ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

TÍTULO DE LA TESIS

"ANÁLISIS DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PARAMÉTRICOS A TRAVÉS DE MODELIZACIÓN ALGEBRAICA Y MÉTODO GRÁFICO PARA DESARROLLAR DESTREZAS MATEMÁTICAS EN LOS DOCENTES"

AUTOR
BALDOVINO LAMIRATA CARIGLI MOTTA

Tesis presentada ante la Escuela de Postgrado y Educación Continua de la ESPOCH, como requisito parcial para la obtención del grado de Magíster en Matemática Básica.

RIOBAMBA – ECUADOR

2014

CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DE TESIS CERTIFICA QUE:

El trabajo de investigación titulado "ANÁLISIS DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PARAMÉTRICOS A TRAVÉS DE MODELIZACIÓN ALGEBRAICA Y MÉTODO GRÁFICO PARA DESARROLLAR DESTREZAS MATEMÁTICAS EN LOS DOCENTES.", de responsabilidad del Sr. Baldovino Lamirata Carigli Motta, ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.

Tribunal de Tesina:

DR. Juan Vargas Ms. C **PRESIDENTE**	FIRMA
Dra. Angélica Urquizo A. Ms. **DIRECTOR**	FIRMA
Mat. Marcelo Cortes B. Ms.C. **MIEMBRO**	FIRMA
Mat. Alberto Vilañez T.Ms C. **MIEMBRO**	FIRMA

Riobamba, junio 2014.

ÍNDICE

ÍNDICE DE GRÁFICOS

ÍNDICE DE CUADROS

DEDICATORIA

A mis hijos

AGRADECIMIENTOS

Un agradecimiento de corazón a mi tutora Angelica Urquizo, que desde un comienzo supo dar a este trabajo una estructura y organización que me permitieron dar forma a la idea que tenía del mismo.

Un agradecimiento también a mis compañeros de la maestría, que a lo largo del tiempo aprendí a estimar, lo cual me hizo sentir una persona mejor.

DERECHOS INTELECTUALES

Yo Baldovino Lamirata Carigli Motta, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en la presente Tesis/Tesina, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Baldovino Lamirata Carigli
0602604688

RESUMEN

La investigación tuvo como objetivo determinar si el proceso de análisis de los problemas geométricos paramétricos empleando la metodología de la modelización algebraica y el método gráfico, mejora el nivel de destrezas matemáticas en los docentes.

A tal fin se emplearon los métodos científico, analítico, sintético, constructivista, por perseguir un plan ordenado de acciones como seleccionar, formular y delimitar el problema, proponer soluciones, requerir de un marco teórico, formular una hipótesis, recolectar y analizar datos, presentar los resultados, tratar el tema de manera mayéutica y participativa.

La hipótesis del trabajo fue que el uso de la modelización algebraica y del método gráfico cartesiano en el análisis de un problema geométrico paramétrico, mejora el nivel de destrezas matemáticas de los docentes. Se la probó con una población conformada por los docentes de tres colegios fiscales de la ciudad de Riobamba. La muestra estuvo formada por diez profesores que se eligieron no probabilísticamente.

Los resultados confirmaron la hipótesis pues los niveles de destreza matemática de los docentes a comienzo y a final de un curso- taller dirigido a los diez docentes, aumentaron del 17.062 % al 75.5%, lo que permitió rechazar largamente la hipótesis nula, es decir que el uso de la metodología indicada no mejora el nivel de destrezas matemáticas de los docentes.

Con eso, se alcanzó el objetivo: la metodología de la modelización y el método gráfico en el proceso de análisis de los problemas geométricos paramétricos sí mejora el nivel de destrezas matemáticas en los docentes.

Palabras clave

1. PROBLEMA GEOMÉTRICO PARAMÉTRICO
2. ANÁLISIS DE UN PROBLEMA GEOMÉTRICO PARAMÉTRICO
3. SISTEMA ALGEBRAICOS PARAMÉTRICO CONDICIONADO
4. MODELIZACIÓN ALGEBRAICA

SUMMARY

The present research aimed to determine if the analysis process of geometrical parametrical problem using the methodology of graphical method, improves the level of mathematical skills in professors.

In order to archive this, scientific, analytical, synthetic , constructivist methods were used since they follow an ordered plan of actions such as selecting formulating and limiting problem, proposing solutions , requiring a theoretical framework, formulating a hypothesis, collecting and analyzing data, displaying results and dealing with the topic in a maieutic and participative way.

The hypothesis of the research work was that the use of the algebraic modeling and the Cartesian graphic method in the analysis of geometric parametrical problem, improves the level of mathematical skills in professors. It was tested with a universe made up of professors of three public schools in Riobamba city. The sample was made up of ten professors who were chosen at random.

The results proved the hypothesis since the levels of mathematical skills of the professors at the beginning and at the end of the workshop addressed to those ten professors, increased from 17.062% to 75.5%, which allowed to reject widely the null hypothesis, so the use of the proposed methodology does not improve the level of mathematical skills in professors. With this, the object was reached: The modeling methodology and the graphical method in the analyzing process of geometrical parametrical problems do improve the mathematical skills level in professors.

Key words

1. GEOMETRICAL PARAMETRICAL PROBLEM
2. ANALYSIS OF GEOMETRICAL PARAMETRICAL PROBLEM
3. CONDITIONED ALGEBRAIC PARAMETRICAL SYSTEM
4. ALGEBRAIC MODELING.

INTRODUCCIÓN

El aprendizaje en Matemática es el resultado de procesos complejos y de múltiples aspectos que requiere un trabajo en donde son fundamentales:

- las interacciones entre docente y estudiantes y entre compañeros (sinergia del grupo),
- los momentos de reflexión y de reelaboración personales (meta cognición),
- las construcciones conceptuales metódicas y sistemáticas (aprender a aprender),
- los saltos en lo desconocido (enfrentarse a situaciones problemáticas nuevas),
- la memoria pero también la imaginación (utilización de lo aprendido y capacidad de tener visión).

De lo anterior sigue un producto articulado cuya complejidad desafía al docente quien debe estimular, facilitar y evaluar el aprendizaje de sus alumnos. Hoy más que nunca el docente debe estar capacitado para enfrentarse a los desafíos antiguos y nuevos que la tarea de la educación comporta.

Este trabajo estudia un tema matemático que justo por su complejidad conceptual y algorítmica, obliga a un esfuerzo considerable por parte del docente para enseñarlo y por parte de los estudiantes para aprenderlo, que una vez superado ofrece una formación intelectual matemática y un conocimiento matemático suficientes a enfrentar futuros desafíos en campos científicos como laborales.

El tema atañe el Análisis de los Problemas Geométricos Paramétricos, que pueden darse en el interior de la disciplina matemática como también ser el resultado de la traducción matemática de problemas pertenecientes a otras disciplinas. Es un tema que incluye los diferentes aspectos del aprendizaje matemático, por eso es un tema rico y complejo cuyo dominio favorece el desarrollo y el fortalecimiento de las capacidades matemáticas de quienes lo tratan.

El estudio objeto del presente trabajo no es solamente teórico, sino práctico porque presenta una amplia gama de problemas que se analizan con suficiente detalle, constituyendo así una guía para los docentes que tratarán el tema mismo con sus estudiantes.

En cuanto al ***estado del arte*** del tema y de la metodología de desarrollo del tema, se consultó al respecto la literatura utilizada en diversos países europeos como Italia, España, Francia, Alemania, y latino americanos como México, Colombia, Chile, Argentina y Ecuador , también se hizo una investigación en la red web. La conclusión es que mientras el tema se conoce y se desarrolla desde tiempo en los centros educativos secundarios y algunos superiores europeos, no así en los latinos americanos. En especial, en Ecuador el tema es prácticamente desconocido, y en lo poco que se lo considera se lo trata solamente a través de métodos algebraicos. No se emplea el método de los haces de recta y cónicas, por desconocimiento o por la poca familiaridad con esta herramienta geométrica.

El trabajo está dividido en siete capítulos.

El primer capítulo trata la problematización del trabajo, en donde se plantea y formula el problema detectado, se expresan los objetivos tanto generales como específicos, y se justifica el trabajo mismo.

El segundo capítulo trata el marco teórico, en donde se analizan varias componentes del aprendizaje de la Matemática, se ilustran los instrumentos matemáticos a usarse en el análisis de los problemas geométricos paramétricos, y se ejemplifica la metodología propuesta en dicho análisis.

El tercer capítulo trata el marco hipotético, en donde se formula la hipótesis y se elaboran las operacionalizaciones conceptual y metodológica.

El cuarto capítulo trata el marco metodológico, en donde se declaran el diseño y el tipo de investigación, los métodos, las técnicas y los instrumentos empleados, el procesamiento y la tabulación de los datos, y se definen la población y su muestra.

El quinto capítulo trata el análisis, la interpretación y la presentación de resultados, en donde se presentan los resultados de las encuestas inicial y final hechas a los profesores, se plantea formalmente la hipótesis, se elige el nivel de significación, el criterio con el cual rechazar la hipótesis nula, se aplica la fórmula para el cálculo de los valores y se toma la decisión que corresponde.

El sexto capítulo trata las conclusiones que se desprenden de los resultados y las recomendaciones que se aconsejan en base a las conclusiones.

El séptimo capítulo trata la propuesta de introducir, y como introducir, el tema "Análisis de los problemas geométricos paramétricos" en el plan de estudios de bachillerato, por ser enriquecedor de conocimientos y destrezas matemáticas.

CAPÍTULO I

PROBLEMATIZACIÓN

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

A través de preguntas hechas a estudiantes que empezaban los estudios superiores en distintas Universidades y Politécnicas del País, se ha puesto de manifiesto que nunca han tratado el tema "Análisis de un problema geométrico paramétrico" ni el tema relacionado "Análisis de un sistema algebraico paramétrico condicionado", y que tienen poca habilidad en utilizar haces de rectas o de cónicas para solucionar sistemas numéricos condicionados.

Al fin de detectar objetivamente el problema, se hizo una encuesta a los profesores de Matemática de Bachillerato acerca del tema. La población estaba formada por los profesores de tres colegios fiscales de la parroquia Veloz de la ciudad de Riobamba y la muestra fue de diez profesores de dos de los tres colegios elegidos no probabilísticamente.

En la encuesta constaban las seis preguntas siguientes:

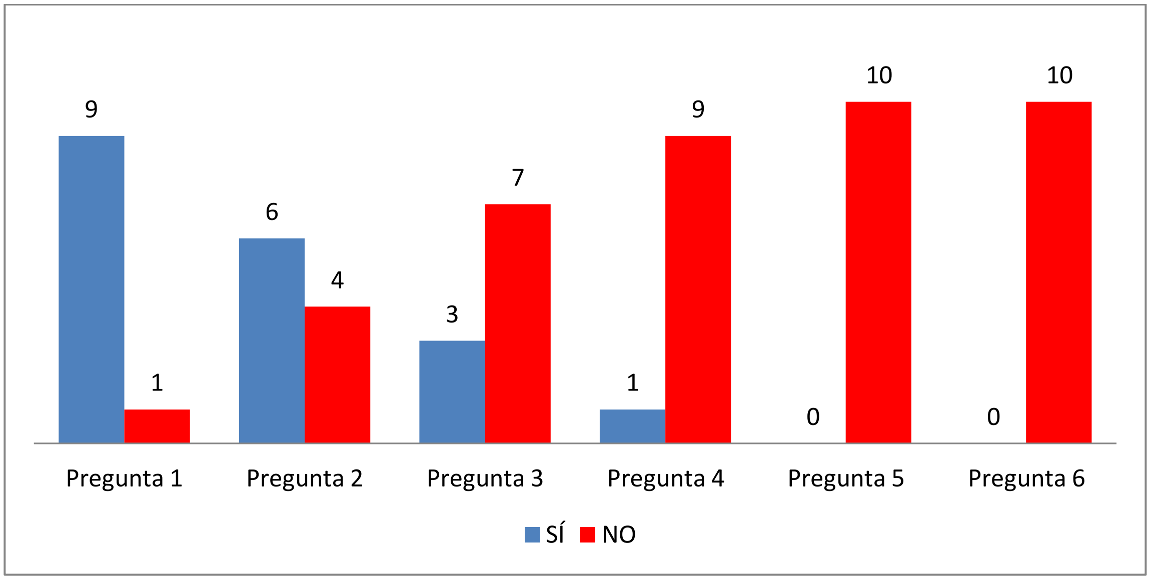
En su formación profesional o en su enseñanza, ¿ha tenido ocasión de:

1. tratar parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas en el plano cartesiano?
2. reconocer el tipo de cónica en base a su ecuación y reducir ésta a forma canónica?
3. solucionar sistemas de segundo grado numéricos condicionados?
4. tratar los haces (familias) de cónicas?
5. analizar sistemas de segundo grado paramétricos condicionados mediante haces de rectas y de cónicas?
6. modelar problemas geométricos paramétricos mediante sistemas de segundo grado paramétricos condicionados?

Los resultados fueron:

Gráfico 1

Distribución absoluta de los resultados de la encuesta inicial



Fuente: Datos del test inicial.

Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Vemos que la mayoría, el 90% de los docentes, han tratado parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas en el plano cartesiano, el 60% reconoce el tipo de cónica en base a su ecuación y reducir ésta a forma canónica, el 30% soluciona sistemas de segundo grado numéricos condicionados, apenas el 10% trata los haces (familias) de cónicas, pero en cuanto a los sistemas paramétricos y a la modelización algebraica de los problemas geométricos paramétricos nadie ha tenido ocasión de tratar estos temas.

Estos resultados evidenciaron de manera objetiva e inequivocable el estado de desconocimiento casi total del tema "Análisis de problemas geométricos paramétricos a través de modelización algebraica y método gráfico".

1.2 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

¿Puede el método gráfico que soluciona los sistemas algebraicos paramétricos, y por tanto que aporta a la solución de los problemas geométricos paramétricos, mejorar el nivel de destrezas matemáticas de los docentes?

1.3 OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

Determinar si el proceso de análisis de los problemas geométricos paramétricos a través de su modelización algebraica y método gráfico, mejora el nivel de destrezas matemáticas en los docentes.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1. Realizar una modelización algebraica de los problemas geométricos paramétricos y analizar los modelos algebraicos mediante método gráfico que emplee los haces de rectas y de cónicas.
2. Elaborar ejemplos de análisis de los problemas geométricos paramétricos según la metodología indicada.
3. Estudiar los ejemplos de análisis con los docentes de Matemática de Bachillerato
4. Determinar mediante test el nivel de desarrollo de conocimientos y destrezas logrado por los docentes al utilizar la metodología de análisis de los problemas geométricos paramétricos.

1.4 JUSTIFICACIÓN

El lamentable estado actual acerca del estudio de los problemas geométricos paramétricos conlleva a proponer una metodología de tratamiento que permita mejorar la situación y así aumentar las habilidades matemáticas de los docentes ecuatorianos.

El propósito es mostrar cómo se conduce el análisis de un problema geométrico paramétrico previo el análisis de un sistema algebraico paramétrico condicionado, y cómo se utilizan a este fin los haces de rectas y cónicas. Para eso, se tiene por referente la literatura utilizada en aquellos países que sí tratan este tema.

Eso afianza el dominio de las Geometrías Euclidiana y Analítica y el desarrollo del pensamiento lógico y matemático en general. En efecto, el uso simultáneo de varias áreas de la Matemática y el medio gráfico para obtener las soluciones a un problema matemático, que permite visualizarlas, favorecen una comprensión exhaustiva y duradera del proceso de solución y en general el aprendizaje significativo. Eso resulta ser muy provechoso para los señores docentes de nivel medio ecuatorianos, por el desconocimiento o la poca familiaridad con el método de análisis que se propone.

Para que este trabajo resulte de ayuda a los señores docentes, debe comprender unos ejemplos ilustrativos del tratamiento sea de los sistemas algebraicos paramétricos condicionados, sea de los problemas geométricos paramétricos.

El País se encuentra en un sistema global de modificaciones también en el ámbito de la Educación, es por ello que debe ser prioridad en contar con temas matemáticos, como el que aquí se propone, a estudiar para desarrollar aquellas competencias en los docentes y de reflejo en sus estudiantes, que luego servirán en el proyecto de vida.

CAPÍTULO II

MARCO TEÓRICO

2.1 EDUCACIÓN MATEMÁTICA

En Matemática el aprendizaje acontece construyendo los conceptos. Sin embargo, no basta haber construido un concepto, sino que se debe saberlo usar para efectuar cálculos y solucionar ejercicios; combinarlo con otros y así formar estrategias de solución de problemas; se debe saber comunicarlo y explicarlo, y finalmente se debe saberlo representar de diversos modos.

Estas componentes del aprendizaje realmente no son independientes ni separables entre si, pero por hacer más entendible su explicación, resulta oportuno convenir de tratarlas de una en una.

Si un estudiante no tiene éxito en una prueba de Matemática, se debería identificar cuáles de las componentes anteriores han faltado por darse el fracaso. ¿El estudiante no entendió el concepto que debía usar?, ¿no entendió el algoritmo a seguir?, ¿no supo armar una estrategia para resolver el problema?, ¿no supo expresar correctamente lo que tenía que hacer?, ¿no supo encontrar la representación más conveniente de los conceptos involucrados?

2.1.1 VARIAS COMPONENTES EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

La investigación en Didáctica de la Matemática ha determinado que el aprendizaje de la Matemática comprende como mínimo cinco componentes:

- aprendizaje conceptual
- aprendizaje algorítmico
- aprendizaje estratégico
- aprendizaje comunicativo
- aprendizaje representativo

Estas componentes se entrelazan reforzándose entre si y es posible que la investigación en Didáctica de la Matemática identifique otras; sin embargo, tenerlas separadas permite obtener una gran comodidad de análisis y de lectura interpretativa de aquellas manifestaciones de malestar cognitivo que se llaman comúnmente los errores de los estudiantes.

2.1.1.1 El aprendizaje conceptual

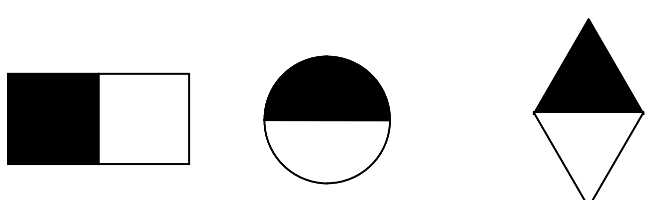
En las ciencias experimentales se pueden indicar los instrumentos, los materiales concretos, los hechos como referencia ostensiva de lo que se está hablando. En Matemática eso no es posible: los conceptos matemáticos son considerados de distintas maneras por las distintas filosofías que los elaboran: abstractos, ideales, lingüísticos, convencionales, descubrimientos, inventos creativos, pero nunca se los considera un blanco de los sentidos. Por ende, lo único que un ser humano puede hacer es elegir una representación del concepto matemático y trabajar con esta representación. Así, lo que se aprende a manejar en Matemática no son los objetos sino sus representaciones semióticas, incluso si el objetivo principal es el aprendizaje conceptual.

Como ejemplo, se presenta en diversos registros el concepto "dividir para la mitad".

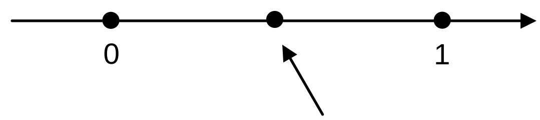
- registro semiótico: el lenguaje común:

  - un medio, la mitad

- registro semiótico: el lenguaje pictográfico:



- registro semiótico: el lenguaje figural:



- registro semiótico: el lenguaje aritmético:

en escritura fraccionaria: $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$, …..

en escritura decimal: 0.5, $0.4\overline{9}$

en escritura potencial: 5×10^{-1}

en escritura porcentual: 50%

- registro semiótico: el lenguaje algebraico:

en escritura conjuntista: $\{x \mid x \in \boldsymbol{Q}, 2x - 1 = 0\}$

en escritura funcional: $f: x \to \frac{x}{2}$

El pasaje de una representación a otra en el mismo registro semiótico se llama **transformación de tratamiento** y el pasaje de una representación a otra en un distinto registro semiótico se llama **transformación de conversión**.

Transformación de tratamiento:

$$\frac{1}{2} \longrightarrow 0.5$$

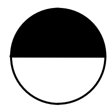
Transformación de tratamiento:

$$0.5 \longrightarrow 5\times10^{-1}$$

Transformación de conversión:

$$\text{mitad} \longrightarrow \frac{1}{2}$$

Transformación de conversión:

 $\longrightarrow$ $f: x \to \frac{x}{2}$

Y estas son las operaciones fundamentales en semiótica:

- representación (elección del registro)
- tratamiento
- conversión

La investigación en Didáctica ha descubierto que la construcción cognitiva de los conceptos matemáticos pasa por el uso de varios registros de los conceptos mismos. El alumno logra el aprendizaje de un concepto cuando es capaz de:

- representar en un registro semiótico al concepto;
- tratar al concepto;
- convertir al concepto.

Realmente recientes investigaciones hacen concluir que la construcción de un concepto es progresiva. Las primeras representaciones, tratamientos y conversiones hechas en las prácticas de aula, permiten una primera construcción personal del concepto, la cual aumenta la capacidad de representar, tratar y convertir de manera más ágil y variada en las prácticas de aula; eso a su vez permite una construcción personal más articulada del concepto, que da al alumno una aún mayor capacidad de representar, tratar y convertir; y así sucesivamente, obteniendo construcciones parciales siempre más detalladas y generales del concepto, que en general aparecerá muy diferente de cómo se lo veía inicialmente, revelando su naturaleza única pero multifacética.

Lo anterior justifica la aseveración de Duval (1993): "No hay noética sin semiótica", o sea en Matemática la adquisición conceptual pasa necesariamente por una continua actividad de representación.

También se evidencia la profunda relación que existe entre noética y constructivismo, es decir la *construcción personal y gradual del conocimiento en Matemática*.

El proceso de enseñanza – aprendizaje, en especial las acciones en el aula, está condicionado por el credo filosófico del docente, aún cuando el docente mismo no sea consciente de sus propias creencias. ¿Cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos, es decir del significado de los conceptos matemáticos?

Las teorías filosóficas al respecto pueden ser divididas en dos grandes categorías: las *realistas* y las *pragmáticas*.

En las teorías realistas el significado de una expresión lingüística es un objeto ideal que existe independientemente de la expresión misma que lo denota. El significado de un nombre propio como 'la recta r' o de una oración simple como 'p es un número primo', o de un predicado binario como 'a es mayor que b' expresan hechos de la realidad matemática. Por tanto:

- las expresiones lingüísticas tienen la única función semántica de nombrar;
- los objetos matemáticos y sus relaciones existen realmente, aún en un mundo ideal (visión platónica de la Matemática), luego son independientes de quienes los piensa;
- 'conocer' significa 'descubrir', como se descubren los objetos y los hechos del mundo físico;

- el conocimiento matemático está hecho de verdades eternas y no modificables por la experiencia humana dado que son extrañas e independientes de ésta.

En las teorías pragmáticas las expresiones lingüísticas y en especial los nombres no tienen un significado fijo, dado una vez por todas, sino que es variable por depender del contexto en el cual se usan, y por tanto el único análisis posible es personal, subjetivo y siempre circunstanciado. Los objetos matemáticos son unas unidades que resultan de la síntesis cognitiva de los múltiples usos en el quehacer de grupos culturalmente homogéneos de individuos, y no son para siempre, sino que evolucionan en el tiempo, enriqueciéndose por los nuevos aportes ofrecidos por las experiencias cognitivas, principalmente por los procesos de resolución de los problemas matemáticos y extra matemáticos.
Y aquí un cuadro que sintetiza las posiciones realista y pragmática:

Cuadro 1

Teorías Filosóficas

	TEORÍAS REALISTAS	**TEORÍAS PRAGMÁTICAS**
significado	es el objeto, concreto o ideal que de manera tiene su existencia autónoma, denominado por un término matemático	es el producto de la síntesis de los distintos usos de un término matemático, y que no tiene existencia autónoma sino juntos a quien lo concibe, y que por ende cambia en el tiempo
semántica	las expresiones lingüísticas tienen la función de describir a los	las expresiones lingüísticas tienen significados subjetivos (personales) y en

	objetos matemáticos	contextos datos
semántica vs pragmática	hay una separación neta entre las dos	no hay separación entre las dos, sino que se completan mutuamente e indefinidamente
conocer	descubrir (redescubrir)	usar apropiadamente en los contextos
visión epistemológica	concepción platónica de los objetos matemáticos	concepción problemática de los objetos matemáticos

Fuente: Síntesis Teorías Filosóficas.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

El marco filosófico de la Didáctica de la Matemática en el cual se inserta este trabajo es el pragmático, por considerarlo más cercano a la realidad del proceso real (empírico) de enseñanza – aprendizaje de la Matemática. Si se centra la actividad didáctica en el aprendizaje del alumno, uno se da cuenta que la construcción del conocimiento pasa a través de una continua interacción entre semántica y pragmática. La interacción misma acontece principalmente en el aula, entre los alumnos y entre los alumnos y el profesor, o sea en la que se llama "comunidad de práctica".

2.1.1.2 El aprendizaje algorítmico

Existen algoritmos bastante simples y que sin embargo la escuela ha dejado de enseñar y practicar, como la extracción de la raíz cuadrada y el cálculo de los logaritmos con las tablas. La razón está en el hecho que hoy las calculadoras y computadoras hacen rápidamente y sin error lo que las personas hacen con esfuerzo y con buena posibilidad de equivocarse. Eso ha favorecido en un pasado reciente el desdeño del aprendizaje algorítmico; se pensó que no valía la pena perder tiempo en lo que una máquina era capaz de hacer mucho mejor y con más precisión.

Por el contrario, la Didáctica contemporánea considera conveniente reevaluar el aprendizaje algorítmico sea por una razón cultural pues la historia de la Matemática muestra que la creación y estudio de algoritmos siempre han sido parte integrante del desarrollo de la Matemática misma, sea por una razón didáctica pues los pasos de un algoritmo efectuados por una persona, aún mecánicos, son conscientes e intencionales, dirigidos a un fin, y tienen su justificación lógica y conceptual. Por ejemplo, el uso de una calculadora gráfica no hace obsoletas las competencias "clásicas" requeridas por el estudio de funciones, todo lo contrario, las completa y las integras permitiendo, mediante una combinación de hechos algebraicos con aspectos visuales, una profundización conceptual y mejores interpretaciones de los resultados.

Por tanto, el aprendizaje algorítmico, aún cumpliendo un papel específico por sí mismo, está estrictamente ligado con el aprendizaje conceptual. Además, el papel de los algoritmos es fundamental en la resolución de problemas porque, aún no tengan una finalidad por sí mismos, son herramientas necesarias al conseguimiento de los resultados; por ende, están íntimamente relacionados también con el aprendizaje estratégico. Finalmente, muchas veces los estudiantes encuentran dificultad a explicar cómo funciona un algoritmo, aún cuando lo dominen bien, y por eso es que el aprendizaje algorítmico está relacionado con el comunicativo.

De aquí la importancia del aprendizaje algorítmico, que hoy se tiende a reevaluar y apreciar, respecto a un reciente pasado que le daba poca importancia.

El estudio de algoritmos y su producción recurre bastante en la historia de la Matemática. El hombre empleó todos los medios a su disposición para efectuar cálculos en forma rápida y correcta, a empezar de las partes de su cuerpo como los dedos de las manos y de los pies. Generalmente las máquinas de cálculo nacieron y se perfeccionaron en aquellas poblaciones que no poseían un sistema posicional, como los Griegos y los Romanos. Muchos matemáticos dedicaron su tiempo a la proyectación y realización de máquinas calculadoras que hicieran cálculos precisos pero largos y aburridos, como Leonardo da Vinci (1452-1519), John Napier (1550-1617), Blaise Pascal (1623-1662), Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), Charles Babbage (1793-1871).

2.1.1.3 El aprendizaje estratégico

Muchos didactas de la Matemática afirman que entre las condiciones por las cuales se logra el aprendizaje hay la motivación, en particular la gratificación, que puede ser la satisfacción interior o el reconocimiento social por haber resuelto un problema. El proceso de resolución de un problema, en su mayor parte, acontece en el interior de la persona que resuelve, pese las facilitaciones o sugerencias que pueden llegarle. La aplicación de reglas conocidas es importante en este proceso, sin embargo el proceso mismo genera nuevo aprendizaje. Quien resuelve puede encontrar un problema que no es análogo a los que ya solucionó, y en este caso tendrá que escoger una particular combinación de reglas o normas o experiencias que constituye una regla de orden superior, nueva para él. Es por eso que el sujeto, intentando resolver un problema, está aprendiendo.
Es útil recordar la diferencia entre un ejercicio y un problema.

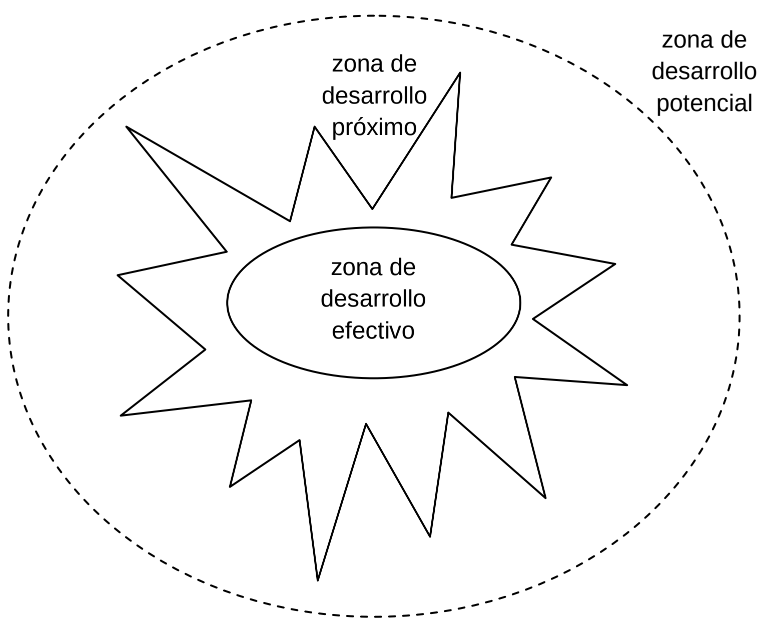
- Un ejercicio se soluciona empleando sólo reglas ya adquiridas o en vía de consolidación; se resuelven ejercicios para reforzar, consolidar ciertas destrezas.
- Un problema se soluciona o se intenta solucionar aplicando reglas en vía de explicitación, y también eligiendo una sucesión de acciones que constituye una "estrategia resolutiva" creativa y personal.

Este es el motivo por el cual, según Lev Vigotsky (1978), el ejercicio se desarrolla en la "zona de desarrollo efectivo" y el problema en la "zona de desarrollo próximo".

La "zona de desarrollo efectivo" es la zona del conocimiento que contiene los conceptos ya adquiridos por quien resuelve y que está contenida en la "zona de desarrollo potencial", en la cual los conceptos no se han construido aún, pero están potencialmente a la mano de quien resuelve, y que asimilará cuando logre solucionar el problema. Por eso, es necesario que el problema mismo no sea ni demasiado fácil ni demasiado difícil, sino que esté al alcance de las posibilidades de quien resuelve, y en definitiva en la parte de la zona potencial más cercana a la de desarrollo efectiva llamada "zona de desarrollo próximo", de los contornos no bien definidos, variable de persona a persona, y en donde, siguiendo Vigostsky, se sitúan las funciones cognitivas en curso de construcción.

Gráfico 2

Funciones cognitivas



Fuente: Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Hoy en día muchos investigadores piensan que las personas que están desarrollándose intelectualmente pueden hacer mucho más de lo que indica el nivel de desarrollo efectivo, y que se sitúa en la zona de desarrollo próximo. No solamente la inclusión social, sino también la inclusión intelectual es importante. Por ende, más significativo que conocer el sólo nivel de desarrollo efectivo, es el estudio de la zona de desarrollo próximo para establecer una metodología de enseñanza eficaz y eficiente. Un buen aprendizaje es aquello que es "*anticipado respecto al desarrollo*" ((Vigotsky, 1978).

2.1.1.4 El aprendizaje comunicativo

Se da cuando el aprendiz sabe expresar las ideas matemáticas. Saber comunicar la Matemática es un logro cognitivo específico, que no es para nada implícito en los demás aprendizajes. Saber describir una figura, las propiedades de una función, las características de una sucesión numérica, las reglas de un algoritmo, etc. son verdaderas metas por alcanzar y por tanto necesitan de entrenamiento educativo. La comunicación en el aula por lo general acontece sólo en la dirección docente $\rightarrow$ estudiante y muy a menudo el docente cree que la recepción, se ha dado por completo. Sin embargo las cosas no están así, porque el lenguaje de un adulto, más aún de un adulto experto en el tema, es diverso del lenguaje del estudiante. Es por eso que la comunicación matemática en el sentido estudiante $\rightarrow$ docente lleva a menudo a una incomprensión: el estudiante comunica cierta información que no coincide con la esperada por el docente.

Muchos didactas afirman que la Matemática es un lenguaje, por tener una sintaxis (sus propios constructos lingüísticos), una semántica (sus propias interpretaciones de las palabras que expresan las ideas matemáticas) y una pragmática (su propia manera de aplicar el lenguaje). Sin querer reducir la Matemática solamente a lenguaje, no se puede negar la importancia didáctica del lenguaje matemático: el discurso científico en general y matemático en especial, se releva muy complejo por parte de los estudiantes, por estar en contraste con la lengua común utilizada fuera del contexto escolar. A este respecto, se da una paradoja del lenguaje específico:

- como el primer objetivo de la comunicación matemática es favorecer el aprendizaje matemático, quien comunica debe evitar que el lenguaje usado sea motivo de obstáculo a la comprensión; por eso, la comunicación debe hacerse no con un lenguaje específico, sino con el lenguaje común;
- la Matemática elaboró durante milenios (y sigue haciéndolo) un lenguaje específico y quien enseña tiene la obligación de hacerlo aprender juntos al contenido de la Matemática; por eso, la comunicación debe hacerse con el lenguaje específico de la Matemática.

La pseudo-solución a la paradoja que se adopta comúnmente es la de emplear, por parte del docente, un lenguaje hibrido, hecho por palabras de la lengua cotidiana y por términos matemáticos, con locuciones innaturales tipo: "dícese", "pasante por", "nótese", " sea el triángulo ABC " y que el didacta B. D' Amore llamó "el matematiqués". Los estudiantes hablan con este lenguaje, aún cuando sientan el peso de un idioma ajeno, intentan imitar al docente por contrato comunicativo, pero al costo de la pérdida del sentido: muchas veces dicen cosas que no entienden, pero como habla el docente.

Aún cuando a nivel de primaria la comunicación de la Matemática debe hacerse casi exclusivamente con el lenguaje común, también a costa de imprecisiones, el problema hay que empezar a enfrentarlo en la secundaria. No es conveniente pretender que los estudiantes empleen en seguida el lenguaje específico de la Matemática, se tiene que darles el tiempo de asimilación hasta que se vuelva natural emplearlo y utilizar su simbología, y siempre sin olvidar la comprensión de lo que se dice. Por supuesto no es tarea fácil, y mucho trabajo investigativo sobre la comunicación matemática se ha hecho en los últimos veinte años. Actualmente la conclusión es que como los jóvenes tienen una fuerte tendencia a utilizar el lenguaje común, aún cuando se ven obligados por el docente a ser más "rigurosos" en sus expresiones, parece razonable no eliminar el lenguaje común, e ir acompañándolo paulatinamente con el lenguaje formal. Parece enriquecedor, en el sentido de adquirir más consciencia de la diversidad de las dos modalidades lingüísticas, que docente y estudiantes hagan comparaciones, analogías y discrepancias entre los dos registros.

2.1.1.5 El aprendizaje representativo

Ya se observó que en Matemática no es posible el aprendizaje conceptual sin el representativo, es decir sin la capacidad de representar de varias maneras a un mismo objeto matemático mediante tratamiento o conversión.

En el pasado se creía que representaciones diversas del mismo objeto debían ser reconocidas por los estudiantes como equi-significativas de manera automática, sin embargo la investigación en Didáctica de la Matemática ha mostrado que no es así. Una transformación por tratamiento o por conversión puede cambiar radicalmente el sentido del concepto en el pensamiento de un estudiante. Ocurre a menudo que un estudiante asigne significados diferentes a representaciones diferentes de un mismo objeto matemático, pues éstas pueden mostrar aspectos diversos del objeto. Además se ha relevado que los estudiantes tienden a utilizar una sola representación, lo que les induce a confundir el objeto con la única representación empleada. Los docentes ya no pueden seguir creyendo en la seguridad comunicativa de la enseñanza tradicional. Es su obligación que no se limiten nunca a representaciones únicas, que hagan practicar bastante a sus estudiantes sobre los cambios de representación de los objetos y que sepan coordinarlos, cosa que no es para nada espontáneo y descontado.

Nota. Pretender que los estudiantes logren su aprendizaje de la Matemática a través de los cinco componentes examinados:

- aprendizaje conceptual
- aprendizaje algorítmico
- aprendizaje estratégico
- aprendizaje comunicativo
- aprendizaje representativo

presupone que los docentes deben ya haberlos logrado. El análisis de los problemas geométricos paramétricos mediante modelización algébrica y método gráfico ofrece una oportunidad para que los docentes y luego sus estudiantes desarrollen las destrezas matemáticas. En efecto, el tratamiento de este tema exige a cualquiera un esfuerzo conceptual, algorítmico, estratégico, comunicativo y representativo, como ahora se va a mostrar.

2.2 EL TEMA MATEMÁTICO

Los problemas geométricos que son objeto de este estudio consisten en determinar una figura geométrica que corresponde a una condición asignada y en la cual aparece un parámetro llamado **parámetro de análisis**, así que realmente se dan infinitas figuras geométricas, una por cada valor del parámetro.

Por ejemplo, es un problema geométrico paramétrico el siguiente:

> *Sean ABC un triángulo equilátero de lado unitario y AD una altura. Se determinen dos segmentos iguales AP y CQ sobre los lados AB y CA respectivamente, en modo que la razón entre el área del triángulo QPD y la del triángulo ABC sea igual a p*.

Representando a la relación asignada en el problema mediante incógnitas que indican a las magnitudes geométricas que conciernen, se obtiene una ecuación algebraica, y por tanto, se modela el problema geométrico algebraicamente. Por

la presencia del parámetro en la relación, luego en la ecuación obtenida, lo que sigue es analizar a la ecuación misma, es decir determinar la naturaleza y el número de sus soluciones en función de los valores que asume el parámetro.
Realmente se analizará un sistema de dos ecuaciones formado por la ecuación anterior y por otra que se obtiene relacionando entre sí a las incógnitas mediante algún teorema de Geometría Euclidiana, como el teorema de Pitágoras, los teoremas de Euclides, los criterios de semejanza de triángulos o unos teoremas sobre la circunferencia. Para eso se necesita un buen conocimiento de los teoremas mismos y la capacidad de escogerlos y emplearlos de manera conveniente al análisis del problema.
El sistema también se lo dice **paramétrico** por contener a una ecuación paramétrica, y como las incógnitas están sujetas a limitaciones geométricas por representar a magnitudes geométricas, el sistema se lo dice **condicionado**.
Por ejemplo, es un sistema algebraico paramétrico condicionado el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = -1 \\ mx - y + m + 1 = 0 \\ 0 \leq x \leq 4, y \geq 0 \end{cases}$$

La decisión de emplear un sistema algebraico en lugar de una sola ecuación se justifica por el hecho que de esta forma el análisis del sistema y luego del problema geométrico se lo puede hacer utilizando los haces de rectas y de cónicas, un método sugestivo por permitir visualizar la naturaleza y el número de las soluciones, y significativo por evitar los procedimientos mecánicos y repetitivos típicos de los métodos algebraicos, que a la larga hacen olvidar las razones que los sustentan. Además los estudios en Educación Matemática relevan que la visualización facilita notablemente al proceso de aprendizaje.
A propósito del aprendizaje, se note como los cinco aspectos del aprendizaje matemático antes examinados están todos involucrados, aún en diverso grado, en el análisis de los problemas geométricos paramétricos. Por supuesto, el

análisis continuado en el tiempo desarrolla la habilidad de manejar y aplicar conceptos y teoremas de Geometría euclídea, de Álgebra y de Geometría cartesiana. La secuencia a seguir de las fases del análisis constituye un verdadero algoritmo que se va aprendiendo y aplicando con agilidad creciente en el tiempo. La elección más conveniente de las incógnitas y de sus relaciones mediante teoremas de Geometría euclídea, y que va mejorando con la práctica, constituye la estrategia para analizar cada problema geométrico paramétrico propuesto. Quién va analizando el problema está en un constante proceso de comunicación consigo mismo y con los demás si que el análisis mismo se conduce en grupo, para poder seguir significativamente las fases sucesivas del análisis. Finalmente, la traducción del problema geométrico en un sistema algebraico y éste en un sistema de rectas y de cónicas, es un constante ejercicio de representación, o sea de conversión del registro geométrico al algebraico al cartesiano.

En lo que sigue se desarrolla un breve estudio propedéutico sobre los haces de rectas y de cónicas que facilitará el análisis de los sistemas algebraicos paramétricos condicionados conducido con método gráfico.

2.2.1 HACES DE RECTAS

Se consideren dos rectas de ecuaciones:

$$r_1: \quad ax + by + c = 0 \qquad r_2: \quad a'x + b'y + c' = 0$$

Se llama haz de rectas determinado por r_1 y r_2 al conjunto de rectas que tienen ecuación de tipo:

$$h(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$$

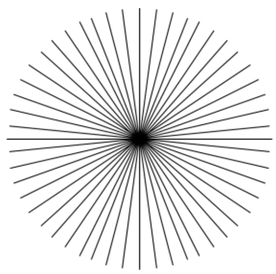
con h y k números reales no ambos nulos. Si h y k se dejan variables, y por ende se vuelven parámetros, la misma ecuación es la ecuación del haz.

Se prueba que si las rectas r_1 y r_2 se intersecan en un punto C, todas las rectas del haz se intersecan en C; en este caso, el haz se dice **propio** y el punto C se llama **centro** del haz.

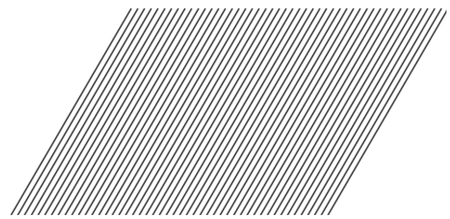
En cambio, si r_1 y r_2 son paralelas, todas las rectas del haz son paralelas; en este caso, el haz se dice **impropio**.

Gráfico 3

Haces de rectas



Haz de rectas propio



Haz de rectas impropio

Fuente: Datos del test inicial.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Ejemplos

1. El haz de rectas de ecuación:

$$h(2x + 2y - 1) + k(x - 2y + 1) = 0$$

es propio porque las rectas de ecuaciones:

$$2x + 2y - 1 = 0 \quad , \quad x - 2y + 1 = 0$$

tienen pendientes distintas, luego se intersecan en un punto, el centro del haz. Éste se encuentra solucionando el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 2y - 1 = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases}$$

Es C(0, $\frac{1}{2}$).

2. El haz de ecuación:

$$h(3x + 2y - 1) + k(2x + \frac{4}{3}y + 1) = 0$$

es impropio porque las rectas de ecuaciones:

$$3x + 2y - 1 = 0 \quad , \quad 2x + \frac{4}{3}y + 1 = 0$$

tienen la misma pendiente: $-\frac{3}{2}$, que es la pendiente del haz.

Para k ≠ 0, la ecuación del haz:

$$h(ax + by + c) + k(a'x + b'y + c') = 0$$

se puede escribir:

$$p(ax + by + c) + (a'x + b'y + c') = 0 \quad , \quad p = \frac{h}{k}$$

que pero no representa a la recta:

$$ax + by + c = 0$$

que se obtiene justo por k = 0.

Viceversa, la ecuación:

$$(a_1p + b_1)x + (a_2p + b_2)y + (a_3p + b_3) = 0$$

con p un parámetro, es la ecuación de un haz de rectas menos una. Se la encuentra escribiendo la ecuación en la forma:

$$p(a_1x + a_2y + a_3) + (b_1x + b_2y + b_3) = 0$$

Es la recta $a_1x + a_2y + a_3 = 0$.

Ejemplos

1. Sea el haz de ecuación:

$$(2t - 1)x + (2 - 4t)y + 2t - 3 = 0$$

La pendiente de una recta cualquiera no depende de t:

$$p = -\frac{2t - 1}{2 - 4t} = \frac{1}{2}$$

luego el haz es impropio. Escribamos la ecuación del haz en la forma:

$$t(2x - 4y + 2) - x + 2y - 3 = 0$$

La recta no representada tiene ecuación $x - 2y + 1 = 0$.

2. Sea el haz de ecuación:

$$y = -\frac{2p}{1 - p}x + 1$$

La pendiente de una recta cualquiera del haz depende de p, luego el haz es propio.

El centro se obtiene intersecando dos rectas del haz.

Para $p = 0$ se tiene la recta:

$$y = 1$$

y para $p = -1$ se tiene la recta:

$$y = x + 1.$$

El centro es (0, 1).

Escribamos la ecuación del haz en la forma:

$$p(2x - y + 1) + y - 1 = 0$$

La recta no representada tiene ecuación $2x - y + 1 = 0$.

3. Sea el haz de ecuación:

$$(p - 1)x + (p - 2)y + 3 - 2p = 0$$

La pendiente de una recta cualquiera del haz depende de p, luego el haz es propio.

El centro se obtiene intersecando dos rectas del haz; para p = 1 se tiene la recta:

$$y = 1$$

y para p = 2 se tiene la recta:

$$x = 1.$$

El centro es (1, 1).

Escribamos la ecuación del haz en la forma:

$$p(x + y - 2) - x - 2y + 3 = 0$$

La recta no representada tiene ecuación $x + y - 2 = 0$

2.2.2 HACES DE PARÁBOLAS CON EJE DE SIMETRÍA PARALELO AL EJE Y

Se consideren dos parábolas de ecuaciones:

$$P_1: \quad y + ax^2 + bx + c = 0 \qquad P_2: \quad y + a'x^2 + b'x + c' = 0$$

Se llama haz de parábolas determinado por P_1 y P_2 al conjunto de parábolas que tienen ecuación de tipo:

$$h(y + ax^2 + bx + c) + k(y + a'x^2 + b'x + c') = 0$$

con h y k números no ambos nulos.

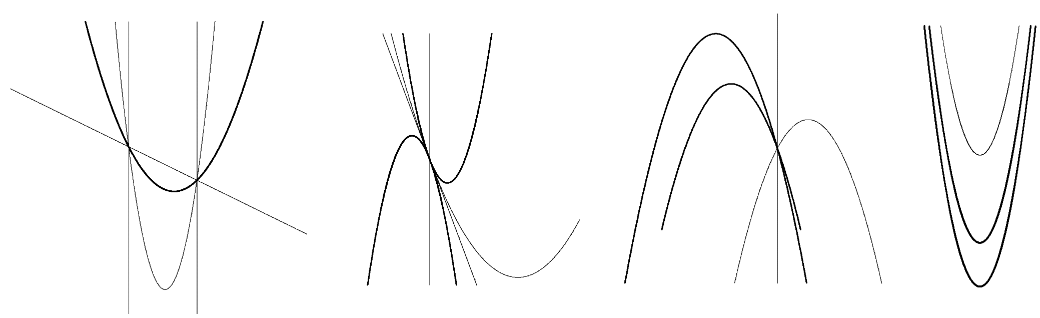
Si h y k se dejan variables, la misma ecuación es la <u>ecuación del haz</u>.

Nota.Si las parábolas P_1 y P_2 :

- se intersecan en dos puntos, todas las demás también se intersecan en los dos puntos,
- son tangentes en un punto, todas las demás también son tangentes en el punto,
- se intersecan en un punto, todas las demás también se intersecan en el punto,
- no tienen puntos en común, todas las demás también no tienen puntos en común.

Gráfico 4

Tipos de haces de parábolas



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Nota. Para h = -a' y por k = a, se obtiene la recta:

$$(a - a')y + (ab' - a'b)x + (ac' - a'c) = 0$$

que se la llama **eje radical** del haz.

Para h = 1 y k = -1, se obtiene la ecuación de segundo grado en x:

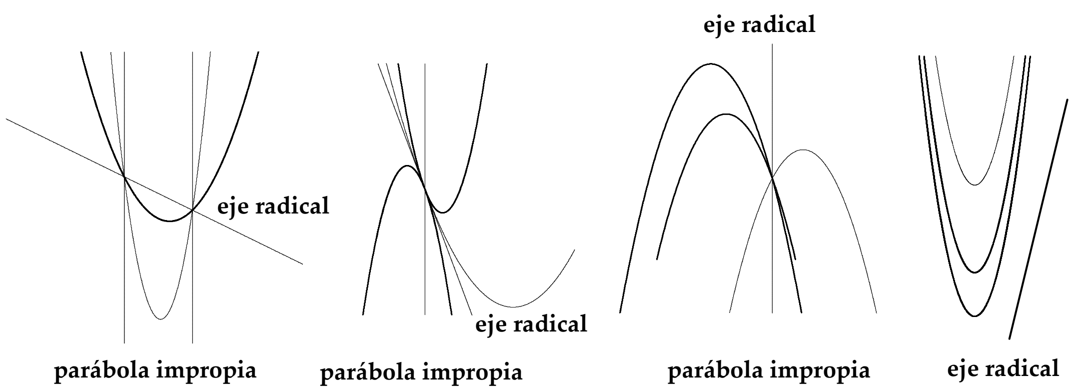
$$(a - a')x^2 + (b - b')x + (c - c') = 0$$

que representa a un par de rectas paralelas al eje y o a una recta paralela al eje y o a ningún conjunto de puntos del plano, según que su discriminante es respectivamente positivo, nulo o negativo. El posible par de rectas se llama **parábola impropia** del haz.

Nota. Si la parábola impropia del haz está formada por dos rectas distintas, una recta doble, una recta simple o el conjunto vacío, las parábolas del haz respectivamente se intersecan en dos puntos, son tangentes en un punto, se intersecan en un punto, son disjuntas.

Gráfico 5

Parábolas impropias y ejes radicales de haces de parábolas



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Nota. Para $k \neq 0$, la ecuación del haz se escribe:

$$p(y + ax^2 + bx + c) + (y + a'x^2 + b'x + c') = 0 \quad , \quad p = \frac{h}{k}$$

que pero no representa a la parábola:

$$y + ax^2 + bx + c = 0$$

que se obtiene justo para $k = 0$.

En general, la ecuación:

$$(a_1p + b_1)y + (a_2p + b_2)x^2 + (a_3p + b_3)x + (a_4p + b_4) = 0$$

con p el parámetro, es la ecuación de un haz de parábolas menos una. Se la encuentra escribiendo la ecuación en la forma:

$$p(a_1y + a_2x^2 + a_3x + a_4) + (b_1y + b_2x^2 + b_3x + b_4) = 0$$

Es la parábola:

$$a_1y + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0.$$

El eje radical se obtiene anulando al coeficiente de x^2:

$$a_2p + b_2 = 0$$

o sea para:

$$p = -\frac{b_2}{a_2}$$

La parábola impropia, cuando exista, se obtiene anulando el coeficiente de y:

$$a_1p + b_1 = 0$$

o sea para:

$$p = -\frac{b_1}{a_1}.$$

Nota. Con las debidas modificaciones, todo lo visto antes vale también para los haces de parábolas con eje de simetría paralelo al eje x.

Ejemplos

1. $(2p - 1)y - px^2 - (1 - p)x + 1 = 0$

Escrita la ecuación en la forma:

$$p(2y - x^2 + x) - y - x + 1 = 0$$

la parábola no representada tiene ecuación:

$$2y - x^2 + x = 0.$$

Para obtener el eje radical, se anula el coeficiente de x^2:

$$p = 0$$

Es la recta de ecuación:

$$x + y - 1 = 0.$$

Para obtener la parábola impropia, se anula el coeficiente de y:

$$2p - 1 = 0 \quad , \quad p = \frac{1}{2}$$

Tiene ecuación:

$$x^2 + x - 2 = 0$$

o sea:

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

Como está formada por dos rectas distintas, las parábolas se intersecan en dos puntos.

$$y + tx^2 + (2t - 1)x - 2t + 1 = 0$$

Escrita la ecuación en la forma:

$$t(x^2 + 2x - 2) + y - x + 1 = 0$$

la parábola no representada tiene ecuación:

$$x^2 + 2x - 2 = 0.$$

Para obtener el eje radical, se anula el coeficiente de x^2:

$$t = 0$$

Tiene ecuación:

$$x - y - 1 = 0.$$

Para obtener la parábola impropia, se anula el coeficiente de y:

por ningún valor de t

No existe.

Por ende, las parábolas del haz son disjuntas.

2.2.3 HACES DE CIRCUNFERENCIAS

Se consideren dos circunferencias de ecuaciones:

$$C_1: \quad x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 \quad P_2: \quad C_2: \quad x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$$

Se llama haz de circunferencias determinado por C_1 y C_2 al conjunto de circunferencias que tienen ecuación de tipo:

$$h(x^2 + y^2 + ax + by + c) + k(x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0$$

con h y k parámetros no ambos nulos.

Si h y k se dejan variables, la misma ecuación es la <u>ecuación del haz</u>.

Nota. Si las circunferencias C_1 y C_2:

- se intersecan en dos puntos, todas las demás también se intersecan en los dos puntos, y el haz se dice **hiperbólico**;
- son tangentes en un punto, todas las demás también son tangentes en el punto, y el haz se dice **parabólico**;
- no tienen puntos en común, todas las demás también no tienen puntos en común, y el haz se dice **elíptico**;

- son concéntricas, todas las demás también son concéntricas con ellas, y el haz se dice **simétrico**.

Nota. Para h = 1 y por k = -1, se obtiene la recta:

$$(a - a')x + (b - b')y + (c - c') = 0$$

que se la llama **eje radical** del haz.

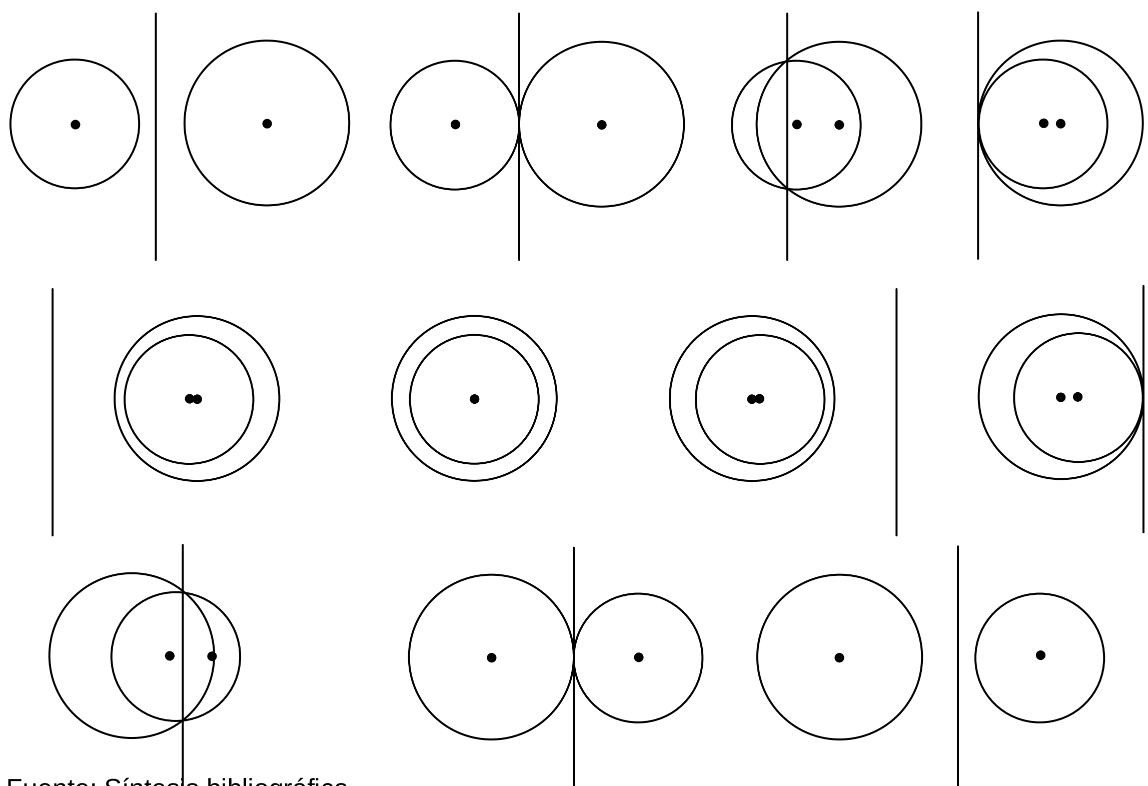
Como en su ecuación no aparecen los parámetros, el eje radical del haz es único.

Se observe que los haces simétricos no tienen eje radical por desaparecer ambas incógnitas de la ecuación.

En el siguiente gráfico se muestra la ubicación del eje radical respecto a dos circunferencias de un haz variamente posicionadas entre si.

Gráfico 6

Ubicación del eje radical



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Nota. La recta que pasa por los centros de las circunferencias:

C_1: $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ C_2: $x^2 + y^2 + a'x + b'y + c' = 0$

tiene ecuación:

$$\frac{2x+a}{a-a'} = \frac{2y+b}{b-b'}$$

o sea:

$$2(b - b')x - 2(a - a')y + (b - b')a - (a - a')b = 0$$

y el centro de toda circunferencia del haz tiene coordenadas:

$$\left(-\frac{ha+ka'}{2(h+k)}, -\frac{hb+kb'}{2(h+k)}\right)$$

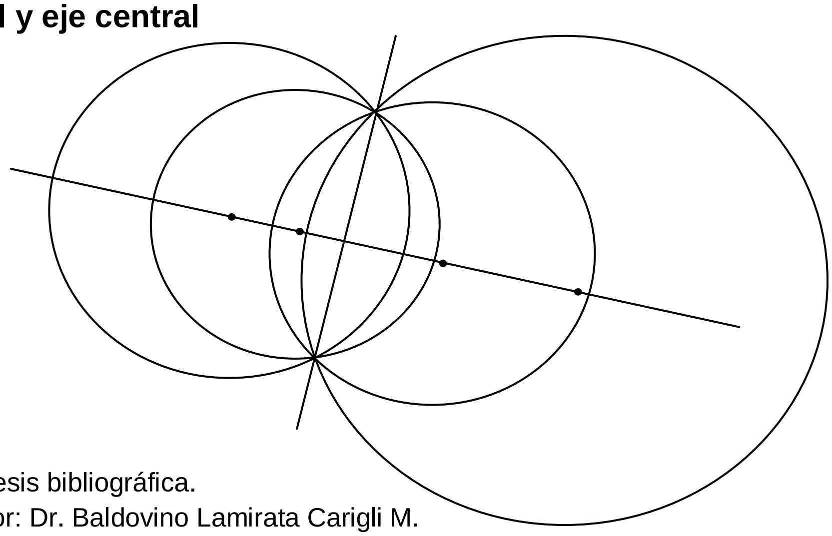
Éstas satisfacen a la ecuación anterior, por ende los centros de todas las circunferencias del haz son alineados. Esta recta se llama **eje central** del haz.

Nota. El eje radical y el eje central son perpendiculares entre sí por tener respectivamente pendientes:

$$-\frac{a-a´}{b-b´} \text{ y } \frac{b-b´}{a-a´}.$$

Gráfico 7

Eje radical y eje central



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Nota. Para $k \neq 0$, la ecuación del haz se escribe:

$$p(x^2 + y^2 + ax + by + c) + (x^2 + y^2 + a'x + b'y + c') = 0 \quad , \quad p = \frac{h}{k}$$

que pero no representa a la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

que se obtiene justo para $k = 0$.
En general, la ecuación:

$$(a_1p + b_1)x^2 + (a_1p + b_1)y^2 + (a_2p + b_2)x + (a_3p + b_3)y + (a_4p + b_4) = 0$$

con p el parámetro, es la ecuación de un haz de circunferencias menos una. Se la encuentra escribiendo la ecuación en la forma:

$$p(a_1x^2 + a_1y^2 + a_2x + a_3y + a_4) + (b_1x^2 + b_1y^2 + b_2x + b_3y + b_4) = 0$$

Es la circunferencia:

$$a_1x^2 + a_1y^2 + a_2x + a_3y + a_4 = 0.$$

Ejemplos

1. $(1 + t)x^2 + (1 + t)y^2 - 2tx - 9 = 0$

Escrita la ecuación en la forma:

$$t(x^2 + y^2 - 2x) + x^2 + y^2 - 9 = 0,$$

se evidencia que la circunferencia no representada tiene ecuación.

$$x^2 + y^2 - 2x = 0.$$

Para determinar el tipo de haz, se considera el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Como no tiene soluciones, el haz es elíptico.

El eje radical tiene ecuación:

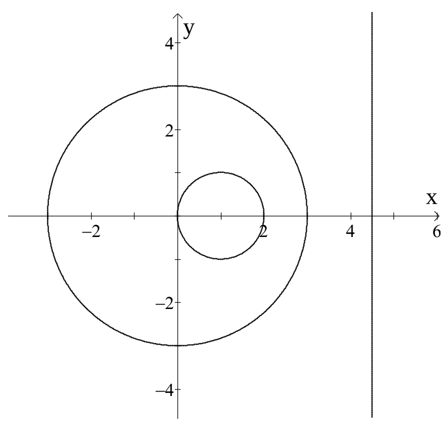
$$x = \frac{9}{2}.$$

El eje central, por pasar por el origen y ser perpendicular al eje radical, es la recta:

$$y = 0.$$

Gráfico 8

Representación gráfica del ejemplo 1



Fuente: Ejemplo 1.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

2. $x^2 + y^2 + (2p + 1)x + (3p - \frac{2}{3})y = 0$

Escrita la ecuación en la forma:

$$p(2x + 3y) + x^2 + y^2 + x - \frac{2}{3}y = 0,$$

se evidencia que la circunferencia no representada tiene ecuación:

$$2x + 3y = 0.$$

Para determinar el tipo de haz, se considera el sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ x^2 + y^2 + x - \frac{2}{3}y = 0 \end{cases}$$

Como tiene las soluciones (0, 0) y (-1, $\frac{2}{3}$), el haz es hiperbólico.

El eje radical tiene ecuación:

$$2x + 3y = 0$$

El eje central es la recta que pasa por el centro $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + x - \frac{2}{3}y = 0$$

y que es perpendicular al eje radical; por ende tiene ecuación:

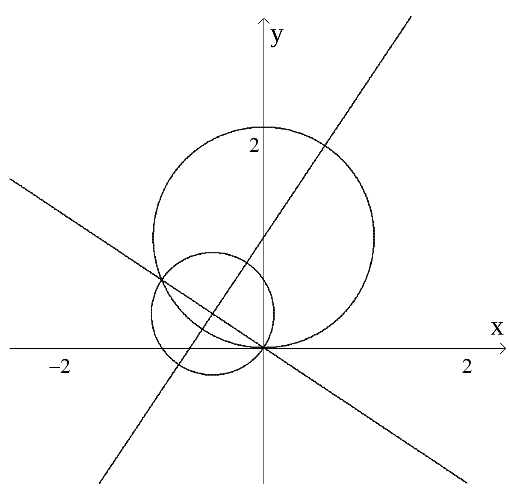
$$y - \frac{1}{3} = \frac{3}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

o sea:

$$18x - 12y + 13 = 0.$$

Gráfico 9

Representación gráfica del ejemplo 2



Fuente: Ejemplo 2.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

3. $x^2 + y^2 + 2px + (4 - p)y-(1 + 7p) = 0$

Escrita la ecuación en la forma:

$$p(2x - y - 7) + x^2 + y^2 + 4y-1 = 0.$$

se evidencia que la circunferencia no representada tiene ecuación:

$$2x - y - 7 = 0.$$

Para determinar el tipo de haz, se considera el sistema:

$$\begin{cases} 2x - y - 7 = 0 \\ x^2 + y^2 + 4y - 1 = 0 \end{cases}$$

Como tiene la solución (2, -3), el haz es parabólico.

El eje radical ttiene ecuación:

$$2x - y - 7 = 0.$$

El eje central es la recta que pasa por el centro (0, – 2) de la circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 4y-1 = 0$$

y que es perpendicular al eje radical; por ende tiene ecuación:

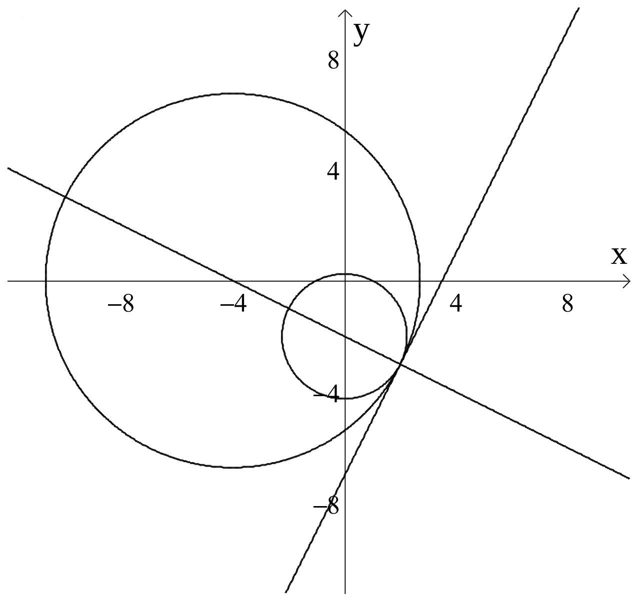
$$y + 2 = -\frac{1}{2}x$$

o sea:

$$x + 2y + 4 = 0.$$

Gráfico 10

Representación gráfica del ejemplo 3



Fuente: Ejemplo 3.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

4. $3x^2 + 3y^2 - x + 2t = 0$

Escrita la ecuación en la forma:

$$t(2) + 3x^2 + 3y^2 - x = 0.$$

se evidencia que no hay ninguna circunferencia no representada por la ecuación.

Como todas las circunferencias tienen centro en $(\frac{1}{6}, 0)$, el haz es simétrico.

El haz no tiene ni eje radical ni eje central.

2.2.4 HACES DE ELIPSES CONCÉNTRICAS

Es el conjunto de las elipses que tienen ecuación de tipo:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + p = 0 \quad , \quad ab > 0$$

con p el parámetro.

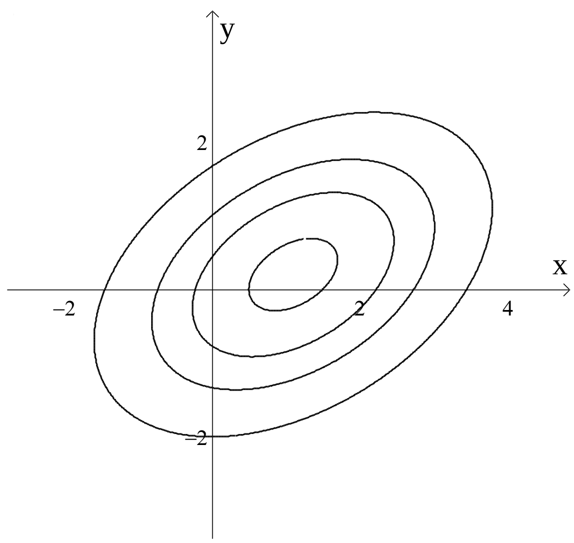
La misma ecuación

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + p = 0$$

con p variable, es la **ecuación del haz**.

Gráfico 11

Haz de elipses



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

2.2.5 HACES DE HIPÉRBOLAS CONCÉNTRICAS

Es el conjunto de las hipérbolas que tienen ecuación de tipo:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + p = 0 \quad , \quad ab < 0$$

con p el parámetro.

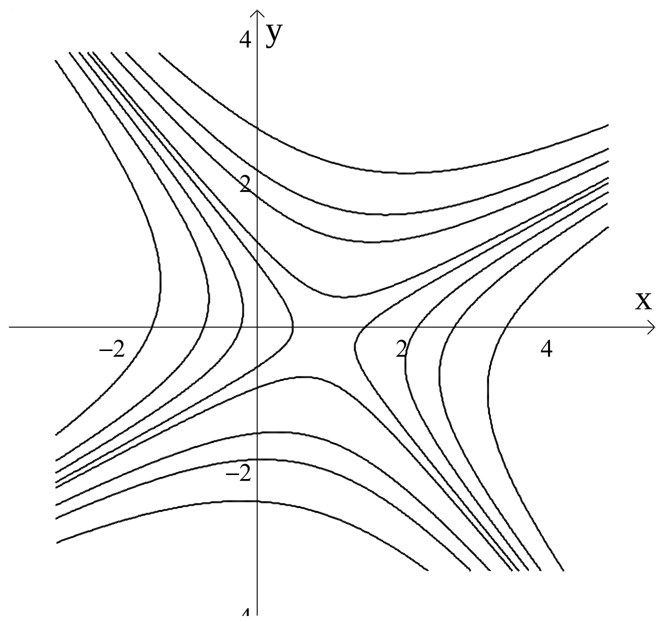
La misma ecuación:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + p = 0$$

con p variable, es la **ecuación del haz**.

Gráfico 12

Haz de hipérbolas



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

2.2.6 SISTEMAS ALGEBRAICOS PARAMÉTRICOS CONDICIONADOS

En lo que sigue consideramos sistemas de tipo:

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y, p) = 0 \\ x_0 \leq x \leq x_1 \quad , \quad y_0 \leq y \leq y_1 \quad , \quad p_0 \leq p \leq p_1 \end{cases}$$

con:

- f(x, y) un polinomio de primer o segundo grado en x, y, que por ende se representa por una recta o una cónica;
- g(x, y, p) un polinomio de primer o segundo grado en x, y, y que por la presencia del parámetro p se representa por un haz de rectas o de cónicas.

Las restricciones a las incógnitas y al parámetro pueden ser en sentido fuerte (<) y pueden faltar parcialmente. Su presencia limita la recta a un segmento o la cónica a un arco.

Al variar de los valores del parámetro, varía la recta o la cónica del haz, luego varían las intersecciones de ésta con el segmento o el arco. Por ello, un sistema paramétrico condicionado se analiza, es decir se determinan los valores del parámetro que corresponden a las posibles soluciones ordinarias, límite, simples o dobles.

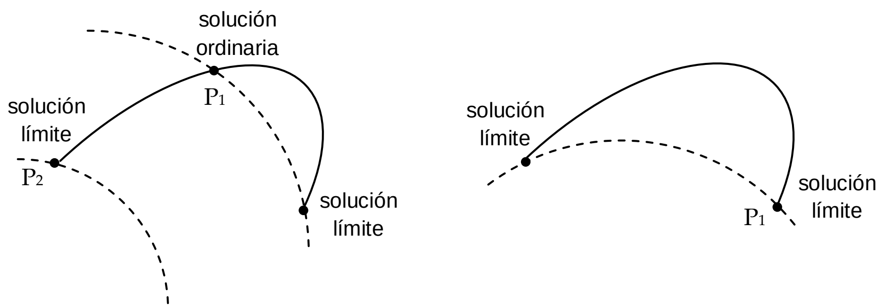
El análisis procede según cuatro etapas secuenciales cada una bien determinada en su desarrollo, y por tanto el análisis mismo aparece como un algoritmo.

I. Se determina la recta o la cónica y el haz de rectas o de cónicas en base a las ecuaciones del sistema, luego el segmento de recta o el arco de cónica en base a las limitaciones de las incógnitas.

II. Se determinan los valores del parámetro que corresponden a las rectas o a las cónicas del haz que pasan por los extremos del segmento o del arco, y que dan las posibles **soluciones límite**, luego se calculan las posibles soluciones acopladas a cada solución límite, que pueden ser ordinarias como límite a su vez.

Gráfico 13

Soluciones límite y ordinarias simples

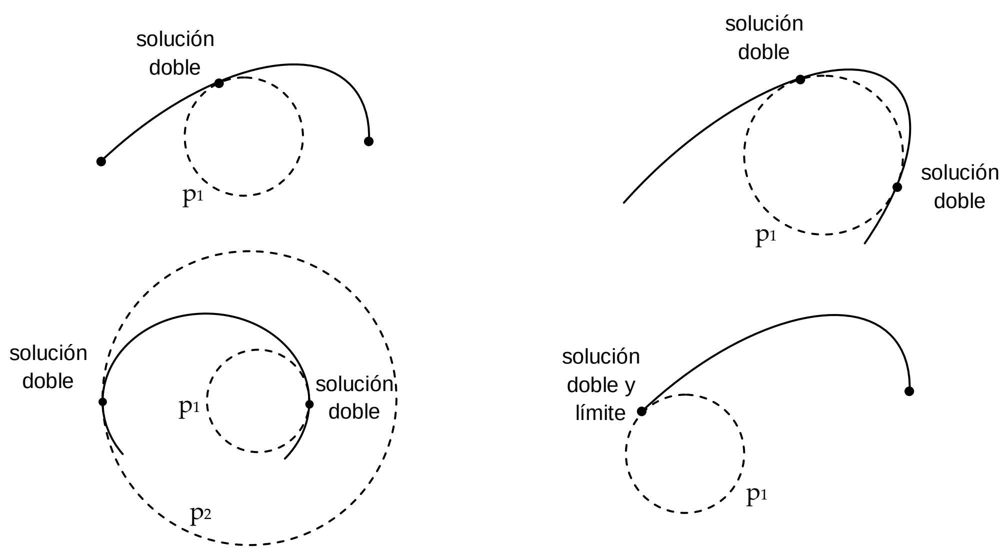


Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

III. Se determinan los valores del parámetro que corresponden a las rectas o a las cónicas del haz tangentes al segmento o al arco, y se calculan las relativas soluciones dobles.

Gráfico 14

Soluciones dobles ordinarias y límite



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

IV. Se elabora el **cuadro de análisis** en base a los valores del parámetro obtenidos en los pasos anteriores.

2.2.7 EJEMPLOS DE SISTEMAS ALGEBRAICOS PARAMÉTRICOS CONDICIONADOS

SISTEMA I

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = p \\ 0 \le x \le 2 \,, 0 \le y \le 2, p > 0 \end{cases}$$

Etapa I

La ecuación:

$$x^2 + y^2 = 4$$

es la de la circunferencia de centro (0, 0) y radio 2.

La ecuación paramétrica:

$$x + y = p$$

es la del haz impropio de rectas con pendiente –1. Al crecer del parámetro p, las rectas se desplazan en el sentido de las ordenadas positivas.

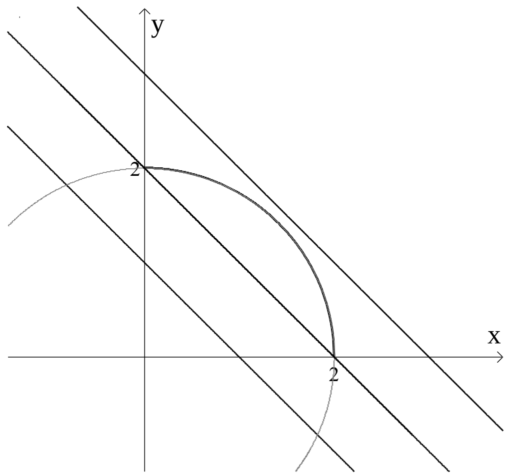
Las condiciones:

$$0 \le x \le 2 \quad , \quad 0 \le y \le 2$$

determinan el arco circular de extremos (0, 2) y (2, 0) incluidos y contenido en el primer cuadrante.

Gráfico 15

Representación gráfica del sistema I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa II

La recta del haz que pasa por el extremo (0, 2) se obtiene reemplazando las coordenadas (0, 2) en la ecuación del haz:

$$0 + 2 = p$$

luego:

$$p = 2.$$

La recta es:

$$x + y = 2.$$

El sistema condicionado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 2 \\ 0 \leq x \leq 2 \ \ , \ \ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

a más de la solución (0, 2), tiene también la solución (2, 0).

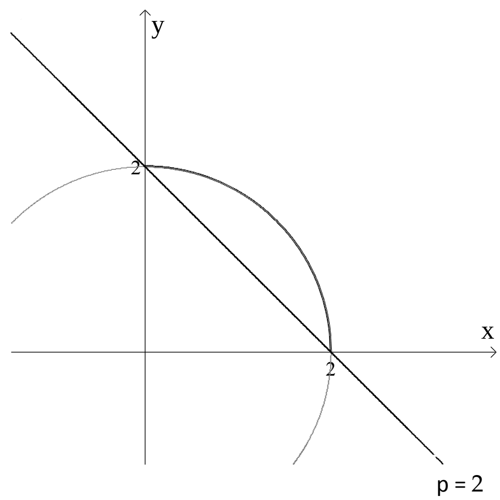
Entonces la recta:

$$x + y = 2$$

tiene dos puntos comunes con el arco de circunferencia y a la solución límite (0, 2) está acoplada la solución límite (2, 0).

Gráfico 16

Representación gráfica de la etapa II del sistema I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa III

La recta del haz tangente al arco de circunferencia se obtiene considerando el sistema dato:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = p \\ 0 \leq x \leq 2 \,, 0 \leq y \leq 2 \,, p > 0 \end{cases}$$

La ecuación que lo soluciona es:

$$2x^2 - 2px + p^2 - 4 = 0$$

Se anula su discriminante:

$$\Delta(p) = 4p^2 - 8(p^2 - 4) = 0$$

y se obtiene:

$$p = 2\sqrt{2}.$$

La recta tangente es:

$$x + y = 2\sqrt{2}.$$

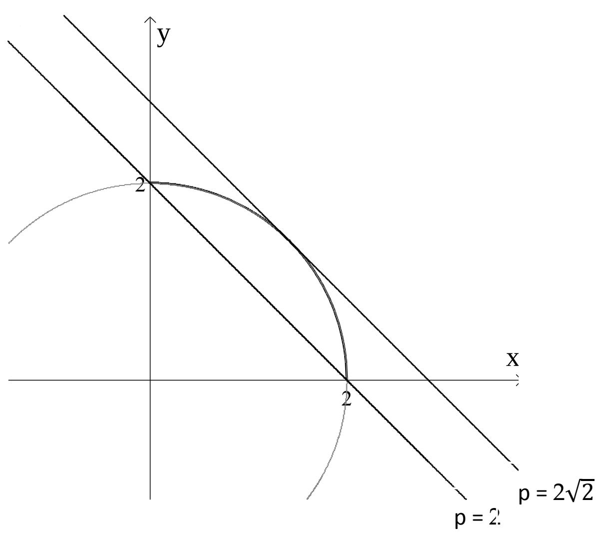
La solución doble que corresponde se obtiene resolviendo el sistema condicionado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ x + y = 2\sqrt{2} \\ 0 \leq x \leq 2 \quad , \quad 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Es $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.

Gráfico 17

Representación gráfica de la etapa III del sistema I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa IV

Como muestra la figura, el sistema tiene soluciones para los valores del parámetro tales que $2 \leq p \leq 2\sqrt{2}$. El cuadro siguiente detalla el análisis del sistema:

Cuadro 2

Resumen del análisis del sistema I

$0 < p < 2$	ninguna solución
$p = 2$	dos soluciones límite: (2, 0) y (0, 2)
$2 < p < 2\sqrt{2}$	dos soluciones ordinarias simples
$p = 2\sqrt{2}$	una solución ordinaria doble: $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$.
$p > 2\sqrt{2}$	ninguna solución

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

SISTEMA II

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - s = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \\ -2 \leq x \leq 1, 0 < y \leq \dfrac{3}{2}, s > 0 \end{cases}$$

Etapa I

La ecuación:

$$x^2 + y^2 - s = 0$$

es la del haz simétrico de circunferencias de centro (0, 0) y radio $\sqrt{s}$. Al crecer de s, se obtienen circunferencias de radio mayor.

La ecuación:

$$x - 2y + 2 = 0$$

es la de la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ y ordenada 1 en el origen.

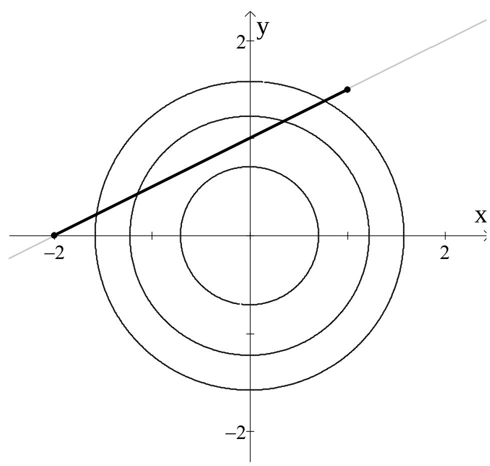
Las condiciones:

$$-2 \leq x \leq 1 \quad , \quad 0 < y \leq \frac{3}{2}$$

determinan el segmento de recta de extremos (–2, 0) excluido, y $(1, \frac{3}{2})$ incluido.

Gráfico 18

Representación gráfica del sistema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa II

La circunferencia del haz que pasa por el extremo (–2, 0) se obtiene reemplazando las coordenadas (–2, 0) en la ecuación del haz:

$$(-2)^2 + (0)^2 - s = 0$$

luego:

$$s = 4.$$

La circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 4 = 0.$$

El sistema condicionado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4 = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \\ -2 \leq x \leq 1 \ \ , \ \ 0 < y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

no tiene soluciones pues los pares (–2, 0) y $(\frac{6}{5}, \frac{8}{5})$ que satisfacen a las dos ecuaciones quedan excluidos por las condiciones sobre x, y.

La circunferencia del haz que pasa por el extremo $(1, \frac{3}{2})$ se obtiene reemplazando las coordenadas $(1, \frac{3}{2})$ en la ecuación del haz:

$$(1)^2 + (\frac{3}{2})^2 - s = 0$$

luego:

$$s = \frac{13}{4}.$$

La circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{4} = 0.$$

El sistema condicionado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \frac{13}{4} = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \\ -2 \leq x \leq 1 \ \ , \ \ 0 < y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

a más de la solución $(1, \frac{3}{2})$, tiene también la solución $(-\frac{9}{5}, \frac{1}{10})$.

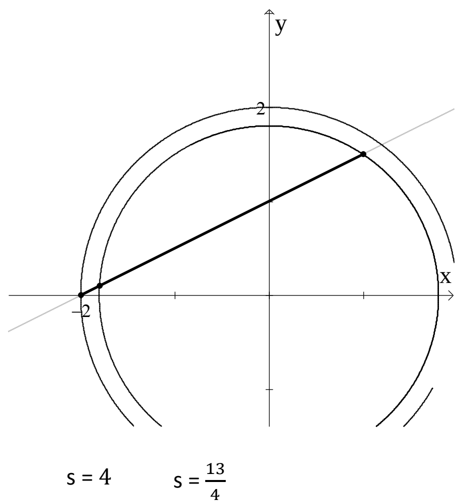
Entonces la circunferencia:

$$x^2 + y^2 - \frac{13}{4} = 0$$

tiene dos puntos en común con el segmento y a la solución límite (1, $\frac{3}{2}$) está acoplada la solución ($-\frac{9}{5}$, $\frac{1}{10}$), ordinaria y simple.

Gráfico 19

Representación gráfica de la etapa II del sistema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa III

La circunferencia del haz tangente al segmento de recta se obtiene considerando el sistema dato:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - s = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \\ -2 \leq x \leq 1 \ \ , \ \ 0 < y \leq \frac{3}{2} \ \ , \ \ s > 0 \end{cases}$$

La ecuación que lo soluciona es:

$$5x^2 + 4x + 4 - 4s = 0$$

Se anula su discriminante:

$$\Delta(s) = 16 - 20(4 - 4s) = 80s - 64$$

y se obtiene:

$$s = \frac{4}{5}.$$

La circunferencia tangente es:

$$x^2 + y^2 - \frac{4}{5} = 0$$

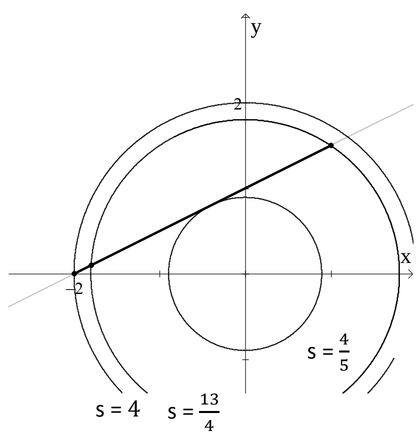
La solución doble se obtiene resolviendo el sistema condicionado:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - \dfrac{4}{5} = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \\ -2 \leq x \leq 1 \ \ , \ \ 0 < y \leq \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Es $\left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

Gráfico 20

Representación gráfica de la etapa III del sistema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa IV

Como muestra la figura, el sistema tiene soluciones para los valores del parámetro tales que $\frac{4}{5} \leq s \leq 4$. El cuadro siguiente detalla el análisis del sistema:

Cuadro 3

Resumen del análisis del sistema II

$0 < s < \frac{4}{5}$	ninguna solución
$s = \frac{4}{5}$	la solución ordinaria doble $(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5})$
$\frac{4}{5} < s < \frac{13}{4}$	dos soluciones ordinarias simples
$s = \frac{13}{4}$	la solución límite $(1, \frac{3}{2})$ y la ordinaria simple $(-\frac{9}{5}, \frac{1}{10})$
$\frac{13}{4} < s < 4$	una solución ordinaria simple
$s \geq 4$	ninguna solución

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

SISTEMA III

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = k \\ -2 \leq x \leq 3 \ , \ y > 0 \ , \ k > 0 \end{cases}$$

Etapa I (representación gráfica del sistema)

La ecuación:

$$x^2 - y^2 = -\frac{1}{4}$$

es la de la hipérbola equilátera con eje focal coincidente con el eje Oy, centro (0, 0) y semiejes $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$.

La ecuación:

$$x^2 + y^2 = k$$

es la del haz simétrico de circunferencias de centro el origen y radio $\sqrt{k}$. Al crecer de k se obtienen circunferencias de radio mayor.

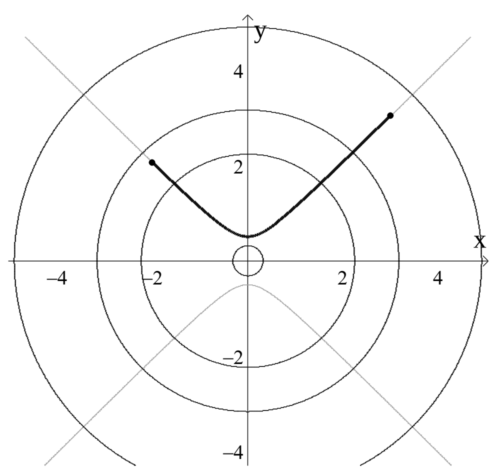
Las condiciones:

$$-2 \leq x \leq 3 \quad , \quad y > 0$$

determinan sobre la hipérbola el arco de extremos: $(-2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$ y $(3, \frac{1}{2}\sqrt{37})$ incluidos.

Gráfico 21

Representación gráfica del sistema III



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa II

La circunferencia del haz que pasa por el extremo $(-2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$ se obtiene reemplazando las coordenadas $(-2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$ en la ecuación del haz:

$$(-2)^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{17})^2 = k$$

luego:

$$k = \frac{33}{4}.$$

La circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = \frac{33}{4}.$$

El sistema numérico condicionado:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = \frac{33}{4} \\ -2 \leq x \leq 3 \quad , \quad y > 0 \end{cases}$$

a más de la solución $(-2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$, tiene también la solución $(2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$.

Entonces la circunferencia:

$$x^2 + y^2 = \frac{33}{4}$$

tiene dos puntos comunes con el arco de hipérbola y a la solución límite $(-2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$ está acoplada la solución $(2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$, ordinaria y simple.

La circunferencia del haz por el extremo $(3, \frac{1}{2}\sqrt{37})$ se obtiene reemplazando las coordenadas $(3, \frac{1}{2}\sqrt{37})$ en la ecuación del haz:

$$(3)^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{37})^2 = k$$

luego:

$$k = \frac{73}{4}.$$

La circunferencia es:

$$x^2 + y^2 = \frac{73}{4}.$$

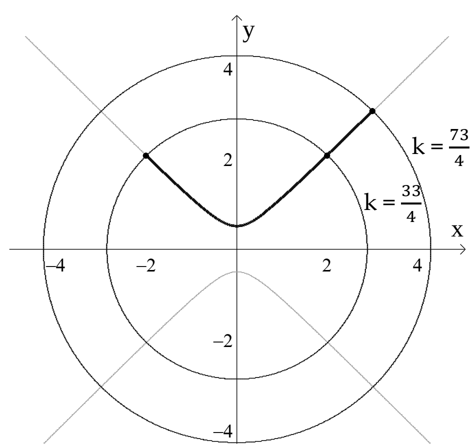
El sistema numérico condicionado:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\dfrac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = \dfrac{73}{4} \\ -2 \leq x \leq 3 \;\;,\;\; y > 0 \end{cases}$$

tiene solo la solución $(3, \frac{1}{2}\sqrt{37})$ pues el par $(-3, \frac{1}{2}\sqrt{37})$ que satisface a las dos ecuaciones está excluido por la condición sobre la x.

Gráfico 22

Representación gráfica de la etapa II del sistema III



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa III

La circunferencia del haz tangente al arco de la hipérbola se obtiene considerando el sistema dato:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = k \\ -2 \leq x \leq 3 \ , \ y > 0 \ , \ k > 0 \end{cases}$$

La ecuación que lo soluciona es:

$$2x^2 + \frac{1}{4} - k = 0$$

Se anula su discriminante:

$$\Delta(k) = -8\left(\frac{1}{4} - k\right) = 8k - 2$$

y se obtiene:

$$k = \frac{1}{4}.$$

La circunferencia tangente es:

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

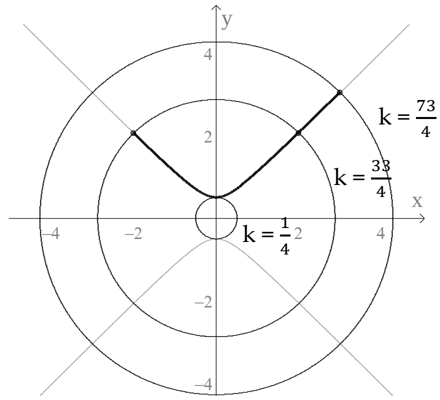
La solución doble se obtiene resolviendo el sistema condicionado:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ -2 \leq x \leq 3 \ , \ y > 0 \end{cases}$$

Es $(0, \frac{1}{2})$.

Gráfico 23

Representación gráfica de la etapa III del sistema III



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa IV

Como muestra la figura, el sistema tiene soluciones para los valores del parámetro tales que $\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{73}{4}$. El cuadro siguiente detalla el análisis del sistema:

Cuadro 4

Resumen del análisis del sistema III

$0 < k < \frac{1}{4}$	ninguna solución
$k = \frac{1}{4}$	la solución ordinaria doble $(0, \frac{1}{2})$
$\frac{1}{4} < k < \frac{33}{4}$	dos soluciones ordinarias simples
$k = \frac{33}{4}$	la solución límite $(-2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$ y la ordinaria simple $(2, \frac{1}{2}\sqrt{17})$
$\frac{33}{4} < k < \frac{73}{4}$	una solución ordinaria simple
$k = \frac{73}{4}$	la solución límite $(3, \frac{1}{2}\sqrt{37})$
$k > \frac{73}{4}$	ninguna solución

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Nota. Las ecuaciones de segundo grado paramétricas condicionadas:

$$A(p)x^2 + B(p)x + C(p) = 0 \quad , \quad x_0 < x < x_1$$

también se pueden analizar como un sistema paramétrico condicionado con un simple artificio: se pone $y = x^2$, que representa a una parábola, y se reemplaza en la ecuación obteniendo $A(p)y + B(p)x + C(p) = 0$, que representa a un haz de rectas propio o impropio. En el primer caso resulta útil determinar dos rectas auxiliares que nos permiten identificar fácilmente los intervalos ilimitados en donde el parámetro asume respectivamente los valores positivos y los negativos; las rectas son:

- la *recta base*, que corresponde al valor 0 del parámetro,
- la *recta excluida*, que corresponde a los límites infinitamente grandes (positivo y negativo) del parámetro.

Se obtienen escribiendo la ecuación del haz en la forma:

$$p(ax + by + c) + (a'x + b'y + c') = 0$$

La recta base es la de ecuación $a'x + b'y + c' = 0$ ($p = 0$) y la recta excluida es la de ecuación $ax + by + c = 0$ ($p \to \pm\infty$).

ECUACIÓN I

$$\begin{cases} (3p-1)x^2 - 2x + 1 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Sistema equivalente:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ (3p-1)y - 2x + 1 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Etapa I

La ecuación:

$$(3p - 1)y - 2x + 1 = 0$$

es del haz propio de rectas de centro $(\frac{1}{2}, 0)$. Escrita en la forma:

$$p(3y) - y - 2x + 1 = 0$$

se ve que la recta base es (p = 0):

$$2x + y - 1 = 0$$

y la recta excluida es (p = ±∞):

$$y = 0.$$

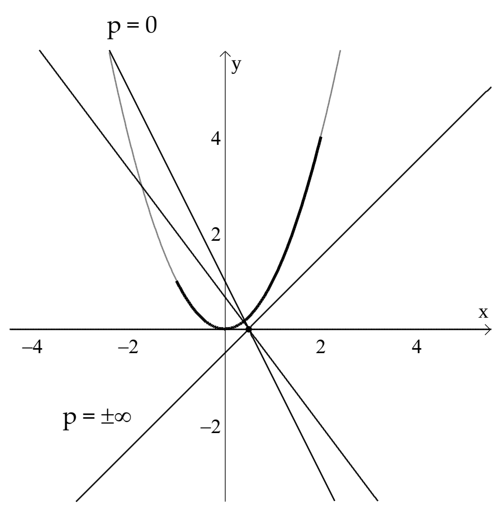
Las condiciones:

$$-1 \leq x \leq 2$$

determinan el arco de la parábola de extremos (−1, 1) y (2, 4) incluidos.

Gráfico 32

Representación gráfica de la ecuación I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa II

La recta del haz por el extremo $(-1, 1)$ se obtiene reemplazando las coordenadas $(-1, 1)$ en la ecuación del haz:

$$(3p - 1)(1) - 2(-1) + 1 = 0$$

luego:

$$p = -\frac{2}{3}$$

La recta es:

$$2x + 3y - 1 = 0$$

El sistema condicionado:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x + 3y - 1 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

a más de la solución $(-1, 1)$, tiene la solución $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$.

Entonces, la recta:

$$2x + 3y - 1 = 0$$

tiene dos puntos en común con el arco de parábola y a la solución límite $(-1, 1)$ está acoplada la solución $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}\right)$, ordinaria y simple.

La recta del haz por el extremo $(2, 4)$ se obtiene reemplazando las coordenadas $(2, 4)$ en la ecuación del haz:

$$(3p - 1)(4) - 2(2) + 1 = 0$$

luego:

$$p = \frac{7}{12}$$

La recta es:

$$8x - 3y - 4 = 0$$

El sistema condicionado:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 8x - 3y - 4 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

a más de la solución $(2, 4)$, tiene la solución $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$.

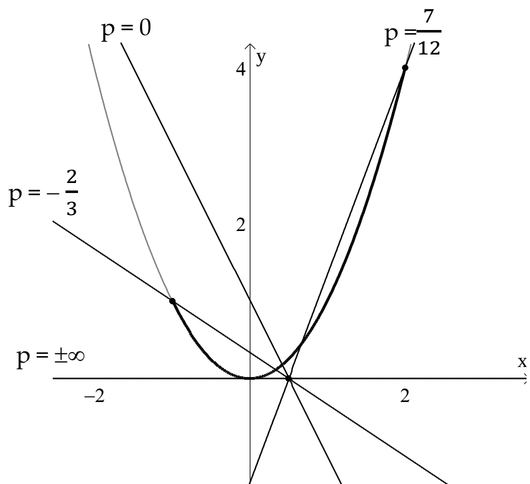
Entonces, la recta:

$$8x - 3y - 4 = 0$$

tiene dos puntos en común con el arco de parábola y a la solución límite $(2, 4)$ está acoplada la solución $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$, ordinaria y simple.

Gráfico 33

Representación gráfica de la etapa II de la ecuación I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa III

La recta del haz tangente a la parábola se obtiene considerando el sistema dato:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ (3p - 1)y - 2x + 1 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

La ecuación que lo soluciona es:

$$(3p - 1)x^2 - 2x + 1 = 0$$

Se anula su discriminante:

$$\Delta(p) = 4 - 4(3p - 1) = 8 - 12p$$

y se obtiene:

$$p = \frac{2}{3}.$$

La recta tangente es:

$$2x - y - 1 = 0$$

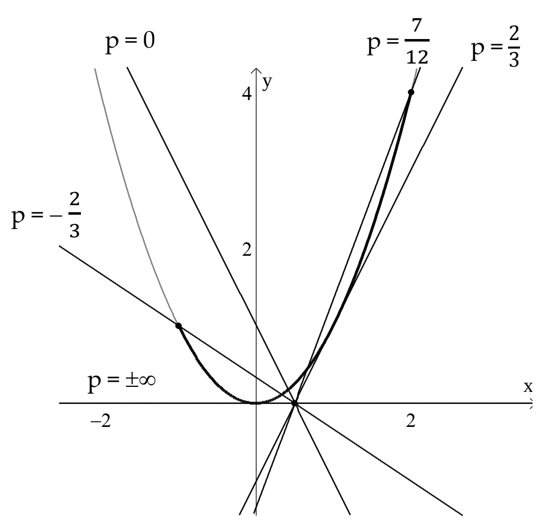
La solución doble se obtiene resolviendo el sistema condicionado:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x - y - 1 = 0 \\ -1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

Es (1, 1).

Gráfico 34

Representación gráfica de la etapa III de la ecuación I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa IV

Como muestra la figura, el sistema tiene soluciones para los valores del parámetro tales que $p \leq \frac{2}{3}$. El cuadro siguiente detalla el análisis del sistema:

Cuadro 8

Resumen del análisis de la ecuación I

$p < -\frac{2}{3}$	dos soluciones ordinarias simples
$p = -\frac{2}{3}$	la solución límite (-1, 1) y la solución ordinaria simple $(\frac{1}{3}, \frac{1}{9})$
$-\frac{2}{3} < p < \frac{7}{12}$	una solución ordinaria simple
$p = \frac{7}{12}$	la solución límite (2, 4) y la solución ordinaria simple $(\frac{2}{3}, \frac{4}{9})$
$\frac{7}{12} < p < \frac{2}{3}$	dos soluciones ordinarias simples
$p = \frac{2}{3}$	una solución ordinaria doble
$p > \frac{2}{3}$	ninguna solución

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

ECUACIÓN II

$$\begin{cases} (3p-1)x^2 - 2(p-3)x + p + 1 = 0 \\ 0 < x \leq 4 \end{cases}$$

Sistema equivalente

$$\begin{cases} y = x^2 \\ (3p-1)y - 2(p-3)x + p + 1 = 0 \\ 0 < x \leq 4 \quad , \quad 0 < y \leq 16 \end{cases}$$

Etapa I

La ecuación:

$$(3p-1)y - 2(p-3)x + p + 1 = 0$$

es del haz propio de rectas de centro $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$. Escrita en la forma:

$$p(3y - 2x + 1) - y + 6x + 1 = 0$$

se ve que la recta base es (p = 0):

$$6x - y + 1 = 0$$

y la recta excluida es ($p \to \pm\infty$):

$$2x - 3y - 1 = 0$$

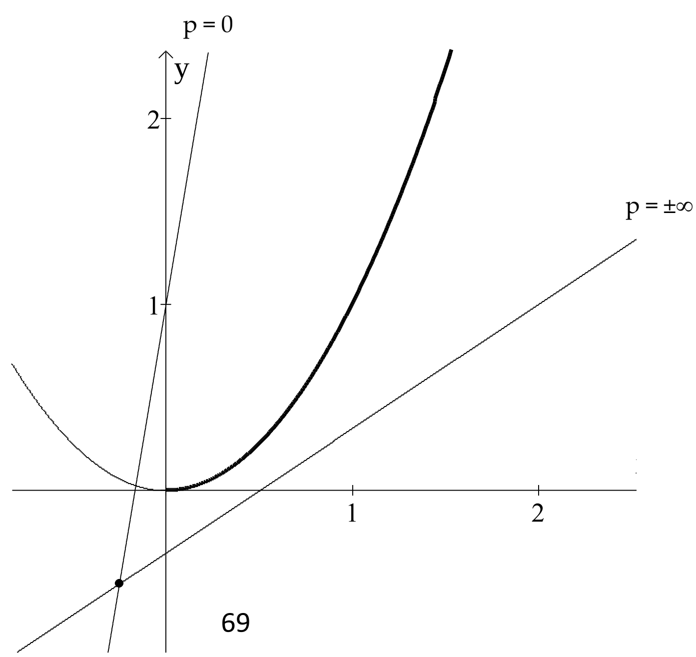
Las condiciones:

$$0 < x \leq 4$$

determinan el arco de la parábola de extremos (0, 0) y (4, 16), el primero excluido.

Gráfico 35

Representación gráfica de la ecuación II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa II

La recta del haz por el extremo (0, 0) se obtiene reemplazando las coordenadas (0, 0) en la ecuación del haz:

$$(3p - 1)(0) - 2(p - 3)(0) + p + 1 = 0$$

luego:

$$p = -1$$

La recta es:

$$2x - y = 0$$

El sistema condicionado:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 2x - y = 0 \\ 0 < x \leq 4 \quad , \quad 0 < y \leq 16 \end{cases}$$

tiene solo la solución (2, 4) pues el par (0, 0) está excluido por la condiciones.

Entonces la recta:

$$2x - y = 0$$

tiene solo un punto en común con el arco de parábola.

La recta del haz por el extremo (4, 16) se obtiene reemplazando las coordenadas (4, 16) en la ecuación del haz:

$$(3p - 1)(16) - 2(p - 3)(4) + p + 1 = 0$$

luego:

$$p = -\frac{9}{41}$$

La recta es:

$$66x - 17y + 8 = 0$$

El sistema condicionado:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 66x - 17y + 8 = 0 \\ 0 < x \leq 4 \quad , \quad 0 < y \leq 16 \end{cases}$$

tiene solo la solución (4, 16) pues el par $(-\frac{2}{17}, \frac{4}{289})$ queda excluido por la condición sobre la x.

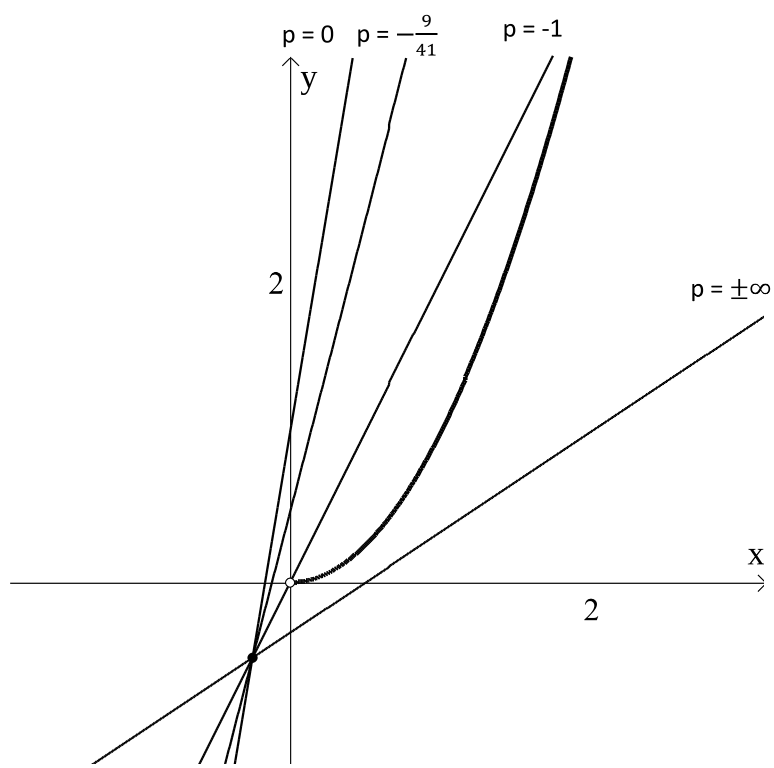
Entonces la recta:

$$66x - 17y + 8 = 0$$

tiene solo un punto común con el arco de parábola y a la solución límite (4, 16) no está acoplada ningún solución.

Gráfico 36

Representación gráfica de la etapa II de la ecuación II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa III

La recta del haz tangente al arco de parábola se obtiene considerando el sistema dado:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ (3p-1)y - 2(p-3)x + p + 1 = 0 \\ 0 < x \leq 4 \quad , \quad 0 < y \leq 16 \end{cases}$$

La ecuación que lo soluciona es:

$$(3p-1)x^2 - 2(p-3)x + p + 1 = 0$$

Se anula su discriminante:

$$\Delta(p) = 4(p-3)^2 - 4(3p-1)(p+1)$$

y se obtiene:

$$p = -5 \quad , \quad p = 1$$

Hay dos tangentes a la parábola:

$$4x - 4y - 1 = 0 \quad , \quad 2x + y + 1 = 0$$

de las cuales solo la primera es tangente al arco de parábola.

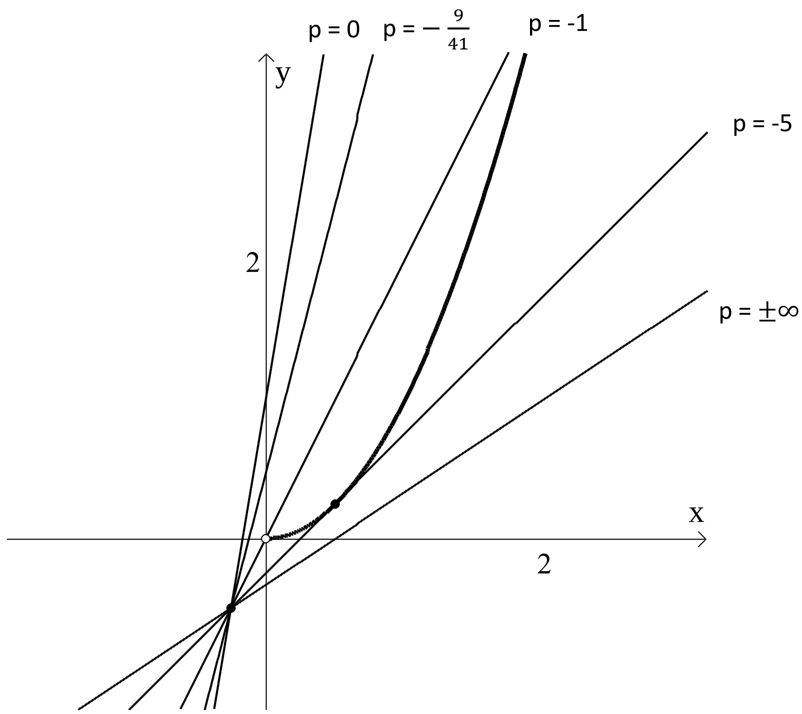
La solución doble se obtiene resolviendo el sistema condicionado:

$$\begin{cases} y = x^2 \\ 4x - 4y - 1 = 0 \\ 0 < x \leq 4 \quad , \quad 0 < yy \leq 16 \end{cases}$$

Es ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}$).

Gráfico 37

Representación gráfica de la etapa III de la ecuación II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Etapa IV

Como muestra la figura, el sistema tiene soluciones para los valores del parámetro tales que $-5 \leq p \leq -\frac{9}{41}$. El cuadro siguiente detalla el análisis del sistema:

Cuadro 9

Resumen del análisis de la ecuación II

$p < -5$	ninguna solución
$p = -5$	la solución doble $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$
$-5 < p < -1$	dos soluciones ordinarias simples
$p = -1$	la solución ordinaria simple (2, 4)
$-1 < p < -\frac{9}{41}$	una solución ordinaria simple
$p = -\frac{9}{41}$	la solución límite (4, 16)
$p > -\frac{9}{41}$	ninguna solución

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M

Nota. El siguiente es un listado de sistemas algebraicos paramétricos condicionados para analizar.

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ 2x + y - 3m = 0 \\ 1 \le x \le 2, \quad 0 \le y \le 1, \quad m > 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x^2 + y^2 - s = 0 \\ x - 2y + 2 = 0 \\ -2 < x \le 1, \quad 0 < y \le \frac{3}{2}, \quad s > 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} y = \frac{3}{2}x^2 - \frac{13}{2}x + 8 \\ (k+1)x + (k-1)y = 0 \\ 1 \le x \le 3, \quad 0 \le y \le 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{1}{4} \\ x^2 + y^2 = k \\ -2 \le x \le 3, \quad y > 0 \end{cases}$

5. $\begin{cases} y = x^2 - 1 \\ ky - x - k + 1 = 0 \\ -2 < x < 1, -1 < y < 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} xy = 6 \\ 5x + 6y = k \\ x > 0, \quad y > 0, k > 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} y = kx^2 - 2kx \\ y = -9x^2 + 2x - 2 \\ x > 0\,, \qquad y > 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1 \\ x + py - 1 - p = 0 \\ 0 \le x \le 5\,, \qquad 0 \le y \le 4 \end{cases}$

9. $\begin{cases} ky + x + 2k = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \\ -1 \le x \le \dfrac{1}{3}\,, \qquad 0 \le y \le 1 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^2 + 6x - y = 0 \\ x + ty - 6t = 0 \\ -6 \le x \le 1\,, -9 \le y \le 7 \end{cases}$

11. $\begin{cases} 2(1-p)x^2 - (p-1)x + p = 0 \\ -2 \le x \le 1 \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 - 2sx + s + 2 = 0 \\ -2 \le x \le 1 \end{cases}$

2.2.7 PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PARAMÉTRICOS

Nota. Ahora vamos a analizar un problema geométrico paramétrico mediante su modelación con un sistema algebraico paramétrico condicionado. El análisis procede por ocho fases, que constituyen el algoritmo de análisis.

Fases de análisis del problema

I. Se traza una figura según los datos del problema.

II. Se eligen las dos incógnitas y se determinan dos relaciones entre ellas, siendo una la condición del problema y otra algún teorema conveniente de Geometría Euclidiana.

III. Se determinan las limitaciones de las incógnitas por su significado geométrico.

IV. Se escribe el sistema paramétrico condicionado que modela al problema geométrico.

V. Se cumple el análisis del modelo con el método gráfico (haces de rectas o de cónicas).

VI. Se deducen las soluciones del problema geométrico paramétrico en base al cuadro de análisis del modelo.

VII. Asignado un valor del parámetro, se determina la figura que le corresponde.

VIII. Asignada una figura, se determina el valor del parámetro que corresponde, si que existe.

Nota. En lo siguiente se omitirá el análisis del sistema que resulta al modelar el problema, ya ejemplificada anteriormente, y se concentrará la atención sobre el análisis del problema geométrico.

Nota. En los problemas geométricos que se consideran, aparecen dos parámetros. Uno es el parámetro respecto al cual se desarrolla el análisis y el otro es un parámetro de construcción de la figura, que se deja arbitrario por no influir sobre el análisis del problema. Se especificará entonces cuál es el parámetro de análisis, mientras que se dará un valor arbitrario al parámetro de construcción (generalmente el valor 1) cuando se quiere trazar una figura que corresponde al problema.

Nota. Por lo general, una relación a obtener entre las incógnitas elegidas es consecuencia de algún teorema de Geometría Euclidiana. Para eso, se necesita de un buen conocimiento de los teoremas mismos y de la capacidad de escoger aquellos que más convienen al análisis del problema. Se entiende así la razón por la cual la fase II es la más delicada del análisis.

2.2.8 EJEMPLOS DE PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PARAMÉTRICOS

PROBLEMA I

Construir un triángulo rectángulo tal que un cateto tenga medida igual a r (parámetro de construcción) y la diferencia entre el triple de la hipotenusa y el otro cateto sea igual a d (parámetro de análisis).

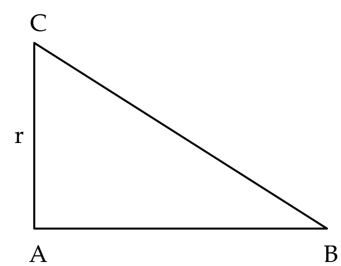
Fase I: trazado de la figura

Sea ABC un triángulo rectángulo en A y con $|AC|= r$. La condición del problema es:

$$3|BC| - |AB| = d$$

Gráfico 38

Figura del problema I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Nota. Debe ser $d > 0$.

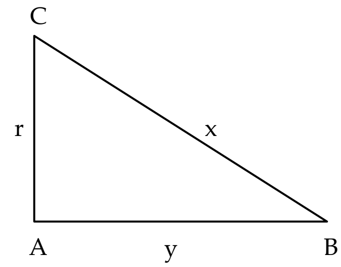
Fase II: elección de las incógnitas

Sea:

$$x = |BC| \quad , \quad y = |AB|$$

Gráfico 39

Incógnitas del problema I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Entonces la condición del problema se escribe:

$$3x - y = d.$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo ABC, resulta:

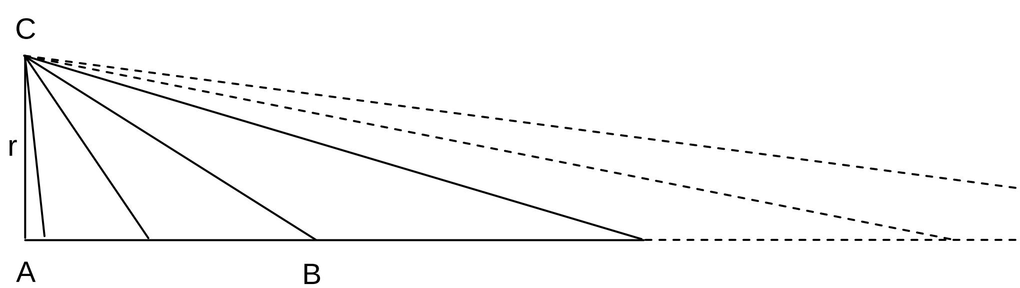
$$x^2 - y^2 = r^2.$$

Fase III: limitación de las incógnitas

Las incógnitas están sujetas a las siguientes limitaciones geométricas. El triángulo ABC puede ser cualquiera de los infinitos triángulos rectángulos que se muestran a continuación:

Gráfico 40

Variabilidad de la figura del problema I



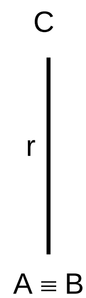
Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Entre ellos se encuentra aquel o aquellos que satisfacen a la relación del problema por cierto valor del parámetro y que por supuesto varían con el valor del parámetro mismo.

Una "triángulo" al límite se da por $A \equiv B$:

Gráfico 41

Figura límite del problema I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

con respecto al cual las incógnitas asumen los valores:

$$x = r \quad , \quad y = 0.$$

No hay otra posición límite pues las medidas de la hipotenusa BC y del cateto AB no tienen cota superior. Por ende, las limitaciones geométricas de las incógnitas son:

$$x \geq r \quad y \quad y \geq 0.$$

Nota. Los valores límite $x = r$ y $y = 0$ se aceptan porque, aun el triángulo degenere en un segmento, la relación asignada:

$$3x - y = d$$

se vuelve:

$$3r = d$$

sin perder de sentido algebraico.

Fase IV: sistema algebraico paramétrico condicionado

El sistema es:

$$\begin{cases} 3x - y = d \\ x^2 - y^2 = r^2 \\ x \geq r\,,\, y \geq 0\,,\, d > 0 \end{cases}$$

cuyo análisis se resume en el cuadro siguiente:

Cuadro 10

Resumen del análisis del modelo algebraico del problema I

$0 < d < 2\sqrt{2}r$	ninguna solución
$d = 2\sqrt{2}r$	la solución doble $(\frac{3\sqrt{2}}{4}r, \frac{\sqrt{2}}{4}r)$
$2\sqrt{2}r < d < 3r$	dos soluciones ordinarias simples
$d = 3r$	la solución límite $(r, 0)$ y la solución ordinaria simple $(\frac{5}{4}r, \frac{3}{4}r)$.
$d > 3r$	una solución ordinaria simple

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VI: análisis del problema

El problema tiene soluciones para los valores del parámetro tales que $d \geq 2\sqrt{2}r$.

El cuadro siguiente detalla el análisis:

Cuadro 11

Resumen del análisis del problema I

$0 < d < 2\sqrt{2}r$	no existe un triángulo ABC que cumpla con la condición
$d = 2\sqrt{2}r$	el triángulo ABC con hipotenusa $\lvert BC \rvert = \frac{3\sqrt{2}}{4}r$ y cateto $\lvert AB \rvert = \frac{\sqrt{2}}{4}r$
$2\sqrt{2}r < d < 3r$	existen dos triángulos ABC que cumplen con la condición
$d = 3r$	el triángulo degenerado ABC con hipotenusa $\lvert BC \rvert = r$ y cateto $\lvert AB \rvert = 0$, y el triángulo ABC con hipotenusa $\lvert BC \rvert = \frac{5}{4}r$ y cateto $\lvert AB \rvert = \frac{3}{4}r$
$d > 3r$	existe un sólo triángulo ABC que cumple con la condición

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VII: elección de un valor paramétrico

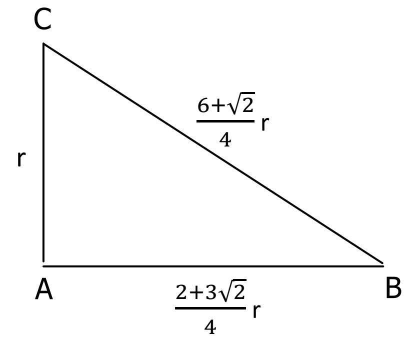
Sea d = 4r. En base al cuadro de análisis existe y es único el triángulo ABC que cumple con la condición del problema. En efecto se obtiene el sistema condicionado:

$$\begin{cases} 3x - y = 4r \\ x^2 - y^2 = r^2 \\ x \geq 1 \,, y \geq 0 \end{cases}$$

que admite la única solución $\left(\frac{6+\sqrt{2}}{4}r, \frac{2+3\sqrt{2}}{4}r\right)$. Por tanto, al valor del parámetro d = 4r corresponde el siguiente triángulo ABC:

Gráfico 42

Figura del problema I por un valor elegido del parámetro



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VIII: elección de una figura

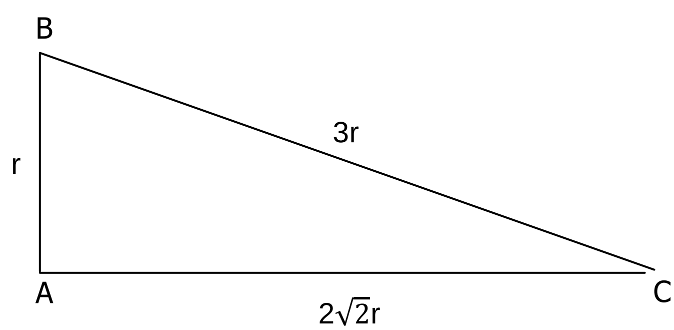
Sea $|BC| = 3r$. Averiguar si existe y cuál es el valor del parámetro d que corresponde.

Sustituyendo x = 3r en la ecuación $x^2 - y^2 = r^2$, resulta $y = 2\sqrt{2}\,r$

Por ende, se busca el valor del parámetro d al cual corresponda la solución $(3r, 2\sqrt{2}r)$.

Gráfico 43

Figura elegida del problema I



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

De la condición $3x - y = d$, resulta:

$$d = 9r - 2\sqrt{2}r \quad (> 0)$$

Por ende, el valor del parámetro que se obtiene es aceptable y le corresponde el triángulo requerido.

Se note que por ser $d = 9r - 2\sqrt{2}r > 3r$, el triangulo requerido es el único que satisface a la condición del problema (ver el cuadro de análisis del problema.)

PROBLEMA II

En un trapecio rectángulo ABCD la altura AD mide r (parámetro de construcción), la base menor mide b y la mayor 2b respectivamente (b parámetro de análisis). Se determine sobre AD un punto P tal que:

$$|BC|^2 = |CP|^2 + \frac{|PB|^2}{4}$$

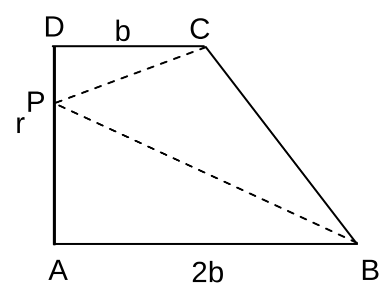
Fase I: trazado de la figura

Sea ABCD un trapecio rectángulo en A y D con |AD|= r y sea P un punto de AD tal que:

$$|BC|^2 = |CP|^2 + \frac{|PB|^2}{4}$$

Gráfico 44

Figura del problema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

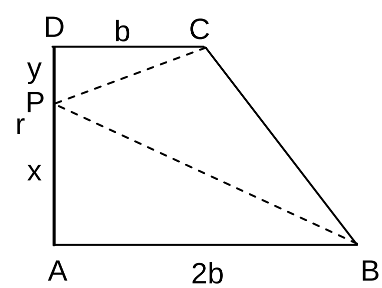
Fase II: elección de las incógnitas

Sea:

$$x = |AP| \quad , \quad y = |PD|$$

Gráfico 45

Incógnitas del problema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Entonces la condición del problema se escribe:

$$b^2 + r^2 = y^2 + b^2 + \frac{4b^2 + x^2}{4}.$$

o sea:

$$x^2 + 4y^2 + 4(b^2 - r^2) = 0.$$

Otra relación entre las incógnitas x, y es:

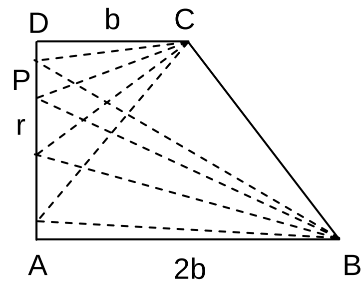
$$x + y = r.$$

Fase III: limitación de las incógnitas

Las incógnitas están sujetas a las siguientes limitaciones geométricas. El triángulo PBC es cualquiera de los infinitos triángulos que se muestran a continuación:

Gráfico 46

Variabilidad de la figura del problema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.

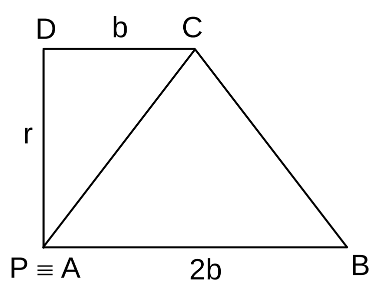
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Entre ellos se encuentra aquel o aquellos que satisfacen a la relación del problema por cierto valor del parámetro y que por supuesto varían con el valor del parámetro mismo.

Un triángulo al límite se da por P ≡ A:

Gráfico 47

Primera figura límite del problema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

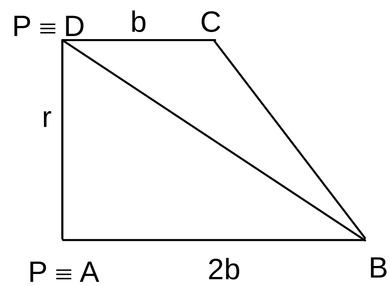
con respecto al cual las incógnitas asumen los valores:

$$x = 0 \quad , \quad y = r$$

Otro triángulo al límite se da por P ≡ D:

Gráfico 48

Segunda figura límite del problema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

con respecto al cual las incógnitas asumen los valores:

$$x = r \quad , \quad y = 0$$

Nota. Los valores límite $x = r$ y $y = 0$ se aceptan porque la relación asignada:

$$x^2 + 4y^2 + 4(b^2 - r^2) = 0$$

se vuelve:

$$4b^2 - 3r^2 = 0$$

sin perder de sentido algebraico. En cambio, los valores límite $x = 0$ y $y = r$ no se aceptan porque la relación asignada:

$$x^2 + 4y^2 + 4(b^2 - r^2) = 0$$

se vuelve:

$$4b^2 = 0$$

luego:

$$b = 0$$

en contra de la hipótesis $b > 0$.

Fase IV: sistema algebraico paramétrico condicionado

El sistema es:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 + 4(b^2 - r^2) = 0 \\ x + y = r \\ 0 < x \le r, 0 \le y < r, b > 0 \end{cases}$$

cuyo análisis se resume en el cuadro siguiente:

Cuadro 12

Resumen del análisis del modelo algebraico del problema II

$0 < b < \frac{r\sqrt{3}}{2}$	una solución ordinaria simple
$b = \frac{r\sqrt{3}}{2}$	la solución límite (r, 0) y la solución ordinaria simple $(\frac{3}{5}r, \frac{2}{5}r)$.
$\frac{r\sqrt{3}}{2} < b < \frac{2}{\sqrt{5}}r$	dos soluciones ordinarias simples
$b = \frac{2}{\sqrt{5}}r$	la solución ordinaria doble $(\frac{4}{5}r, \frac{1}{5}r)$
$b > \frac{2}{\sqrt{5}}r$	ninguna solución

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VI: Análisis del problema

El problema tiene soluciones para los valores del parámetro tales que $0 < b < \frac{2}{\sqrt{5}}$ r. El cuadro siguiente detalla el análisis:

Cuadro 13

Resumen del análisis del problema II

$0 < b < \frac{r\sqrt{3}}{2}$	existe un solo punto P que cumple con la condición
$b = \frac{r\sqrt{3}}{2}$	el punto $P \equiv D$
$\frac{r\sqrt{3}}{2} < b < \frac{2}{\sqrt{5}}r$	existen dos puntos P que cumplen con la condición
$b = \frac{2}{\sqrt{5}}r$	el punto P tal que $\lvert AP \rvert = \frac{4}{5}r$ y $\lvert PB \rvert = \frac{1}{5}r$
$b > \frac{2}{\sqrt{5}}r$	no existe ningún punto P que cumpla con la condición

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VII: elección de un valor paramétrico

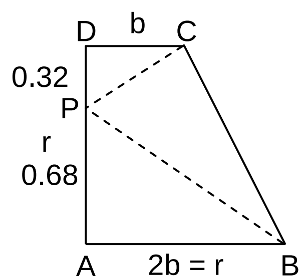
Sea $b = \frac{1}{2}$ r. En base al cuadro de análisis existe y es único un punto P que cumple con la condición del problema. En efecto se obtiene el sistema condicionado:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 - 3r^2 = 0 \\ x + y = r \\ 0 < x \leq r, 0 \leq y < r \end{cases}$$

que admite la única solución $\left(\frac{4-\sqrt{11}}{5}\ r,\ \frac{1+\sqrt{11}}{5}\ r\right)$. Por tanto, al valor del parámetro b = $\frac{1}{2}$ r corresponde el siguiente punto P:

Gráfico 49

Figura del problema II por un valor elegido del parámetro



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VIII: elección de una figura

Averiguar si existe y cuál es el valor del parámetro b por el cual el punto P es equidistante de A y de D.

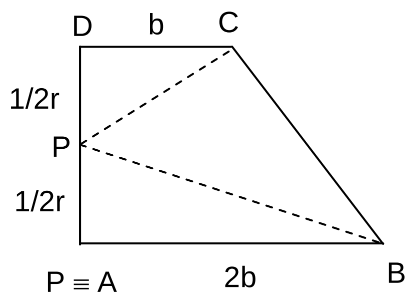
Debe ser x = y = $\frac{1}{2}$ r.

Por ende, se busca el valor del parámetro b al cual corresponda la solución:

$\left(\frac{1}{2}r, \frac{1}{2}\ r\right)$.

Gráfico 50

Figura elegida del problema II



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

De la condición $x^2 + 4y^2 + 4(b^2 - r^2) = 0$, resulta:

$$b = \frac{\sqrt{11}}{2} r \; (> r).$$

Por ende, el valor del parámetro que se obtiene no es aceptable y el punto P elegido no satisface a la condición del problema.

PROBLEMA III

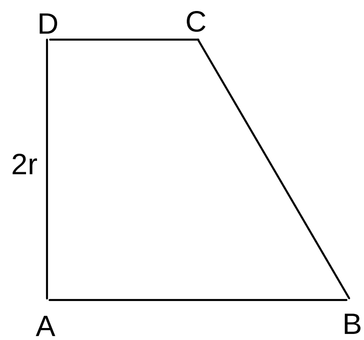
Construir un trapecio rectángulo con la base mayor igual al lado oblicuo, la base menor no superior a la altura, la altura igual a 2r (r parámetro de construcción) y el área igual a k (k parámetro de análisis).

Fase I: Trazado de la figura

Sea ABCD un trapecio rectángulo con la base mayor AB igual al lado oblicuo BC, la base menor CD menor que la altura AD, que mide 2r. Se quiere que su área valga k:

Gráfico 51

Figura del problema III



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

$$\frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2}\cdot\overline{AD}=k$$

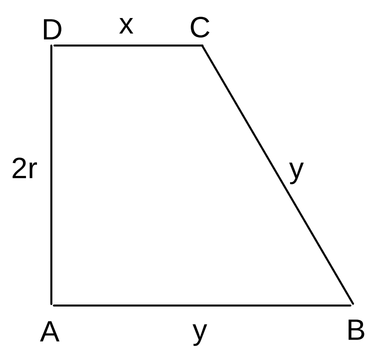
Fase II: Elección de las incógnitas

Sea:

$$x=\overline{DC}\quad,\quad y=\overline{AB}$$

Gráfico 52

Incógnitas del problema III



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Entonces la condición del problema se escribe:

$$\frac{x+y}{2}\cdot 2r=k$$

o sea:

$$x + y = \frac{k}{r}.$$

Por el teorema de Pitágoras aplicado al triángulo rectángulo de hipotenusa BC, resulta:

$$4r^2 + (y - x)^2 = y^2$$

o sea:

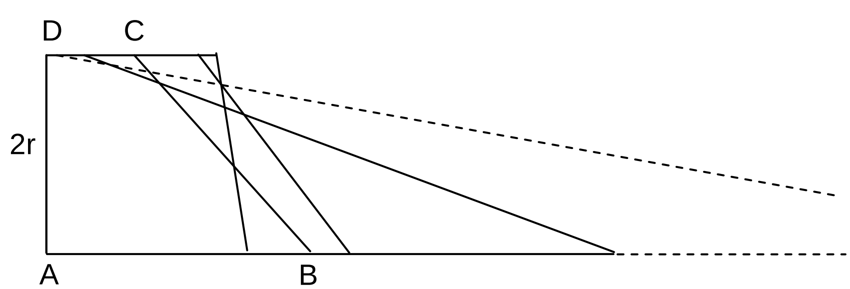
$$x^2 - 2xy + 4r^2 = 0.$$

Fase III: limitación de las incógnitas

Las incógnitas están sujetas a las siguientes limitaciones geométricas. El trapecio rectángulo ABCD es cualquiera de los infinitos trapecios que se muestran a continuación:

Gráfico 53

Variabilidad de la figura del problema III



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Entre ellos se encuentra aquel que satisface a la relación del problema por cierto valor del parámetro y que por supuesto varí con el valor del parámetro mismo.

Una "trapecio" al límite se da por C ≡ D y AB que se vuelve infinito:

Gráfico 54

Primera figura límite del problema III

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

La incógnita x asume el valor 0 y la y no tiene valor real:

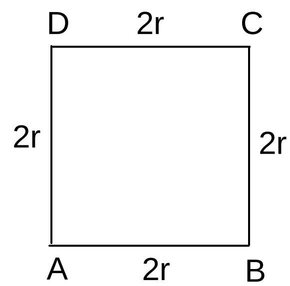
$$x = 0 \quad , \quad y \to +\infty$$

y por ende, la condición del problema pierde de sentido.

Otro "trapecio" al límite se da por $|CD| = 2r$ y AB que se vuelve también igual a 2r:

Gráfico 55

Segunda figura límite del problema III



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Las incógnitas asumen los valores:

$$x = 2r \quad , \quad y = 2r.$$

Nota. Los valores límite x = 0 y $y \to +\infty$ no se aceptan porque la relación asignada:

$$x + y = \frac{k}{r}$$

pierde de sentido algebraico.

En cambio, los valores límite x = 2r y y = 2r se aceptan porque la relación asignada

$$x + y = \frac{k}{r}$$

se vuelve:

$$4r^2 = k$$

sin perder de sentido algebraico.

Fase IV: Sistema algebraico paramétrico condicionado

El sistema es:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 4r^2 = 0 \\ x + y = \dfrac{k}{r} \\ 0 < x \leq 2r, y \geq 2r, k > 0 \end{cases}$$

cuyo análisis se resume en el cuadro siguiente:

Cuadro 14

Resumen del análisis del modelo algebraico del problema III

$0 < k < 2\sqrt{3}r^2$	ninguna solución
$k = 2\sqrt{3}r^2$	la solución ordinaria doble $(\frac{2}{\sqrt{3}}r, \frac{4}{\sqrt{3}}r)$
$2\sqrt{3}r^2 < k < 4r^2$	dos soluciones ordinarias simples
$k = 4r^2$	la solución límite (2r, 2r) y la solución ordinaria simple $(\frac{2}{3}r, \frac{10}{3}r)$.
$k > 4r^2$	una solución

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VI: Análisis del problema

El problema tiene soluciones para los valores del parámetro tales que $k \geq 2\sqrt{3}r^2$.

El cuadro siguiente detalla el análisis:

Cuadro 15

Resumen del análisis del problema III

$0 < k < 2\sqrt{3}r^2$	no existe un trapecio ABCD que cumpla con la condición
$k = 2\sqrt{3}r^2$	el trapecio ABCD con $\lvert DC \rvert = \frac{2}{\sqrt{3}}$ r y $\lvert AB \rvert = \frac{4}{\sqrt{3}}$ r
$2\sqrt{3}r^2 < k < 4r^2$	existen dos trapecios que cumplen con la condición
$k = 4r^2$	el cuadrado ABCD con $\lvert DC \rvert = 2r$ y $\lvert AB \rvert = 2r$, y el trapecio ABCD con $\lvert DC \rvert = \frac{2}{3}$ r y $\lvert AB \rvert = \frac{10}{3}$ r
$k > 4r^2$	existe sólo un trapecio que cumple con la condición

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VII: Elección de un valor paramétrico

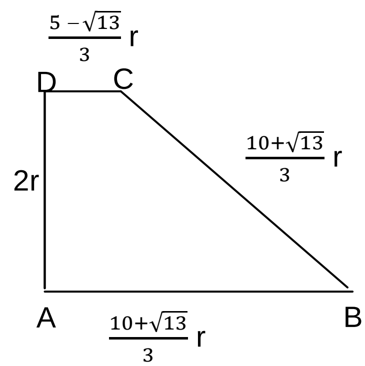
Sea k = $5r^2$. En base al cuadro de análisis existe y es único un trapecio ABCD que cumple con la condición del problema. En efecto se obtiene el sistema condicionado:

$$\begin{cases} x^2 - 2xy + 4r^2 = 0 \\ x + y = 5r \\ 0 < x \leq 2, y \geq 2 \end{cases}$$

que admite la única solución $\left(\frac{5-\sqrt{13}}{3}\text{ r}, \frac{10+\sqrt{13}}{3}\text{ r}\right)$. Por tanto, al valor del parámetro k = $5r^2$ corresponde el siguiente trapecio:

Gráfico 56

Figura del problema III por un valor elegido del parámetro



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Fase VIII: Elección de una figura

Sea $|DC|$ = r. Averiguar si existe y cuál es el valor del parámetro k que corresponde.

Sustituyendo x = r en la ecuación $x^2 - 2xy + 4 = 0$, resulta:

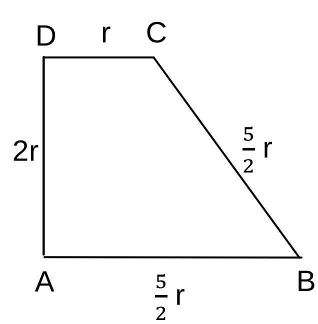
$$y = \frac{5}{2} r.$$

Por ende, se busca el valor del parámetro k al cual corresponda la solución:

$(r, \frac{5}{2} r)$.

Gráfico 57

Figura elegida del problema III



Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

De la condición x + y = $\frac{k}{r}$, resulta:

$$k = \frac{7}{2} r^2.$$

Como $2\sqrt{3}\ r^2 < \frac{7}{2} < 4r^2$, según el cuadro de análisis hay dos trapecios que corresponden al valor del parámetro $k = \frac{7}{2} r^2$, de los cuales uno es el elegido.

Nota. El siguiente es un listado de problemas geométricos paramétricos para analizar.

I. Inscribir en una semicircunferencia de radio r (parámetro de construcción) un rectángulo de perímetro 2kr (k > 0 parámetro de análisis).

II. Determinar sobre el arco $\widehat{AB}$ cuarta parte de una circunferencia de centro O y radio 2r, (parámetro de construcción) un punto P de manera que, si M y N son los puntos medios de los radios OA y OB respectivamente, el cuadrilátero MPNO tenga área igual a pr^2 (p > 0 el parámetro de discusión).

III. Sea A un punto exterior a una circunferencia de centro O y radio r (parámetro de construcción) tal que |OA| = 2r; además sea B el punto en el cual el segmento OA interseca a la circunferencia. Trazar una recta por B de manera que si C es el punto de intersección de la recta con la circunferencia (a más que B) y si D es el punto de intersección de la recta con la perpendicular por A a la recta OA, resulte |CD|= kr (k > 0 parámetro de análisis).

IV. Con centro en el extremo A de un segmento AB de medida d (parámetro de construcción), trazar una circunferencia de manera que, si C y D son los puntos de contacto de las tangentes a la circunferencia por B, el área del cuadrilátero ACBD sea igual a kr^2 (r parámetro de construcción y k parámetro de análisis).

V. El triángulo isósceles ABC tiene la base BC y la altura relativa AH iguales a 2a (a parámetro de construcción). Si M es el punto medio del lado AB y M' su proyección sobre la base, determinar sobre AC un punto P tal que , si P' es su proyección sobre la base, la razón entre el área del trapecio PP'M'M y la del triángulo ABC sea igual a k (k parámetro de análisis).

VI. Sobre la diagonal BD del cuadrado ABCD de lado a (a parámetro de construcción) determinar un punto P de modo que la suma de los cuadrados de sus distancias del vértice A y del lado BC sea igual a ka^2 (k parámetro de análisis).

VII. El punto C del segmento AB lo divide en dos partes que miden a y 3a (a parámetro de construcción). Se determine un ángulo recto de vértice C y con los lados en el mismo semiplano de borde la recta AB tal que si H e I son las proyecciones ortogonales de A y B, respectivamente, sobre los lados del ángulo recto, la razón entre el área del cuadrilátero ABIH y la del cuadrado de lado AB sea igual a $\frac{13}{16}$ k (k parámetro de análisis).

VIII. Sean ABC un triángulo equilátero de lado l (l parámetro de construcción) y AD una altura. Se determinen dos segmentos iguales AP y CQ sobre los lados AB y CA respectivamente, en modo que la razón entre el área del triángulo QPD y la del triángulo ABC sea igual a k (k parámetro de análisis).

IX. Sea ABC un triángulo rectángulo de catetos |AB| = 2a y |AC| = a (a parámetro de construcción). Sobre la hipotenusa BC se determine un punto P de manera que si D y E son los puntos de intersección de la perpendicular por P al lado AB con AB mismo y con la paralela por C al lado AB respectivamente, la razón entre la suma de las áreas de los triángulos CEP y PDB y la del triángulo ABC sea igual a p (p parámetro de análisis).

X. Calcular los dos catetos del triángulo rectángulo ABC con hipotenusa |BC| = 2a (a parámetro de construcción) sabiendo que la suma de los cuadrados de las medianas relativas a los catetos y el cuadrado de la altura relativa a la hipotenusa es sa^2 (s parámetro de análisis).)

CAPÍTULO III

MARCO HIPOTÉTICO

3.1 HIPÓTESIS

El uso de la modelización algebraica y del método gráfico cartesiano en el análisis de un problema geométrico paramétrico, mejora el nivel de destrezas matemáticas de los docentes.

La hipótesis se basa en el hecho que, como ya se mostró anteriormente, el análisis de los problemas geométricos paramétricos conducidos en la forma que se ha descrito en los ejemplos, envuelve los cinco aspectos del aprendizaje examinados en el marco teórico, esto es:

- aprendizaje conceptual
- aprendizaje algorítmico
- aprendizaje estratégico
- aprendizaje comunicativo
- aprendizaje representativo

lo que aumentaría las destrezas matemáticas de los docentes.

3.2 OPERACIONALIZACIÓN CONCEPTUAL

Las variables que se toman en cuenta son:

- la variable independiente:

Uso de la modelización algebraica y del método gráfico

que es la forma en que se utilizan el álgebra y la geometría cartesiana para establecer estrategias de solución a través de la interpretación geométrica;

- la variable dependiente:

Desarrollo de destrezas matemáticas de los docentes

que es la forma en que los docentes demuestran su capacidad de entender, modelar, interpretar y analizar los sistemas algebraicos paramétricos condicionados y los problemas geométricos paramétricos.

3.3 OPERACIONALIZACIÓN METODOLÓGICA

Cuadro 22

Definición de las variables y su desprendimiento

Variable	Categorías	Indicadores	Técnicas
Uso de la modelización algebraica y del método gráfico	Conocimiento de los sistemas algebraicos paramétricos condicionados	Analiza y soluciona los sistemas algebraico paramétrico condicionados	Encuesta Test
	Conocimiento de la Geometría Euclidiana	Conoce los teoremas euclidianos.	
	Conocimiento de la Geometría Cartesiana	Conoce la geometría de la recta en el plano cartesiano.	
		Conoce la geometría de las cónicas en el plano cartesiano.	
		Conoce los haces de rectas	

	Interpretación geométrica de un sistema algebraico paramétrico condicionado Estrategias de solución	y de cónicas en el plano cartesiano. Interpreta correctamente los sistemas algebraicos paramétricos condicionados mediante la geometría cartesiana Conoce y aplica en la secuencia correcta las etapas para solucionar los problemas geométricos paramétricos.	
Desarrollo de destrezas de los docentes para solucionar problemas geométricos paramétricos	Comprensión de problemas Modelización del problema	Elabora correctamente la figura correspondiente Aplica convenientemente los teoremas geométricos para el análisis del sistema algebraico paramétrico condicionado.	

	Análisis del modelo algebraico	Conoce y aplica en la secuencia correcta las etapas para el análisis del sistema algebraico paramétrico condicionado.	
	Análisis conclusiva del problema geométrico paramétrico	Traduce correctamente los resultados algebraicos en resultados del problema geométrico paramétrico.	
	Tratamiento de casos especiales	Escoge un valor permitido del parámetro y deduce correctamente la figura que corresponde; viceversa, escoge una figura y determina si existe un valor del parámetro que corresponda.	

Fuente: Síntesis bibliográfica.
Elaborado por: Dra Angélica Urquizo A. y Dr. Baldovino Lamirata Carigli M

CAPÍTULO IV

MARCO METODOLÓGICO

4.1 DISEÑO DE INVESTIGACIÓN

El diseño de investigación ha sido cuasi experimental, por trabajar con grupos ya formados y no elegidos al azar, de profesores de colegio.

4.2 TIPO DE INVESTIGACIÓN

Para alcanzar los objetivos se siguió metodologías de investigación descriptiva y aplicada.

Se utilizó la investigación descriptiva ya que permite conocer sobre los métodos, técnicas y herramientas que conlleva el realizar un análisis didáctico sobre el comportamiento de los docentes en el proceso de adquisición y consolidación de saberes conceptuales y algorítmicos.

Además se utilizó la investigación aplicada por proponer la utilización de los datos obtenidos en ámbitos distintos y más extensos.

4.3 MÉTODOS

Se utilizaron los métodos científico, analítico, sintético, constructivista, por seguir un plan ordenado y finalizado de acciones como seleccionar, formular y delimitar el problema, proponer posibles soluciones, requerir de un marco teórico, formular una hipótesis, recolectar y analizar datos, presentar los resultados, y finalmente por haber aplicado la metodología mayéutica y la pedagogía activa mediante trabajos de grupo, al fin de que los profesores construyan sus propios saberes.

4.4 TÉCNICAS

Se hicieron una encuesta inicial y final, y unos test inicial, intermedio y final.

4.5 INSTRUMENTOS

Se utilizaron cuestionarios.

4.6 PROCESAMIENTO Y TABULACIÓN DE LOS DATOS

Se procesaron los datos recogidos en los cuestionarios de las encuestas inicial y final y se tabularon por frecuencias absoluta y porcentual los resultados de los ensayos etapa por etapa del procedimiento resolutivo.

4.7 POBLACIÓN

La población estuvo formada por los docentes de tres colegios fiscales de bajos recursos económicos de la parroquia Veloz de la ciudad de Riobamba, un aproximado de 25.

4.8 MUESTRA

La muestra estuvo formada por 10 docentes de dos de los tres colegios, que asistieron al taller, no elegidos al azar, por lo que fue una muestra no probabilística.

CAPÍTULO V

ANÁLISIS, INTERPRETACIÓN Y PRESENTACIÓN DE RESULTADOS

5.1 RESULTADOS DE LOS ENSAYOS INICIAL, INTERMEDIO Y FINAL

5.1.1 ENSAYO INICIAL

Se propuso a los profesores que analizaran el siguiente problema geométrico paramétrico:

Sobre el diámetro AB de un círculo de centro O y radio r (parámetro de construcción) se considere el punto medio P del radio OA. Sobre el radio OB se determine el punto Q tal que la cuerda CD que pasa por Q y que es perpendicular al diámetro AB sea tal que:

$$\overline{CP}^2 + \overline{PD}^2 + \overline{DC}^2 = 2(m + \tfrac{1}{4})r^2$$

(m parámetro de análisis).

Se indicaron además ocho fases de desarrollo secuenciales del análisis, eso para organizar el trabajo a los profesores, los resultados se muestran en el capítulo

Fases de análisis del problema

I. *Se traza una figura según los datos del problema.*

II. *Se eligen las dos incógnitas y se determinan dos relaciones entre ellas, siendo una la condición del problema y otra algún teorema conveniente de Geometría Euclidiana (teorema de Pitágoras, teoremas de Euclides, semejanza de triángulos, propiedades de las -figuras geométricas en general).*

III. *Se determinan las limitaciones de las incógnitas por su significado geométrico.*

IV. *Se escribe el sistema paramétrico condicionado que modela al problema geométrico.*

V. Se cumple el análisis del modelo con el método gráfico (haces de cónicas).

VI. Se deducen las soluciones del problema geométrico paramétrico en base al cuadro de análisis del modelo.

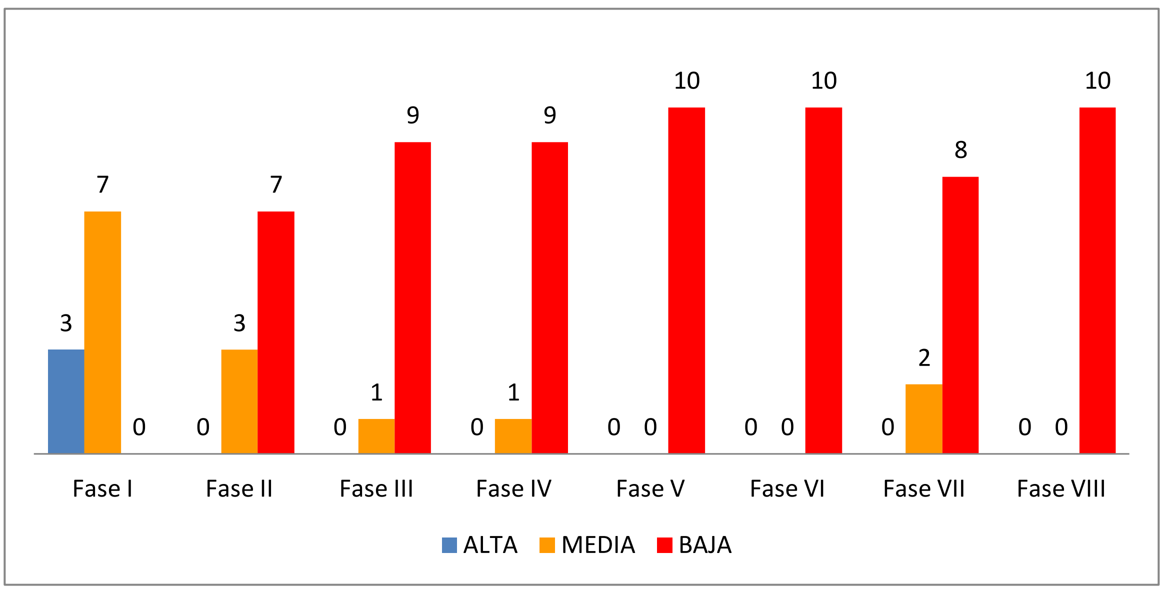
VII. Asignado un valor del parámetro, se determina la figura que le corresponde.

VIII. Asignada una configuración, se determina el (los) valor(es) del parámetro que corresponde (en).

Se resumieron los resultados de habilidad en desarrollar cada fase, según la modalidad ALTA, MEDIA, BAJA, y se obtuvo:

Gráfico 78

Distribución absoluta de los resultados del ensayo inicial



Fuente: Datos del ensayo inicial.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

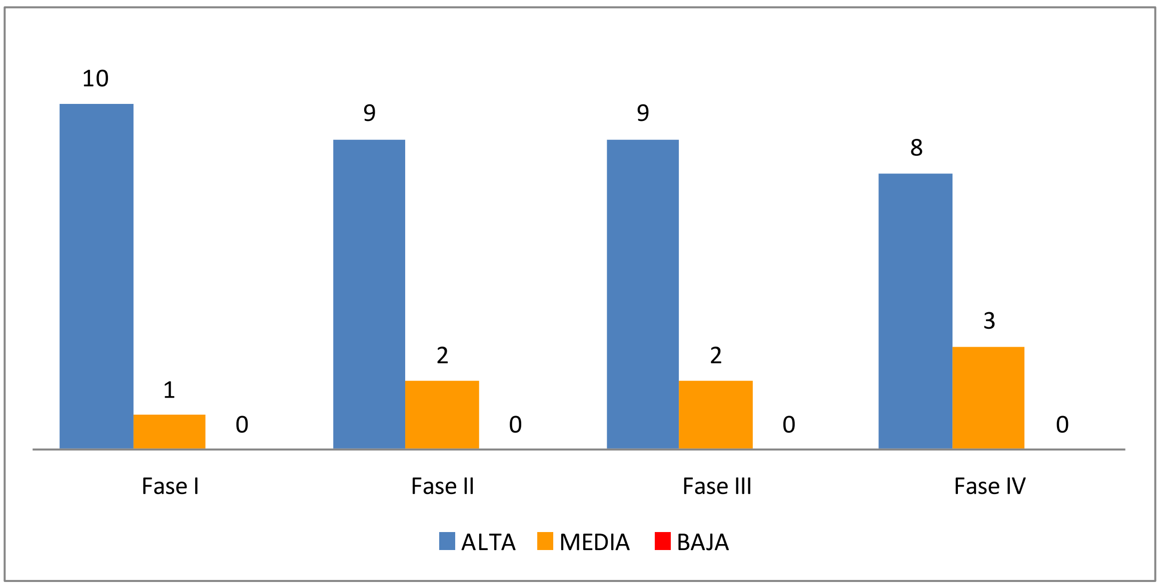
Podemos ver que solamente en la fase I existen 3 docentes que mostraron una habilidad alta y es también la fase en la que mayor número demuestra una habilidad media, en las fases II, III, IV, VII menos de la mitad de docentes muestran una habilidad media y en el resto de las fases no muestran ninguna habilidad.

5.1.2 ENSAYO INTERMEDIO

Los resultados fueron muy buenos, completando satisfactoriamente los diez profesores las cuatro etapas. El siguiente diagrama muestra los resultados de habilidad en desarrollar cada fase, según la modalidad ALTA, MEDIA, BAJA:

Gráfico 79

Distribución absoluta de los resultados del ensayo intermedio



Fuente: Datos del ensayo parcial.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

A diferencia del test inicial, en estas primeras cuatro fases al menos el 80% demuestra una habilidad alta y el resto una habilidad media no existiendo ninguno de los profesores que demuestre una habilidad baja.

5.1.3 ENSAYO FINAL

Acabada la parte V, análisis de un problema geométrico paramétrico modelado algebraicamente y con método gráfico, se les hizo una evaluación final proponiéndoles el análisis del siguiente problema geométrico paramétrico:

Sea dado un semicírculo de diámetro AB, centro O y radio r. Sean C y D los puntos medios de los segmentos OA y OB respectivamente. Inscribir en el semicírculo un trapecio CDEF de base CD y tal que la suma de los cuadrados de sus lados sea proporcional al cuadrado del radio según el coeficiente variable $\frac{m+2}{2}$.

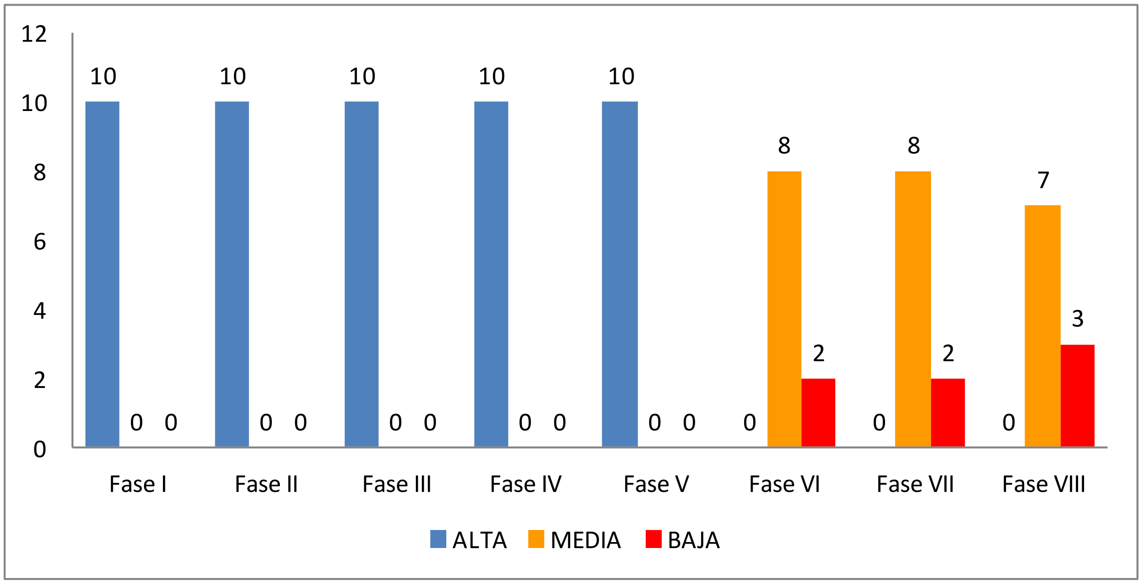
(m parámetro de análisis).

Durante el curso – taller, se había acostumbrado a los profesores a desarrollar el análisis en las ocho etapas mencionadas anteriormente.

Los diez profesores obtuvieron los siguientes resultados de habilidad en desarrollar las ocho fases, según la modalidad ALTA, MEDIA, BAJA:

Gráfico 80

Distribución absoluta de los resultados del ensayo final



Fuente: Datos del ensayo final.
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Vemos que el 100% de los docentes demuestran una habilidad alta en las 5 primeras fases y en las restantes al menos el 70% demuestra habilidad media siendo la última fase en que el 30% demuestra una habilidad baja.

5.2 PRUEBA DE LA HIPÓTESIS

5.2.1 PLANTEAMIENTO FORMAL DE LA HIPÓTESIS

Hipótesis nula H_0:

El uso de la modelización algebraica y del método gráfico cartesiano en el análisis de un problema geométrico paramétrico, no mejora el nivel de destrezas de los docentes.

Hipótesis alternativa H_a:

El uso de la modelización algebraica y del método gráfico cartesiano en el análisis de un problema geométrico paramétrico, mejora el nivel de destrezas de los docentes.

5.2.2 ELECCIÓN DEL NIVEL DE SIGNIFICACIÓN α

α = 0.05 con un nivel de confianza del 95%.

5.2.3 CRITERIO CON EL CUAL SE RECHAZA LA HIPÓTESIS NULA

Rechazar la H_0 si $z_c > 1.64$

donde 1.64 es el valor teórico de z en un ensayo a una cola con un nivel de significación de 0.5

5.2.4 APLICACIÓN DE LA FÓRMULA PARA CALCULAR LOS VALORES Y CONTRASTARLOS CON LOS VALORES TEÓRICOS, DE ACUERDO A LA TÉCNICA ESTADÍSTICA ELEGIDA.

Procesando la información mencionada en el punto anterior, hemos resumido en porcentajes el nivel de destrezas matemáticas de los docentes en los temas tratados teniendo los siguientes datos:

Cuadro 22: Resultados del nivel de destrezas antes y después

Unidades	TEST INICIAL	TEST FINAL
1	18.125 %	75.625 %
2	16.875 %	75 %
3	16.875 %	75.625 %
4	19.375 %	75.625 %
5	20.625 %	76.25 %

6	20 %	76.25 %
7	8.75 %	74.375 %
8	13.125 %	75 %
9	16.875 %	75 %
10	20 %	76.25 %
PROMEDIO	17.062 %	75.5 %

Fuente: Gráfico 79, 80
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Se aplica la fórmula de puntuación z para proporciones:

$$z_c = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{n_1} + \frac{p_2 q_2}{n_2}}}$$

donde:

p_1 es el porcentaje de rendimiento alto y n_1 es el número de docentes en el test final,

p_2 es el porcentaje de rendimiento alto y n_2 es el número de docentes en el test inicial:

$$q_1 = 1 - p_1$$

$$q_2 = 1 - p_2$$

Reemplazando los valores, resulta:

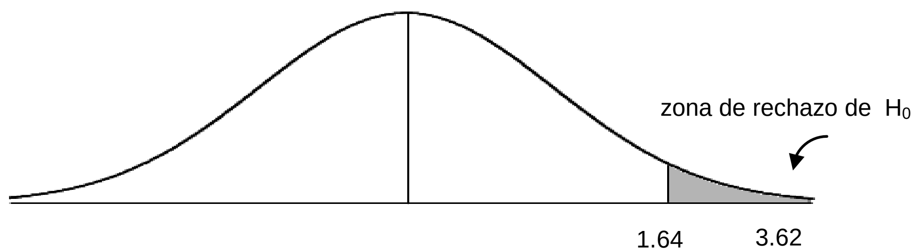
$$z_c = \frac{0.755 - 0.17}{\sqrt{\frac{0.755 \cdot 0.245}{10} + \frac{0.17 \cdot 0.83}{10}}} = 3.24$$

5.2.5 DECISIÓN A TOMAR DE ACUERDO A LOS VALORES CALCULADOS Y TEÓRICOS.

Como 3. 24 > 1.64, se rechaza la H_0 y se acepta la Ha o sea la hipótesis de investigación, esto es, el uso de la modelización algebraica y del método gráfico cartesiano en el análisis de un problema geométrico paramétrico, mejora el nivel de destrezas de los docentes.

Gráfico 81

Interpretación gráfica de la prueba de diferencia de proporciones



Fuente: Resultados de la prueba de hipótesis
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

5.3 ENCUESTA FINAL

Finalmente, se hizo una encuesta a los diez profesores que habían desarrollado la prueba. En la encuesta constan las cinco preguntas siguientes:

1. El método gráfico para el análisis del sistema paramétrico condicionado que modela al problema geométrico, ¿lo considera eficaz?

Respuestas:

SI	NO
10	0

2. ¿Lo considera complejo?

Respuestas:

SI	NO
6	4

3. ¿Lo considera un procedimiento argumentado (no memorístico)?

Respuestas:

SÍ	NO
10	0

4. ¿Considera que el esfuerzo de analizar un problema geométrico paramétrico mediante modelización algebraica y método gráfico debido a su complejidad conceptual, algorítmica y representativa, consolida sus habilidades matemáticas?

Respuestas:

SI	NO
10	0

5 El tema "Análisis de un problema geométrico paramétrico" no consta en el Programa de Matemática para Bachillerato en Ecuador. Si dependiera de usted, ¿lo introduciría? ¿Por qué?

Respuestas:

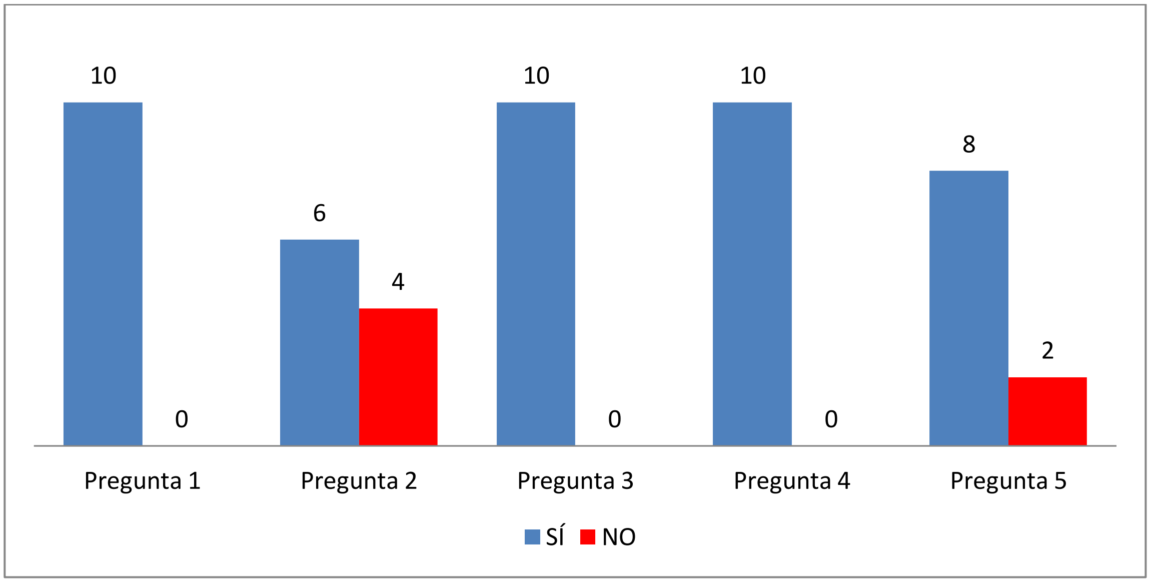
SI	NO
8	2

Todas las respuestas positivas se motivaron porque así se desarrollarían también las habilidades matemáticas de sus estudiantes.

Las respuestas negativas se debieron a la falta de tiempo para tratar satisfactoriamente el tema y a la complejidad del método.

Gráfico 82

Distribución absoluta de los resultados de la encuesta final



Fuente: Datos de la encuesta final
Elaborado por: Dr. Baldovino Lamirata Carigli M.

Vemos que el 100% de los docentes considera el método eficaz para el análisis, argumentado y que consolida las habilidades matemáticas de los profesores. El 60% admite che el método es complejo y sin embargo el 80% estaría dispuesto a introducirlo en el Programa de Matemática para Bachillerato.

CAPÍTULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES

- Como la prueba de hipótesis corrobora largamente la hipótesis de investigación, esto es, que el uso de la modelización algebraica y del método gráfico cartesiano en el análisis de un problema geométrico paramétrico, mejora el nivel de destrezas de los docentes, se concluye que el tema matemático sí debería introducirse en el programa de Matemática de Bachillerato.

- Como aparece claramente de la encuesta final, el esfuerzo intelectual para analizar un problema geométrico paramétrico mediante modelización algebraica y método gráfico debido a su complejidad conceptual, algorítmica y representativa, consolida las habilidades matemáticas, y por eso, en su mayoría los profesores estarían dispuestos a introducir el tema en el programa.

- La complejidad del método y el tiempo que se requiere para desarrollar el tema en su totalidad, son aspectos negativos que hay que tomar en cuenta y solucionarlos de alguna manera.

- Finalmente, cabe señalar que los objetivos del trabajo se han cumplido en su totalidad, come se evidencia también en la propuesta.

6.2 RECOMENDACIONES

Por lo tanto, se recomienda a las autoridades académicas nacionales que redactan los programas de Matemática de Bachillerato de:

- Introducir el tema "Análisis de los problemas geométricos paramétricos mediante modelización algebraica y método gráfico" desarollándolo a lo largo de los tres años de Bachillerato: por un lado eso permite a docentes y estudiantes de adueñarse gradualmente de las distintas partes del tema, lo que alivia la complejidad, y por otro lado eso brinda el tiempo suficiente a su aprensión.
- Organizar y realizar los correspondientes cursos de capacitación a los docentes de Matemática de Bachillerato;
- Encomendar a las autoridades de las instituciones de Educación Media del País el seguimiento a los docentes que tienen a su cargo, de que cumplan con el dictado del tema.

CAPÍTULO VII

PROPUESTA

LOS PROBLEMAS GEOMÉTRICOS PARAMÉTRICOS MODELADOS ALGEBRAICAMENTE Y ANALIZADOS GRÁFICAMENTE.

7.1 JUSTIFICACIÓN

Desde siempre la Matemática opera en dos frentes: por un lado se dedica a resolver problemas y contestar a las grandes preguntas que el ser humano hace cerca de la realidad que lo rodea y por otro lado, al desarrollarse autónomamente, pone fascinantes interrogaciones sobre el alcance, el sentido y la consistencia de sus propias construcciones culturales.

Hoy en día estas dos actividades se han acentuado: la primera, por la mayor capacidad de interpretar y prever los fenómenos naturales, económicos y sociales en general, que la Matemática ha adquirido, y que la conduce a recoger y valorizar los procesos deductivos como también los inductivos; la segunda, por el desarrollo del proceso de formalización, en correspondencia mutua con la Lógica y la Informática.

Son dos empujes distintos que, juntos, provocan el progreso del pensamiento matemático.

Coherentemente con eso, el docente de Matemática tiene que moverse por dos distintas direcciones: por un lado, matematizar la realidad exterior, y por otro, simbolizar y formalizar las propias herramientas; direcciones que confluyen en un único resultado: el saber, el saber hacer y el saber ser de los jóvenes.

En efecto, el estudio de la Matemática:

- desarrolla las habilidades intuitivas y lógicas;
- educa a los procedimientos heurísticos, como también a los de abstracción y formalización:
- ejercita a razonar inductiva y deductivamente;

- promueve las actitudes analíticas y sintéticas, determinando así en los jóvenes el hábito de la concisión y precisión de lenguaje, el cuidado de la coherencia argumentativa y el placer en la búsqueda de la verdad.

Por lo tanto con esta propuesta se espera facilitar el conocimiento de los problemas geométricos paramétricos y la conducción de su análisis, por ser el análisis mismo un instrumento notable para el dominio de las Geometrías Euclidiana y Analítica y para el desarrollo del pensamiento lógico y matemático en general.

7.2 OBJETIVOS

7.2.1 OBJETIVO GENERAL

Elaborar una metodología que permita lograr el análisis de un problema geométrico paramétrico de forma eficaz y eficiente.

7.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Se plantean objetivos de tipo cognitivo y metodológico.
Los objetivos cognitivos son conceptuales y operativos.
Los objetivos conceptuales procuran que los (las) docentes amplíen y profundicen los conceptos, las propiedades y las estructuras fundamentales del Álgebra, de la Geometría Sintética y de la Analítica.
Los objetivos operativos plantean que los (las) docentes fortalezcan su capacidad de:

- Utilizar el simbolismo y el cálculo algebraico sintáctica y semánticamente;
- Utilizar los haces de rectas y de cónicas para analizar problemas geométricos paramétricos;

- Reconocer una cónica mediante su ecuación cartesiana general y determinar la posición recíproca entre cónicas y rectas y entre cónicas y cónicas, y así fortalecer el conocimiento de la Teoría de las Cónicas;
- Reconocer un haz de cónicas mediante su ecuación cartesiana y así fortalecer el conocimiento de la Teoría de los Haces de Cónicas;
- Discutir con método gráfico-cartesiano un sistema algebraico condicionado respecto a un parámetro, y así fortalecer la habilidad en discutir sistemas algebraicos paramétricos con vínculos;
- Discutir un problema geométrico paramétrico y así fortalecer la habilidad en discutir problemas con parámetro de Geometría Euclidiana y ejercitarse en la metodología de enseñanza por problemas.

Los objetivos metodológicos, que después serán los de los docentes mismos hacia sus estudiantes, procuran que los (las) docentes, en la concepción de la formación permanente típica de la sociedad del conocimiento, procuren:

- Estimular su actitud crítica, que se consigue por el ejercicio a la reflexión, de practicar durante las clases con la metodología por problemas;
- Estimular su actitud racional, que se consigue por el ejercicio a la argumentación y la coherencia, de practicar durante las clases con la metodología por problemas;
- Estimular su actitud creativa, que se consigue por el ejercicio a la búsqueda de soluciones alternativas de situaciones problemáticas, de practicar durante las clases con la metodología por problemas;
- Estimular su actitud comunicativa, que se consigue por el ejercicio a la expresión rigurosa y mesurada, de practicar durante las clases.

7.3 DESCRIPCIÓN DE LA PROPUESTA

7.3.1 BENEFICIARIOS

Profesores de Bachillerato del área de Matemática de los Colegios Fiscales Amelia Gallegos y Milton Reyes de la Ciudad de Riobamba

7.3.2 CONTENIDO

Consta de los siguientes temas, que fueron abordados en el marco teórico:

1. Resumen sobre las cónicas como curvas del segundo orden.
2. Haces de cónicas.
3. Sistemas algebraicos paramétricos condicionados.
4. Ecuaciones de segundo orden paramétricas condicionadas tratadas como sistemas.
5. Análisis de los problemas geométricos paramétricos.

7.3.3 METODOLOGÍA

Exposiciones magistrales conducidas con método mayéutico y momentos de pedagogía activa mediante trabajos de grupo para la consolidación y aplicación de los tópicos tratados.

7.3.4 OPERATIVIDAD

Se hizo un curso – taller para los docentes, durante diecisiete semanas con encuentros de dos horas semanales, dividido en cinco partes:

I. Repaso sobre cónicas
II. Determinación del tipo de cónica dada su ecuación
III. Haces de rectas y de cónicas
IV. Análisis de un sistema algebraico paramétrico condicionado con método gráfico (con haces de rectas y de cónicas)
V. Análisis de un problema geométrico paramétrico modelado algebraicamente y con método gráfico (con haces de rectas y de cónicas)

Las actividades fueron como se describe a continuación:

En el primer encuentro se introdujo el curso justificándolo, presentando los objetivos, haciendo una descripción sumaria de los contenidos. Luego se hizo un test inicial sobre el análisis de un problema geométrico paramétrico.

En el segundo encuentro se resumió la parábola en el plano cartesiano, recordando las fórmulas que más se emplean. Luego los profesores se dividieron en pequeños grupos y desarrollaron unas actividades relativas al tema.

En el tercer encuentro se trató la posición mutua entre una parábola y una recta, comprendido el caso de tangencia. Siguieron actividades relativas al tema.

En el cuarto encuentro se resumió la circunferencia en el plano cartesiano, recordando las fórmulas que más se emplean, se trató la posición mutua entre una circunferencia y una recta, comprendido el caso de tangencia. Siguieron actividades relativas al tema.

En el quinto encuentro se resumió la elipse en el plano cartesiano, recordando las fórmulas que más se emplean, se trató la posición mutua entre una elipse y una recta, comprendido el caso de tangencia. Siguieron actividades relativas al tema.

En el sexto encuentro se resumió la hipérbola en el plano cartesiano, recordando las fórmulas que más se emplean, se trató la posición mutua entre una hipérbola y una recta, comprendido el caso de tangencia. Siguieron actividades relativas al tema.

En el séptimo encuentro se estudiaron las cónicas en general a partir de su ecuación: cónicas propias e impropias, y su identificación; eso para emplear los resultados en el análisis gráfico de los sistemas paramétricos condicionados.

En el octavo encuentro se estudiaron los haces de rectas, propios e impropios, a partir de su ecuación con dos parámetros y con un parámetro. Siguieron actividades relativas al tema.

En el noveno encuentro se estudiaron los haces de parábolas, diferenciándolos por tipo, y como encontrar el eje radical y la parábola impropia de un haz, a partir de su ecuación con dos parámetros y con un parámetro. Siguieron actividades relativas al tema.

En el décimo encuentro se estudiaron los haces de circunferencias, diferenciándolos por tipo: hiperbólico, parabólico, elíptico, y como encontrar el eje radical y el eje central de un haz, a partir de su ecuación con dos parámetros y con un parámetro. Siguieron actividades relativas al tema.

En el onceavo encuentro se estudiaron los haces de elipses concéntricas y los haces de hipérbolas concéntricas, no siendo necesario al análisis de los problemas geométricos paramétricos el caso general de los haces de elipses y de hipérbolas.

En el doceavo encuentro se empezó a estudiar los sistemas algebraicos paramétricos condicionados, limitando el tratamiento a los de segundo grado. Estos sistemas son la modelación algebraica de los problemas geométricos paramétricos. El estudio fue afianzado por una intensa actividad de ejemplificación de su análisis.

En el treceavo encuentro se prosiguió el estudio de los sistemas algebraicos paramétricos condicionados.

En el catorceavo se hizo una prueba parcial sobre el análisis de los sistemas algebraicos paramétricos condicionados, que fue un éxito para los profesores.

En el quinceavo y decimosexto encuentros se estudiaron los problemas geométricos paramétricos identificando las etapas de su análisis desarrollando una intensa actividad de ejemplificación de su análisis.

Finalmente en el decimoséptimo encuentro se hizo una prueba final sobre el análisis de los problemas geométricos paramétricos, que también se pudo considerar un éxito para los profesores, estando a sus conocimientos iniciales del tema. Se concluyó el taller con una encuesta final sobre lo que los profesores opinaban acerca del tema *El análisis de los problemas geométricos paramétricos a través de modelización algebraica y método gráfico*. Las opiniones fueron favorables, pese a la dificultad objetiva del tema, por desarrollar su estudio habilidades matemáticas notables.

7.3.5 RECURSOS HUMANOS, FÍSICOS Y TÉCNICOS

7.3.5.1 RECURSOS HUMANOS:

Doctor Baldovino Lamirata Carigli M, 10 docentes.

7.3.5.2 RECURSOS FÍSICOS:

Aula y Centro de Cómputo del Colegio Amelia Gallegos

7.3.5.2 RECURSOS TÉCNICOS:

Software, cámara fotográfica

BIBLIOGRAFÍA

1.- BRANTES, P. y otros (2002), *"La resolución de problemas en Matemáticas"*. Primera edición. Barcelona: GRAO

2.- D' AMORE. B. (2003), *"Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica"*. Primera edición, Bologna: Pitagora

3.- D' AMORE. B. (2003), *"El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matematica de la escuela secundaria".* Primera edición, Cádiz: Epsilon

4.- D' AMORE. B. (2009), *"Giocare con la Matematica"*. Primera edición, Bologna: Archetipolibri,

5.- D' AMORE. B., GODINO J, D., FANDIÑO PINILLA M. I. (2003), *"Competenze in matematica".* Primera edición, Bologna: Pitagora

6.- D' AMORE. B., GODINO J, D., FANDIÑO PINILLA M. I. (2004), *"Cambios de convicciones en futuros profesores de Matemática de la escuela secundaria superior".* Primera edición, Bologna: Epsilon

7.- D' AMORE. B., GODINO J, D., FANDIÑO PINILLA M. I. (2004), *"Competencias y ;Matemática".* Primera edición, Bogotá: Magisterio Editorial

8.- D' AMORE. B, FANDIÑO PINILLA M. I. (2010), *"La Didáctica y la dificultad en matematica".* Primera edición, Bogotá: Magisterio Editorial

9.- FANDIÑO PINILLA M. I. (2006), "Currículo, evaluación y formación docente en Matemática". Primera edición, Bogotá: Magisterio Editorial

10.- FANDIÑO PINILLA M. I. (2010), *"Múltiples aspectos del aprendizaje de la Matemática".* Primera edición, Bogotá: Magisterio Editorial

11.- FERRAUTO, R. (1980), *"Il problema geométrico e la geometría analítica"*. Primera edición, Firenze: Societá editrice Dante Alighieri

12.- FRASCHINI, M. y GRAZZI, G. (2011), *"Geometria analítica e Trigonometria".* Primera edición, Roma: ATLAS

13.- GIUSTI, F. y BARTOLI, E. (1990), *"Geometria analitica e complementi di algebra".* Primera edición, Milano: Tramontana

14.- GODINO J.D., (2010) *"Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica".* Primera edición, Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática

15.- MARASCHINI, W. y PALMA, M. (2006), *"Problemi e strumenti della Matematica".* Primera edición, Torino: PBM Editori

16.- MARTINI I., Sbaragli S (2005), *"Insegnare e apprendere la Matematica"*. Primera edición, Napoli: Tecnodid,

17.- POLYA, G. (1974), "Como plantear y resolver problemas". Primera edición, México: Trillas

18.- RADFORD L., DEMERS S. (2006), *"Comunicazione e apprendimento".* Primera edición, Bologna: Pitagora,

19.- SCOVENA, M. (2012), *"Appunti di Geometria analítica e complementi di Algebra".* Primera edición, Padova: Cedam-Scuola

20.- SPERANZA F. (1997) *"Scritti di Epistemología della Matematica"*. Primera edición, Bologna: Pitagora

21.- URQUIZO A. (2005), *"Cómo realizar la tesis o una investigación"*. Primera edición, Riobamba : Editorial Gráficas Riobamba

22.- ZAN R. (2007) *"Difficoltá in Matematica. Osservare, interpretare, intervenire"*. Primera edición, Milano: Sprinter-Verlag

ANEXOS

ENCUESTA INICIAL A PROFESORES DE MATEMÁTICA DE BACHILLERATO

Indicaciones.

La encuesta consta de seis preguntas a las cuales se solicita contestar en su totalidad.

En caso la respuesta sea afirmativa, se marque la casilla bajo SÍ con una x; en caso la respuesta sea negativa, se marque la casilla bajo NO con una x.

En su formación profesional o en su enseñanza, ¿ha tenido ocasión de:

	SÍ	NO
1. tratar parábolas, circunferencias, elipses e hipérbolas en el plano cartesiano?	☐	☐
2. reconocer el tipo de cónica y reducir su ecuación a forma canónica?	☐	☐
3. solucionar sistemas de segundo grado numéricos condicionados?	☐	☐
4. tratar los haces (familias) de cónicas?	☐	☐
5. analizar sistemas de segundo grado paramétricos condicionados mediante haces de rectas y de cónicas?	☐	☐
6. modelar problemas geométricos paramétricos mediante sistemas de segundo grado paramétricos condicionados?	☐	☐

ENCUESTA FINAL A PROFESORES DE MATEMÁTICA DE BACHILLERATO

Indicaciones.

La encuesta consta de cinco preguntas a las cuales se solicita contestar en su totalidad. En caso la respuesta sea afirmativa, se marque la casilla bajo SÍ con una x; en caso la respuesta sea negativa, se marque la casilla bajo NO con una x.

	SÍ	NO
1. El método gráfico para el análisis del sistema paramétrico condicionado que modela al problema geométrico, ¿lo considera eficaz?	☐	☐
2. ¿Lo considera complejo?	☐	☐
3. ¿Lo considera un procedimiento argumentado (no memorístico)?	☐	☐
4. ¿Considera que el esfuerzo de analizar un problema geométrico paramétrico mediante modelización algebraica y método gráfico debido a su complejidad conceptual, algorítmica y representativa, consolida sus habilidades matemáticas?	☐	☐

5 El tema "Análisis de un problema geométrico paramétrico" no consta en el Programa de Matemática para Bachillerato en Ecuador. Si dependiera de usted, ¿lo introduciría? ¿Por qué?

SÍ ☐ NO ☐

MOMENTOS DEL CURSO