



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ Y SU
APLICACIÓN EN LA DIFUSIÓN DE LA SEÑAL WIFI**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTOR:

ARACELY ANABEL BASTIDAS QUINGALUISA

Riobamba – Ecuador

2024



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ Y SU
APLICACIÓN EN LA DIFUSIÓN DE LA SEÑAL WIFI**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTOR: ARACELY ANABEL BASTIDAS QUINGALUISA

DIRECTOR: ING. ALEX EDUARDO POZO VALDIVIEZO, MSc.

Riobamba – Ecuador

2024

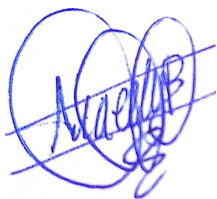
©2024, Aracely Anabel Bastidas Quingaluisa

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, **ARACELY ANABEL BASTIDAS QUINGALUISA**, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 21 de junio de 2024

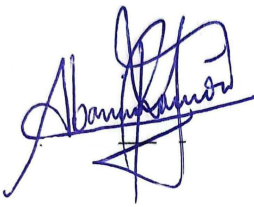

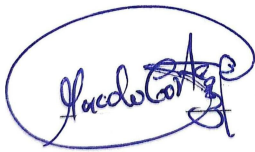


Aracely Anabel Bastidas Quingaluisa

C.I. 0503994170

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; tipo: Proyecto de Investigación, **ESTUDIO DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ Y SU APLICACIÓN EN LA DIFUSIÓN DE LA SEÑAL WIFI**, realizado por la señorita: **ARACELY ANABEL BASTIDAS QUINGALUISA**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
MSc. Ramón Antonio Abancin Ospina. PRESIDENTE DEL TRIBUNAL	 _____	<u>2024-06-21</u>
Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo, MSc. DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR	 _____	<u>2024-06-21</u>
Mat. Luis Marcelo Cortez Bonilla. ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR	 _____	<u>2024-06-21</u>

DEDICATORIA

La finalización de este trabajo se la dedico principalmente a Dios, por darme la fuerza, sabiduría y paciencia para completar este trabajo. A mis padres, Lucia y Wladimir, por su amor incondicional, su apoyo constante, por enseñarme el valor del esfuerzo y la perseverancia, por ser mis pilares de fortaleza y mi fuente de inspiración. Gracias por sus innumerables sacrificios y por creer en mí siempre, por cada palabra de aliento, por cada consejo y por estar siempre a mi lado. Este trabajo es un reflejo de su apoyo y dedicación. A mi hermana, Jazmin y mis sobrinos, Liam y Juanito, por su ánimo y por estar siempre a mi lado, por ser mi mayor fuente de inspiración y por creer en mí en todo momento.

Aracely

AGRADECIMIENTO

Agradezco eternamente a Dios por brindarme sabiduría y salud para terminar este proceso. A mis padres por permanecer siempre a mi lado y confiar en mí y en cada una de las decisiones que he tomado, por su amor incondicional y su apoyo constante que ha sido lo más importante. A mi hermana Jazmín y mis sobrinos Juan y Liam que permanecieron siempre a mi lado brindándome cada día el ánimo de seguir y sus hermosas sonrisas que me alegraban el día. A mis amigos Wilson, Pablo e Iskra, por su constante ánimo y por estar siempre dispuestos a ofrecer una mano amiga, su compañía y apoyo moral han sido invaluable durante los momentos más desafiantes de este proyecto. A mis primos, especialmente a Ronal, Ariel y Lennyn, agradezco cada momento que compartimos y el apoyo que me brindaron, ya sea a través de conversaciones motivadoras, distracciones necesarias o simplemente estando ahí para escucharme. A Eduardo, por sus palabras de aliento y su confianza en mis capacidades me motivaron en los momentos más difíciles. Gracias por creer en mí cuando más lo necesitaba y por ser una fuente constante de inspiración. Finalmente, quiero agradecer a mi director de tesis, Ing. Eduardo Pozo, por su constante apoyo, orientación y valiosas sugerencias a lo largo de todo el proceso de investigación. Su conocimiento y experiencia han sido fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

Aracely

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS	ix
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	x
ÍNDICE DE ANEXOS	xi
RESUMEN	xii
ABSTRACT	xiii
INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO I	
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Objetivos	3
1.2.1. <i>Objetivo General</i>	3
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	3
1.3. Justificación	4
CAPÍTULO II	
2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. Ecuaciones de Maxwell	5
2.2. Deducción de la ecuación de Helmholtz	6
2.3. Espacios Funcionales	10
2.3.1. <i>Espacios de Funciones Continuas</i>	10
2.3.2. <i>Espacios de Lebesgue</i>	12
2.4. Derivada Débil	15
2.5. Espacios de Sobolev	16
2.6. Formulación Variacional	19
2.6.1. <i>Teorema de Lax-Milgram</i>	22
2.7. Análisis del Método de los Elementos Finitos	26
2.7.1. <i>Método de Galerkin</i>	27
2.7.2. <i>Convergencia de la aproximación variacional</i>	30
CAPÍTULO III	

3.	MARCO METODOLÓGICO	32
3.1.	Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación empleadas	32

CAPÍTULO IV

4.	MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS .	33
4.1.	Formulación variacional de la ecuación de Helmholtz	33
4.1.1.	<i>Existencia y unicidad de la solución débil</i>	35
4.2.	Equivalencia con la ecuación	37
4.3.	Discretización mediante el Método de Elementos Finitos	39
4.4.	Simulación de la ecuación de Helmholtz en la región cuadrada	40
4.4.1.	<i>Evaluación de modelo en región circular</i>	43
4.4.2.	<i>Evaluación del error en el espacio representado por la región cuadrada</i>	45
4.5.	Aplicación de la difusión de la señal WiFi	48

CAPÍTULO V

5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	53
5.1.	CONCLUSIONES	53
5.2.	RECOMENDACIONES	53

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 4-1: Análisis del error.	48
---	----

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 4-1: Variación del parámetro A.	41
Ilustración 4-2: Variación del parámetro B.	42
Ilustración 4-3: Variación del parámetro X, Y.	43
Ilustración 4-4: Variación del parámetro A. Región circular.	44
Ilustración 4-5: Variación del parámetro B.	45
Ilustración 4-6: Error $L_x = 0.01, L_y = 0.01$	46
Ilustración 4-7: Error $L_x = 0.05, L_y = 0.05$	46
Ilustración 4-8: Error $L_x = 0.1, L_y = 0.1$	46
Ilustración 4-9: Error $L_x = 0.25, L_y = 0.25$	47
Ilustración 4-10: Error $L_x = 0.5, L_y = 0.5$	47
Ilustración 4-11: Error $L_x = 0.75, L_y = 0.75$	47
Ilustración 4-12: Error $L_x = 1, L_y = 1$	48
Ilustración 4-13: Creación de bordes y obstáculos	49
Ilustración 4-14: Observación del punto de acceso y potencia de la señal	50
Ilustración 4-15: Punto de acceso en la parte inferior izquierda	50
Ilustración 4-16: Punto de acceso en la parte media superior izquierda	51
Ilustración 4-17: Punto de acceso en la parte superior izquierda	52

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A: SOLUCIÓN TEÓRICA DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

ANEXO B: SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

ANEXO C: ANÁLISIS DEL ERROR DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

ANEXO D: APLICACIÓN DE LA DIFUSIÓN DE LA SEÑAL WIFI

RESUMEN

El curso de Análisis Numérico que se imparte en la carrera de Matemática de la ESPOCH, se enfoca en los diferentes métodos de aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales, sin embargo, existen métodos que permiten encontrar la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales más complejas, como es el Método de los Elementos Finitos, misma que nos permite resolver de manera aproximada ecuaciones diferenciales que están asociadas a un problema físico, por lo tanto, el objetivo de este trabajo consistió en estudiar la ecuación de Helmholtz y su discretización vía al método de los elementos finitos, para el análisis de la intensidad de señales inalámbricas. El estudio que se llevó a cabo se enmarca en una metodología de tipo no experimental analítica, con enfoque cuantitativo puesto que se pretende analizar las características de la ecuación de Helmholtz y del método Elementos Finitos, para posteriormente, implementarlo en el software FreeFem++ con el propósito de mostrar perfiles concretos de la propagación de la señal WiFi. Luego de finalizar este trabajo de investigación curricular, se concluye que mediante el estudio de la existencia y unicidad de soluciones débiles de la ecuación de Helmholtz mediante el teorema de Lax-Milgram, no se cumple para cualquier valor de k^2 .

Palabras clave: <ECUACIÓN DE HELMHOLTZ>, <ECUACIONES DE MAXWELL>, <MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS>, <FORMULACIÓN VARIACIONAL>, <WIFI>.

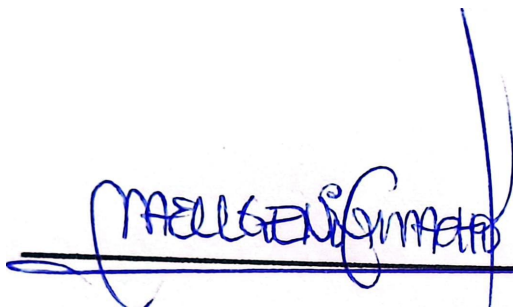


0869-DBRA-UPT-2024

ABSTRACT

The Numerical Analysis course taught in the Mathematics program at Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, ESPOCH focuses on the different methods of approximation of solutions of differential equations. However, there are methods that allow to find the approximation of solutions of more complex partial differential equations, such as the Finite Element Method. This method enables the approximate resolution of differential equations associated with a physical problem. Therefore, the objective of this study was to examine the Helmholtz equation and its discretization via the Finite Element Method for the analysis of wireless signal intensity. The study was conducted within a non-experimental analytical methodology framework with a quantitative approach, since it is intended to analyze the characteristics of the Helmholtz equation and the Finite Element Method, and subsequently implement it in *FreeFem++* software to demonstrate specific profiles of WiFi signal propagation. Upon concluding this curricular research, it was determined that the study of the existence and uniqueness of weak solutions of the Helmholtz equation via the Lax-Milgram theorem does not hold for any value of k^2 .

Keywords: : <HELMHOLTZ EQUATION>, <MAXWELL ECUATIONS>, <FINITE ELEMENT METHOD>, <VARIATIONAL FORMULATION>, <WIF>.



Lcda. María Eugenia Camacho, M.Sc.

060160959-7

INTRODUCCIÓN

El WiFi fue inventado y lanzado por primera vez en 1997 y en la actualidad, cada vez más personas dependen del internet para llevar a cabo sus actividades diarias, lo cual realizan desde dispositivos electrónicos conectados a una red inalámbrica o WiFi. Uno de los problemas más comunes hoy en día es la señal WIFI debido a que se no se puede confiar en una señal constante, ya que en el ambiente existen diferentes obstáculos que no permiten propagar las ondas del router.

Las redes inalámbricas son consideradas radiaciones electromagnéticas en forma de ondas, las cuales pueden ser modeladas por varias ecuaciones en derivadas parciales que involucran a las magnitudes físicas (fuerza) y a sus variaciones espaciales y temporales. En particular se suele utilizar la ecuación de Helmholtz en los problemas de propagación o difusión de ondas.

La ecuación de Helmholtz $-\Delta u - k^2 u = f$, permite el estudio de las ondas electromagnéticas, conjuntamente con las herramientas matemáticas, se llega a un estudio más sofisticado.

Al realizar la deducción de la ecuación de Helmholtz, se aborda la cuestión de existencia y unicidad de la solución a partir de la formulación variacional, que es una forma alternativa para escribir las ecuaciones en forma integral, en el cual se precisa la noción de solución clásica y de solución débil, se establece la existencia y unicidad de la solución débil, se analiza la regularidad de la solución y finalmente se recupera la solución clásica.

El Método de los Elementos Finitos es uno de los métodos numéricos más utilizados para la solución de ecuaciones diferenciales. Este método se utiliza en la discretización de la ecuación de Helmholtz, que comienza realizando una formulación variacional que transforma el problema original en uno de minimización, además, trata de dar respuesta a las cuestiones de existencia y unicidad de la solución aproximada.

El presente trabajo tiene como finalidad desarrollar una investigación teórica y práctica sobre la deducción de la ecuación de Helmholtz, su discretización con el método de

elementos finitos y su aplicación en la difusión de una señal inalámbrica, analizando la intensidad de la misma en una región acotada. El objetivo que se quiere cumplir es que mediante la utilización de las ecuaciones de Maxwell, se realice el estudio de la ecuación de Helmholtz y sus aplicaciones, la discretización de la ecuación de Helmholtz a través del Método de los Elementos Finitos y el uso del software *FreeFem++* para probar el modelo en diferentes escenarios.

El Trabajo de Integración Curricular está estructurado en cinco capítulos. En el primer capítulo, se introduce el planteamiento del problema que motivó el estudio, así como los objetivos específicos que lo orientan. El segundo capítulo se centra en aspectos teóricos, incluyendo la deducción de la ecuación de Helmholtz y el fundamento teórico del Método de los Elementos Finitos. En el tercer capítulo, se describe el marco metodológico empleado, detallando las herramientas y técnicas utilizadas durante la investigación.

El cuarto capítulo se dedica a la presentación de los resultados obtenidos, abordando el análisis de la ecuación de Helmholtz, su existencia y unicidad, y la discretización mediante el método de los elementos finitos, aplicado específicamente a la propagación de señales WiFi.

Finalmente, el quinto capítulo concluye el trabajo, resumiendo las principales conclusiones y ofreciendo recomendaciones que podrían ser de interés para estudios futuros relacionadas con el tema tratado.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Dado que el plan de estudios de la carrera de Matemáticas no incluye el estudio de modelos matemáticos y su implementación, se propone realizar una investigación descriptiva y documental de la ecuación de Helmholtz. Esta ecuación implica su resolución numérica mediante el método de elementos finitos, que describe la propagación de la señal Wifi.

En tal virtud, este documento busca proporcionar una descripción de la propagación de la señal de Wifi desde un enfoque matemático. Conforme al campo ocupacional de los graduados de la carrera de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), se reconoce su capacidad para comprender la importancia de la modelización matemática y la implementación de modelos mediante el dominio de conocimientos teóricos.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo General*

Analizar la ecuación de Helmholtz y el método de elementos finitos para una simulación de la intensidad de señales inalámbricas de WiFi mediante su implementación en FreeFem++.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Determinar los fundamentos teóricos que sustentan la ecuación de Helmholtz y el método de elementos finitos.
- Caracterizar los elementos que componen la ecuación de Helmholtz y el método de elementos finitos.

- Establecer relación sistémica entre los elementos que componen la ecuación de Helmholtz y el método de elementos finitos.

1.3. Justificación

En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Ciencias, Carrera de Matemática, no cuenta con material suficiente sobre diferenciación e integración numérica, es decir, solo existen cursos básicos donde se deja por sentado que los conceptos son suficientemente claros para realizar las diferentes aplicaciones, por otra parte, dentro de la materia de Análisis Numérico se estudian diferentes métodos para obtener la solución aproximada de ecuaciones diferenciales, sin embargo, no se aborda el Método de los Elementos Finitos ni sus aplicaciones, es por eso que este trabajo permitirá a los estudiantes de la carrera servir como una guía y material de apoyo de estudio.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentará la ecuación de Helmholtz, la cual se deduce de las ecuaciones de Maxwell y en el resto del documento se utilizará las siguientes notaciones: divergencia ($\nabla \cdot A$), rotacional ($rot(A)$), laplaciano (ΔA).

2.1. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell relacionan los campos eléctricos con los campos magnéticos, las cuales muestran la existencia de ondas electromagnéticas y las presentamos a continuación

$$rot(H) = J + \frac{\partial D}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$rot(E) = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot D = \rho, \quad (2.3)$$

$$\nabla \cdot B = 0. \quad (2.4)$$

Donde:

H es la intensidad del campo magnético.

D es la densidad del campo eléctrico.

J es la densidad de la corriente eléctrica.

E es la intensidad del campo eléctrico.

B es la densidad del flujo magnético.

ρ es la densidad de las cargas existentes.

$rot(H)$ es el rotacional del campo magnético, $rot(E)$ es el rotacional del campo eléctrico, $\nabla \cdot D$ es la divergencia de la densidad del campo eléctrico y $\nabla \cdot B$ es la divergencia de la densidad del flujo magnético.

La ecuación (2.1) se conoce como la Ley del Ampère y describe a una corriente o

flujo eléctrico que cambia a través de una superficie que produce un campo magnético circulante alrededor de una trayectoria limitante de la superficie. La ecuación (2.2) es la Ley de Faraday, esta muestra que el flujo magnético que varía en el tiempo se encuentra relacionado con el campo eléctrico, la ecuación (2.3) representa a la Ley de Gauss para la electricidad, dice que el flujo del campo eléctrico puede atravesar cualquier superficie cerrada y es proporcional a la carga total de la superficie, mientras que la ecuación (2.4) es la Ley de Gauss para el campo magnético y nos indica que el flujo magnético que atraviesa cualquier superficie cerrada es cero.

Además, tenemos relaciones entre las magnitudes físicas que se expresan como:

$$B = \mu H + \mu_0 M, \quad (2.5)$$

$$D = \epsilon E + P, \quad (2.6)$$

$$J = J_c + J_i = \sigma(E + v \times B) + J_i. \quad (2.7)$$

Donde:

μ = permeabilidad magnética

μ_0 = permeabilidad

M = magnetización

ϵ = permitibilidad

2.2. Deducción de la ecuación de Helmholtz

La ecuación de Helmholtz se deduce a partir de las ecuaciones de Maxwell (2.1 - 2.4), para esto suponemos que la velocidad es nula, es decir, $v = 0$, no hay polarización, $P = 0$, no hay magnetización, $M = 0$, y así vemos que las ecuación (2.5-2.7) se reducen a $B = \mu H, J = \sigma E + J_i$ y $D = \epsilon E$. Reemplazando esta expresión en (2.2) vemos que:

$$\text{rot}(E) = -\mu \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Tomando el rotacional a ambos lados y dividiendo para μ con $\mu \neq 0$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(E) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \text{rot}(H).$$

Utilizando la ecuación (2.1), y las relaciones anteriores, se obtiene:

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(E) \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \left((\sigma E + J_i) + \frac{\partial E}{\partial t} \right)$$

$$\text{rot} \left(\frac{1}{\mu} \text{rot}(E) \right) + \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{\partial J_i}{\partial t}$$

$$\text{rot}(\text{rot}(E)) + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial J_i}{\partial t}. \quad (2.8)$$

Así, utilizando la identidad vectorial ($\text{rot}(\text{rot}(E)) = \nabla(\nabla \cdot E) - \Delta E$) en la ecuación (2.8), arribamos a:

$$\nabla(\nabla \cdot E) - \Delta E + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial J_i}{\partial t}. \quad (2.9)$$

Y como no existe polarización entonces se observa que

$$\nabla \cdot D = \varepsilon \nabla \cdot E.$$

De la ecuación (2.3), vemos que $\rho = \varepsilon \nabla \cdot E$, con lo cual $\nabla(\nabla \cdot E) = 0$ y junto a la ecuación (2.9) arribamos a la ecuación de Helmholtz en forma vectorial.

$$-\Delta E + \mu \sigma \frac{\partial E}{\partial t} + \varepsilon \mu \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu \frac{\partial J_i}{\partial t}. \quad (2.10)$$

La ecuación (2.10) tiene derivadas parciales que dependen del tiempo, por lo cual consideramos soluciones de la forma

$$E(x, t) = U(x) e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Donde notamos que

$$\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega U(x) e^{i\omega t}, \quad (2.12)$$

y

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -w^2 U(x) e^{iwt}. \quad (2.13)$$

Similarmente para J se obtiene:

$$\frac{\partial J}{\partial t} = iwJ(x) e^{iwt}. \quad (2.14)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.12), (2.13) y (2.14) en la ecuación (2.10), vemos que:

$$-\Delta E + \sigma \mu (iwU(x) e^{iwt}) + \varepsilon \mu (-U e^{iwt} w^2) = -\mu (iwJ e^{iwt}). \quad (2.15)$$

Ahora, si (2.11) con respecto a x tenemos:

$$\frac{\partial E}{\partial x} = U''(x) e^{iwt}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} = -U''(x) e^{iwt}. \quad (2.17)$$

A partir de las ecuaciones (2.14), (2.16) y (2.17) vemos que la ecuación (2.15) se expresa como:

$$-E''(x) + E(x)(\sigma \mu iw - \varepsilon \mu w^2) = -\mu iwJ(x),$$

de donde

$$-\Delta E + E(\sigma iw - \varepsilon w^2) = -\mu iw \hat{J}_i. \quad (2.18)$$

A la ecuación (2.18) se denomina ecuación de Helmholtz.

Ahora pasaremos obtener de la ecuación del Helmholtz en forma escalar. Para ello definimos $\tilde{\Omega}$ como una base circular o cuadrática de un dominio y

$$J : \tilde{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(x, y, z) \longmapsto J(x, y, z) = (0, 0, J_3(x, y))$$

Sabemos que $\nabla J = 0$ y que además existen campos magnéticos y eléctricos que con paralelos a $\tilde{\Omega}$ también, $B = 0$, entonces, $rot(B) = 0$, que implica la exista A tal que

$B = -\nabla A$. Así:

$$B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ y } \text{rot}(A) = \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}, \frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}, \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y} \right)$$

$$0 = B = \frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}.$$

con esto arribamos a

$$A = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ A_3 \end{bmatrix}; \quad A_3 = A_3(x, y).$$

Tomando en cuenta que λ es una constante arbitraria por lo cual, podemos decir que $\lambda = 0$, obteniendo así

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A_3 \end{bmatrix}; \quad A_3 = A_3(x, y).$$

Como $B = \text{rot}(A)$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial 0}{\partial z} \\ \frac{\partial 0}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x} \\ \frac{\partial z}{\partial 0} - \frac{\partial x}{\partial 0} \\ \frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial y}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial A_3}{\partial y} \\ -\frac{\partial A_3}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$\text{rot}(B) = \begin{bmatrix} \frac{\partial 0}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial A_3}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial x} (0) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial A_3}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_3}{\partial x} \right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\Delta A_3 \end{bmatrix}$$

Donde vemos que:

$$-\text{rot}(\text{rot}A_3) - (i\sigma - \epsilon w^2)A_3 = J_3$$

$$-(\text{rotrot}A)_3 - (i\sigma - \epsilon w^2)A_3 = J_3.$$

De esta manera obtenemos la ecuación de Helmholtz en forma escalar, la cual viene dada por:

$$-\Delta A_3 - (i\sigma - \varepsilon w^2)A_3 = J_3 \quad (2.19)$$

Si fijamos que $k^2 = i\sigma - \varepsilon w^2$

$$-\Delta A_3 - k^2 A_3 = J_3 \quad (2.20)$$

tomando $A_3 = u$ y $J = f$ arribamos a la ecuación

$$-\Delta u - k^2 u = f \quad (2.21)$$

que se conoce como la ecuación escalar de Helmholtz.

2.3. Espacios Funcionales

En esta sección, se introducen varios espacios funcionales clave que facilitarán la comprensión y caracterización de las soluciones débiles de la ecuación de Helmholtz.

2.3.1. Espacios de Funciones Continuas

Sea $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^N$ un multi-índice, se define su tamaño por $|\alpha| = \sum_{k=1}^N \alpha_k$ y sea $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función *suficientemente regular* se define la derivada de orden $|\alpha|$ de f , notada D^α , como

$$D^\alpha f(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_N^{\alpha_n}}(x) \quad (2.22)$$

Gracias a estas notaciones procedemos a definir los siguientes espacios de funciones.

Definición 2.1 (Espacio $C(\Omega)$). El espacio $C(\Omega)$ es el conjunto definido como:

$$C(\Omega) = \{f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua} \}.$$

Provisto de la norma,

$$\|f\| = \sup_{x \in \Omega} |f(x)|, \quad \forall f \in C(\Omega),$$

con la cual es un espacio de Banach.

Definición 2.2 (Espacio $C^k(\Omega)$). El espacio $C^k(\Omega)$ es el conjunto definido como:

$$C^k(\Omega) = \{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua y existe } D^\alpha f \text{ continua para } |\alpha| \leq k \}$$

con norma asociada

$$\| f \|_{C^k} = \sum_{|\alpha| \leq k} \| D^\alpha f \|_\infty$$

con lo cual es un espacio de Banach.

Cabe mencionar, también que la verificación de la completitud de estos espacios normados es clásica y se encuentra esbozada en la Sección 1.4.2 de (Chamorro, D., 2017).

Definición 2.3 (Espacio $C^\infty(\Omega)$). El espacio de funciones infinitamente derivables $C^\infty(\Omega)$ se define como:

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\Omega)$$

En lo sucesivo, será esencial considerar subespacios específicos dentro de los espacios C^k , lo cual nos lleva a introducir la siguiente definición motivada por esta necesidad:

Definición 2.4 (Soporte de una función continua). Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Se define el *soporte* de la función f al conjunto

$$\text{supp}(f) = \overline{\{x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^N : f(x) \neq 0\}}. \quad (2.23)$$

Es importante señalar que, al trabajar con funciones medibles, se debe proceder con precaución al intentar definir el soporte de dichas funciones, ya que podría resultar que el soporte sea vacío. Para el soporte de funciones medibles podemos dirigirnos a la Sección 4.3.1 de (Chamorro, D., 2017).

Con estas nociones precedentes vamos a definir el siguiente espacio de funciones.

Definición 2.5 (Espacio $C_c^\infty(\Omega)$). Definimos el espacio $C_c^\infty(\Omega)$ como:

$$C_c^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} : f \in C^\infty(\Omega) \text{ y } \text{supp}(f) \text{ es compacto} \}$$

Diremos que las funciones que pertenecen a este espacios son funciones *regulares*.

Para comprender mejor esta definición, veamos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1. 2.1. Consideremos la función real de variables reales

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{x^2}{1-x^2}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{caso contrario,} \end{cases}$$

la cual pertenece al espacio $C_c^\infty(\mathbb{R})$ lo que puede verificarse estudiando de forma recursiva las derivadas de f . Mientras que el soporte de la función es el conjunto $\text{supp}(f) = [-1, 1]$.

2.3.2. Espacios de Lebesgue

Dentro de la Teoría de la Medida, los espacios L^p ocupan un lugar destacado por su relevancia. Por ello, en esta subsección, procederemos a introducir estos espacios vectoriales normados.

Definición 2.6 (Espacio de Lebesgue). Sea Ω un subconjunto acotado de \mathbb{R}^N . Sea $1 \leq p \leq \infty$, entonces el espacio L^p se define como:

$$L^p(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } \| f \|_{L^p} < \infty \},$$

donde

$$\| f \|_{L^p} = \begin{cases} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty, \\ \sup_{x \in \Omega} |f(x)| & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

- Para $1 \leq p \leq +\infty$, los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach con la norma $\| \cdot \|_{L^p}$

Los espacios $L^p(\Omega)$ son espacios de Banach con $1 \leq p \leq +\infty$, ya que su norma es $\| \cdot \|_{L^p}$, además, satisface la propiedad de completitud. Para su verificación se recomienda consultar el Capítulo 6 de (Folland, G., 1999).

- Si p y q son números reales, tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con $1 < p < \infty$, se dice que p y q son

exponentes conjugados entre si, entonces:

$$L^q(\Omega, \sigma, \mu) \cong L^p(\Omega, \sigma, \mu)^*$$

Este hecho, puede ser revisado en la Sección 3.1. de (Forastieri, M., 2014).

Definición 2.7 (Espacios L^1_{loc}). Sea Ω un subconjunto abierto de \mathbb{R}^N , entonces el espacio de funciones localmente integrables sobre Ω denotado por $L^1_{loc}(\Omega)$ y definido como:

$$L^1_{loc}(\Omega) = \{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ medible y } \int_K |f(x)| dx < \infty \quad \forall \text{ compacto } K \subseteq \Omega \}.$$

Una función localmente integrable de Lebesgue es una función para la cual la integral es finita, es decir, no es integrable en todo el espacio, más bien en subconjuntos compactos.

En la Sección 4.3.2 de (Chamorro, D., 2017). se muestra que se tiene la inclusión siguiente

$$C_c^\infty(\Omega) \subset L^p(\Omega).$$

Las funciones infinitamente derivables con soporte compacto constituyen la esencia de la teoría de Distribuciones y desempeñan un papel fundamental en el campo del Análisis Matemático.

Propiedades principales

Las propiedades fundamentales de los espacios de Lebesgue incluyen:

1. **Teorema de Convergencia Dominada de Lebesgue:** Consideremos $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, una sucesión de funciones integrables, junto con $f \in L^1(\Omega)$. Las condiciones para la convergencia dominada se cumplen si:

- Para casi todo punto $x \in \Omega$, $f_n(x)$ converge puntualmente a $f(x)$ a medida que n es suficientemente grande, y
- Existe una función $g \in L^1(\Omega)$ tal que, para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y casi todo punto $x \in \Omega$, se verifica que $|f_n(x)| \leq g(x)$.

Bajo estas condiciones, se garantiza que el límite cuando n tiende a infinito de la integral de f_n sobre Ω es igual a la integral de f sobre Ω , es decir,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_n(x) dx = \int_{\Omega} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_{\Omega} f(x) dx.$$

2. **Teorema de Fubini:** Sea $\Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Si

- La función $x \mapsto \int_{\Omega} f(x,y) dy$ pertenece a $L^1(\Omega)$ y
- la función $y \mapsto \int_{\Omega} f(x,y) dx$ pertenece a $L^1(\Omega)$ entonces $f \in L^1(\Omega \times \Omega)$ y se tiene

$$\int_{\Omega \times \Omega} f(x,y) dy = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} f(x,y) dx \right) dy = \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} f(x,y) dy \right) dx.$$

3. **Desigualdad de Holder:** Sean p y q dos números reales que satisfacen $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ y dadas dos funciones medibles f y g en un conjunto Ω entonces se establece que:

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}$$

Esta desigualdad es válida para las funciones f y g que son integrables en Ω , es decir, $f, g \in L^p(\Omega)$ y $L^q(\Omega)$ respectivamente.

4. El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de funciones cuadrado integrables que se encuentran sobre un conjunto Ω , estos espacios constan de todas las funciones medibles $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$, para las cuales si integral es:

$$\|f\|_2 = \left(\int_{\Omega} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

La propiedad distintiva de $L^2(\Omega)$ es que se convierte en un espacio de Hilbert completo con la norma $\|f\|_2$, con esta norma se define un espacio de Hilbert, lo que significa que un espacio normado con un producto interno es completo.

5. **Fórmula de Green:** Sea Ω un conjunto acotado. Sea f una función de $C^1(\overline{\Omega})$, es acotado en el $\overline{\Omega}$ cerrado. Entonces se verifica la fórmula de Green:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) dx = \int_{\partial \Omega} f(x) n_i(x) ds. \quad (2.24)$$

La fórmula de Green, permite estudiar las ecuaciones diferenciales parciales y problemas de contorno, entendiendo la relación entre la solución de una ecuación y su comportamiento en el borde de un dominio.

2.4. Derivada Débil

En esta sección, introduciremos de manera concisa el concepto de derivada débil o distribucional, una herramienta esencial para el estudio de los espacios de Sobolev y la formulación variacional.

La derivada débil representa una generalización de la noción clásica de derivada, permitiendo analizar funciones que no son diferenciables en el sentido tradicional pero que son integrables según Lebesgue. Este enfoque garantiza la existencia de derivadas para una amplia gama de funciones. Además, cuando una función es diferenciable en el sentido convencional y sus derivadas pertenecen a $L^2(\Omega)$, las derivadas clásicas y débiles de dicha función resultan ser equivalentes. Para ello se recomienda leer la Parte 1, Capítulo 3 de (Grubb, G., 2009).

Definición 2.8 (Derivada débil). Sea Ω un abierto de \mathbb{R}^N y sea $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Decimos que f es derivable en el sentido débil si existen funciones g_i localmente integrables sobre Ω , para $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ tales que, para toda función $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$, se tiene

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{D\varphi}{Dx_i} dx = - \int_{\Omega} g_i(x) D^\alpha \varphi(x) dx$$

para cada multi-índice α tal que $|\alpha| = 1$ y para cada $i = 1, \dots, N$.

Además, las derivadas débiles de orden superior se definen de manera similar.

Definición 2.9. Sea $\alpha \in \mathbb{N}^N$ es un multiíndice. Una función $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ tiene derivada débil $D^\alpha f \in L^1_{loc}(\Omega)$ si

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{D\varphi}{Dx_i}(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} f(x) D^\alpha \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega).$$

para cada multi-índice α tal que $|\alpha| \leq m$, $m \in \mathbb{N}$ y para cada $i = 1, \dots, N$.

Consideremos el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2. Consideramos $f \in C(\mathbb{R}) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R})$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x \leq 0. \end{cases}$$

Esta función tiene derivada débil

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

En efecto, notemos que para cualquier función $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, integrando por parte se ve que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\varphi(x)dx &= \int_{-\infty}^0 0\varphi'(x)dx + \int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx = \int_0^{+\infty} x\varphi'(x)dx \\ &= - \int_0^{+\infty} 1\varphi(x)dx = - \int_{-\infty}^0 0\varphi(x)dx - \int_0^{+\infty} \varphi(x)dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)\varphi(x)dx \end{aligned}$$

de donde f' se identifica con $\mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.

2.5. Espacios de Sobolev

Los espacios de Sobolev, son espacios funcionales importantes dentro del ámbito de Análisis Funcional, estos espacios permiten abordar los problemas de las funciones que tienen derivadas que no son necesariamente continuas. Estos espacios permiten trabajar con funciones que tienen derivada débil.

Definición 2.10 (Espacio $H^1(\Omega)$). Sea Ω abierto y acotado de \mathbb{R}^N . El espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$, se define como

$$H^1(\Omega) = \left\{ f \in L^2(\Omega); D^\alpha f \in L^2(\Omega) \quad \forall |\alpha| \leq 1 \right\},$$

provisto del producto escalar

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) D^\alpha g(x) dx,$$

y norma asociada

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} [D^{\alpha} f(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall f \in H^1(\Omega)$$

Además, el espacio $H^1(\Omega)$ es un espacio de Hilbert cuya demostración puede encontrarse en la página 249 de (Evans, L., 1997) cuando $k = 1$ y $p = 2$.

Ejemplo 3. Sea $\Omega =]-1, 1[$. La función $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{1}{2}(|x| + x)$ pertenece al espacio de Sobolev $H^1(\Omega)$. De hecho, mostremos que $f \in L^2(\Omega)$.

$$\begin{aligned} \|f\|^2 &= \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{2}(|x| + x) \right|^2 dx \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{4}(|x| + x)^2 \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{x^2 + 2|x|x + x^2}{4} dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 x^2 + |x|x \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 x^2 dx + \int_{-1}^1 |x|x dx \right) \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

De igual modo, determinemos la derivada débil de f . Para cualquier función $\varphi \in C_0^{\infty}(\Omega)$

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(|x| + x)\varphi'(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 (|x| + x)\varphi'(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^1 |x|\varphi'(x) dx + \int_{-1}^1 x\varphi'(x) dx \right).$$

Luego, tomando en cuenta la definición de la función valor absoluto e integrando por

partes, se sigue que

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(- \int_{-1}^0 x \varphi'(x) dx + \int_0^1 x \varphi'(x) dx + \int_{-1}^1 x \varphi'(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx - \int_{-1}^1 \varphi(x) dx \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx - \int_{-1}^0 \varphi(x) dx - \int_0^1 \varphi(x) dx \right) \\
&= \left(- \int_0^1 \varphi(x) dx + \int_{-1}^0 0 \varphi(x) dx \right)
\end{aligned}$$

por lo que tenemos:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } 0 < x < 1, \\ x & \text{si } -1 < x < 0. \end{cases}$$

verificamos si $f' \in L^2(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\|f'\|^2 &= \int_{-1}^0 |0|^2 dx + \int_0^1 |-1|^2 dx \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Hemos demostrado que $f \in L^2(\Omega)$ y $f' \in L^2(\Omega)$. Por lo tanto, $f \in H^1(\Omega)$, ya que cumple con las condiciones necesarias para pertenecer a este espacio de Sobolev.

Definición 2.11 (Espacio $H_0^1(\Omega)$). Sea Ω abierto y acotado de \mathbb{R}^N con su frontera $\partial\Omega$, entonces

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0\}$$

con norma asociada

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} [D^\alpha f(x)]^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

El espacio $H_0^1(\Omega)$ es un subespacio de $H^1(\Omega)$, su norma es inducida por la norma usual de $H^1(\Omega)$ y debido a que es un espacio de Hilbert, $H_0^1(\Omega)$ también es un espacio de Hilbert. Estos resultados se pueden encontrar en el Capítulo 8 sección 8.3 de (Brézis, H., 2011).

2.6. Formulación Variacional

Las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) constituyen una herramienta esencial en la modelización de fenómenos naturales y procesos físicos. La formulación variacional, también conocida como el método de los elementos finitos, ofrece un marco para el desarrollo de métodos numéricos sofisticados que facilitan la aproximación de soluciones a estas ecuaciones complejas.

Para comprender de mejor manera la formulación variacional, consideramos el siguiente **problema con valores en la frontera**: dada una función $f \in C(\Omega)$, encontrar una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que es solución

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{en } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.25)$$

Definición 2.12. Una solución fuerte o *clásica* al problema (2.25) es definida como una función $u \in C^2(\Omega)$ que, además de anularse en la frontera $\partial\Omega$ del conjunto Ω , cumple punto por punto con la ecuación $-\Delta u(x) = f(x)$.

La búsqueda de soluciones fuertes o *clásicas* es escasamente posible. Por lo tanto, es importante adoptar un enfoque más amplio y flexible al tratar con ecuaciones en derivadas parciales cuando no se consideran las condiciones de contorno. Una técnica eficiente se basa en considerar tanto u como f como *distribuciones*, lo que nos lleva a un marco teórico más generalizado que se encuentra descrito en el Capítulo 4 de (David, C., 2022). Este enfoque nos permite abordar las EDP desde una perspectiva más amplia y adaptable.

Ahora, supongamos que *formalmente* multiplicamos la ecuación diferencial (2.25) por una función arbitraria $v \in C^1(\Omega)$ con $v = 0$ en $\partial\Omega$ e integramos sobre el conjunto Ω :

$$-\int_{\Omega} \Delta u(x) \cdot v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \quad (2.26)$$

Integrando por partes (Fórmula de Green) el primer término del lado izquierdo de la

igualdad (2.26), obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot v(x) ds = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad (2.27)$$

observando que la segunda integral en el lado derecho se anula debido a que $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, tenemos:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx, \quad \forall v \in C^1(\Omega), v|_{\partial\Omega} = 0. \quad (2.28)$$

Ahora observemos que para que la expresión (2.28) esté bien definida basta con que la función u pertenezca al espacio $C^1(\Omega)$ sumada la condición adicional de que se anula en la frontera.

Luego de la transición de la ecuación diferencial (2.25) a su correspondiente forma integral (2.28), nos abrimos paso para comentar de la noción de solución *débil*. Este cambio permite abordar el problema en un marco más flexible y general, especialmente útil cuando nos enfrentamos a ecuaciones que pueden no poseer soluciones clásicas. La idea de solución débil, que se basa en el concepto de cumplir la ecuación en un sentido integral en lugar de punto por punto, es particularmente valiosa en situaciones donde la solución puede carecer de la *regularidad* necesaria para ser considerada como solución fuerte o clásica. Este enfoque amplía significativamente el espectro de problemas que podemos resolver, permitiéndonos trabajar con funciones que pertenecen a espacios de Sobolev, los cuales incorporan tanto las funciones en sí como sus derivadas en un *sentido débil*.

Definición 2.13. Una función $u \in C^1(\Omega)$ con $v = 0$ sobre $\partial\Omega$ es una solución débil al problema (2.25) si esta satisface la *ecuación integral* (2.28).

Más aún, la igualdad (2.28) también tiene sentido si $u \in L^1(\Omega)$ y $Du \in L^1(\Omega)$. El objetivo es ampliar el espacio funcional de búsqueda para identificar la solución. No obstante, ahora nos preguntamos acerca de la relación existente entre u y su derivada Du dentro del contexto del espacio $L^1(\Omega)$. lo que nos conduce a reflexionar sobre el significado de derivar una función que se encuentra en dicho espacio.

Conjuntamente, surge la inquietud de evaluar una función integrable en un punto

específico, especialmente cuando se establece que el valor de u en la frontera $\partial\Omega$ sea igual a cero. Cabe resaltar que un punto es un conjunto de medida nula bajo la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^N , y que las funciones integrables están definidas casi en todas partes.

Por lo general, si se considera un problema de valor en la frontera o de valor inicial para ecuaciones diferenciales parciales, resulta sumamente complejo trabajar en un contexto clásico y encontrar una solución fuerte, es decir, funciones de clase $C^k(\Omega)$, donde Ω es el *dominio* de definición. Se hace necesario flexibilizar algunas condiciones y trabajar en espacios funcionales más apropiados donde dispongamos de una versión **débil** o **variacional** de la formulación (2.28) del problema original (2.25). Eventualmente, podríamos incluso esperar que la solución débil que encontramos sea más *regular* y podríamos ser capaces de rescatar por medio teoremas sofisticados algunas propiedades como la continuidad, entre otras. Teniéndose, por ende, la siguiente formulación:

Teorema 2.1. *Sea u una función de $C^2(\Omega)$. Sea V el espacio definido por*

$$V = \{v \in C^1(\Omega) : v = 0 \text{ sobre } \partial\Omega\}.$$

Entonces, u es una solución del problema de contorno (2.25) si y solo si u pertenece a V y verifica la igualdad

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \quad \text{para toda función } v \in V.$$

La igualdad (2.28) se llama la formulación variacional del problema con valores en la frontera (2.25).

Recalcamos que la formulación variacional (2.28) es válida si la solución $u \in C^1(\Omega)$, a diferencia de la formulación *clásica* (2.25) que solicita que $u \in C^2(\Omega)$. Por lo tanto, ya se intuye que es más sencillo resolver (2.28) que (2.25) ya que se es menos exigente sobre la *regularidad* de la solución.

Es importante verificar que, recíprocamente, toda solución *suficientemente regular* de (2.25) también es solución de la formulación inicial (2.25). Suponiendo que u es de clase $C^2(\Omega)$ y solución de (2.25), obtenemos aplicando la Fórmula de Green en sentido inverso

que

$$\int_{\Omega} (\Delta u + f)(x) \cdot v(x) dx = 0, \text{ para todo } v \in V,$$

lo que implica (no inmediatamente) que $-\Delta u = f$ sobre Ω .

En esta etapa, indicamos que la selección de espacios funcionales adecuados para estudiar la existencia y unicidad de soluciones débiles es crucial. Esta elección cuidadosa nos conduce hacia un contexto muy interesante. Dentro de este marco, observamos, ahora, que es posible elegir v de manera apropiada dentro del espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ y que u debe, asimismo, pertenecer al espacio de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ para satisfacer las condiciones de frontera; permitiendo incorporar la condición de frontera en el espacio de soluciones.

Por ende, llegamos a la siguiente formulación del problema:

Encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot \nabla v(x) dx, \quad (2.29)$$

para toda $v \in H_0^1(\Omega)$.

Indicamos que existen diferentes teoremas de existencia y unicidad de solución, en función de las propiedades relativamente simples del espacio V y los funcionales $a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$ y $L(v) := \int_{\Omega} \nabla f \cdot \nabla v$. Para más detalles ver el Capítulo 9 de (Brezis, H., 2011).

2.6.1. Teorema de Lax-Milgram

En esta sección nos concierne el caso donde el espacio V y los funcionales a y L antes mencionados tienen las propiedades siguientes: V es un espacio de Hilbert, a es una forma bilineal sobre V y L es un operador o *forma* lineal sobre V .

La demostración de la existencia, unicidad y dependencia continua con respecto a los datos iniciales de una solución débil para (2.29) se fundamenta en el Teorema de Lax-Milgram. Antes de proceder con la demostración del teorema, que se apoya en el Teorema de Representación de Riesz y dos lemas adicionales, es esencial introducir

algunas definiciones clave que facilitarán la comprensión del enunciado y la demostración del resultado.

Definición 2.14 (Forma lineal continua). L es continua sobre V si:

$$\exists C > 0 \text{ tal que } |L(v)| \leq C \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (2.30)$$

Definición 2.15 (Forma bilineal continua). a es continua sobre V si:

$$\exists M > 0 \text{ tal que } |a(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V \quad \forall u, v \in V. \quad (2.31)$$

Definición 2.16 (Forma bilineal coerciva). a es coerciva o V -elíptica sobre V si:

$$\exists \alpha > 0 \text{ tal que } a(u, v) \geq \alpha \|u\|_V^2 \quad \forall u \in V. \quad (2.32)$$

El Teorema de Lax-Milgram aporta una respuesta sobre la existencia y unicidad de soluciones débiles para ecuaciones diferenciales parciales.

Antes de enunciar el Teorema de Lax-Milgram mencionaremos brevemente los resultados auxiliares antes mencionados.

Teorema 2.2 (Teorema de Representación de Riesz). *Si f es una forma lineal acotada sobre un espacio de Hilbert V entonces existe un único $u \in V$ tal que para cada $x \in V$ tenemos*

$$f(x) = \langle x, u \rangle.$$

Además, $\|f\|_{V^*} = \|u\|$.

Demostración. La demostración de este resultado se encuentra en el Capítulo 5 sección 5.2 de (Brezis, H., 2011). ■

A continuación, enunciaremos los lemas siguientes

Lema 2.1. *Sean V, W espacios normados. Un operador lineal $T : V \rightarrow W$, para el cual existe un $m > 0$ tal que $\|T(v)\| \geq m\|v\|$ para todo $v \in V$, admite una inversa continua $T^{-1} : R(T) \rightarrow V$.*

Demostración. Suponemos que T es un operador lineal para el cual existe una constante $m > 0$ tal que

$$\|T(v)\| \geq m\|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Entonces, se tiene que $v \in \text{Ker}(T) \Leftrightarrow T(v) = 0 \Leftrightarrow \|T(v)\| = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$, lo cual implica que $\text{Ker}(T) = \{0\}$ y, por lo tanto, T es inyectivo. En consecuencia, existe $T^{-1} : R(T) \rightarrow V$.

Además, la condición $\|T(v)\| \geq m\|v\|$ es equivalente a

$$\|T^{-1}v\| \leq \frac{1}{m}\|v\|,$$

es decir, T^{-1} es acotada y, por ende, continua. ■

Lema 2.2. Sea V un espacio de Banach y $T : V \rightarrow V$ un operador lineal continuo para el cual existe una constante $m > 0$ tal que

$$\|T(v)\| \geq m\|v\|, \quad \forall v \in V.$$

Entonces $R(T)$ es un subespacio cerrado de V .

Demostración. Sea (z_n) una sucesión en $R(T)$ tal que $z_n \rightarrow z$, con $z \in V$. Dado que T está acotado por debajo, existe una única sucesión $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en V tal que $z_n = T(v_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dado que $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es de Cauchy y T está acotado por debajo por una constante $m > 0$, tenemos que

$$\|T(v_n) - T(v_m)\| = \|T(v_n - v_m)\| \geq m\|v_n - v_m\|,$$

lo que implica que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ también es una sucesión de Cauchy.

Ya que V es un espacio de Banach, esto asegura que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a algún $v \in V$. Dado que T es continua, se sigue que

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} T(v_n) = T\left(\lim_{n \rightarrow \infty} v_n\right) = T(v),$$

lo que demuestra que $z \in R(T)$ y, por lo tanto, $R(T)$ es cerrado. ■

Ahora procedemos a enunciar el Teorema de Lax-Milgram.

Teorema 2.3 (Lax - Milgram). *Sea V un espacio de Hilbert y $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ forma bilineal, continua y coerciva. Si $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo, entonces existe un único $u \in V$ tal que*

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V. \quad (2.33)$$

Demostración. Para $u \in V$, la aplicación $a_u : V \rightarrow \mathbb{R}$ que a cada $v \in V$ le asigna $a(u, v)$ es una funcional lineal acotada sobre V , por el cual, el Teorema de Representación de Riesz afirma la existencia de un único elemento $w \in V$ que satisface

$$a(u, v) = a_u(v) = \langle w, v \rangle, \quad \forall v \in V \quad (2.34)$$

Definamos un operador lineal $T : V \rightarrow V$ dado por $T(u) = w$, donde $a(u, v) = \langle w, v \rangle$ para todo $v \in V$. Estudiaremos la continuidad de este operador, para ello, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $u_1, u_2 \in V$ para cada $v \in V$, por lo que

$$\begin{aligned} \langle T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v \rangle &= B(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2, v) \\ &= \lambda_1 a(u_1, v) + \lambda_2 a(u_2, v) \\ &= \lambda_1 \langle T(u_1), v \rangle + \lambda_2 \langle T(u_2), v \rangle \\ &= \langle \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2), v \rangle, \forall v \in H \end{aligned}$$

donde $\langle T(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2), v \rangle = \langle \lambda_1 T(u_1) + \lambda_2 T(u_2), v \rangle, \forall v \in V$ y resulta que T es lineal, además, como a es acotado, existe una constante $C > 0$ tal que $|a(u, v)| \leq C \|u\| \|T(u)\|$, por lo tanto

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u) \rangle = a(u, T(u)) \leq C \|u\| \|T(u)\|$$

entonces $\|T(u)\| \leq C \|u\|, \quad \forall u \in V$ y obteniendo así que T es acotada.

Para ver si T es coerciva, sabemos que existe una constante $\beta > 0$ tal que

$$\beta \|u\|^2 \leq B(u, u) = \langle T(u), u \rangle \leq \|T(u)\| \|u\|$$

y luego $\beta \|u\| \leq \|T(u)\|$.

Por el Lema (2.1), sabemos que T tiene inversa continua, por lo tanto es biyectiva. Además, $R(T)$ es cerrado por el Lema (2.2), por lo que vamos a ver si $R(T) = V$.

Como $R(T)$ es cerrado, debe existir un elemento distinto de 0. Sea $w \in V$ con $w \in R(T)^\perp$, entonces $\beta \|w\|^2 \leq B(w, w) = \langle T(w), w \rangle = 0$, por lo cual se llega a una contradicción.

Ahora, por el Teorema de Representación de Riesz, existe un elemento $w \in V$ que cumple

$$L(v) = \langle w, v \rangle, \quad \forall v \in V.$$

Finalmente, podemos observar que u es el único que satisface (2.34). ■

2.7. Análisis del Método de los Elementos Finitos

En esta sección estudiaremos las propiedades del Método de los Elementos Finitos, que permite aproximar las soluciones de EDPs elípticas con problemas de frontera. Cabe recalcar que, este método es caso particular del Método de Galerkin pero con propiedades específicas que lo hacen profundamente significativo en la aproximación de soluciones de EDP elípticas con valores en la frontera. Aquí, bosquejaremos su marco abstracto general poniendo el estudio de la convergencia de la aproximación de soluciones por elementos finitos.

Toda la información que se presenta a continuación fue tomada de la siguiente fuente académica: (Allaire y Alouges, 2016).

2.7.1. Método de Galerkin

En esta sección se busca presentar un procedimiento que nos permita aproximar la formulación variacional (2.29) y más generalmente la formulación variacional

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad (2.35)$$

donde $a : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una forma bilineal continua, coerciva y $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ es un funcional lineal continuo. A fin de lograr esto, consideramos una sucesión $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de subespacios vectoriales de dimensión finita de V , y se considera el problema:

$$\text{Encontrar } u_n \in V_n \text{ tal que } a(u_n, v_n) = L(v_n) \quad \forall v_n \in V_n. \quad (2.36)$$

Este procedimiento de reducir el problema original formulado en el espacio de dimensión infinita V , a una sucesión de problemas análogos en los subespacios de dimensión finita V_n , es lo que se conoce como método de Galerkin.

Uno de los objetivos es encontrar una solución que se pueda calcular en un número finito de operaciones. Para ello, elegimos los V_n de modo que al menos se cumpla la siguiente condición

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - u_n\|_V = 0,$$

lo que nos indica que la solución aproximada, u_n , converge hacia la solución u en la norma del espacio V . Ahora bien, suponemos que V_n es un subespacio vectorial de dimensión finita N y consideramos una base $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N\}$ de V_n . Se sigue que, existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N$ tales que la solución u_n , se expresa de la siguiente manera

$$u_n = \sum_{k=1}^N \alpha_k \varphi_k.$$

Así pues, vemos que el problema variacional (2.36) deriva en el problema siguiente:

$$\text{Encontrar } \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{k=1}^N \alpha_k a(\varphi_k, v_n) = L(v_n) \quad v_n \in V_n, \quad (2.37)$$

En particular, bajo la condición $v_n = \varphi_n$, esto se traduce en el problema:

$$\text{Encontrar } \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R} \text{ tales que } \sum_{k=1}^N \alpha_k a(\varphi_k, v_\ell) = L(v_\ell) \quad \forall \ell \in \{1, \dots, N\}, \quad (2.38)$$

estas ecuaciones se pueden reformular como un sistema de ecuaciones lineales como sigue:

$$\text{Encontrar } \vec{\alpha} \in \mathbb{R}^N \text{ tal que } A\vec{\alpha} = \vec{L}, \quad (2.39)$$

donde $\vec{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_N)$, $\vec{L} := (L_1, \dots, L_N)$ y $A := (a_{k\ell})_{N \times N}$ con

$$a_{k\ell} := a(v_k, v_\ell) \quad \text{y} \quad L_k := L(v_k).$$

Notemos, además, que el sistema de ecuaciones lineales (2.39) tiene una única solución debido a la coercitividad de la forma bilineal. Por otro lado, a la matriz A se la suele denominar *matriz de rigidez*, mientras que al vector \vec{L} se lo denomina *vector de carga*. Esta terminología se debe a los ingenieros, quienes desarrollaron un caso particular del método de Galerkin para la resolución del problema de elasticidad lineal, denominado el *Método de Elementos Finitos*.

El problema de elasticidad lineal, involucra ecuaciones diferenciales parciales que ayudan a describir el equilibrio y la deformación de un cuerpo elástico bajo ciertas condiciones de carga y restricciones, para esto se puede utilizar el método de elementos finitos. Para tener una introducción clara de este método, con el énfasis en la aplicación a problemas de elasticidad lineal, se recomienda leer el capítulo 9 de (Fishes, Belytschko, 2007).

A continuación, tenemos el interés de dar una cota superior del *error* entre u y u_n del método de Galerkin; definido como la diferencia entre la solución analítica $u \in V$ de (2.35) y la solución aproximada $u_n \in V_n$ de (2.36). Por consiguiente, el lema que viene a continuación, debido a Jean Céa (Céa, J., 1964), nos permite comprobar que podemos sustituir un espacio de Hilbert por un espacio vectorial de dimensión finita, además, de demostrar la distancia entre la solución exacta y la aproximada. Para este fin, enunciaremos el conocido *Lema de Céa*.

Lema 2.3 (Lema de Céa). *Supongamos que a es una forma bilineal continua y coerciva.*

Sean $u \in V$ y $u_n \in V_n$ las soluciones de los problemas (2.35) y (2.36), respectivamente.

Entonces

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_H. \quad (2.40)$$

Además, si a es simétrica la estimación anterior se reduce a

$$\|u - u_n\|_V \leq \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_V. \quad (2.41)$$

Demostación. Dado que $V_n \subseteq V$, podemos restringir (2.35) a V_n de tal manera que caemos en el problema variacional (2.36). Más aún, de (2.35) y (2.36) deducimos que

$$a(u - u_n, v_n) = 0 \quad \forall v_n \in V_n.$$

Utilizando la coercividad de a , sumando y restando un elemento arbitrario $v_n \in V_n$ en el segundo término de a , y a su vez aplicando la igualdad anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_n\|_V^2 &\leq a(u - u_n, u - u_n) \\ &= a(u - u_n, u - v_n + v_n - u_n) = a(u - u_n, u - v_n). \end{aligned}$$

Aplicando la continuidad de a en la desigualdad precedente arribamos a

$$\alpha \|u - u_n\|_V^2 \leq M \|u - u_n\|_V \|u - v_n\|_V,$$

de donde, bajo el supuesto que $\|u - u_n\|_V \neq 0$, resulta

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \|u - v_n\|_V \quad \forall v_n \in V_n. \quad (2.42)$$

Notemos que, la desigualdad (2.42) antes obtenida es válida en el caso $\|u - u_n\|_V = 0$. De esta forma, al tomar ínfimo relativo a $v_n \in V_n$ resulta

$$\|u - u_n\|_V \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_H.$$

De igual forma, si la forma bilineal a es simétrica, consecuentemente la coercividad de a ,

el hecho que $\|u - u_n\|_E = \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_E$, y la continuidad de a establecen que

$$\alpha \|u - u_n\|_V^2 \leq \|u - u_n\|_E^2 \leq \|u - v_n\|_E^2 \leq M \|u - v_n\|_V^2 \quad \forall v_n \in V_n,$$

y, extrayendo raíz cuadrada, obtenemos la desigualdad deseada. ■

El Lema de Céa (2.3) es vital debido a que proveen el punto de inicio para derivar de las estimaciones de error del Método de Elementos Finitos. Este resultado es esencial para asegurar la convergencia de los métodos de elementos finitos. Para información más detallada sobre la convergencia podemos orientarnos hacia a la Sección 10.6 de (Manet, V., 2018).

En la sección a continuación, presentamos un breve bosquejo sobre el análisis de convergencia del problema variacional (2.36).

2.7.2. Convergencia de la aproximación variacional

Para demostrar la convergencia de la aproximación variacional (2.36), presentamos un lema *general*. Recordemos que en la notación V_n , el parámetro $n \in \mathbb{N}$ sirve para indicar que, *al tomar el límite* cuando n es suficientemente grande, la aproximación (2.36) *converge* hacia la formulación variacional (2.35).

Lema 2.4. *Si la aproximación variacional (2.36) presenta una única solución, y además suponemos que existe un subespacio $\mathcal{V} \subset V$, denso en V , y una aplicación r_n de \mathcal{V} tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|v - r_n(v)\|_V = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.43)$$

entonces la aproximación variacional converge, es decir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|u - u_n\|_V = 0 \quad (2.44)$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$. Por la densidad de \mathcal{V} , existe $v \in \mathcal{V}$ tal que para todo $u \in V$ tenemos

$$\|u - v\|_V \leq \varepsilon.$$

Además, existe un natural $n_0 \in \mathbb{N}$ (que depende de ε) tal que, para este elemento $v \in \mathcal{V}$ tenemos

$$\|v - r_n(v)\|_V \leq \varepsilon \quad \forall n \leq n_0.$$

demostrando la expresión en (2.43).

Por otro lado, para probar la expresión en (2.44) utilizamos el Lema de Céa (2.3), con lo cual, dada una función u y su aproximación u_n , junto con una función de aproximación $r_n(v)$ para un v elegido adecuadamente en el espacio V , tenemos la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_V &\leq C \|u - r_n(v)\|_V \\ &= C \|u - v + v - r_n(v)\|_V \\ &\leq C (\|u - v\|_V + \|v - r_n(v)\|_V) \\ &\leq 2C\varepsilon, \end{aligned}$$

deduciéndose así el resultado, donde C es una constante positiva independiente de n . ■

Recalcamos que el estudio de la convergencia y estimación de error en la dimensión 1, 2 y N , así como el *principio del máximo*, está fuera del propósito principal de este Trabajo de Integración Curricular. Para una exposición más detallada del tema, se recomienda consultar las secciones I.3, I.4, I.5 e I.6 de (Allaire, G. & Alouges, F., 2016).

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo, exploramos los fundamentos que sustentan el enfoque metodológico aplicado en esta investigación, el estudio que se llevó a cabo se enmarca en una metodología de tipo no experimental analítica, con enfoque cuantitativo puesto que se pretende analizar las características de la ecuación de Helmholtz y del método Elementos Finitos, para posteriormente, implementarlo en el software FreeFem++ con el propósito de mostrar perfiles concretos de la propagación de la señal WiFi.

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

En este estudio, adoptaremos un enfoque cuantitativo con el objetivo de profundizar en los fundamentos teóricos del método de Elementos Finitos, con la intención de aplicarlo para obtener soluciones aproximadas de la ecuación de Helmholtz.

Este enfoque se complementa con un alcance de investigación no experimental analítica, con énfasis en la formulación variacional y el método de elementos finitos. La formulación variacional actúa como herramienta esencial para el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Helmholtz. Por otro lado, el método de elementos finitos se enfoca en el análisis destinado a la aproximación numérica de la ecuación de Helmholtz y cómo, a partir de esto, se deriva la simulación de la señal WiFi.

Este estudio se ha realizado estableciendo los fundamentos teóricos de la formulación variacional aplicada a ecuaciones diferenciales parciales elípticas y su relación con el método de elementos finitos para la ecuación de Helmholtz. Para la implementación práctica, se ha empleado el software FreeFem++, reconocido por su sintaxis intuitiva, su naturaleza de código abierto, su capacidad para producir gráficos claros y su eficiencia en tiempos de ejecución. Estas características han hecho de FreeFem++ una herramienta ampliamente exitosa en diversas aplicaciones dentro del Análisis Numérico relacionadas con ecuaciones en derivadas parciales elípticas y el método de elementos finitos.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

La ecuación de Helmholtz es conocida dentro de la Física ya que describe el comportamiento de ondas estacionarias en medios físicos, incluyendo fenómenos acústicos, ópticos y electromagnéticos. Es fundamental en el análisis de la propagación, reflexión y refracción de las ondas en diversos contextos, como la transmisión de señales inalámbricas, el diseño de instrumentos musicales, la ingeniería de salas acústicas, y en la óptica para el estudio de la difracción y la formación de imágenes. Esta ecuación permite describir cómo las ondas se propagan o se atenúan en un medio, tomando en cuenta la presencia de fuentes y obstáculos, siendo crucial para el diseño y optimización de sistemas en ingeniería y tecnología.

En esta sección estudiaremos la ecuación de Helmholtz, estableciendo la formulación variacional y su discretización vía el método de los elementos finitos, además de la aplicación de la difusión de la señal WiFi.

4.1. Formulación variacional de la ecuación de Helmholtz

La formulación variacional, nos permite que mediante las ecuaciones diferenciales podamos tener una alternativa, donde estas se escriben de forma integral.

A partir de la ecuación (2.21), consideramos el problema con condiciones de frontera de Dirichlet, descrito por el sistema:

$$\begin{cases} -\Delta u - k^2 u = f, & \text{en } \Omega, \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

donde Ω es un abierto acotado del espacio \mathbb{R}^N , u una función de $C^2(\overline{\Omega})$, y f es un segundo miembro que pertenece al espacio $C(\overline{\Omega})$.

Supongamos que u es una solución *fuerte* o clásica de (4.1). Multiplicando, ahora, la

ecuación diferencial por una función v , que pertenezca por ejemplo al espacio $C^2(\overline{\Omega})$, entonces

$$-\Delta uv - k^2 uv = fv$$

por v , e integramos ahora por partes en Ω , aplicando el Teorema de Green (véase la ecuación 2.24),

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot v(x) ds - \int_{\Omega} k^2 u(x) \cdot v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$$

si la función v satisface $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, entonces obtenemos

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} k^2 u(x) \cdot v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \quad (4.2)$$

Notemos que para que la expresión anterior tenga sentido, por la desigualdad de Cauchy-Schwarz, es suficiente con pedir que $u, \nabla u \in L^2$, $v, \nabla v \in L^2$ y que $f \in L^2$. Las derivadas de las funciones u y v no se entienden en *sentido clásico* sino en el *sentido débil*.

Luego, al problema lo vamos a expresar de la siguiente manera: Encontrar $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ solución débil de (4.1) si $u \in H_0^1(\Omega)$ y tal que

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} k^2 u(x) \cdot v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Obteniéndose así, la formulación variacional de (4.1). Nuestro interés ahora es probar la existencia y unicidad de solución débil. Para esto consideremos la forma bilineal $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} k^2 u(x) \cdot v(x) dx \quad (4.3)$$

y la forma lineal $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$L(v) := \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx. \quad (4.4)$$

de donde se ve que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega) \quad (4.5)$$

4.1.1. Existencia y unicidad de la solución débil

Ahora, establecemos la existencia y unicidad de la solución a la formulación variacional (4.5), utilizando el Teorema de Lax-Milgram (2.3), para ello, vamos a mostrar que la forma bilineal (4.3) es continua y coerciva en el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ y que la forma lineal (4.4) es continua sobre el espacio de Hilbert $H_0^1(\Omega)$.

Enunciaremos, a su vez, la desigualdad de Poincaré.

Teorema 4.1 (Desigualdad de Poincaré). *La desigualdad de Poincaré establece que, para todo conjunto abierto Ω de \mathbb{R}^N que está acotado en al menos una dirección del espacio, existe una constante $C > 0$ tal que, para cada función v en $H_0^1(\Omega)$,*

$$\int_{\Omega} |v(x)|^2 dx \leq C \int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 dx.$$

Demostración. La demostración de esta desigualdad se encuentra en la Sección 4.3.2 de (Allaire, G., 2007). ■

• Continuidad de la forma bilineal

Para mostrar la continuidad de la forma bilineal a , vemos que

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - \int_{\Omega} k^2 u(x) \cdot v(x) dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)| |\nabla v(x)| dx + k^2 \int_{\Omega} |u(x)| |v(x)| dx \end{aligned}$$

utilizando la desigualdad de Cauchy - Schwarz tenemos

$$|a(u, v)| \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

y a su vez, gracias a la desigualdad de Poincaré, sabemos que existe una constante $C > 0$ tal que $\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$ para todo $u \in H_0^1(\Omega)$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} + k^2 C^2 \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \\ &= M \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega), \end{aligned}$$

donde $M := 1 + C^2 k^2 > 0$.

- **Coercividad de la forma bilineal**

Para la coercividad,

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla u(x) \, dx - k^2 \int_{\Omega} u(x) \cdot u(x) \, dx \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx - k^2 \int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \\ &= \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 - k^2 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Es bien conocido que el primer valor propio de Dirichlet del operador $-\Delta$ (que es por definición el más pequeño) se puede escribir como

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{v \in H_0^1(\Omega), v \neq 0} \frac{\int_{\Omega} |\nabla v(x)|^2 \, dx}{\int_{\Omega} [v(x)]^2 \, dx}.$$

Por ende, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\int_{\Omega} |u(x)|^2 \, dx \leq \frac{1}{\lambda_1(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

y entonces

$$a(u, u) \geq \left(1 - \frac{k^2}{\lambda_1(\Omega)}\right) \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 \, dx$$

Finalmente, para obtener la norma $\|\cdot\|_{H_0^1(\Omega)}$, en el lado derecho, usamos $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \geq C \|u\|_{L^2(\Omega)}$, para todo $u \in H_0^1(\Omega)$, lo anterior se verifica gracias a la desigualdad de Poincaré, lo cual nos permite establecer la siguiente relación para la forma bilineal a :

$$a(u, u) \geq \left(1 - \frac{k^2}{\lambda_1(\Omega)}\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

donde $\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ representa la norma en el espacio $H_0^1(\Omega)$. En consecuencia, la forma bilineal a es coerciva siempre que $\lambda_1(\Omega) > k^2$, tal y como se requiere.

- **Continuidad de la forma lineal**

Para mostrar la continuidad de la forma lineal $L(v)$, vemos que

$$|L(v)| = \left| \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| |v(x)| \, dx$$

utilizando la desigualdad de Cauchy - Schwarz tenemos

$$|L(v)| \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

y por la Desigualdad de Poincaré, existe $C > 0$ tal que

$$|L(v)| \leq C \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Finalmente, arribamos a

$$|L(v)| \leq \tilde{C} \|v\|_{H_0^1(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

donde $\tilde{C} := C \|f\|_{L^2(\Omega)} > 0$, mostrando así la continuidad de L .

Según estos tres puntos y gracias al Teorema de Lax-Milgram (2.3), sabemos que existe un único $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

siempre que $\lambda_1(\Omega) > k^2$.

4.2. Equivalencia con la ecuación

En esta sección nos enfocamos en verificar que si resolvemos la formulación variacional (4.5) hemos resuelto el problema de valor en la frontera (4.1), y precisar en qué sentido la solución de (4.5) también es una solución de (4.1). En otras palabras, se trata de interpretar la formulación variacional y de regresar a la ecuación. Para ello, utilizamos las mismas integraciones por partes que llevaron a la formulación variacional, pero en sentido contrario, y justificarlas cuidadosamente.

Comenzamos con la formulación débil de la ecuación de Helmholtz:

Sea Ω un abierto acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$, y una función g en $\partial\Omega$, buscamos encontrar u en $H^1(\Omega)$ tal que:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx - k^2 \int_{\Omega} u(x) \cdot v(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot v(x) dx$$

para toda *función test* v en $H^1(\Omega)$, donde k es el número de onda y f es una función en $L^2(\Omega)$.

Utilizamos la Fórmula de Green para obtener la formulación fuerte. Para una función u en $H^1(\Omega)$ y v en $H_0^1(\Omega)$, la Fórmula de Green establece:

$$\int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \nabla v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x) \cdot \Delta v(x) dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}(x) \cdot v(x) ds,$$

donde Δ es el operador Laplaciano y n es el vector normal al contorno.

Dado que estamos considerando condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, la derivada normal de la función u sobre la frontera $\partial\Omega$ es cero, es decir, $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$. Al aplicar la Fórmula de Green y considerar las condiciones de contorno de Dirichlet homogéneas, obtenemos la formulación fuerte de la ecuación de Helmholtz:

$$-\Delta u - k^2 u = f \quad \text{en } \Omega$$

y $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, donde f es una función en $L^2(\Omega)$.

Terminemos esta sección indicando que, se discretizará la ecuación de Helmholtz mediante el Método de Elementos Finitos, que se discutió en la Sección 2.7.

4.3. Discretización mediante el Método de Elementos Finitos

El dominio Ω se discretiza en elementos finitos, para esto, se aproxima la solución u y la función test v mediante una combinación lineal de funciones de base ϕ_j . Las funciones de forma ϕ_i son 1 en el nodo i y 0 en el otros nodos, de esta manera se tiene:

$$u \approx u_h = \sum_{j=1}^N U_j \phi_j.$$

$$v \approx v_h = \phi_i$$

donde U_j son los valores nodales de la solución, después, sustituimos $u \in V$ tal que $a(u, v) = L(v)$ para todo $v \in V$ y se convierte en $a(u_h, v_h) = L(v_h)$, y utilizando las aproximaciones dadas anteriormente y obteniendo un sistema de ecuaciones lineales en términos de los coeficientes nodales U_j :

$$\sum_{j=1}^N U_j \left(\int_{\Omega} \nabla \phi_j \cdot \nabla \phi_i \, d\Omega - k^2 \int_{\Omega} \nabla \phi_j \nabla \phi_i \, d\Omega \right) = \int_{\Omega} f \phi_i \, d\Omega. \quad \forall i.$$

Definimos las matrices de rigidez K , de masa M y vector de carga F

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \, d\Omega,$$

$$M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \, d\Omega,$$

$$F_i = \int_{\Omega} f \phi_i \, d\Omega.$$

El sistema de ecuaciones lineales resultante es:

$$(K - k^2 M) \mathbf{U} = \mathbf{F}$$

donde \mathbf{U} es el vector de los valores nodales U_j .

Para el error de la discretización e se define como la diferencia entre la solución exacta u y la solución aproximada u_h :

$$e(x) = u(x) - u_h(x).$$

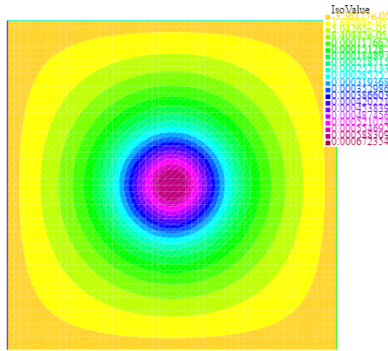
Además, para el análisis del error, se aplican los teoremas de estimación de error.

4.4. Simulación de la ecuación de Helmholtz en la región cuadrada

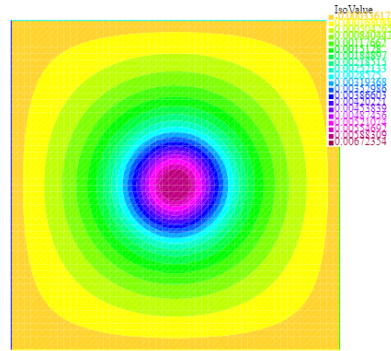
En esta sección, exploraremos cómo formular y resolver la ecuación de Helmholtz en la región cuadrada utilizando la plataforma de simulación FreeFEM++, destacando su sintaxis específica y los pasos necesarios para la implementación efectiva de la simulación.

La visualización de los resultados para la simulación de la ecuación de Helmholtz, un problema escalar donde la incógnita toma valores en \mathbb{R} , es bastante sencilla. En el caso de $N = 2$ dimensiones, podemos representar las iso-superficies y/o sombrear la intensidad, tal como se muestra en las **Ilustración 4-1:** y **Ilustración 4-2:** . Sin embargo, es crucial prestar atención a las escalas de valores, como se evidencia en la **Ilustración 4-1:** , donde dos representaciones son aparentemente comparables, pero las escalas de referencia son muy diferentes.

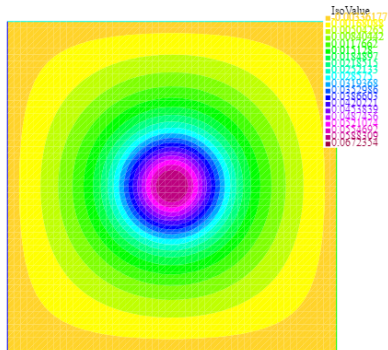
En el caso de $N = 3$ dimensiones, se pueden visualizar las iso-superficies (superficies donde la incógnita es constante) o utilizar secciones transversales para una mejor comprensión de los resultados.



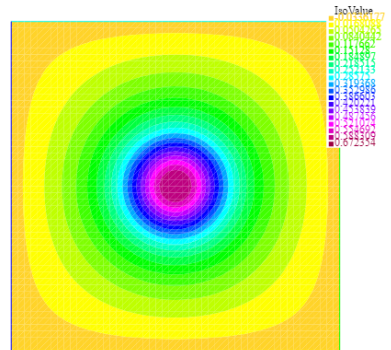
(a) Parámetro A=0.1



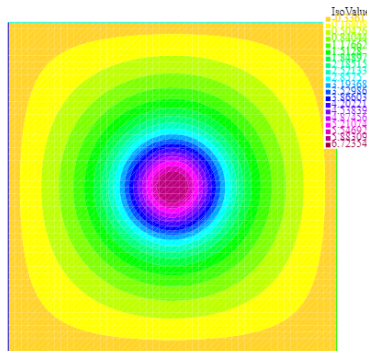
(b) Parámetro A=1



(c) Parámetro A=10



(d) Parámetro A=100

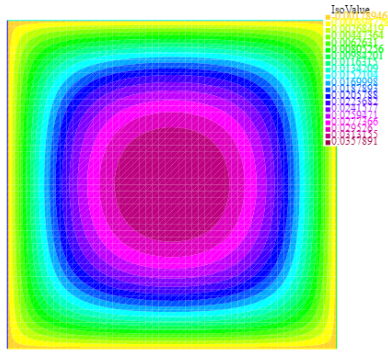


(e) Parámetro A=1000

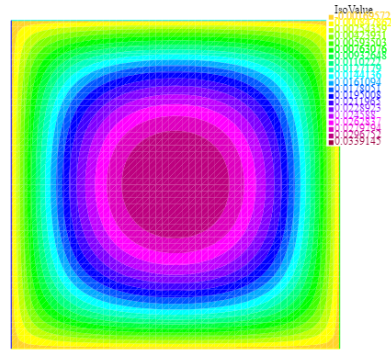
Ilustración 4-1: Variación del parámetro A.

Realizado por: Bastidas A., 2024.

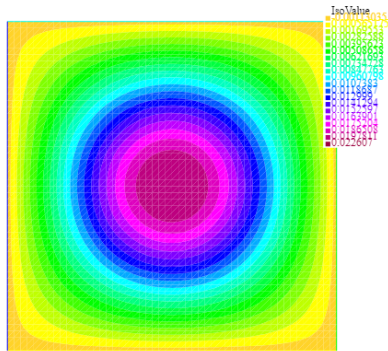
En la **Ilustración 4-1:** se puede observar las distintas variaciones que existen en el parámetro A, cuando $A = 0.1$, $A = 1$, $A = 10$, $A = 100$ y $A = 1000$



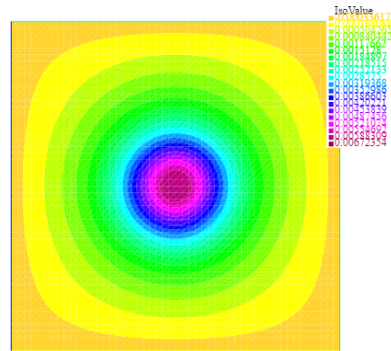
(a) Parámetro B=0.1



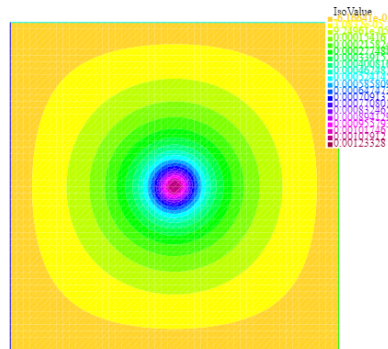
(b) Parámetro B=1



(c) Parámetro B=10



(d) Parámetro B=100

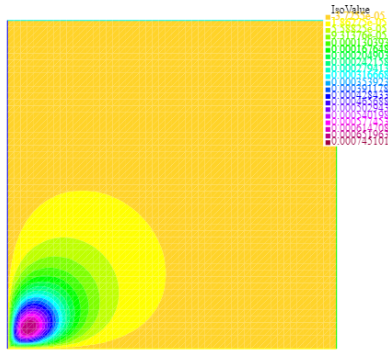


(e) Parámetro B=1000

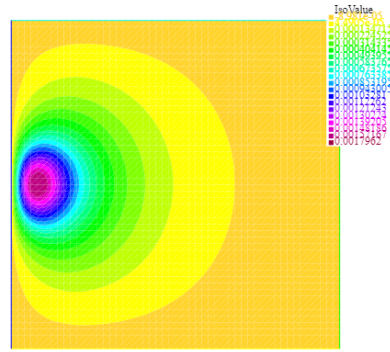
Ilustración 4-2: Variación del parámetro B.

Realizado por: Bastidas A., 2024.

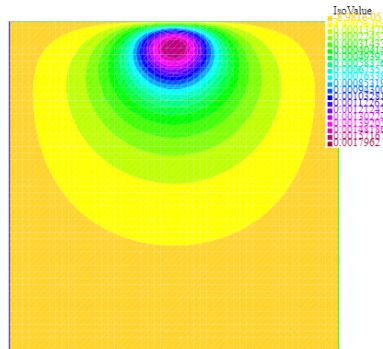
En la **Ilustración 4-2:** se puede observar las distintas variaciones que se obtiene al realizar los cambios en el parámetro B , con $B = 0.1$, $B = 1$, $B = 10$, $B = 100$ y $B = 1000$.



(a) Parámetro $X = 0, Y = 0$



(b) Parámetro $X = 0, Y = 0.5$



(c) Parámetro $X = 0.5, Y = 1$

Ilustración 4-3: Variación del parámetro X, Y .

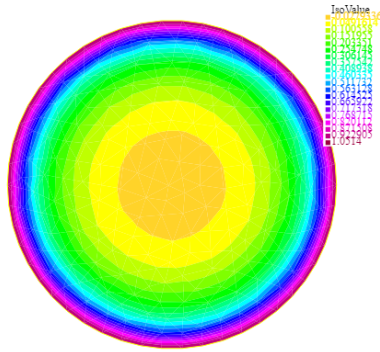
Realizado por: Bastidas A., 2024.

En la ilustración (**Ilustración 4-3:**), se observa la variación en el parámetro X, Y , con $X = 0, Y = 0; X = 0, Y = 0.5; X = 0.5, Y = 1$.

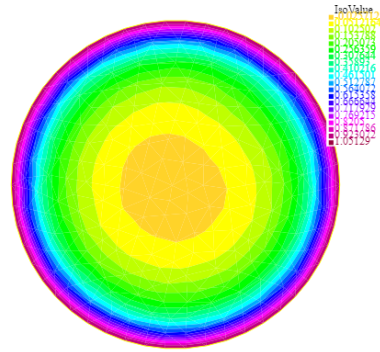
A partir de las diferentes imágenes, se aprecia que dentro de una región cuadrada, la modificación del parámetro β de la función exponencial provoca un cambio considerable en el patrón de las ondas. Se observa que, a mayores valores de β , el patrón de señales se debilita. La modificación de la amplitud A no introduce ninguna mejora o cambio significativo. Sin embargo, si se decide mantener A y β constantes, pero se modifica la posición de la fuente, el patrón de radiación se deforma considerablemente.

4.4.1. Evaluación de modelo en región circular

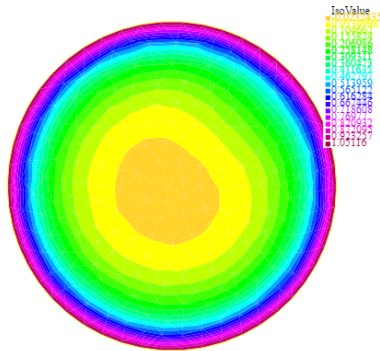
En esta subsección se observa cómo varía el patrón de onda ante cambios en los parámetros de la función fuente dentro de la región circular.



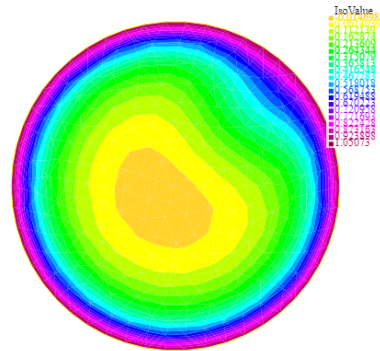
(a) Parámetro $A=0.2$



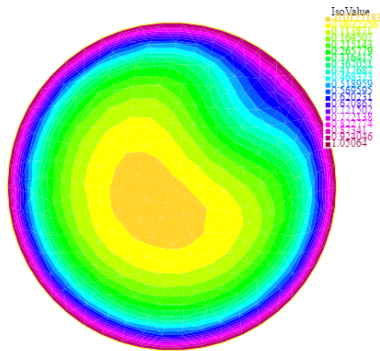
(b) Parámetro $A=2$



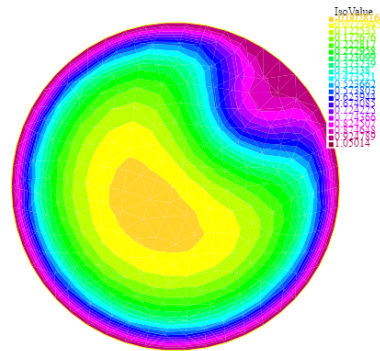
(c) Parámetro $A=4$



(d) Parámetro $A=16$



(e) Parámetro $A=20$



(f) Parámetro $A=40$

Ilustración 4-4: Variación del parámetro A . Región circular.

Realizado por: Bastidas A., 2024.

En la ilustración, como puede observarse, en una región circular, la variación del parámetro de amplitud A de la función fuente es crítica. A medida que este parámetro aumenta, el patrón de la señal se deforma, pudiendo llegar a un nivel total de distorsión, lo que resulta en la pérdida de todo sentido del fenómeno modelado.

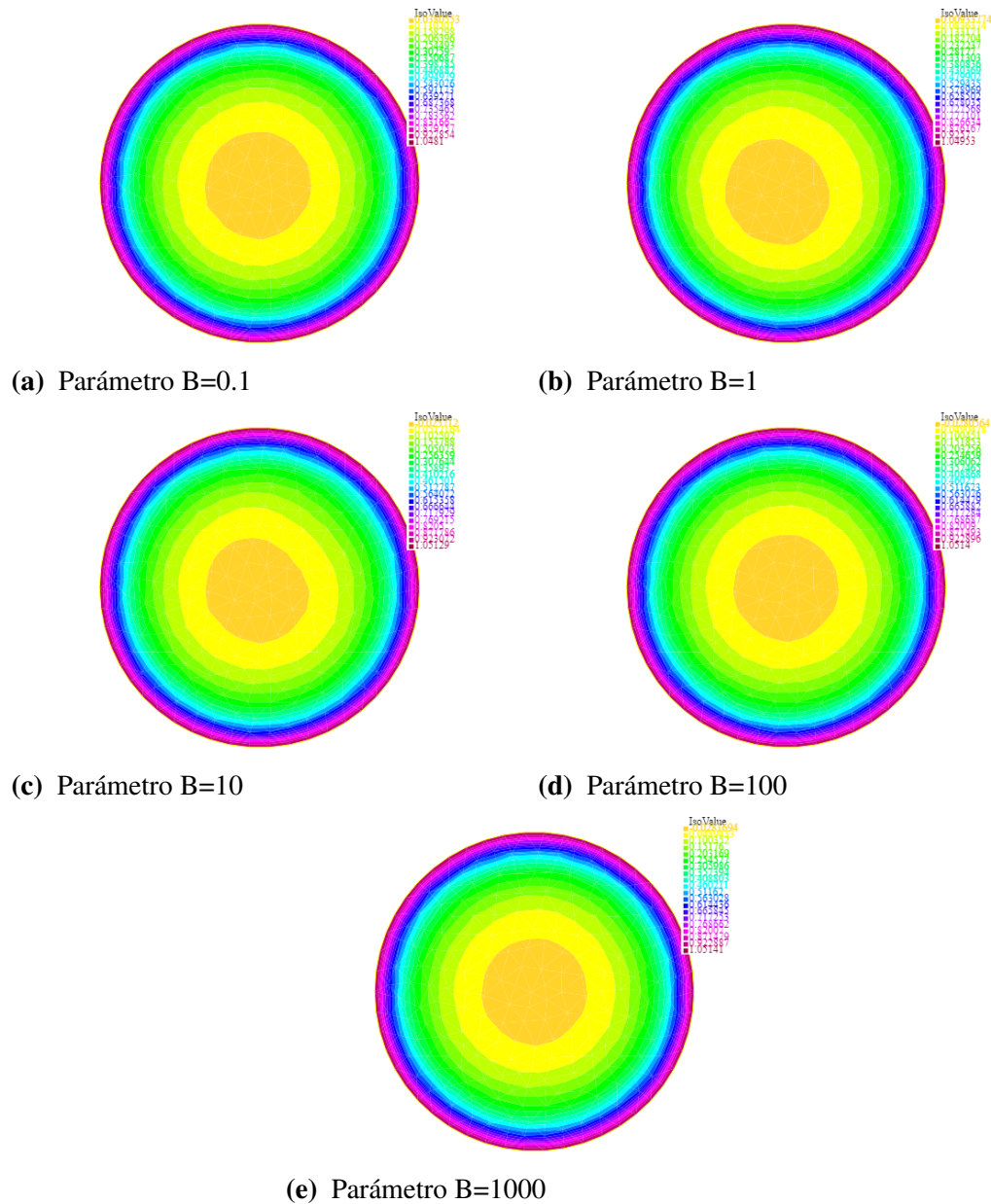


Ilustración 4-5: Variación del parámetro B .

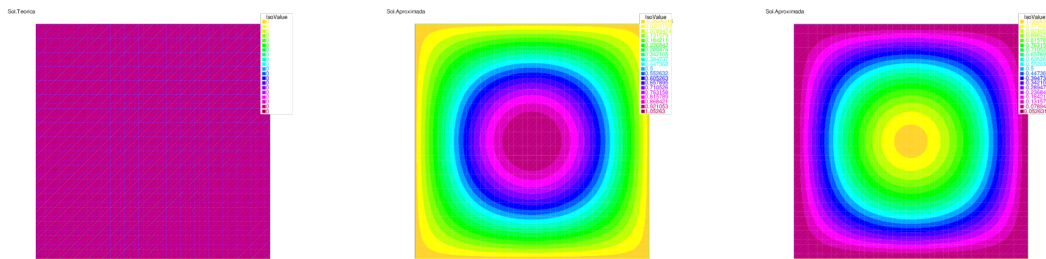
Realizado por: Bastidas A., 2024.

En la ilustración (**Ilustración 4-5:**) se pueden observar las distintas variaciones que se obtienen al realizar cambios en el parámetro B , con $B = 0.1$, $B = 1$, $B = 10$, $B = 100$ y $B = 1000$.

4.4.2. Evaluación del error en el espacio representado por la región cuadrada

Los siguientes gráficos muestran la secuencia para cada valor de L_x y L_y , de la solución teórica, aproximada y el error, mientras que en la tabla **Tabla 4-1:** se registran los

respectivos valores de error obtenidos.

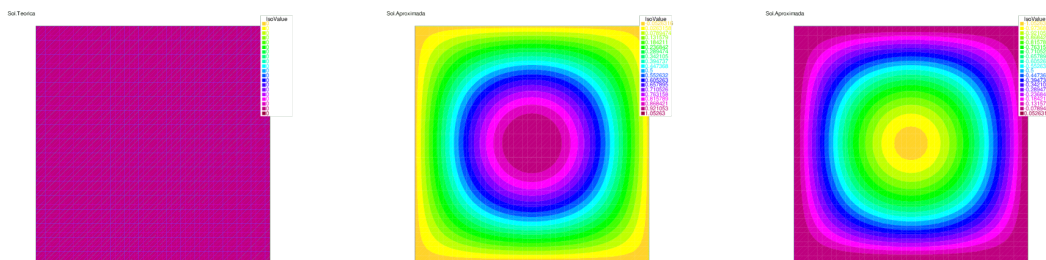


(a) Solución teórica (b) Solución analítica (c) Error

Ilustración 4-6: Error $Lx = 0.01, Ly = 0.01$

Realizado por: Bastidas A., 2024.

En esta ilustración se puede observar la solución teórica, aproximada y el error de $Lx = 0.01, Ly = 0.01$, esta coordenada tiene un error de 0.00499671.

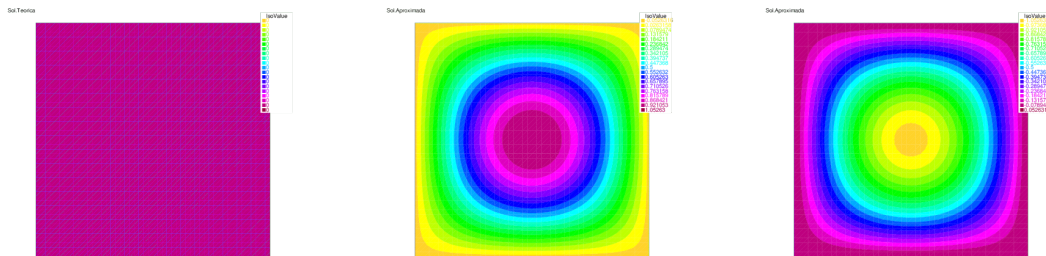


(a) Solución teórica (b) Solución analítica (c) Error

Ilustración 4-7: Error $Lx = 0.05, Ly = 0.05$

Realizado por: Bastidas A., 2024.

El error cuando $Lx = 0.05$ y $Ly = 0.05$ es de 0.0249836, de igual se puede observar gráficamente su solución teórica, aproximada y su respectivo error.



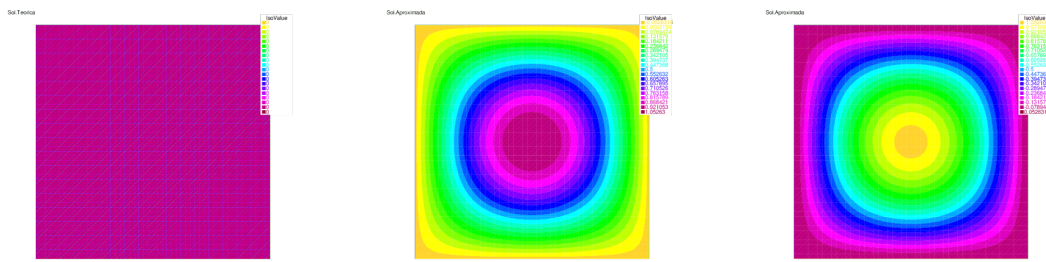
(a) Solución teórica (b) Solución analítica (c) Error

Ilustración 4-8: Error $Lx = 0.1, Ly = 0.1$

Realizado por: Bastidas A., 2024.

En la ilustración (**Ilustración 4-8:**), se puede observar la solución teórica, analítica y el

error cuando $Lx = 0.1$ y $Ly = 0.1$, obteniendo un error de 0.0499671.



(a) Solución teórica

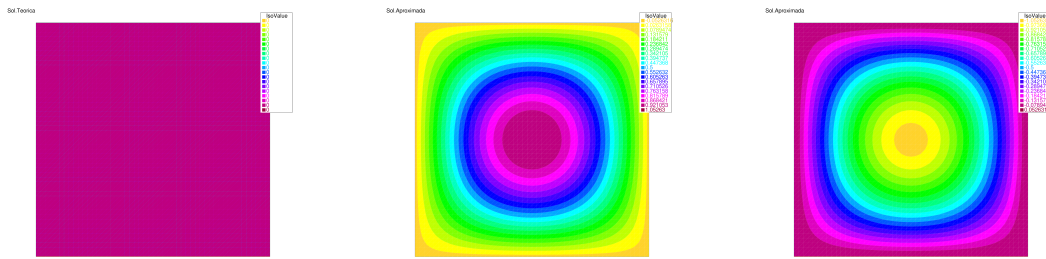
(b) Solución analítica

(c) Error

Ilustración 4-9: Error $Lx = 0.25, Ly = 0.25$

Realizado por: Bastidas A., 2024.

La solución teórica, analítica y el error que se encuentra en la ilustración (**Ilustración 4-9:**) se da cuando $Lx = 0.25$ y $Ly = 0.25$, teniendo un error de 0.124918.



(a) Solución teórica

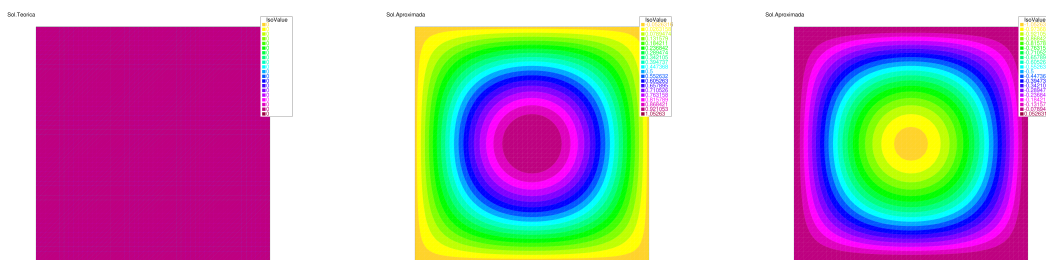
(b) Solución analítica

(c) Error

Ilustración 4-10: Error $Lx = 0.5, Ly = 0.5$

Realizado por: Bastidas A., 2024.

El error cuando $Lx = 0.5$ y $Ly = 0.5$ es de 0.249836 y en la ilustración (**Ilustración 4-10:**) se observa su solución teórica, analítica y su respectivo error.



(a) Solución teórica

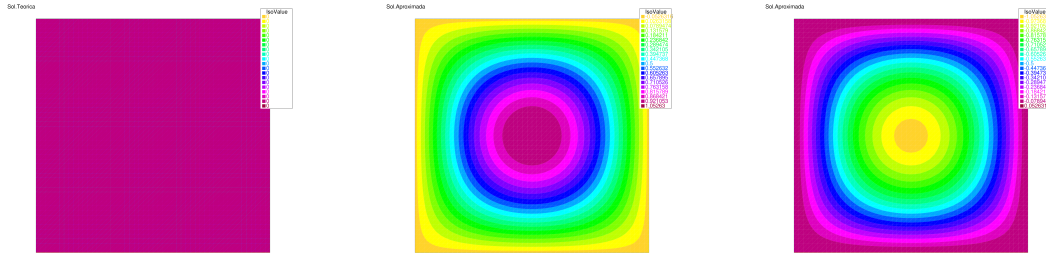
(b) Solución analítica

(c) Error

Ilustración 4-11: Error $Lx = 0.75, Ly = 0.75$

Realizado por: Bastidas A., 2024.

En la ilustración (**Ilustración 4-11:**) tiene la solución teórica, analítica y su error, cuando $Lx = 0.75$ y $Ly = 0.75$ y su error es 0.374753.



(a) Solución teórica

(b) Solución analítica

(c) Error

Ilustración 4-12: Error $L_x = 1, L_y = 1$

Realizado por: Bastidas A., 2024.

Cuando $L_x = 1$ y $L_y = 1$ se tiene un error de 0.499671 y en la ilustración (**Ilustración 4-12:**) se observan las gráficas con la solución teórica, analítica y su error.

La siguiente tabla muestra la evaluación del error de las aproximaciones de la región empleada, tomando en cuenta las variaciones que toman L_x y L_y .

Tabla 4-1: Análisis del error.

L_x	L_y	Error L2
0.01	0.01	0.00499671
0.05	0.05	0.0249836
0.1	0.1	0.0499671
0.25	0.25	0.124918
0.50	0.50	0.249836
0.75	0.75	0.374753
1.00	1.00	0.499671
1.50	1.50	0.749507

Realizado por: Bastidas, A., 2024.

Después de examinar la tabla, se observa que el menor error se encuentra en el caso donde $L_x = 0.01$ y $L_y = 0.01$, es decir, 100 veces menos que el tamaño normalizado de la región de estudio, es decir, la cuadrada. En este caso, el error se sitúa en 0.499 %. Para $L_x = 0.1$ y $L_y = 0.1$, el error es de 4.99 %, y finalmente, para $L_x = 1.0$ y $L_y = 1.0$, el error es de 49.96 %. Esto sugiere que el éxito del modelado depende de elegir las dimensiones del intervalo de muestreo de la región de trabajo en función del error porcentual y la precisión requerida.

4.5. Aplicación de la difusión de la señal WiFi

El WiFi es una onda electromagnética que contiene una señal, la cual proporciona conectividad inalámbrica a diferentes dispositivos. Para modelar la propagación de estas

ondas, se utiliza la ecuación de Helmholtz:

$$-\Delta u - \frac{k^2}{n^2}u = 0$$

donde k es el número de onda de la señal WiFi y n es el índice de refracción del material en el que se encuentra la onda.

Para realizar la simulación, se siguen los siguientes pasos:

- Se crea un dominio que representa una habitación rectangular. Se añade un área alrededor que simula las paredes exteriores de la habitación. Además, se introducen dos rectángulos, uno horizontal y otro vertical, que representan los obstáculos dentro de la habitación.
- Al crear una malla, se observa que aún no existe ningún punto de acceso WiFi. Para resolver esto, se calcula la solución de la ecuación para múltiples posiciones a lo largo de la pared izquierda.

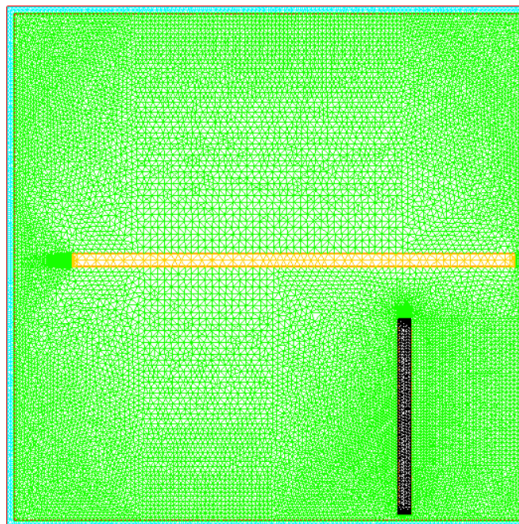
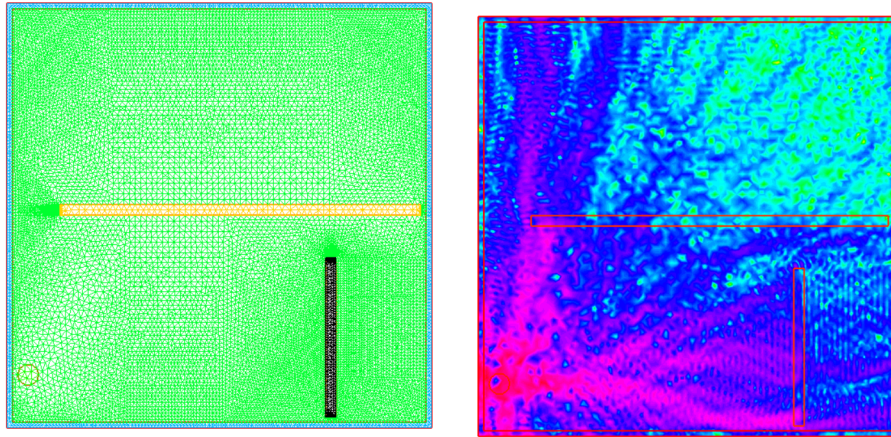


Ilustración 4-13: Creación de bordes y obstáculos

Realizado por: FreeFem Documentation, 2024.

Finalmente, el punto de acceso en el límite está representado por un círculo simple en el gráfico, mientras que en el módulo de la solución se observa la potencia de la señal. Esto nos permite obtener los siguientes gráficos:



(a) Punto de acceso

(b) Dispersión de ondas

Ilustración 4-14: Observación del punto de acceso y potencia de la señal

Realizado por: FreeFem Documentation, 2024.

Podemos observar que en la Figura **Ilustración 4-14:** a se muestra la posición del punto de acceso WiFi, mientras que en la Figura **Ilustración 4-14:** b se aprecia la potencia de la señal. En esta última, se evidencia que el punto de acceso se encuentra en la parte inferior izquierda y su intensidad es más fuerte en las proximidades del punto de acceso, disminuyendo a medida que se acerca a los obstáculos implementados dentro de la habitación.

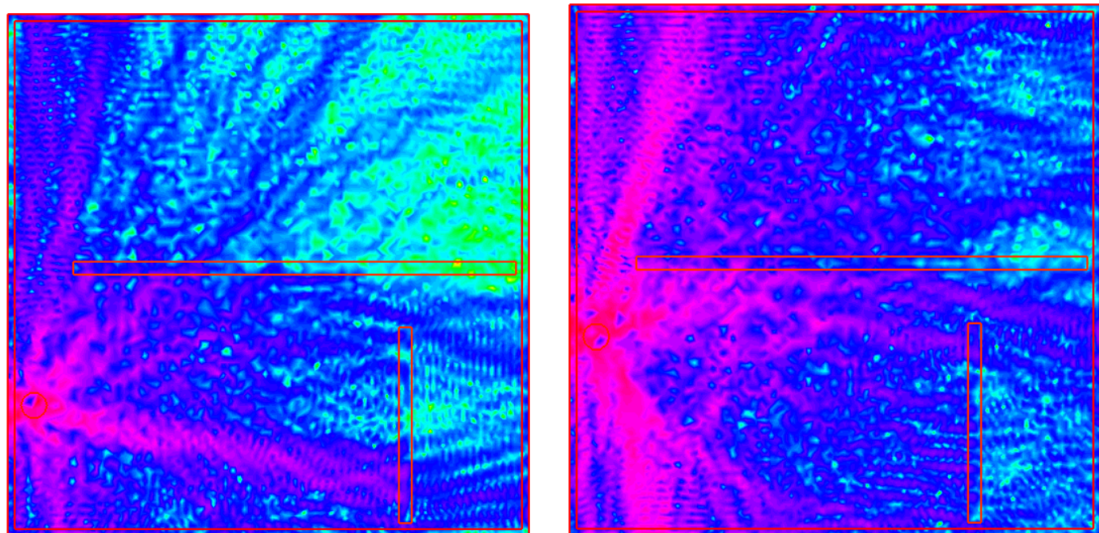


Ilustración 4-15: Punto de acceso en la parte inferior izquierda

Realizado por: FreeFem Documentation, 2024.

En la ilustración (**Ilustración 4-15:**) se representan dos puntos de acceso ubicados en

la parte inferior izquierda. En el primer punto, la intensidad de la señal se concentra únicamente cerca del punto de acceso, ya que los obstáculos dentro de la habitación restringen la propagación de las ondas a lo largo de todo el espacio. Por otro lado, en la segunda posición, se observa una mayor dispersión dentro del área, lo que permite que las ondas alcancen los espacios entre cada obstáculo.

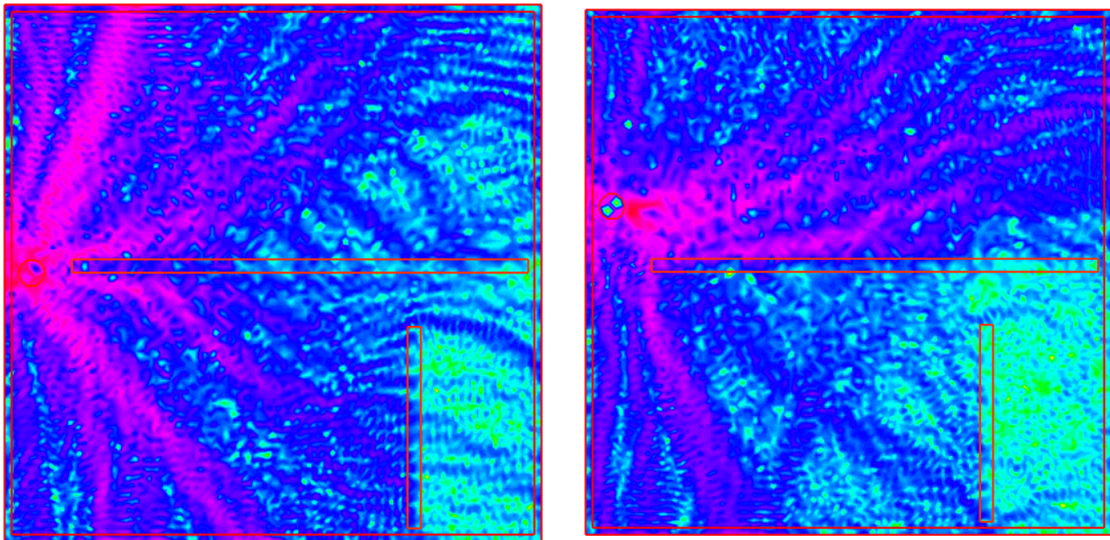


Ilustración 4-16: Punto de acceso en la parte media superior izquierda
Realizado por: FreeFem Documentation, 2024.

Los puntos de acceso de (**Ilustración 4-16:**) están ubicados en la parte media superior izquierda. En la imagen del lado izquierdo, el punto de acceso se encuentra frente al obstáculo de forma horizontal, y se puede observar que la intensidad es mayor cuando está cerca del punto de acceso, propagándose tanto en la parte inferior como en la superior. En el segundo punto, se observa una menor propagación debido a que el obstáculo de forma horizontal impide que las ondas atraviesen, dispersándose principalmente en la parte superior y con menor intensidad en la parte inferior.

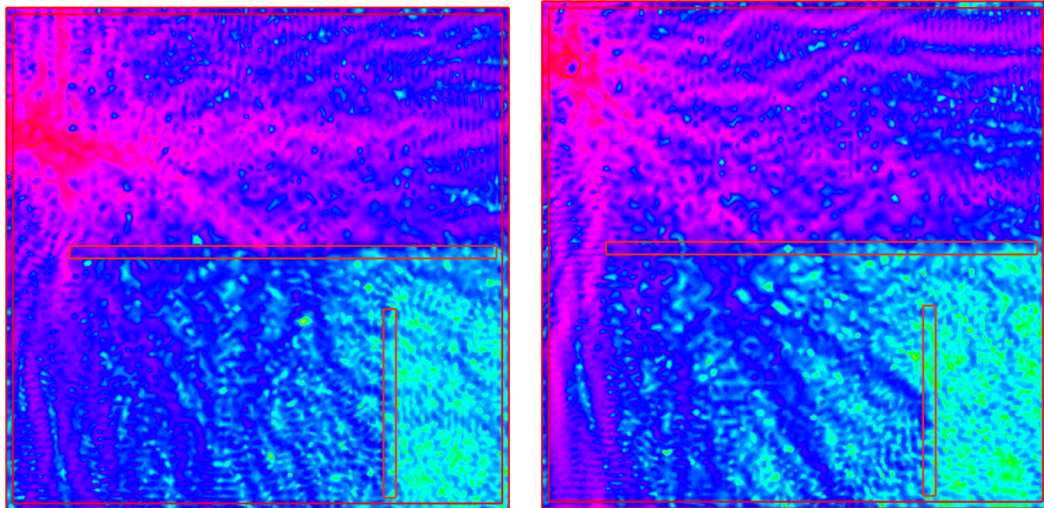


Ilustración 4-17: Punto de acceso en la parte superior izquierda
Realizado por: FreeFem Documentation, 2024.

Finalmente, los puntos de acceso de (**Ilustración 4-17:**) están situados en la parte superior izquierda. En ambas ilustraciones, se puede observar que la mayor intensidad se concentra en el punto de acceso, dispersándose principalmente en la parte superior de la habitación.

En todas las ilustraciones se puede observar que las ondas del WiFi no se propagan por toda la habitación, y esto se debe a los obstáculos presentes en el interior, los cuales limitan la dispersión de la onda. Estos obstáculos provocan que las ondas se reflejen en las superficies y que algunas sean absorbidas por el material del obstáculo. La reflexión, difracción y absorción son fenómenos clave que determinan cómo se propaga y dispersa la señal WiFi en diferentes entornos.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este apartado, se presentan las conclusiones y recomendaciones resultantes del estudio, aportando perspectivas para futuras investigaciones matemáticas.

5.1. CONCLUSIONES

La comprensión de los fundamentos teóricos de la ecuación de Helmholtz y el método de elementos finitos, fue esencial para su aplicación, ya que estos conceptos facilitaron el desarrollo de la investigación.

La ecuación de Helmholtz y el método de elementos finitos son herramientas fundamentales en el análisis de problemas de ondas, los cuales permitieron comprender el uso de estos elementos para resolver problemas en diferentes campos.

La integración de la ecuación de Helmholtz con el método de los elementos finitos, permitió encontrar soluciones numéricas aproximadas que describieron el comportamiento de fenómenos físicos que involucran la propagación de ondas en diferentes regiones y variando su amplitud, permitiendo observar la intensidad que aparentemente son comparables, pero sus escalas de referencia son diferentes.

5.2. RECOMENDACIONES

Durante el desarrollo del Trabajo de Titulación, se consideraron únicamente las condiciones de Dirichlet homogéneas. Sin embargo, se recomienda también explorar las condiciones de Neumann y de Robin para describir diferentes escenarios y validar la calidad e intensidad de una señal.

La discretización de la ecuación de Helmholtz se realizó vía el método de los elementos finitos y para futuros estudios e investigaciones se recomienda utilizar otros métodos numéricos que permitan discretizar y resolver la ecuación de Helmholtz.

A los estudiantes interesados en el estudio del método de elementos finitos, se les recomienda comenzar la lectura por el capítulo del marco teórico. Esto les permitirá comprender el documento y adquirir conocimientos sobre las bases fundamentales para abordar el método. Además, es importante estudiar adecuadamente los espacios de Sobolev H^k y entender cómo pasar de la formulación débil a la formulación fuerte, ya que esto proporciona una base sólida para comprender en profundidad el enfoque de los elementos finitos y del estudio de existencia y unicidad de soluciones de las ecuaciones en derivadas parciales elípticas.

BIBLIOGRAFÍA

1. **ALLAIRE, Grégoire.** *Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modelling and numerical simulation.* OUP Oxford, 2007.
2. **ALLAIRE, Grégoire. & ALOUGES, François.** *Analyse variationnelle des équations aux dérivées partielles*[en línea]. Cours MAP431 de l'École Polytechnique, 2016. [consultado 30 junio 2022]. Disponible en: <http://www.cmap.polytechnique.fr/~alouges/polycopie2.pdf>
3. **BRÉZIS, Haim.** *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations.* New York: Springer, 2011. pp. 1-236
4. **BURDEN, Richard. L.** *Numerical analysis.* Brooks/Cole Cengage Learning, 2011.
5. **CASTAÑO, Guillermo.** *Aplicación del Método de los Elementos Finitos a la ecuación de Helmholtz,* 2013, pp. 1-41
6. **CÉA, Jean.** *Approximation variationnelle des problèmes aux limites.* In Annales de l'Institut Fourier, Vol. 14, No. 2, pp. 345-444, 1964.
7. **CHAMORRO, Diego.** *Espacios de Lebesgue y Lorentz, vol 1: Teoría de la Medida y Teoría de la Integración.* Asociación AMARUM, 2017, París.
8. **CHAMORRO, Diego.** *Espacios de Lebesgue y Lorentz, vol 2: Análisis Funcional y complementos.* Asociación AMARUM, 2017, París.

9. **COLLANTES, Luis. J., & Coronel, A.** *Formulación variacional de ecuaciones diferenciales parciales*. Revista Integración, 2010, 28(2), 133-152.
10. **CZENKY, Agustina., & VILLAGRA, Lucas.** *Teorema de Lax-Milgram y aplicaciones al Método de Elementos Finitos* , 2017, pp. 1-32
11. **DAVID, Claire., & GOSSELET, Pierre.** *Equations aux dérivées partielles*. 3e éd.: Cours et exercices corrigés. Dunod, 2022.
12. **EVANS, Lawrence. C.** *Partial differential equations and Monge-Kantorovich mass transfer*. Current developments in mathematics, 1997(1), 65-126.
13. **FISH, Jacob. & BELYTSCHKO, Ted.** *A First Course in Finite Elements* [en línea]. John Wiley & Sons. Ltd, 2007. [Consulta: 03 marzo 2024]. Disponible en: <http://160592857366.free.fr/joe/ebooks/Mechanical%20Engineering%20Books%20Collection/FINITE%20ELEMENT%20ANALYSIS/A%20first%20course%20in%20finite%20element%20analysis.pdf>
14. **FOLLAND, Gerald.** *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications* [en línea]. A Wiley-Interscience publication, 1999. [Consulta: 22 febrero 2024]. Disponible en: <https://59clc.files.wordpress.com/2011/01/real-and-complex-analysis.pdf>
15. **FORASTERI, Mariana.** *Introducción a los Espacios de Sobolev* [en línea]. 2014. [Consulta: 22 febrero 2024]. Disponible en: <https://www.mate.unlp.edu.ar/~demetrio/Monografias/Materias/AF/14.%20Sobolev%20-%20Forastieri.pdf>

16. **GATICA, Gabriel.** *Introducción al análisis funcional. Teoría y aplicaciones.* Reverté. Edición de Kindle, 2021.

17. **GRUBB, Gerd.** *Distribution and Operators* [en línea]. Editorial Board, 2009. [Consulta: 08 marzo 2024]. Disponible en: <http://ndl.ethernet.edu.et/bitstream/123456789/23696/1/Gerd%20Grubb.pdf>

18. **MANET, Vicent.** *Méthode des Éléments Finis: vulgarisation des aspects mathématiques et illustration de la méthode.* HAL, 2018. [Consulta: 08 noviembre 2023]. Disponible en: <https://cel.hal.science/cel-00763690>

19. **SÉNÉCHAL, David.** *Méthodes Numériques et simulations*, 2016

Total 19 referencias bibliográficas.

ANEXOS

ANEXO A: SOLUCIÓN TEÓRICA DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

```
1 // Parametros del dominio
2 real Lx = 1.0; // Longitud en la direccion x
3 real Ly = 1.0; // Longitud en la direccion y
4 int nx = 50; // Numero de divisiones en x
5 int ny = 50; // Numero de divisiones en y
6
7 // Creacion de la malla
8 mesh Th = square(nx, ny, [Lx*x, Ly*y]);
9
10 // Definir el espacio de funciones
11 fespace Vh(Th, P1); // Espacio de elementos finitos P1
12 Vh u, v; // Funciones prueba u y v
13
14 // Modos
15 int m = 1;
16 int n = 1;
17
18 // Parametros
19 real k = sqrt((m*pi/Lx)^2 + (n*pi/Ly)^2);
20 // Numero de onda a partir de su relacion con el autovalor del
21 -laplaciano
22
23 //Construccion de la funcion f que se denomina fuente
24 // Podemos tener f =0, f=Cte o f = A*exp(-b((x-x0)^2 + (y-y0)^2))
25 // si f=cte indica que la fuente emite su "energia" de manera constante
26 // si f no es cte indica que la fuente emite su "energia"
27 de manera cambiante (oscilatoria)
28
29 real A = 1; // Amplitud de la fuente
30 real beta = 100; // Controla la dispersion de la fuente
31 real x0 = 0.5; // Coordenada x de la posicion de la fuente
32 real y0 = 0.5; // Coordenada y de la posicion de la fuente
33
```

```

34 // func f = 0 // es el caso "clasico" de la ecuacion de Helmholtz
35 func f = A*exp(-beta*((x-x0)^2 + (y-y0)^2));
36
37
38 // Formular el problema variacional
39 solve Helmholtz(u, v, solver=CG)
40     = int2d(Th) (
41         dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) // Termino del Laplaciano
42         + k^2*u*v // Termino del numero de onda
43     )
44     - int2d(Th) (f*v) // Termino fuente
45     //+ on(1,2,3,4, u=1);
46     // Condicion de contorno de Dirichlet no homogenea en el borde
47     + on(1,2,3,4, u=0);
48 // Condicion de contorno de Dirichlet no homogenea en el borde
49
50 // Guardar y visualizar la solucion
51 plot(u, fill=true, value=true, ps="solucion_helmholtz.ps");

```

ANEXO B: SOLUCIÓN ANALÍTICA DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

```

1 // Parametros del dominio
2 real Lx = 1.0; // Longitud en la direccion x
3 real Ly = 1.0; // Longitud en la direccion y
4 int nx = 50; // Divisiones en x
5 int ny = 50; // Divisiones en y
6
7 // Modos seleccionados
8 int n = 1;
9 int m = 1;
10
11 // Calculo de k basado en n, m, Lx, Ly
12 real k = sqrt((n*pi/Lx)^2 + (m*pi/Ly)^2);
13
14 // Creacion de la malla
15 mesh Th = square(nx, ny, [Lx*x, Ly*y]);
16
17 // Espacio de funciones
18 fespace Vh(Th, P1);

```

```

19 Vh u;
20
21 // Definicion de la solucion para el modo (n, m)
22 u = sin(n*pi*x/Lx)*sin(m*pi*y/Ly);
23
24 // Graficar la solucion
25 plot(u, fill=true, value=true, wait=true, cmm="Sol.
26 Analitica",ps="solucion_teo_helmholtz_homo.ps");

```

ANEXO C: ANÁLISIS DEL ERROR DE LA ECUACIÓN DE HELMHOLTZ

```

1 // Parametros del dominio y la ecuacion
2 real Lx = 1.0, Ly = 1.0;
3 int n = 1, m = 1;
4 real k = sqrt((n*pi/Lx)^2 + (m*pi/Ly)^2);
5 // Calculo de k para el modo (1,1)
6
7 // Crear la malla
8 mesh Th = square(50, 50, [Lx*x, Ly*y]);
9
10 // Definir el espacio de funciones P1
11 fespace Vh(Th, P1);
12 Vh u, v;
13
14 // Resolver numericamente la ecuacion de Helmholtz con fuente f=0
15 solve Helmholtz(u, v) = int2d(Th) (
16     dx(u)*dx(v) + dy(u)*dy(v) + k^2*u*v // Ecuacion de Helmholtz
17 ) + on(1, 2, 3, 4, u=0); // Condiciones de frontera de Dirichlet
18
19
20 // Definir la solucion analitica como una variable Vh
21 Vh U = sin(n*pi*x/Lx)*sin(m*pi*y/Ly);
22
23 //u = sin(n*pi*x/Lx)*sin(m*pi*y/Ly);
24
25 // Calcular el error
26 Vh error = u - U; // u es la solucion teorica y
27 U la solucion aproximada
28 real L2error = sqrt(int2d(Th) (error^2));

```

```

29 cout << "Error L2: " << L2error << endl;
30
31 // Visualizar la solucion numerica, la solucion analitica y el
32 error
33 plot(u, fill=true, value=true, wait=true,
34 cmm="Sol.Teorica",ps="solucion_teo_helmholtz_homo.ps");
35 plot(U, fill=true, value=true, wait=true,
36 cmm="Sol.Aproximada",ps="solucion_aprox_helmholtz_homo.ps");
37 //plot(error, fill=true, value=true, wait=true, cmm="Error");

```

ANEXO D: APLICACIÓN DE LA DIFUSIÓN DE LA SEÑAL WIFI

```

1 real a = 40, b = 40, c = 0.5;
2 border a00(t=0, 1) {x=a*t; y=0; label=1;}
3 border a10(t=0, 1) {x=a; y=b*t; label=1;}
4 border a20(t=1, 0) {x=a*t; y=b; label=1;}
5 border a30(t=1, 0) {x=0; y=b*t; label=1;}
6 border a01(t=0, 1) {x=c+(a-c*2)*t; y=c; label=1;}
7 border a11(t=0, 1) {x=a-c; y=c+(b-c*2)*t; label=1;}
8 border a21(t=1, 0) {x=c+(a-c*2)*t; y=b-c; label=1;}
9 border a31(t=1, 0) {x=c; y=c+(b-c*2)*t; label=1;}
10
11 real p = 5, q = 20, d = 34, e = 1;
12 border b00(t=0, 1) {x=p+d*t; y=q; label=3;}
13 border b10(t=0, 1) {x=p+d; y=q+e*t; label=3;}
14 border b20(t=1, 0) {x=p+d*t; y=q+e; label=3;}
15 border b30(t=1, 0) {x=p; y=q+e*t; label=3;}
16
17 real r = 30, s = 1, j = 1, u = 15;
18 border c00(t=0, 1) {x=r+j*t; y=s; label=3;}
19 border c10(t=0, 1) {x=r+j; y=s+u*t; label=3;}
20 border c20(t=1, 0) {x=r+j*t; y=s+u; label=3;}
21 border c30(t=1, 0) {x=r; y=s+u*t; label=3;}
22
23 int n = 13;
24 mesh Sh = buildmesh(a00(10*n) + a10(10*n) + a20(10*n) + a30(10*n)
25 + a01(10*n) + a11(10*n) + a21(10*n) + a31(10*n)
26 + b00(5*n) + b10(5*n) + b20(5*n) + b30(5*n)
27 + c00(5*n) + c10(5*n) + c20(5*n) + c30(5*n));

```

```

28 plot(Sh, wait=1);
29 int bx;
30 for (bx = 1; bx <= 7; bx++){
31     border C(t=0, 2*pi){x=2+cos(t); y=bx*5+sin(t); label=2;}
32
33     mesh Th = buildmesh(a00(10*n) + a10(10*n) + a20(10*n) + a30(10*n)
34         + a01(10*n) + a11(10*n) + a21(10*n) + a31(10*n) + C(10)
35         + b00(5*n) + b10(5*n) + b20(5*n) + b30(5*n)
36         + c00(5*n) + c10(5*n) + c20(5*n) + c30(5*n));
37     plot(Th, wait=1);
38
39     fespace Vh(Th, P1);
40     func real wall() {
41         if (Th(x,y).region == Th(0.5,0.5).region
42             || Th(x,y).region ==Th(7,20.5).region
43             || Th(x,y).region ==
44             Th(30.5,2).region) { return 1; }
45         else { return 0; }
46     }
47     Vh<complex> v,w;
48
49     randinit(900);
50     Vh wallreflexion = randreal1();
51     Vh<complex> wallabsorption = randreal1()*0.5i;
52     Vh k = 6;
53
54     cout << "Reflexion of walls min/max: " << wallreflexion[].min
55     << " " << wallreflexion[].max << "\n";
56     cout << "Absorption of walls min/max: "
57     << wallabsorption[].min << " " << wallabsorption[].max << "\n";
58
59     problem muwave(v,w) =
60         int2d(Th) (
61             (v*w*k^2)/(1+(wallreflexion+wallabsorption)*wall())^2
62             - (dx(v)*dx(w)+dy(v)*dy(w))
63         )
64         + on(2, v=1);
65     muwave;
66     Vh vm = log(real(v)^2 + imag(v)^2);

```



```
67     plot(vm, wait=1, fill=true, value=0, nbiso=65);  
68 }
```



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA
NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO

Fecha de entrega: 11/07/2024

INFORMACIÓN DEL AUTOR
Nombres – Apellidos: Aracely Anabel Bastidas Quingaluisa
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemática
 Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo Director del Trabajo de Integración Curricular
 Mat. Luis Marcelo Cortez Bonilla Asesor del Trabajo de Integración Curricular