $n=2$; esto significa que antes de regalar al sexto amigo, Juanito tenía 2 cromos en su mano.

Por lo tanto, después de haber entregado al quinto amigo una cantidad determinada de cromos, él se queda con dos cromos. Con un razonamiento análogo al anterior, determinemos el número **n** de cromos que tenía Juanito antes de regalar al quinto, es decir:

$$n - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = 2$$

Al resolver la ecuación, obtenemos $n = 6$.

Procedemos de igual manera para el resto de amigos:

Al encontrarse con el cuarto amigo, los cromos sobrantes fueron 6:

$$n - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = 6$$
$$n = 14$$

Tercer amigo (14 cromos sobrantes que quedan en la mano del niño):

$$n - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = 14$$
$$n = 30$$

Segundo amigo (Juanito queda con 30 cromos):

$$n - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = 30$$
$$n = 62$$

Primer amigo (sobran 62 cromos):

$$n - \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = 62$$

$$n = 126$$

De acuerdo al resultado de la última ecuación, Juanito tenía 126 cromos antes de repartirlos entre sus amigos. Este resultado lo puede comprobar Ud. fácilmente.

Nota: Debo señalar al amigo lector que ésta forma de resolución presentada no es la única, en otras palabras todo problema puede ser resuelto utilizando otro razonamiento, que puede ser más sencillo o más complejo. Veamos un segundo razonamiento para el problema de los CROMOS DE JUANITO.

SEGUNDO RAZONAMIENTO

Denotemos con **n** a la cantidad de cromos que Juanito tenía al salir de casa, los mismos que serán repartidos a sus amigos así:

Cuando Juanito se encuentra con su primer amigo le entrega la mitad de cromos que tenía más uno, quedándole la mitad menos uno, es decir. $\frac{n-2}{2}$; al encontrarse con su segundo amigo, le entrega la mitad del resto que le quedaba más uno, sobrándole a Juanito $\frac{n-6}{4}$. Al tercer amigo le entrega la mitad de lo que tiene más uno, restándole $\frac{n-14}{8}$; a su cuarto amigo le regala la mitad de lo que tiene más uno, quedándole $\frac{n-30}{16}$; de esto, a su quinto amigo le entrega la mitad más uno, y le sobra $\frac{n-62}{32}$; y finalmente, a su sexto amigo, de lo que le quedaba, le entrega la mitad más uno, con lo que le queda $\frac{n-126}{64}$. Según lo enunciado en el problema, se conoce que Juanito regresa a su casa sin ningún cromo, entonces, al resto representado por la última expresión deducida, la igualamos a cero, es decir:

$$\frac{n-126}{64}=0$$

Obteniéndose una ecuación que dará como resultado el valor de $n=126$, que representa el número de cromos que Juanito tenía inicialmente, llegando a la conclusión de que Juanito salió de su casa con 126 cromos

5.1.5. LAS PREGUNTAS

En un examen de 15 preguntas se da 5 puntos por cada respuesta correcta y se quita 3 puntos por cada respuesta errada. Si un estudiante responde a todas las preguntas y obtiene 3 puntos. ¿Cuántas preguntas contestó correctamente?

Solución

Para encontrar la solución al problema debemos plantear lo siguiente:

Representemos por **x**, el número de respuestas correctas del examen en cuestión; como el número total de preguntas formuladas en el test es de 15, el número de respuestas erradas correspondería a la diferencia entre 15 y el número de respuestas correctas, es decir: **15 - x.**

Si 5 puntos valen cada respuesta correcta entonces el total de puntos que gana el estudiante esta representado por 5x.

Si 3 puntos se quitan por cada respuesta incorrecta entonces el total de puntos que pierde el estudiante está representado por 3(15-x).

Si el estudiante responde a todas las preguntas y obtiene tres puntos entonces:

El total de puntos ganados por respuestas correctas menos el total de puntos perdidos por respuestas erradas nos dará los puntos obtenidos (nota final) del estudiante, es decir:

$$5x - 3(15 - x) = 3$$
$$5x + 3x = 3 + 45$$
$$x = 6$$

Como x representaba el número de respuestas correctas y 15-x el número de respuestas erradas, entonces:

Número de respuestas correctas es: 6

Número de respuestas erradas es: 15 – 6 = 9

Es decir, él estudiante contesta correctamente seis preguntas y nueve en forma errada.

5.1.6. LA CADENA

A un herrero le entregaron siete trozos de cadena de cinco eslabones cada trozo y le encargaron que los uniera formando una cadena continua.

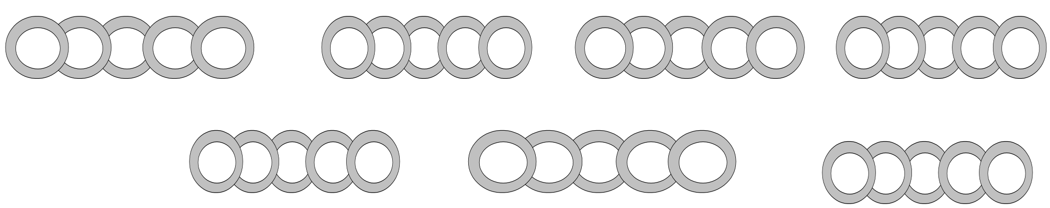


Figura 5-4 Siete cadenas con siete anillos cada una

Antes de poner manos a la obra, el herrero comenzó a meditar sobre el número de anillos que tendría necesidad de cortar y forjar de nuevo. Decidió que le haría falta abrir y cerrar 6 anillos. ¿Es posible hacer el trabajo abriendo y enlazando un número menor de anillos? (Perelmann, 1968, p.91).

Solución

La respuesta es que sí: Para ello de los siete trozos que disponemos, cojamos cualquiera de ellos y abrimos todos los cinco anillos, como lo muestra la gráfica:

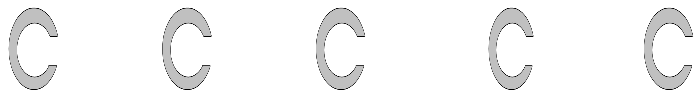


Figura 5-5 Cinco anillos abiertos

Ahora unimos los trozos dos a dos utilizando un eslabón, así:

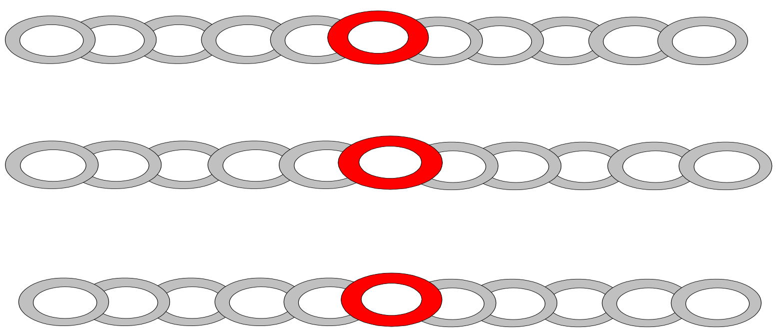


Figura 5-6 Tres parejas de cadenas unidas utilizando tres de los anillos abiertos

Hasta aquí se han utilizado tres eslabones (anillos) y unido los 6 trozos de cadena que quedaron, pero aún no tenemos una cadena continua.

Como podemos ver en la gráfica, ahora disponemos de tres trozos de cadena (con 11 eslabones cada una), y dos eslabones (anillos) abiertos, los mismos que nos servirán para unir estos tres trozos que se formaron y de esta manera obtener una cadena continua, completándose nuestro objetivo.

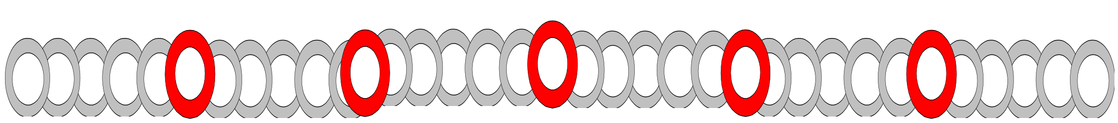


Figura 5-7 Tres parejas de cadenas unidas utilizando tres de los anillos abiertos

5.1.7. PROBLEMA DE LA MEDIDA

Tenemos dos vasijas, una de 11 litros y la otra de 7 litros. Queremos recoger exactamente 6 litros de agua sin la ayuda de ninguna otra vasija. ¿Cómo resolverlo?

Solución

1) Primero llenamos la vasija de 7 litro, y lo vaciamos en la de 11 litros, faltándonos por llenar en ésta 4 litros.

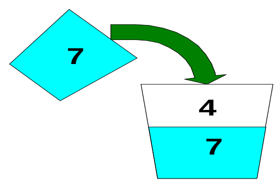


Figura 5-8 Primera fase de llenado y vaciado

2) Nuevamente llenamos la vasija de 7 litros, y completamos el contenido de la de 11, quedándonos en la de 7, 3 litros.

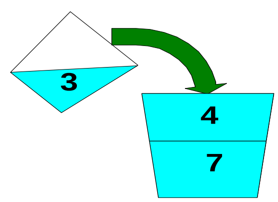


Figura 5-9 Segunda fase de llenado y vaciado

3) Vaciamos la vasija de 11, y los 3 litros de la de 7, los colocamos en la de 11.

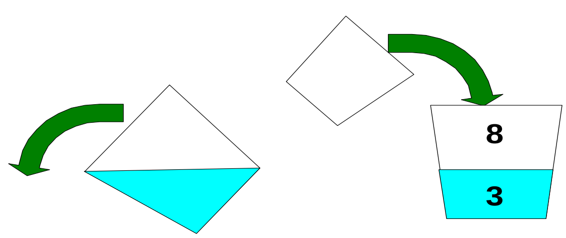


Figura 5-10 Tercera fase de llenado y vaciado

4) Volvemos a llenar la de 7 litros, y la vaciamos en la vasija de 11, con lo cual se obtiene 10 litros, faltándonos por llenar en la misma, 1 litro.

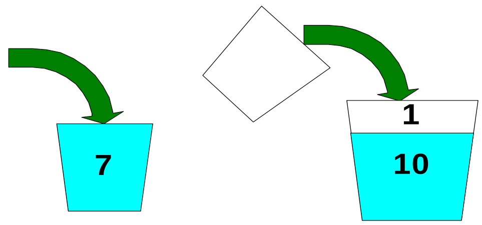


Figura 5-11 Cuarta fase de llenado y vaciado

5) Por última vez, llenamos la vasija de 7 litros, y completamos el contenido de la de 11, quedándonos en la vasija de 7 litros, un total de 6 litros, con lo cual se llega a la solución del problema.

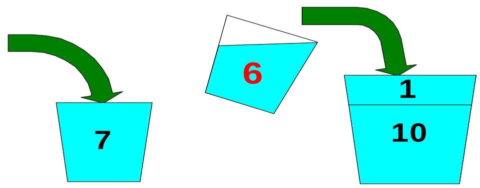


Figura 5-12 Fase final de llenado y vaciado

¡Fácil! ¿Verdad?

5.1.8. EL GATO TREPADOR

Un gato se cayó a un pozo que tiene una profundidad de 10 metros. Inmediatamente se puso a trepar para intentar salvarse. Cada día subía 3 metros, pero luego se escurría y bajaba 2 metros (gato vanidoso). ¿Cuántos días tardará en salir del pozo?

Tomando en cuenta las condiciones planteadas por el problema tenemos que: El primer día el gato sube hasta encontrarse a la altura de 3 metros sobre el fondo del pozo, pero al mismo tiempo por ser vanidoso, retrocede 2 metros, encontrándose ahora a la altura de 1 metro del fondo.

El segundo día vuelve a subir, desde el primer metro hasta el cuarto metro, pero en el mismo instante baja 2 metros, quedándose a una altura de 2 metros.

El tercer día el gato sube desde el segundo metro hasta el quinto metro, pero vuelve a resbalarse dos metros, quedándose a una altura de 3 metros.

Como podemos apreciar, el gato en realidad sube un 1 metro por día (pues sube 3 y resbala 2), así transcurrirán 7 días y el gato no habrá salido todavía del pozo, pues se encontrará a una altura de 7 metros del fondo.

El octavo día, el gato logrará su cometido, pues al encontrarse a 7 metros de altura, subirá nuevamente 3 metros adicionales y ya no tendrá necesidad de escurrirse pues habrá salido del pozo.

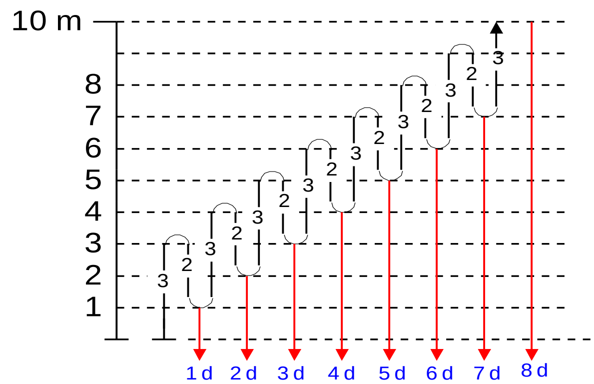


Figura 5-13 Número de días para salir de un pozo de 10 m

5.1.9. EL PROBLEMA DEL CRUCE

Un hombre llega a la orilla de un río llevando un lobo, una cabra y una col. La barca para atravesar el río no puede llevar nada más que al pasajero y una de las piezas. ¿Cómo debe hacer la travesía para no perder ninguna de las cosas?

Solución

Analicemos por un momento la situación en que el hombre se encuentra: como su barca no tiene la capacidad de carga esperada, debe decidirse por un único objeto para transportar primero.

Si escoge como primer pasajero al lobo, al volver encontrará sólo la cabra, pues ésta se habrá dado un banquete con la col.

Seguramente lo deberá pensar dos veces antes de decidirse por llevar la col, ya que al volver encontraría al lobo contento, y con su estómago lleno pues éste habrá devorado a la cabra.

Para que no surja ningún contratiempo el hombre deberá llevar primero a la cabra (pues el lobo no es vegetariano), y luego de transportarla, volverá y se decidirá por un nuevo pasajero. Veamos entonces, dónde quedan los objetos luego de éste razonamiento y después de que el hombre tome en cuenta nuestra sugerencia:

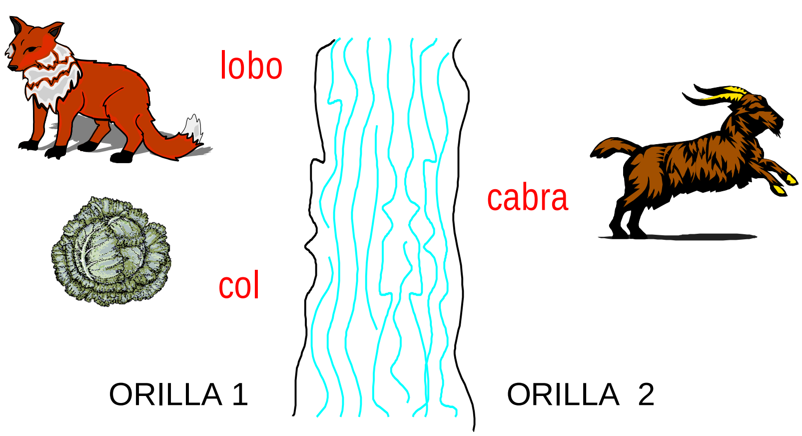


Figura 5-14 Cabra en la orilla 2, lobo y col en la orilla 1

El hombre regresará a la orilla 1; pero, ¿Cómo decidirse por el nuevo pasajero?, el hombre indistintamente escogerá cualquiera (col o lobo), con la única condición de regresar a la cabra a la orilla de salida, evitando así cualquier problema de los antes mencionados.

Escojamos entonces la col: el hombre la transportará hasta la otra orilla 2 teniendo en cuenta nuestra condición, por lo que regresará con la cabra, antes de que esta se coma a la col. De esta manera, nuestro amigo desembarcará en la orilla 1 con la cabra e inmediatamente después, subirá al transporte al lobo y lo llevará al otro lado del río (orilla 2), antes de que ocurra una desgracia; luego del proceso, los objetos quedarán dispuestos así:

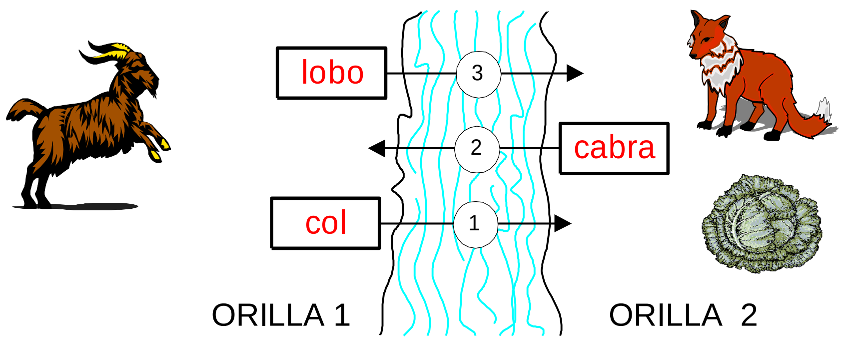


Figura 5-15 Cabra en la orilla 1, lobo y col en la orilla 2

Con la col y el lobo en la otra ribera (orilla 2), el hombre puede sentirse tranquilo, y volver únicamente por la cabra que estará esperando en la primera orilla, de esta manera habrá pasado las tres cosas sin perder ninguna

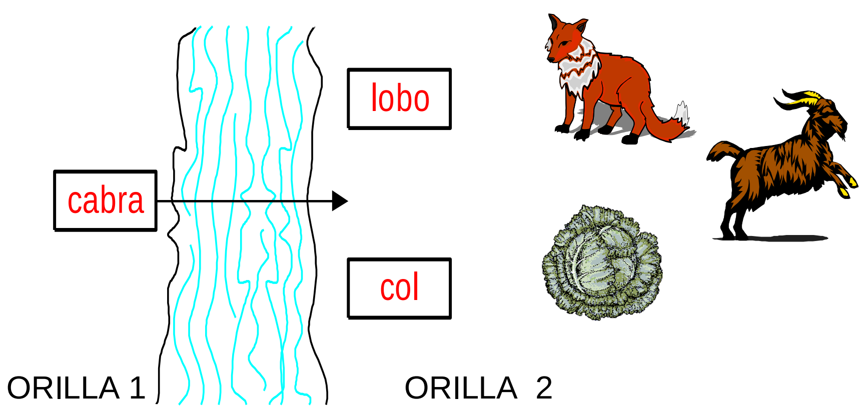


Figura 5-16 Cabra, lobo y col en la orilla 2

Caso análogo sucedería si nosotros hubiéramos escogido al lobo como segundo objeto a transportase; en tal caso, dejamos al mismo en la otra orilla (orilla 2) y nos llevamos la cabra a la primera; acto seguido, dejamos la cabra en la primera orilla e inmediatamente subimos a la col a la embarcación, finalmente volveremos por la cabra y completamos nuestro trabajo.

5.1.10. LA MUJER DE HECTOR

Cuatro parejas están de fiesta, sus nombres son: Alicia, Bárbara, Cecilia, Dora, Eduardo, Francisco, Gastón y Héctor. En cierto momento, Francisco se pone a tocar la trompeta acompañado por Cecilia al piano. Dora, que no es la mujer del trompetista, no quiere bailar, Héctor se queda sentado para acompañarla. Entonces, los dos se dan cuenta que la mujer de Eduardo no baila con su marido sino con el de Alicia. ¿Quién es la mujer de Héctor?

El problema puede ser solucionado buscando las 4 parejas de esposos que se formarían. Separemos primero a los músicos Francisco (trompetista) y Cecilia (pianista) del resto del grupo, así como las personas que salen a bailar; sentados se quedarían únicamente Dora y Héctor:

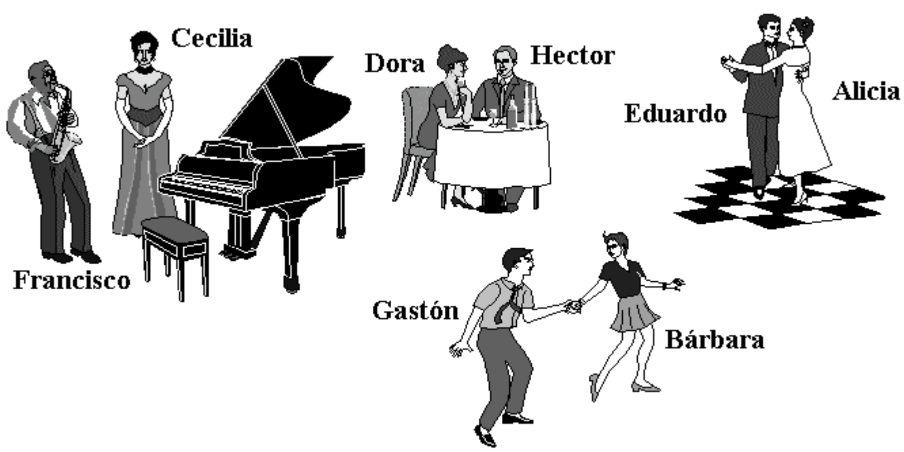


Figura 5-17 Parejas de músicos y bailarines

Dora y Héctor se dan cuenta de que en el grupo de los que bailan, la mujer de Eduardo baila con el marido de Alicia. El marido de Alicia tiene que ser Gastón pues es el único varón que baila a excepción de Eduardo, entonces la mujer de Eduardo tiene que ser Bárbara pues es la única bailarina que no hemos tomado en cuenta.

Dora no es la mujer del trompetista Francisco, por consiguiente, la mujer de Francisco sería Cecilia, pues es la única chica que se queda sin pareja.

De igual manera, como Dora no es la mujer de Francisco, ella tiene que ser la mujer de Héctor. Concluyéndose que las cuatro parejas de esposos son:

Tabla 5-5 El cuadro muestra la parejas de esposos y su actividad

ESPOSOS	ACTIVIDAD
Dora y Héctor	Sentados
Gastón y Alicia	Bailando
Francisco y Cecilia	Músicos
Eduardo y Bárbara	Bailando

Por lo tanto, Dora es la mujer de Héctor.

5.1.11. AMIGOS DE LA GUERRA

Cinco hombres que fueron camaradas en la segunda guerra mundial asisten a una reunión. Se trata de Germán, Bolívar, Pablo, Hugo y Nelson cuyos oficios son: Grabador, Proyectista, Biólogo, Herrero y Neurólogo. Ellos viven en las ciudades de Green Field, Brownsville, Petersburgo, Harper y Nashville, pero ninguno de ellos vive en la ciudad que tiene la misma inicial de su nombre, ni el nombre de su ocupación tiene la misma inicial que su nombre o que la del nombre de la ciudad en la cual vive.

El biólogo no vive en Petersburgo. Bolívar no es herrero ni proyectista; tampoco vive en Petersburgo ni en Harper. Hugo vive en Nashville y no es biólogo ni grabador, Germán no es residente en Brownsville, como tampoco Nelson, quien no es biólogo ni herrero. Disponiendo solamente de la información dada, ¿puede Ud. determinar el nombre de la ciudad en la que reside Nelson?

Solución

Con la primera parte de los datos del problema, podemos formar un cuadro de posibilidades, únicamente con las letras G, B, P, H, y N; representando tanto a los nombres, como a las profesiones y las ciudades en que vive cada persona. De acuerdo al enunciado, no se puede repetir una letra ni en la misma fila, ni en la misma columna. Por lo tanto, tenemos el siguiente cuadro:

Tabla 5-6 El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 1

Nombre	G (Germán)	B (Bolívar)	P (Pablo)	H (Hugo)	N (Nelson)
Profesión					
Cuidad					

Insertemos ahora en el cuadro anterior, las referencias de la segunda parte del problema.

Bolívar no es herrero ni proyectista, tampoco puede ser biólogo ni puede vivir en Brownsville, (la letra B coincide con la inicial de su nombre), tampoco habita Petesburgo ni Harper. De acuerdo a ello, en profesión y ciudad escribiremos las posibilidades restantes, es decir las profesiones grabador o neurólogo, y las ciudades de Green Field o Nashville:

Tabla 5-7 El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 2

Nombre	G	B	P	H	N
Profesión		G o N			
Cuidad		G o N			

Procedemos de igual manera con las demás condiciones planteadas por el ejercicio. Hugo vive en Nashville y no es biólogo, grabador ni herrero (pues la letra H no debe coincidir con la inicial de su nombre), tampoco puede ser neurólogo (pues la letra N coincide con la ciudad). Esto deja en evidencia que la única posibilidad restante para la profesión de Hugo sea el de proyectista. Fijémonos además: la letra N está repetida en la última fila, lo que elimina la posibilidad en duda sobre la ciudad en que vive Bolívar, y al mismo tiempo elimina G del casillero profesión, quedándonos:

Tabla 5-8 El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 3

Nombre	G	Bolívar	P	Hugo	N
Profesión		Neurólogo		Proyectista	
Cuidad		Green Field		Nashville	

Germán no es residente en Brownsville, tampoco puede vivir ni en Green Field, ni en Nashville, pues son ciudades en que residen Bolívar y Hugo respectivamente. Las posibilidades para la ciudad en que vive Germán son P o H (Petersburgo o Harper). Nelson no reside en Brownsville, tampoco puede vivir en Green Field ni Nashville, la posibilidad para la ciudad es la misma que tiene Germán.

La ciudad faltante de ingresar al cuadro es Brownsville, la cual pondríamos debajo de Pablo; Nelson no es biólogo ni herrero, tampoco puede ser neurólogo ni proyectista, debido a que son profesiones que ya escribimos en el cuadro; la única posibilidad restante, es que sea grabador:

Tabla 5-9 El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 4

Nombre	G	Bolívar	P	Hugo	Nelson
Profesión		Neurólogo		Proyectista	Grabador
Cuidad	P o H	Green Field		Nashville	P o H

El biólogo no vive en Petersburgo; analicemos esta afirmación: Las únicas personas que podrían ser biólogos, son Germán y Pablo; Pablo vive en Brownsville y no puede ser biólogo (por la letra B que se repetiría en la misma columna), dejando la posibilidad de serlo a Germán. Conociendo que Germán es biólogo, la profesión que nos faltaba ingresar es herrero, trabajo que le correspondería a Pablo:

Tabla 5-10 El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad; fase 5

Nombre	G	Bolívar	Pablo	Hugo	Nelson
Profesión	Biólogo	Neurólogo	Herrero	Proyectista	Grabador
Cuidad	P o H	Green Field	Brownsville	Nashville	P o H

Puesto que el biólogo no vive en Petersburgo, eliminamos la P del casillero “ciudad” en que vive Germán; hemos comprobado entonces que Germán vive en Harper, por lo que quitaríamos la posibilidad de que Nelson viva en esta última ciudad. Por lo tanto:

Tabla 5-11 El cuadro muestra nombres, profesión y ciudad de todos los amigos

Nombre	Germán	Bolívar	Pablo	Hugo	Nelson
Profesión	biólogo	Neurólogo	Herrero	proyectista	Grabador
Cuidad	Harper	Green Field	Brownsville	Nashville	Petersburgo

En conclusión, la ciudad en la que vive Nelson es Petersburgo.

5.1.12. DE COMPRAS

Las señoritas: Katty, Elena, María, Rocío, Paola y Mery. Las tres últimas chicas tienen las siguientes cualidades; impredecible, comprensiva, y sentimental respectivamente, las seis fueron juntas de compras al pasaje comercial “EL CORAL”. Cada una de las señoritas fue directamente al piso en el cual se hallaba el artículo de regalo que querían comprar, cada una de ellas compró dos artículos. Compraron un esferográfico, un stiker, un cuadro, un osito de peluche, un payasito, un reloj, una esclava, un crucifijo, una agenda, un póster, un portarretratos y una lámpara.

Todas las señoritas, excepto Mery, entraron en el ascensor en el primer piso. También entraron en el ascensor dos caballeros. Dos señoritas, Rocío y la que compró la esclava y el crucifijo, descendieron en el segundo piso. En el tercer piso se vendían posters y stikers. Los caballeros descendieron en el cuarto piso. La señorita que compró el reloj y el esferográfico descendió en el quinto piso y dejo a María que descendiera sola en el sexto piso. En la fiesta de Navidad, Katty, que recibió un cuadro y un portarretratos como regalo sorpresa de una de las señoritas que había descendido en el segundo piso, presenció el agradecimiento que su enamorado lo hiciera por el crucifijo que lo diera una de las otras chicas. Si en el primer piso se vendían peluches y la señorita Elena fue la sexta persona que salió del ascensor. ¿Qué cosas compraron cada una de las señoritas?

Solución

Parece complicado el problema en que nos han puesto estas seis amigas, tratemos por lo tanto de encontrar una solución al acertijo. La solución se facilita al ordenar todos los objetos comprados, así como a las señoritas en una tabla adecuada, la cual iremos organizando conforme se presenta los datos del problema. Mery se quedó en el primer piso, lugar donde se vendían peluches, por lo tanto compra el osito; Rocío se queda en el segundo piso, pero recordemos que en la fiesta de Navidad, Katty recibió un cuadro y un portarretratos de quien se había quedado en el segundo piso, siendo esta persona precisamente Rocío (ella no había comprado la esclava y el crucifijo). Además se cita como dato que María desciende en el sexto piso.

Tabla 5-12 El cuadro muestra nombres, piso de descenso y objetos que compraron; fase 1

Nombres	Katty	Elena	María	Rocío	Paola	Mery
Piso			6	2		1
Objetos				Cuadro Portarretratos		Osito

Veamos ahora en qué piso bajó Elena, siendo ella la sexta persona en salir del ascensor: En el primer piso el ascensor se llena con 5 chicas y 2 caballeros.

- En el segundo piso se bajan dos chicas.
- En el tercer piso se baja una chica a comprar posters y stikers.
- En el cuarto piso descienden los caballeros.

Por lo tanto, Elena siendo la sexta persona en salir, del ascensor se baja, en el quinto piso, y compró un reloj y un esferográfico.

Tabla 5-13 El cuadro muestra nombres, piso de descenso y objetos que compraron; fase 2

Nombres	Katty	Elena	María	Rocío	Paola	Mery
Piso		5	6	2		1
Objetos		Reloj Esferográfico		Cuadro Portarretratos		Osito

Consideremos también que Katty recibió en la fiesta, un crucifijo de una de sus amigas que bajó en el segundo piso; Elena, María y Mery no descendieron en el segundo piso, Rocío no compró un crucifijo; la única que queda por mencionar es Paola, la misma que habría comprado la esclava y el crucifijo, y habría descendido en el segundo piso.Katty por consiguiente debió haber bajado en el tercer piso y compró posters y stikers:

Tabla 5-14 El cuadro muestra nombres, piso de descenso y objetos que compraron; fase 3

Nombres	Katty	Elena	María	Rocío	Paola	Mery
Piso	3	5	6	2	2	1
Objetos	Posters Stiker	Reloj Esferográfico		Cuadro Portarretratos	Esclava Crucifijo	Osito

Consideremos ahora los objetos que nos sobran y que no están asignados a ninguna señorita: el payaso, la lámpara y la agenda.

Dado que en el primer piso se vendían peluches el único objeto que correspondería a Mery sería el payaso (además el carácter de la chica es sentimental). Los objetos restantes los habría comprado María en el sexto piso.

Por tanto el cuadro completo quedaría así:

Tabla 5-15 El cuadro muestra los nombres, piso de descenso y los objetos que compraron

Nombres	Katty	Elena	María	Rocío	Paola	Mery
Piso	3	5	6	2	2	1
Objetos	Poster Stiker	Reloj Esferográfico	Lámpara Agenda	Cuadro Portarretratos	Esclava Crucifijo	Osito Payasito

Como vemos, el problema no es muy complicado y podemos solucionarlo únicamente ordenando los datos que se nos proporciona.

5.1.13. LA CENA

Una chica invitó recientemente a cenar a 5 de sus mejores amigas, ellas son: Nancy, Sandra, Jessica, Gloria, Paulina y Liliana (la anfitriona), las cuales se sentaron alrededor de una mesa circular. Una de ellas es inteligente, otra de ojos verdes, otra sentimental, otra escritora, otra cantante, y la otra la mejor amiga de Jessica.

La señorita que es la mejor amiga de Jessica se sentó frente a Nancy. La que es inteligente se sentó frente a Gloria, quien a su vez se sentó entre la señorita de ojos verdes y la mejor amiga de Jessica. La señorita que es escritora se sentó frente a Sandra, junto a la señorita inteligente y a la izquierda de la mejor amiga de Jessica. La señorita de ojos verdes se sentó entre la señorita Gloria y la señorita que se sentó enfrente de la mejor amiga de Jessica. Liliana, que es inteligente, se sentó junto a la señorita que es escritora y frente a la señorita que es sentimental. ¿Puede Ud. identificar a cada una de estas encantadoras chicas?

Solución

Para solucionar el problema procedamos de la siguiente manera:

Coloquemos a Nancy en una de las sillas, de igual manera colocaríamos enfrente de ella a la mejor amiga de Jessica.

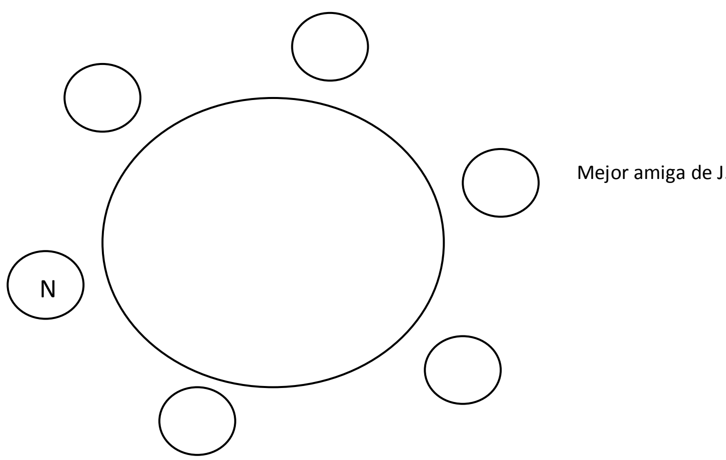


Figura 5-18 Ubicación de las amigas alrededor de la mesa circular; fase 1

Análogamente al proceso anterior, ordenemos todos los datos que nos da el problema.

La escritora se sentó a la izquierda de la mejor amiga de Jessica, entonces a la izquierda de la mejor amiga de Jessica pondremos “escritora” (entendiéndose por izquierda en el gráfico cuando vamos en sentido horario); frente a la posición de la escritora pondremos a Sandra, y a la izquierda de la escritora pondremos “inteligente”.

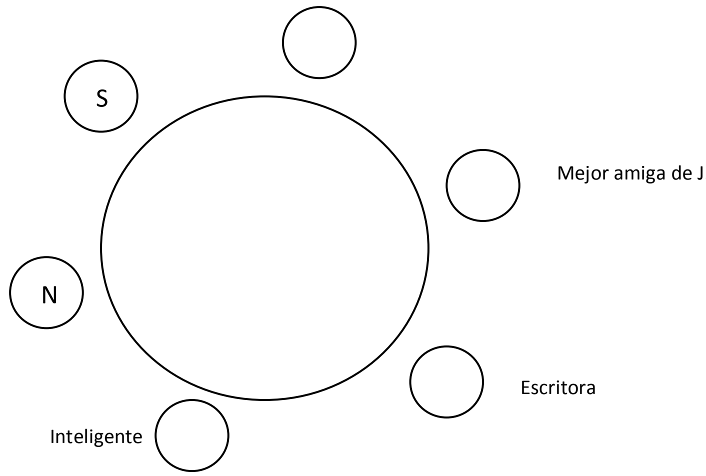


Figura 5-19 Ubicación de las amigas alrededor de la mesa circular; fase 2

Interpretemos los demás datos. La que es inteligente se sentó frente a Gloria, pondremos entonces al frente de la señorita inteligente una G que represente a Gloria. Gloria se sentó entre la señorita de ojos verdes y la mejor amiga de Jessica, Sandra entonces será la señorita de ojos verdes.

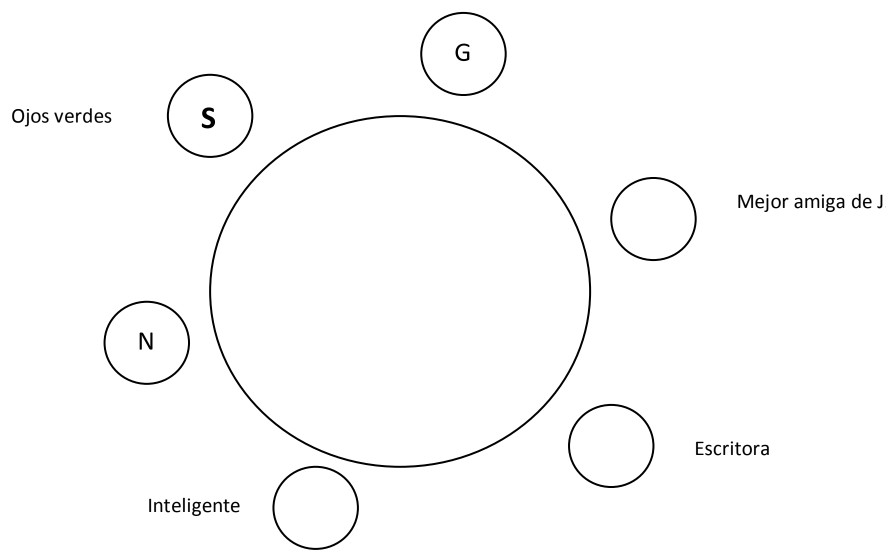


Figura 5-20 Ubicación de las amigas alrededor de la mesa circular; fase 3

Sandra la señorita de ojos verdes, se sentó entre Gloria y Nancy (Nancy está al frente de la mejor amiga de Jessica). Liliana es inteligente, pondremos entonces una L en el casillero correspondiente; ésta chica se sentó junto a la escritora. Además sabemos que la señorita sentimental se sienta frente a Liliana. Suponemos entonces que Jessica no puede ser su mejor amiga, por lo tanto la mejor amiga de Jessica es Paulina y Jessica es escritora. Nancy tendría entonces la cualidad restante, es decir cantante. La solución completa al problema sería por lo tanto:

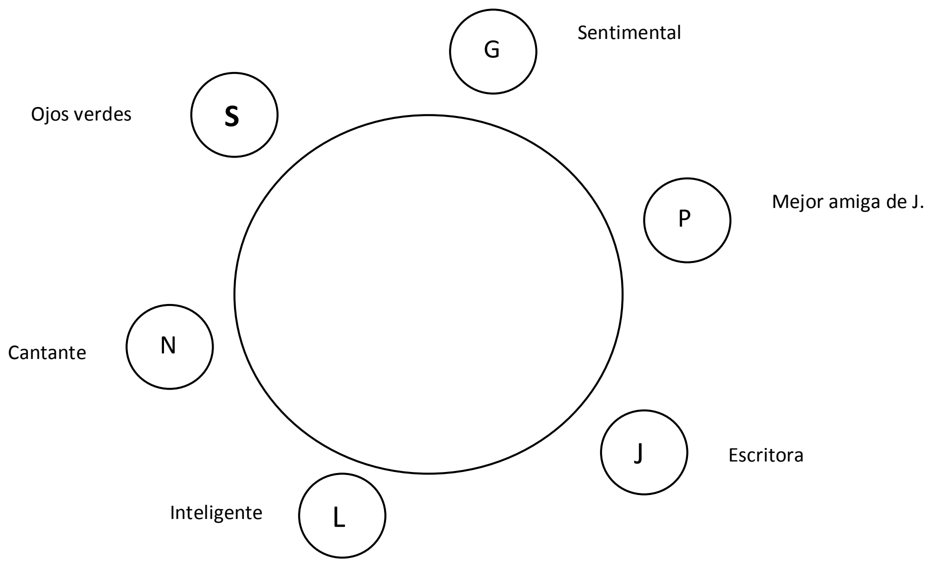


Figura 5-21 Las ubicaciones de las amigas alrededor de la mesa y sus cualidades

Interpretando la figura anterior tenemos:

Tabla 5-16 El cuadro describe a las chicas y sus respectivas cualidades

Chica	Sandra	Gloria	Paulina	Nancy	Liliana	Jessica
Cualidad	Ojos verdes	Sentimental	Mejor amiga de Jessica	Cantante	Inteligente	Escritora

5.1.14. EL POBLADO

En un poblado existen 7 casas, cada casa tiene 7 gatos, cada gato mata 7 ratones que, a su vez, estos roedores se habían comido cada uno siete espigas de trigo, y cada una de estas espigas de trigo, al sembrarlas, producirían siete arrobas de grano. ¿Cuál es el total de grano?

Solución

Como vemos, el número siete es sin lugar a dudas la clave para nuestro razonamiento; por consiguiente, para dar solución a este problema, debemos proceder como sigue:

Hay 7 casas, y en cada casa habitan 7 gatos:

$$7\,\mathrm{casas} * \frac{7\,\mathrm{gatos}}{\mathrm{casa}} = 7^2\, gatos$$

Cada gato mata 7 ratones:

$$7^2\,\mathrm{gatos} * \frac{7\,\mathrm{ratones}}{\mathrm{gato}} = 7^3\; ratones$$

Los ratones se comen 7 espigas de trigo cada uno:

$$7^3\,\mathrm{ratones} * \frac{7\,\mathrm{espigas}}{\mathrm{ratón}} = 7^4\;\mathrm{espigas}$$

Cada espiga produciría 7 arrobas de grano

$$7^4\;\mathrm{espigas} * \frac{7\,\mathrm{arrobas}}{\mathrm{espiga}} = 7^5\;\mathrm{arrobas}$$

En resumen, el total de grano que se produciría con las espigas que se comieron todos los ratones sería 7^5 = 16807 arrobas de grano.

5.1.15. EL CABALLO Y EL ASNO

Un caballo y un asno caminaban juntos llevando su pesada carga sobre sus lomos. Mientras el asno se quejaba de su pesada carga, el caballo le dijo: ¡No te lamentes!, ya que si yo te quitara un saco entonces mi carga sería el doble que la tuya. Sin embargo, si yo te diera un saco entonces tu carga sería igual a la mía. ¿Cuántos sacos llevaba cada uno?

Solución

Figura 5-22 Un caballo y un asno

Formemos un sistema de ecuaciones con los datos que nos proporciona el problema; designemos entonces por **c**, la carga en sacos de caballo, y por a, el número de sacos que lleva el asno:

Si quitamos un saco al asno (a-1), la carga sobrante del mismo sería la mitad de lo que carga ahora el caballo (c+1); si queremos igualar las dos cargas debemos multiplicar por 2 la carga del asno, es decir:

$c+1=2(a-1)$

Si el caballo da un saco al burro, sus cargas serían iguales, esto es:

$c-1=a+1$

Trasponiendo y ordenando los términos de las ecuaciones anteriores, llegamos al sistema siguiente:

$$\begin{cases} 2a-c=3 \\ -a+c=2 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos: $a=5$ y $\mathrm{c}=7$

Entonces, tenemos que el caballo cargaba 7 sacos, mientras que el asno se lamentaba por tener 5 sacos en su lomo.

5.1.16. LA EDAD

Tres personas, Andrés, Milton y Carlos, dicen lo siguiente:

Andrés: Yo tengo 22 años, y dos menos que Milton y uno más que Carlos.

Milton: No soy el más joven, Carlos y yo tenemos tres años de diferencia. Carlos tiene 25 años.

Carlos: Yo soy más joven que Andrés. Andrés tiene 23 años. Milton tiene tres años más que Andrés.

Determine la edad de cada una de las personas sabiendo que únicamente una de las afirmaciones que hace cada persona es falsa.

Solución

¿Cómo determinar cuál afirmación es falsa? Tal vez muchos empezarían resolviendo el problema probando una serie de combinaciones que se pueden presentar, proceso que a la larga será muy tedioso, complicado y largo.

Para resolver este problema debemos analizar muy bien las afirmaciones de las tres personas para comprobar así su veracidad; empecemos por lo tanto buscando parejas de afirmaciones que se puedan contradecir, reduciendo así el número de posibilidades y ahorrando mucho esfuerzo en la resolución del enigma.

Revisemos la primera afirmación de Andrés: “yo tengo 22 años”, ¿este enunciado no contradice acaso a lo dicho por Carlos: “Andrés tiene 23 años”? En efecto, si la primera afirmación es tomada como verdadera, la segunda será falsa y viceversa, si la primera afirmación es verdadera, la segunda será mentira.

Caso similar ocurre, si nos damos cuenta, con el segundo enunciado de Andrés: “Yo tengo dos años menos que Milton”, el cual contradice a la afirmación de Carlos “Milton tiene tres años más que Andrés”.

Supongamos que la afirmación que dice Andrés: “Yo tengo 22 años”, es falsa, por lo que, las dos restantes: “Dos menos que Milton, y uno más que Carlos”, serían verdaderas; según este análisis, procedamos a relacionarlo con lo que Milton y Carlos dicen.

Milton dice: “No soy el más joven”, que según nuestro análisis es verdadero, ya que consideramos a Milton como el mayor. Además expresa: “Carlos y yo tenemos tres años de diferencia”, lo cual coincide también con nuestro razonamiento, porque si Andrés tiene dos menos que Milton y uno más que Carlos, entonces Milton y Carlos tienen una diferencia de tres años de edad. Todo esto nos lleva a concluir que la tercera proposición mencionada por Milton: “Carlos tiene 25 años”, es falsa.

Analicemos finalmente lo que Carlos dice: “Yo soy más joven que Andrés”, expresión que es correcta, ya que se consideró a Carlos como el menor de todos; luego dice: “Andrés tiene 23 años”, afirmación que también es verdadera, ya que satisface todas las condiciones consideradas como correctas, concluyéndose finalmente que su última expresión: “Milton tiene tres años más que Andrés”, es falsa; este último análisis lo podemos comprobar porque si dijéramos que la expresión es verdadera, contradijera todo lo que hemos analizado anteriormente.

Finalmente, si sabemos que Andrés tiene 23 años, podemos concluir que Milton tiene 25 años (dos años más que Andrés) y Carlos tiene 22 años (uno menos que Andrés); conclusiones con las cuales satisfacemos todas las proposiciones consideradas como verdaderas, lo que significa que nuestra suposición inicial fue correcta, es decir:

Tabla 5-17 El cuadro muestra las edades de tres chicos

Nombres	Edad
Andrés	23
Milton	25
Carlos	22

5.1.17. EL NOVIO

Para escoger un novio entre tres candidatos, un Dr. en Matemáticas, un Dr. en Física, y un Ing. en Sistemas; una chica decide someterles a una prueba: Sobre la cabeza de cada uno de ustedes se colocará una bola, cuyo color no lo podrán ver, pero si verán el color de la bola colocada sobre la cabeza de los demás. Los colores se escogerán entre cinco bolas, tres rojas y dos verdes; el primero que diga el color de la bola que tiene sobre su cabeza será mi novio; al que se equivoque, le corto la cabeza. Uno de ellos el matemático, que ve una bola roja sobre la cabeza de los otros dos, afirma con seguridad, viendo que los otros dos no dicen nada, yo tengo una bola roja.

Explique su razonamiento.

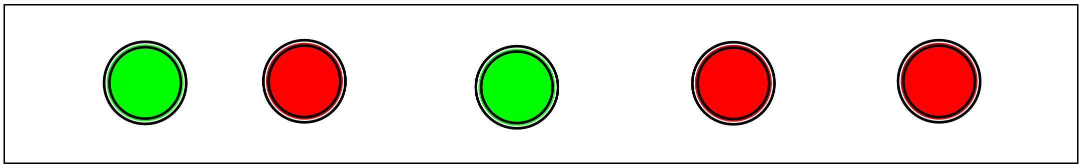


Figura 5-23 Dos bolas verdes y tres rojas

Cada uno de los participantes de la contienda debe tener la absoluta seguridad del color de la esfera que tiene sobre su cabeza, ya que si responde teniendo dudas corre el riesgo de sufrir un cruel destino. El matemático antes de contestar debe tener absoluta certeza sobre lo que va a responder, a continuación analizamos la situación:

Supongamos que el Matemático tiene una bola verde sobre su cabeza, el Dr. en Física pensaría así: "Si yo tengo una bola verde sobre mi cabeza, el Ing. en Sistemas rápidamente se daría cuenta que la bola que tiene sobre su cabeza es roja, pues las dos únicas esferas verdes, estarían fuera de la bolsa y en las cabezas mía y del matemático. Entonces, como la bola sobre mi cabeza no es verde, la misma debe ser roja."

Con este razonamiento el Dr. en Física sería sin lugar a dudas el novio de la chica, pues no se habrá equivocado; "esto suponiendo que el matemático tenga una bola verde sobre su cabeza".

De la misma manera, si el Ing. en Sistemas ve una bola verde sobre la cabeza del matemático, aplicaría un razonamiento exactamente igual al del físico, con lo que sin temor a equivocarse, afirmaría que la bola sobre su cabeza es roja, es decir, él pensaría:

"Si yo tengo una bola verde sobre mi cabeza, el Dr. en Física rápidamente se daría cuenta que la bola que tiene sobre su cabeza es roja, pues las dos únicas esferas verdes, estarían fuera de la bolsa y en las cabezas mía y del matemático. Entonces, como la bola sobre mi cabeza no es verde, la misma debe ser roja."

Dicho de otro modo, si el matemático tuviera una bola verde sobre su cabeza el Dr. en Física o el Ing. de Sistemas rápidamente se darían cuenta sin temor a equivocarse, de que la esfera que reposa sobre su cabeza es roja; pero tal como se presenta problema, ninguna de las dos personas responde.

Si el Físico y el Ing. en Sistemas no respondieron, fue porque tenían dudas, es decir, la esfera sobre la cabeza del matemático evidentemente no era verde, sino roja.

Entonces, el Dr. en Matemática pensó en lo anterior, y pudo sin temor a que le corten la cabeza, indicar que la esfera que tenía sobre su cabeza era roja.

5.1.18. FLOR MARIA

Flor María vive en una casa de 2 pisos, en el primer piso vive la gente que miente, en el segundo sólo gente que dice la verdad. Dice Flor María que se encontró con un vecino que le dijo que vivía en el segundo piso. ¿En qué piso vive Flor María?

Busquemos la solución al problema, esto es, analicemos primero las respuestas que darían los habitantes del primero y segundo piso, a la siguiente pregunta: ¿En qué piso vive Ud.?

Los del primer piso mienten siempre; por lo tanto su respuesta sería: “Yo vivo en el segundo piso”.

Los del segundo piso dicen la verdad, por lo tanto la contestación a la misma pregunta sería: “Yo vivo en el segundo piso”.

Veamos ahora lo que dice Flor María “Me encontré con un vecino que dice que vive en el segundo piso”.

Como podemos darnos cuenta, Flor María dice la verdad, pues el vecino viva en el primero, o viva en el segundo piso, dará siempre una de las respuestas anteriores (yo vivo en el segundo piso).

Hemos comprobado entonces que Flor María dice siempre la verdad, por lo tanto ella vive en el segundo piso.

5.1.19. LAS VACAS DE NEWTON

Sabiendo que 75 vacas han comido en 12 días la hierba de un prado de 60 áreas y que 81 vacas han comido en 15 días la hierba de otro prado de 72 áreas, se desea saber cuántas vacas comerán en 18 días la hierba de un prado de 96 áreas.

Nota: Se debe considerar que los 3 prados contienen la misma cantidad de hierba por área, además debe suponer que todas las vacas consumen la misma cantidad.

Solución

A primera vista, el problema parece complicado, muchos dirían que la solución se puede obtener haciendo una regla de tres.

Esto no es cierto, si procedemos al cálculo del problema con este procedimiento, la respuesta sería válida únicamente para una afirmación, de las que hace el problema pero no se cumpliría para la otra. Debemos por lo tanto, buscar una relación entre las 2 hipótesis que plantea el problema, y aplicarla a la tercera.

Sabemos que 75 vacas comen en 12 días la hierba de 60 áreas (primera afirmación). Sabemos también que 81 vacas comen en 15 días la hierba de 72 áreas (segunda afirmación).

¿Cómo se relacionan entonces las afirmaciones? La respuesta es sencilla; fijemos nuestra atención en el número de vacas; en el primer caso tenemos 75 y en el segundo 81, es decir, han aumentado 6 vacas.

Veamos ahora los días: en la primera afirmación tenemos 12 y en la segunda 15, es decir, el aumento de días es 3. Finalmente, ¿En cuánto aumentan las áreas?, 72 – 60 = 12 áreas de aumento. Resumiendo:

Tabla 5-18 Número de vacas, días y áreas según afirmaciones e incremento; fase 1

	Vacas	**Días**	**Áreas**
Afirmación 1	75	12	60
Afirmación 2	81	15	72
Incremento	6	3	12

Comparemos ahora la segunda condición del problema, con la tercera:
No conocemos el aumento ni el número de vacas, por lo que debemos determinarlo.

Los días son 15 y 18, por lo tanto el incremento de días es 3. Finalmente, en la segunda hipótesis del problema tenemos 72 áreas y en la tercera tenemos 96 áreas, esto significa que se han aumentado 24 áreas, esto es:

Tabla 5-19 Número de vacas, días y áreas según afirmaciones e incremento; fase 2

	Vacas	Días	Áreas
Afirmación 1	75	12	60
Afirmación 2	81	15	72
Afirmación 3	?	18	96
Incremento 1-2	6	3	12
Incremento 2-3	?	3	24

Busquemos ahora una relación entre los 2 incrementos encontrados. El número de días se mantiene igual en ambos casos, pero el número de áreas que aumentamos se ha duplicado en el segundo caso.

Pensemos, si duplico incremento en las áreas, pero conservo el mismo incremento en los días, necesarios para que las vacas coman el pasto; dado que los animales comen la misma cantidad de pasto y los prados tienen la misma cantidad de hierba por área, entonces concluimos que necesitaré un incremento mayor de vacas para conservar esta relación (si dejo el mismo incremento de vacas, es decir 6; necesitaré un mayor incremento de días). Por consiguiente duplico el incremento de vacas de 6 a 12, y como en la segunda afirmación del problema teníamos 81 vacas, entonces 81 + 12 = 93. Esto significa que se necesita 93 vacas para que coman en 18 días un prado de 96 áreas.

En conclusión:

Tabla 5-20 Número de vacas, días y áreas según afirmaciones e incremento

	Vacas	Días	Áreas
Afirmación 1	75	12	60
Afirmación 2	81	15	72
Afirmación 3	93	18	96
Incremento	6	3	12
Incremento	12	3	24

5.1.20. LOS ALUMNOS

En un instante dado en el aula de una escuela, un grupo de alumnos está leyendo, otros charlando, y la cuarta parte del total de alumnos están escribiendo. Después 4 de ellos dejan la lectura por la escritura, uno deja la charla por la lectura y 2 dejan la escritura por la charla, con lo cual resulta entonces que escriben tantos como leen y leen tantos como charlan. ¿Cuál es el número de alumnos?

Solución

¡Bueno! concentremos en la resolución del problema. Necesitamos conocer el número de alumnos que existen en la clase, con los datos del problema, podemos formar una serie de ecuaciones, las cuales nos permitirán llegar a la respuesta.

Supongamos que **x** representa la totalidad de alumnos, e **y** los alumnos que leen en un instante dado, entonces tendremos que:

- El grupo de alumnos que escriben en un instante dado es : $\frac{x}{4}$

- Lo alumnos que charlan son: $x-\frac{x}{4}-y=\frac{3x}{4}-y$

Siguiendo con nuestro análisis e interpretando los demás datos, tenemos que:

- 4 alumnos dejan la lectura por la escritura, pero uno deja la charla por la lectura, entonces a **y** le quitamos 4 alumnos, pero le sumamos uno, es decir:

$$y-4+1=y-3 \qquad \textit{alumnos que leen}$$

- Dos alumnos dejan la escritura por la charla, pero 4 alumnos dejan la lectura por la escritura; entonces quitamos 2 alumnos del grupo de escritores pero aumentamos 4 estudiantes que habían dejado la lectura:

$$\frac{x}{4}-2+4=\frac{x}{4}+2 \quad \textit{alumnos que escriben}$$

- Un alumno deja la charla por la lectura, pero 2 dejan la escritura por la charla; entonces quitamos un alumno del grupo de charlones, pero aumentamos dos que dejaron la escritura:

$$\frac{3x}{4}-y-1+2=\frac{3x}{4}-y+1 \quad \textit{alumnos que charlan}$$

Entonces, con las expresiones del análisis anterior y las condiciones restantes del problema, que escriben tantos como leen y leen tantos como charlan, se forma el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y-3=\dfrac{x}{4}+2 \\ y-3=\dfrac{3x}{4}-y+1 \end{cases} \qquad \text{o} \qquad \begin{cases} x-4y=-20 \\ 3x-8y=-16 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos: $x=24$ y $\mathrm{y}=11$.

En conclusión:

- El número total de alumnos es: 24
- Alumnos que leen: 8
- Alumnos que escriben: 8
- Alumnos que charlan: 8

5.1.21. EL CORDEL

La mamá le dice al hijo. ¿Para qué necesitas tanto cordel, si ya te di un buen ovillo? ¿Qué has hecho con el cordel?. Y el muchacho contesta. Primero me cogiste un tercio. La mitad de lo que quedó se la llevó Juan. Quedó muy poquito y de ello cogió papá la tercera parte. Luego Katty necesitó las 3 cuartas partes del resto. ¡No quedaron más que 20 centímetros!. ¿Qué longitud tenía el cordel al principio?

Solución

La respuesta del muchacho estaba bien justificada, pues había repartido el cordel entre algunos, quedando con 20 centímetros al final.

Veamos por lo tanto cómo se corta y se reparte al cordel.

Supongamos que **x** representa la longitud total del cordel:

La mamá del muchacho cogió la tercera parte: $\frac{x}{3}$, queda $\frac{2x}{3}$ de cordel.

La mitad de esto se lo llevó Juan: $\frac{1}{2}\left(\frac{2x}{3}\right)=\frac{x}{3}$, queda $\frac{x}{3}$ de cordel.

El papá del muchacho cogió un tercio de lo anterior: $\frac{1}{3}\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{x}{9}$, queda $\frac{2x}{9}$ de cordel.

Katty necesitó las tres cuartas partes de $\frac{2x}{9}$, entonces sobrarían $\frac{1}{4}\left(\frac{2x}{9}\right)=\frac{x}{18}$ del cordel.

Por lo tanto si $\frac{x}{18}$ del cordel miden 20 centímetros, es decir: $\frac{x}{18}=20$ entonces $x=360\,\text{cm}$.

Comprobemos nuestro resultado:

La mamá del muchacho cogió un tercio: 120 cm, quedan 240 cm. La mitad de esto se lo llevó Juan: 120 cm, quedan 120 cm. El papá de muchacho cogió la tercera parte de lo anterior: 40 cm, quedan 80 cm del cordel entero. Katty necesitó las tres cuartas partes del cordel restante: 60 cm quedando 20 cm.

5.1.22. LOS HUEVOS DE GALLINA Y DE PATO

Se dispone de 6 cestas que contienen huevos, una de ellas contiene 5, la otra 6, 12, 14, 29 y 23 respectivamente; en una de las cestas hay huevos de gallina, en las otras de pato. "Si vendo esta cesta – meditaba el vendedor - me quedarán el doble de huevos de gallina que de pato". ¿A qué cesta se refiere el vendedor? (Perelmann, 1968, p. 93).

Solución

Empecemos haciendo un razonamiento lógico:

Si el vendedor retira una cesta, quedarán el doble de huevos de gallina que de pato; eliminemos por lo tanto cesta a cesta y escribamos luego el número de huevos que sobra en cada caso; por ejemplo si elimina la cesta 1 que contiene 5 huevos, nos quedaría 84 de total que es 89 huevos, así sucesivamente, es decir:

Tabla 5-21 El cuadro muestra las cestas eliminadas y el número de huevos restantes

CESTA ELIMINADA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
HUEVOS	5	6	12	14	29	23
RESTO DE HUEVOS	84	83	77	75	60	66
TOTAL	89	89	89	89	89	89

Para que pueda cumplirse que el número de huevos de gallina sea el doble que los de pato, el número sobrante de huevos debe ser divisible para 3 (por ejemplo, si tenemos 4 huevos de pato, el doble de huevos de gallina sería 8 y el número total de huevos es 12, número divisible para 3); lo mismo se cumple para cualquier cantidad de huevos de pato y el doble de gallina.

Veamos entonces cuáles de las cantidades sobrantes en huevos son divisibles para tres.

Tabla 5-22 Cestas eliminadas, número de huevos restantes y su divisibilidad por 3

CESTA ELIMINADA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
HUEVOS	5	6	12	14	29	23
RESTO DE HUEVOS	84	83	77	75	60	66
Divisible por 3	SI	NO	NO	SI	SI	SI

En conclusión, podemos vender sólo las cestas 1, 4, 5 y 6 para que se cumpla la condición antes mencionada.

¿Cómo determinamos ahora la cesta a la que se refiere el vendedor? De los restos de huevos al ser vendidas las cestas (1, 4, 5 y 6); 1/3 corresponderían a los huevos de pato y 2/3 a los de gallina (para se cumple la relación del doble de huevos de gallina que de pato). Entonces:

Tabla 5-23 Cestas que cumplen y no cumplen con las condiciones del vendedor

CESTA ELIMINADA	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
HUEVOS	5	6	12	14	29	23
RESTO DE HUEVOS	84	83	77	75	60	66
Divisible por 3	SI	NO	NO	SI	SI	SI
2/3 (h. de gallina)	56			50	40	44
1/3 (h. de pato)	28			25	20	22

Si vendemos la cesta 1, tendremos un sobrante de 56 huevos de gallina y 28 de pato. Al vender la cesta 4, tendremos un sobrante de 50 huevos de gallina y 25 de pato; vendiendo la cesta 5, nos sobrarían 40 huevos de gallina y 20 de pato; pero si vendemos la cesta 6, nos quedarían 44 huevos de gallina y 22 de pato. Tenemos entonces al momento 4 soluciones posibles, pero debemos buscar la que se acomode perfectamente al número de huevos que sobran en las otras cestas.

Si vendemos la canasta 1, los números 56 y 28 no se obtendrían de la suma del número de los huevos que quedan en las canastas restantes, es decir, ninguna combinación de 6, 12, 14, 29 y 23 huevos sobrantes, al ser sumados nos daría el par de números buscados; igual caso se da al vender las canastas 4 y 6, no se podrá obtener las parejas de números 50 - 25 y 44 - 22.

Si vendemos la canasta 5 de 29 huevos, nos quedan:

6+ 14 = 20 huevos de pato (canastas 2 y 4).

5 + 12 + 23 = 40 huevos de gallina (canastas 1, 3 y 6)

Lo que satisface las condiciones del problema. Por consiguiente, la canasta a la cual se refería el vendedor, es a la de 29 huevos, la cual vende.

5.1.23. LOS OBREROS

Los obreros de una fábrica se declaran en huelga. La cuarta parte de ellos cobra un jornal de 120 dólares, la tercera parte de 100 dólares y el resto de 80 dólares. La huelga duró 15 días y al reintegrarse al trabajo se les abonó la cuarta parte de lo que hubieran ganado en los 15 días, con lo cual perdieron los obreros 548100 dólares ¿Cuántos son los obreros?

Solución

Se requiere que determinemos el número de obreros que existen en una fábrica a partir del salario que percibe cada uno; tendremos por lo mismo que determinar primero la ganancia total o el salario real de los obreros en 15 días como si no hubiesen estado en huelga.

Los trabajadores sólo reciben la cuarta parte de su salario normal, y pierden 548100 dólares que representa los 3/4 del salario total a pagarse a todos los trabajadores, entonces:

$$\frac{3}{4} salario = 548100$$

$$\frac{1}{4} salario = 182700$$

$$Salario\ \ de\ \ todos\ \ los\ \ trabajadres = 730800$$

Es decir, en los 15 días de trabajo, la totalidad de los obreros debían recibir un monto de 730800 dólares. Por lo tanto, todos los obreros deberían recibir 48720 dólares diarios.

Veamos ahora cuánto cobra cada grupo de obreros; representemos entonces por **x**, el número total de obreros que hay en la fábrica; entonces la cuarta parte de los obreros sería $\frac{x}{4}$, la tercera parte $\frac{x}{3}$ y el resto se lo representaría por $\frac{5x}{12}$, es decir:

$$\frac{x}{4}+\frac{x}{3}+\frac{5x}{12}=x$$

Pero cada obrero gana por su trabajo una cantidad en dólares, dependiendo lógicamente del grupo en que estén:

- Los obreros de primer grupo ganan: 120 dólares
- Los obreros del segundo grupo ganan: 100 dólares
- Los obreros del tercer grupo ganan: 80 dólares.

Entonces el salario total, en un día de trabajo, del primer grupo de obreros sería $120\left(\frac{x}{4}\right)=30x$; del segundo grupo $100\left(\frac{x}{3}\right)=\frac{100x}{3}$, y del tercer grupo $80\left(\frac{5x}{12}\right)=\frac{100x}{3}$.

Sumando los tres salarios de cada grupo de trabajadores, obtendríamos como resultado el salario diario de todos los obreros de la fábrica, es decir:

$$30x+\frac{100x}{3}+\frac{100x}{3}=48720$$

Al resolver la ecuación se determina que el número de trabajadores que existen en la fábrica es de 504 obreros. Nuestro resultado puede ser comprobado:

La cuarta parte del total de obreros serían 126, si cada obrero recibe 120 dólares, la fábrica paga 226800 dólares a este primer grupo, por 15 días de trabajo

La tercera parte del total de trabajadores es 168, si cada obrero recibe 100 dólares, la fábrica abona 252000 al segundo grupo, de igual manera por 15 días de trabajo. El resto de obreros son 504 –126 –168 =210, a 80 dólares que percibe cada obrero, la fábrica paga 252000 dólares.

En resumen, la fábrica por concepto de sueldos tiene un egreso correspondiente a 226800 + 252000 + 252000 = 730800 dólares, esta cantidad se abona a los obreros en 15 días.

Como los trabajadores no desempeñaron sus cargos durante los 15 días y se dedicaron a hacer huelga, se les abonó la cuarta parte de su salario, es decir 182700 dólares.

Entonces 730800 dólares que ganarían los obreros menos 182700 dólares que se les abona dan un resultado de 548100 pesetas de pérdida.

Queda comprobado ahora el resultado del problema.

5.1.24. LA TABLA MAGICA

Considere la tabla adjunta:

Tabla 5-24 Tabla mágica

-3	9	15	-2	14	18	-18	-4
-8	4	10	-7	9	13	-23	-9
3	15	21	4	20	24	-12	2
1	13	19	2	18	22	-14	0
-14	-2	4	-13	3	7	-29	-15
15	27	33	16	32	36	0	14
-12	0	6	-11	5	9	-27	-13
-16	-4	2	-15	1	5	-31	-17

Seleccione cualquier número trazando un círculo alrededor de él. Tache ahora el resto de los números que están en su misma fila y columna. Repita la misma operación: traza un círculo alrededor de cualquier número no tachado y tacha todos los números que están en su misma fila y columna.

Al repetir la operación ocho veces, habrá ocho números con un círculo alrededor. Suma todos ellos y comprueba que el resultado es 19.

Explicación

La tabla anterior es la suma de ciertos números, donde se han ocultado los sumandos.

La tabla completa sería así:

Tabla 5-25 Tabla mágica completa

+	-5	7	13	-4	12	16	-20	-6
2	-3	9	15	-2	14	18	-18	-4
-3	-8	4	10	-7	9	13	-23	-9
8	3	15	21	4	20	24	-12	2
6	1	13	19	2	18	22	-14	0
-9	-14	-2	4	-13	3	7	-29	-15
20	15	27	33	16	32	36	0	14
-7	-12	0	6	-11	5	9	-27	-13
-11	-16	-4	2	-15	1	5	-31	-17

El proceso anterior hace que la suma de los números encerrado en los círculos sea siempre la suma de los números de la fila y columna resaltada en la tabla: -5+7+13-4+12+16-20-6+2-3+8+6-9+20-7-11=19

5.1.25. EL NÚMERO QUE PENSO

Dígale que el número pensado eleve **al** cubo, sume el triple del cuadrado del número, luego sume el triple del número y por último sume 1. Pídale el resultado de todas las operaciones antes indicadas. Ahora saque la raíz cúbica de todo ese resultado y réstele uno. El resultado será el número que la persona pensó al inicio.

Explicación matemática

Supongamos que x es el número pensado.

Elevemos al cubo: x^3

Sumemos el triple del cuadrado del número: x^3+3x^2

Luego sume el triple del número y por último sume 1: $x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3$

Saquemos la raíz cúbica de ese resultado: x+1

A esa raíz le restamos 1: x

Comprobamos matemáticamente que siempre llegamos al número pensado, siempre y cuando se hagan todos los pasos y cálculos en forma correcta.

5.1.26. CUADRADOS MÁGICOS

Dividir un cuadrado en casillas cuadradas, y en cada una de ellas coloquen los números sin repetir, de modo de obtener siempre la misma suma, en cada fila, en cada columna y cada diagonal.

En los siguientes casos:

a) Coloquemos los números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18 en un cuadrado de tal forma que en cada fila, columna y diagonal la suma sea 30.

Tabla 5-26 Cuadrado mágico de 3x3, cuya suma es 30

12	2	16
14	10	6
4	18	8

b) Coloquemos los números 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24 y 27 en un cuadrado de tal forma que en cada fila, columna y diagonal la suma sea 45.

Tabla 5-27 Cuadrado mágico de 3x3, cuya suma es 45

18	3	24
21	15	9
6	27	12

c) Coloquemos los múltiplos de 5 hasta el 80 en cuadrado de tal forma que en cada fila, columna y diagonal la suma sea 170.

Tabla 5-28 Cuadrado mágico de 4x4, cuya suma es 170

5	75	70	20
60	30	35	45
40	50	55	25
65	15	10	80

5.1.27. LA MATRIZ MÁGICA

Seleccione cualquier matriz trazando un círculo alrededor de ella y tache el resto de matrices que están en su misma fila y columna. Repita la misma operación: traza un círculo alrededor de cualquier matriz no tachada y tache todas las demás que están en su misma fila y columna. La operación repítalo cuatro veces, tendrá cuatro matrices con un circulo alrededor. Suma todas ellas y el resultado es la matriz $\begin{pmatrix} 13 & 11 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$. Pruebalo.

Tabla 5-29 Cuadro mágico de matrices

$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ -2 & 12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -4 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EZQUERRA, A. (2011), Magia y Matemáticas de la Mano de Martin. Universidad del País Vasco. Recuperado de http://www.sinewton.org/numeros/numeros/76/Monografico_01.pdf

DE GUZMÁN, M. (2010), Juegos matemáticos en la enseñanza. Facultad de matemáticas. Universidad Complutense de Madrid. Recuperado de http://www.sectormatematica.cl/articulos/juegosmaten.pdf

DEULOFEU, J. (2011), .Juegos y recreaciones para la enseñanza de las matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona. Recuperado de https://www.edumat.uab.cat/contexto/postgrau/activitats/.../Lecturamod%206.pdf

GRUPO ALQUERQUE. (2006), Cuadraturas de polígonos regulares (publicado en la revista SUMA, número 48, 2005). Recuperado de http://www.divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10124&directory=67

MEAVILLA, V. (2008), Algunas razones para introducir la historia de las matemáticas en las aulas de secundaria. Recuperado de https://www.ejgv.euskadi.net/r53-2291/es/.../15_algunas_razones_33.**pdf**

MALBA, T. (2000), El hombre que calculaba (14ª ED), Ed. Verón, Barcelona, España.

MORALES M., DAZA W., Razonamiento abstracto tomo 8 Ed. Santillana.

MORALES M., DAZA W., Aptitud numérica 1,2, 3, Ed. Santillana.

ORTIZ, A. (2005), Matemáticas recreativas. Recuperado de https://www.aldadis.net/revista7/documentos/antonia.pdf

PERELMAN, Y. (1968), El divertido juego de las matemáticas, Ed. Martínez Roca S.A, Colombia

PARADOJAS Y RIGOR: la historia interminable. Recuperado de http://www.mat.ucm.es/~bombal/Personal/Historia/ParadojasYrigor.pdf

VIDIGAL, C. (2010), Formación de capacidades relacionadas con el desarrollo lógico-matemático. Recuperado de URL:http://www.anpebadajoz.es/autodidacta/autodidacta_archivos/numero_9_archivos/c_v_grenno.pdf

URL:http://users.dcc.uchile.cl/~ccollazo/cc20a/redes.html 15/02/2014

ANEXOS

Tabla A-1 Preguntas del Test 1 y el número de estudiantes que contestaron correctamente

PREGUNTAS	ESTUDIANTES QUE CONTESTARON CORRECTAMENTE
P1	14
P2	8
P3	20
P4	25
P5	15
P6	16
P7	5
P8	13
P9	5
P10	3
P11	2
P12	9
P13	19
P14	13
P15	21
P16	19
P17	6
P18	17
P19	13
P20	11
P21	7
P22	7
P23	3
P24	4
P25	5

Tabla A-2 Resultados obtenidos por los estudiantes en el Test 1

ESTUDIANTE	PREGUNTAS CONTESTADAS CORRECTAMENTE EN EL TEST 1	EVALUACIÓN SOBRE 100
E1	7	28
E2	15	60
E3	10	40
E4	11	44
E5	8	32
E6	14	56
E7	14	56
E8	11	44
E9	13	52
E10	10	40
E11	11	44
E12	17	68
E13	16	64
E14	10	40
E15	10	40
E16	17	68
E17	12	48
E18	16	64
E19	13	52
E20	9	36
E21	7	28
E22	8	32
E23	6	24
E24	13	52
E25	10	40

Tabla A-3 Tabla de frecuencias de las evaluaciones del Test 1

TABLA DE FRECUENCIAS DE TEST 1			
CALIFICACIONES	**FRECUENCIA**	**FR**	**FA**
24	1	4	4
28	2	8	12
32	2	8	20
36	1	4	24
40	5	20	44
44	3	12	56
48	1	4	60
52	3	12	72
56	2	8	80
60	1	4	84
64	2	8	92
68	2	8	100
TOTAL	25		

Tabla A-4 Preguntas del Test 2 y el número de estudiantes que contestaron correctamente

PREGUNTAS	ESTUDIANTES QUE CONTESTARON CORRECTAMENTE
P1	18
P2	17
P3	22
P4	21
P5	22
P6	21
P7	22
P8	22
P9	20
P10	22
P11	17
P12	21
P13	22
P14	23
P15	23

Tabla A-5 Resultados obtenidos por los estudiantes en el Test 2

ESTUDIANTE	PREGUNTAS CONTESTADAS CORRECTAMENTE EN EL TEST 2	EVALUACIÓN SOBRE 100
E1	7	46,7
E2	15	100
E3	7	46,7
E4	12	80
E5	12	80
E6	15	100
E7	11	73,3
E8	13	86,7
E9	15	100
E10	12	80
E11	9	60
E12	15	100
E13	14	93,3
E14	13	86,7
E15	12	80
E16	14	93,3
E17	11	73,3
E18	14	93,3
E19	12	80
E20	10	66,7
E21	9	60
E22	12	80
E23	10	66,7
E24	13	86,7
E25	9	60

Tabla A-6 Tabla de frecuencias de las evaluaciones del Test 2

TABLA DE FRECUENCIAS DE TEST 2			
CALIFICACIONES	FRECUENCIA	FR	FA
46,7	2	8	8
60	3	12	20
66,7	2	8	28
73,3	2	8	36
80	6	24	60
86,7	3	12	72
93,3	3	12	84
100	4	16	100
TOTAL	25		