ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

“LA TEORÍA APOE Y EL ÁLGEBRA LINEAL EN LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH: TRANSFORMACIONES LINEALES”

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTOR:

TANYA JOHANA SARANGO JUMBO

Riobamba – Ecuador

2024

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

“LA TEORÍA APOE Y EL ÁLGEBRA LINEAL EN LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH: TRANSFORMACIONES LINEALES”

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTOR: TANYA JOHANA SARANGO JUMBO

DIRECTOR: Dr. RUBÉN ANTONIO PAZMIÑO MAJI, PhD.

Riobamba – Ecuador

2024

Yo, Tanya Johana Sarango Jumbo, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citadas y referenciados.

Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 10 de junio del 2024

Tanya Johana Sarango Jumbo
C.I. 1104039811

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA DE MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación, **LA TEORÍA APOE Y EL ÁLGEBRA LINEAL EN LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH: TRANSFORMACIONES LINEALES**, realizado por la señorita: **TANYA JOHANA SARANGO JUMBO**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
Lic. Carlos Eduardo Cova Salaya. MSc. **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**	____________________	2024-06-10
Dr. Rubén Antonio Pazmiño Maji. PhD. **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**	____________________	2024-06-10
Ing. María de Lourdes Palacios Robalino. MSc. **ASESORA DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**	____________________	2024-06-10

DEDICATORIA

Este Trabajo de Integración Curricular lo dedico, en primer lugar, a Dios, quien por medio del Espíritu Santo, me otorgó el don de la inteligencia para poder concluir esta investigación. Además, a la Virgen del Cisne, protectora ante todas mis adversidades. En segundo lugar, a mis amados padres, el Lic. Heriberto Sarango Abad † y la Dña. Gloria Jumbo Pardo, por inculcarme los valores más nobles y ser ejemplos de constancia, fortaleza y humildad. A mis hermanos, Leslie, Edwin y Marlon, quienes de una u otra manera siempre me apoyaron. A Andrea, nunca me dejó sola, brindándome su apoyo y compañía en esta travesía de formación académica. Finalmente, a mis queridas mascotas: Jerack, Doky y Killa, que me han enseñado el verdadero amor hacia los animales.

Tanya

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer hoy, mañana y siempre a mi madre hermosa, que desde el fallecimiento de mi padre ha sido el apoyo incondicional durante toda mi formación personal y profesional. Te amo mamita ♡, eres el mayor tesoro en mi vida. Mi eterna gratitud a mi Director de Tesis: Dr. Rubén A. Pazmiño M, por su sabiduría, paciencia y orientación en el desarrollo de mi investigación. Al grupo Ciencia de Datos CIDED. Agradezco de manera infinita a mi cotutora la Ing. María Palacios, a todas aquellas personas que conocí en el transcurso de mi vida universitaria y fueron pilares fundamentales en mi educación, docentes que no solo me brindaron sus conocimientos, sino que me hicieron sentir que las matemáticas siempre fueron parte de mi vida.

Tanya

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO III

CAPÍTULO IV

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

Entre los años 2017 y 2022, se identificó una tendencia de bajo rendimiento académico en el área del Álgebra Lineal I, lo que **ocasionó** un 24 % de reprobados en un total de 205 estudiantes en la carrera de matemática de la ESPOCH, por lo tanto, el objetivo de la siguiente investigación fue utilizar la teoría APOE para una primera representación de la forma de enseñar los valores y vectores propios de las matrices asociadas a las transformaciones lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH, mediante una descomposición genética. La investigación es en el área matemática educativa, de tipo cuantitativo a nivel explicativo, la revisión sistemática de literatura se enmarca en un enfoque cuantitativo, según un **meta-análisis**, así, se actualizó, hasta el 2023 la "Revisión sistemática de la teoría APOE en los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH". Además, se evidenció las descomposiciones genéticas de la teoría APOE al Álgebra Lineal y, mediante la similaridad de Israel Lerman se determinaron los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH, finalmente se adaptó la descomposición genética del artículo Scopus_014, posteriormente se creó el curso en Moodle por el Grupo de Investigación Ciencia de Datos (CIDED) para el 4^{to} semestre, utilizando la metodología (PACIE), que abarca Presencia, Alcance, Capacitación, Interacción, *E-learning*, los resultados cuantitativos se generó con el software libre *R*, donde se utilizó el test de U Mann-Whitney para comparar las medianas de los grupos experimentales y de control. En ese contexto, se concluyó que no hubo suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula respecto a la variable diagnóstica y prueba, con un nivel de confiabilidad del 95 %, es así, se recomienda para futuras investigaciones un colectivo de estudio más amplio.

Palabras clave: <TEORÍA APOE>, <REVISIÓN SISTEMÁTICA>, <ÁLGEBRA LINEAL>, <AUTOVECTORES Y AUTOVALORES>, <MATRIZ ASOCIADA>, <TRANSFORMACIÓN LINEAL>, <DIDÁTICA DE LA MATEMÁTICA>, <SIMILARIDAD DE ISRAEL LERMAN>.

ABSTRACT

Between 2017 and 2022, a trend of low academic performance in the Linear Algebra I course was identified, resulting in a 24 % failure rate among 205 students in the Mathematics Program at ESPOCH. Consequently, the objective of the present research was to use the APOE (Action-Process-Object-Schema) theory for an initial representation of the teaching methodology for eigenvalues and eigenvectors of matrices associated with linear transformations in the Mathematics Program at ESPOCH, through genetic decomposition. This research falls within the domain of mathematics education and adopts a quantitative, explanatory approach. The systematic literature review is framed within a quantitative perspective, incorporating a meta-analysis. Thus, an updated "Systematic Review of APOE Theory in the Final Semesters of the Mathematics Program at ESPOCH" was conducted up to 2023. Furthermore, all genetic decompositions of the APOE theory in Linear Algebra were documented then through Israel Lerman's similarity measure, and the application scenarios of APOE theory in Linear Algebra within the mathematics program at ESPOCH were determined. Finally, the genetic decomposition of the *Scopus*_014 article was adapted. Thereafter, the course was created in the Moodle platform by the Data Science Research Group (CIDED) for the fourth semester, employing the PACIE methodology (Presence, Scope, Training, Interaction, E-learning). Quantitative results were generated using the free software R, and the Mann-Whitney test was used to compare the medians of the experimental and control groups. In this context, it is concluded that there was insufficient evidence to reject the null hypothesis in relation to the diagnostic variable and test with a 95 % confidence level. Therefore, it is recommended to use a larger study collective for future research.

Keywords: <APOE THEORY>, <SYSTEMATIC REVIEW>, <LINEAR ALGEBRA>, <EIGENVECTORS AND EIGENVALUES>, <ASSOCIATED MATRIX>, <LINEAR TRANSFORMATION>, <MATHEMATICS DIDACTICS>, <ISRAEL LERMAN SIMILARITY>

Lcda. María Eugenia Camacho. MSc.
C.I. 0601609597

Siglas, Acrónimos y Códigos

CÓDIGOS

- **MATTB05:** Matemática.
- **MATTB11:** Álgebra Superior.
- **MATTP18:** Álgebra Lineal I
- **MATTP20:** Álgebra Lineal II.
- **MATTP20:** Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- **MATTB36:** Análisis Funcional.
- **MATTP30:** Didáctica de la matemática.

ACRÓNIMOS

- **APOE:** Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas.
- **ACE:** Actividades, Discusión en clase, Ejercicios.
- **MOODLE:** Modular, Object, Oriented, Dynamic, Learning, Environment.
- **PACIE:** Presencia, Alcance, Capacitación, Interacción, *E-learning*.
- **PICOC:** Población, Intervención, Comparación, Resultados, Contexto.
- **PICOS:** Population, Intervention, Comparison, Outcome, Study Type.

SIGLAS

- **ESPOCH:** Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.
- **LOES:** Ley Orgánica de Educación Superior.
- **CACES:** Consejo de Aseguramiento de la Calidad de la Educación Superior.
- **CES:** Consejo de Educación Superior.
- **TIC:** Trabajo de Integración Curricular.

- **RSL:** Revisión Sistemática de Literatura.
- **DG:** Descomposición Genética.
- **PRISMA:** Preferred Reporting Items for Systematic Reviews Meta-Analyses.
- **JCR:** The Journal Citation Reports.
- **CIDED:** Grupo de Investigación Ciencia de Datos.
- **ASI:** Análisis Estadístico Implicativo.
- H_0**:** Hipótesis nula.
- H_1**:** Hipótesis alternativa.
- Me_C**:** Mediana del Grupo de Control.
- Me_E**:** Mediana del Grupo Experimental.
- **csv:** Comma Separated Values.

INTRODUCCIÓN

El Álgebra Lineal se caracteriza por su naturaleza abstracta, lo que representa un desafío significativo para los estudiantes al intentar comprender conceptos matemáticos que carecen de representación visual directa. Dentro de estos conceptos se destacan las Transformaciones Lineales, que son fundamentales para la disciplina pero a menudo difíciles de visualizar. Este obstáculo en la educación matemática requiere enfoques didácticos innovadores que faciliten la comprensión de tales abstracciones. Lo que nos ha llevado a la implementación de la teoría APOE, la cual se dicta en la asignatura Didáctica de la Matemática a partir del sexto semestre, (Unidad Profesional) con código MATTP30 en la carrera de Matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

La teoría APOE es una teoría constructivista que se originó en el trabajo de *Jean Piaget (1952)* y fue adaptada por el profesor *Ed Dubinsky (1991)* para describir cómo se construye el conocimiento matemático. En la implementación de esta teoría implica la creación de un modelo teórico para el análisis, conocido como descomposición genética. Este modelo, aunque no es el único, proporciona una descripción detallada de cómo se forma un concepto matemático de interés. La descomposición genética es la base del ciclo de investigación y culmina con su validación. Según *Dubinsky*, su teoría considera cinco tipos de abstracciones reflexivas: interiorización, coordinación, reversión, encapsulación y desencapsulación. Se dice que estos tipos son mecanismos mentales que dan lugar a estructuras llamadas acciones, procesos, objetos y esquemas

A través de la teoría APOE, se propuso el modelo de enseñanza conocido como el ciclo *ACE:* (Actividades, Discusión en clase y Ejercicios). Para la plataforma Moodle, se utilizó la metodología *PACIE*: (Presencia, Alcance, Capacitación, Interacción, *E-learning*). La similaridad propuesta por *Israel Lerman* provee una herramienta valiosa que, a través de la representación gráfica de dendrogramas (árboles de similaridad), exhibe variables afines y la estructura jerárquica subyacente. Esto permite visualizar, mediante un dendrograma, las distintas relaciones asimétricas entre variables y sus clases, facilitando así la generación de nuevas hipótesis para descomposiciones genéticas en investigaciones futuras. El interés de esta investigación es "La teoría APOE y el Álgebra Lineal en la carrera de Matemática de la ESPOCH, aplicada a los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales".

En la ESPOCH aún no se ha establecido una metodología para enseñar los conceptos de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, a través de una descomposición genética. Este tema pertenece al curso de Álgebra Lineal II que se encuentra en la Unidad N.° 2 de su respectivo sílabo. Además se corroboró que las actas de calificaciones del tercer parcial de la carrera de Matemática de la ESPOCH, donde se enseñan las Transformaciones Lineales - subárea del Álgebra Lineal I, Unidad N.° 4, tienen un promedio total de $5.6/10$ entre los años 2017 hasta 2022.

Por consiguiente, se planteó la necesidad de realizar una investigación con un diseño pre-experimental, en la que se empleó una lectura científica de la teoría APOE en relación con las Transformaciones Lineales. Esto facilitó la identificación de todos los contextos de aplicación en el curso de Álgebra Lineal I y II de la carrera de Matemática de la ESPOCH. A su vez, por cambios de la malla curricular en el año 2020, se pudo evidenciar que la materia de Álgebra Lineal I dejó de ser impartida en el primer semestre de la carrera. Con estos cambios, en la actualidad la materia se encuentra en la malla curricular de tercer nivel, mientras que Álgebra Lineal II al cuarto nivel. Además, a través de la similaridad de *Israel Lerman*, se promovió la investigación de nuevas propuestas de descomposiciones genéticas.

El siguiente Trabajo de Integración Curricular se estructuró en cinco capítulos. El Capítulo 1 aborda la problemática que motivó la investigación, esbozando los objetivos que orientaron su progreso. Además, se argumenta la necesidad de investigaciones sobre la enseñanza de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, mediante una descomposición genética. El Capítulo 2 introduce el marco teórico que proporcionó los conocimientos fundamentales para la investigación, con un enfoque en la teoría APOE y las Transformaciones Lineales. El Capítulo 3 detalla la metodología que se aplicó en el desarrollo del Trabajo de Integración Curricular, con especial atención en el campo de la educación matemática.

El capítulo 4, se presentan los resultados obtenidos en este trabajo de investigación:

1. Actualización de La Revisión Sistemática de la teoría APOE en el área de la matemática hasta el 2023.
2. Los Escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal y detallar todas las descomposiciones genéticas.
3. Escenarios de aplicación a la carrera Matemática de la ESPOCH, por medio de la similaridad de *Israel Lerman*.

4. Resultados obtenidos de aplicar la descomposición genética al 4^{to} semestre de la carrera de Matemática de la ESPOCH.

El capítulo 5, se presentan los resultados finales, conclusiones y recomendaciones obtenidas en el desarrollo de la investigación. Para concluir, presentamos las referencias correspondientes que emergieron de la investigación. Estas referencias son fundamentales para validar los hallazgos y proporcionar un contexto adicional para el trabajo realizado, de esta manera se generó un documento dirigido a los investigadores en el área de la matemática educativa, ya que en los últimos 9 años se han centrado en aplicar la teoría APOE en diferentes áreas de la matemática y se pueda promover la aplicación experimental por los trabajos de titulación de la carrera de Matemática de la ESPOCH.

Observación. El siguiente vínculo contiene los respaldos de toda la información para el desarrollo de este Trabajo de Integración Curricular, se encuentra organizada por carpetas para su acceso y almacenada en el drive, con el siguiente link: https://drive.google.com/drive/folders/1W8Y61VAjh_tBF9tT5d2CH_nZmQsuq7jx?usp=drive_link

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

Según el "Plan de estudios de la carrera de matemática" de la ESPOCH, y por cambios de la malla curricular del 2020, para recibir la asignatura de Álgebra Lineal I (Unidad básica) tercer semestre con su código MATTP18, se debe aprobar las materias de: Matemática (Unidad Básica), primer semestre con su código MATTB05 y Álgebra Superior (Unidad básica) segundo semestre con su código MATTB11.

Se toma en cuenta que las bases de los conocimientos académicos de los primeros niveles en Álgebra Lineal I, deben ser fundamentales para la secuencia de un aprendizaje adecuado, y no se produzca un bajo rendimiento en los niveles siguientes; ya que, en la malla curricular de la carrera de matemática de la ESPOCH, existen materias secuenciales que necesitan de Álgebra Lineal I, tales como: Álgebra Lineal II (Unidad Profesional), cuarto semestre con su código MATTP20, Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (Unidad Profesional), cuarto semestre con código MATTP21 y Análisis Funcional (Unidad Profesional), séptimo semestre con código MATTP36.

En la ESPOCH, específicamente en la carrera de matemática, se identificó un bajo rendimiento académico en la materia de Álgebra Lineal I entre los años 2017 hasta 2022. Este análisis se realizó en un grupo total de 205 estudiantes, de los cuales el 24 % no logró aprobar. El promedio general obtenido fue de 6.7/10. Estos datos se obtuvieron de las actas de calificaciones de la carrera de matemática, como se verificó en la **Tabla 1-1**. Se encuentra con más detalle en el siguiente enlace: https://drive.google.com/drive/folders/1dvlmdsPhFhbfK8eYGE9dWPXxSh34gUx-?usp=drive_link, se clasificaron por períodos académicos entre los años 2017 hasta 2022.

Tabla 1-1: Estudiantes Aprobados - Reprobados de la materia de Álgebra Lineal I, entre los años 2017 hasta 2022

DATOS GENERALES

Materia: Álgebra Lineal I

	2017-2018	2018	2018-2019	2019	2019-2020	2020	2020-2021	2021	2021-2022	2022		
APROBADOS	13	34	22	22	23	32	4			5	**T. APROBADOS**	**155**
REPROBADOS	1	9	9	3	6	16	0			6	**T. REPROBADOS**	**50**
PROMEDIO	6,48	6,55	6,11	8,51	6,53	6,56	7,92			5,09	**T. PROMEDIO**	**6,72**

Estudiantes	**205**	
Porcentaje de reprobados	**24,39**	**24 %**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Como se aprecia en la **Tabla 1-1**, desde la creación de la carrera de matemática en la ESPOCH - Riobamba, se han registrado 10 períodos académicos desde 2017 hasta 2022, con un total de 205 estudiantes. Se verificó que faltan datos de dos períodos académicos, específicamente de los años 2021 y $(2021-2022)$. De los estudiantes matriculados, 155 han aprobado, 50 han reprobado, lo que representa una tasa de reprobación del 24 %. El promedio general alcanzado es dé $6,72/10$. Estos datos son registros de la materia de Álgebra Lineal I. Disponible en: https://docs.google.com/spreadsheets/d/13Mj8RJgrxrJ-yW2gvPmrErpBBPLkadUj/edit?usp=sharing&ouid=109900342582328389854&rtpof=true&sd=true.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo General*

Utilizar la teoría APOE para una primera representación de la forma de enseñar las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH, mediante una descomposición genética.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Ampliar la Revisión Sistemática de la teoría APOE mediante la base de datos especializadas hasta el año 2023, para actualizarla.
- Analizar todas las aplicaciones de la teoría APOE al Álgebra Lineal, para luego detallar todas las descomposiciones genéticas.
- Determinar los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH mediante la similaridad de *Israel Lerman*, para promover la investigación de nuevas propuestas de descomposiciones genéticas.
- Aplicar el escenario de las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH y así representar una forma de enseñanza por medio de la descomposición genética.
- Socializar los resultados de la aplicación de la teoría APOE del escenario de las Transformaciones Lineales mediante cálculos cuantitativos, para promover la aplicación experimental por los trabajos de titulación de la carrera de matemática de la ESPOCH.

1.3. Justificación

La teoría APOE, originada en la teoría constructivista de *Jean Piaget* y expandida por el matemático *Ed Dubinsky*, se basa en la abstracción reflexiva. *Dubinsky* formuló una teoría sobre cómo se aprenden y enseñan las matemáticas. De la tesis "Revisión sistemática de la teoría APOE en los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH" (Aldás Castro, 2022). Identificaron a esta teoría como el área principal de estudio, con un 22 % de los artículos relacionados con la teoría APOE al Álgebra Lineal, según la respuesta a la pregunta de investigación (PI10). Estos artículos constituyeron la fundamentación para la elección del área de Álgebra Lineal como foco de la investigación. A continuación, se enumeran:

1. DIÁLOGO ENTRE LAS TEORÍAS APOE Y TAD (Trigueros, 2019).
2. IMPULSIVE AND REFLECTIVE STUDENTS' UNDERSTANDING TO LINEAR EQUATIONS SYSTEM: AN ANANALYSIS THROUGH APOS THEORY (Rachmawati y Siswono, 2020).
3. ANALYSIS OF STUDENTS' UNDERSTANDING FOR THE CONCEPT OF MATRIX RANK BASED ON APOS THEORY (Inganah, 2018).
4. EVOLUCIÓN EN EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL. UNA MIRADA A TRES INTERPRETACIONES DESDE LA TEORIA APOE (Maturana et al., 2015).
5. TEACHING EIGENVALUES AND EIGENVECTORS USING MODELS AND APOS THEORY (Salgado y Trigueros, 2015).
6. EL APRENDIZAJE DE ESPACIOS VECTORIALES EN ÁLGEBRA: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE (Montenegro, 2018).
7. DOES THE USE OF APOS THEORY PROMOTE STUDENTS' ACHIEVEMENT IN ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA? (Arnawa et al., 2021).
8. LA COMPRENSIÓN DE LA RECTA DESDE LA TEORÍA APOE (Suárez Gil et al., 2021).
9. LEARNING THE CONCEPT OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS: A COMPARATIVE ANALYSIS OF ACHIEVED CONCEPT CONSTRUCTION IN LINEAR ALGEBRA USING APOS THEORY AMONG STUDENTS FROM DIFFERENT EDUCATIONAL BACKGROUNDS (Schirmer y Altieri, 2019).
10. ESTUDIO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA MATRIZ DE CAMBIO DE BASE EN TÉRMINOS DE LA TEORÍA APOE (Mendoza et al., 2021).
11. ESTRUCTURAS MENTALES QUE MODELAN EL APRENDIZAJE DE UN TEOREMA DEL ÁLGEBRA LINEAL: UN ESTUDIO DE CASOS EN EL CONTEXTO UNIVERSITARIO (Roa y Parraguez, 2017).
12. PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' MENTAL CONSTRUCTIONS WHEN USING CRAMER'S RULE (Ndlovu y Brijlall, 2019).
13. CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DEL ESPACIO VECTORIAL R^2 (M. Rodríguez Jara et al., 2018).
14. CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL (Trigueros Gaisman et al., 2015).

15. MENTAL CONSTRUCTIONS IN LINEAR ALGEBRA (Oktaç, 2019).

16. AN APOS ANALYSIS OF SOLVING SYSTEMS OF EQUATIONS USING THE INVERSE MATRIX METHOD (Kazunga y Bansilal, 2020).

17. COGNITIVE CONSTRUCTION OF THE SOLUTION SET OF A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS WITH TWO UNKNOWNS (M. A. Rodríguez Jara et al., 2019).

18. ESTRUCTURAS MENTALES PARA MODELAR EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE CAMBIO BASE DE VECTORES (Parraguez et al., 2016).

19. MATRIX MULTIPLICATION AND TRANSFORMATIONS: AN APOS APPROACH (Figueroa et al., 2018).

20. CONSTRUCCIÓN DE LOS OPERADORES LINEALES DIAGONALIZABLES CON BASE EN LA TEORÍA APOE (Mendoza et al., 2021).

21. TASK DESIGN IN APOS THEORY (Trigueros, 2019).

22. THE LEARNING AND TEACHING OF LINEAR ALGEBRA: OBSERVATIONS AND GENERALIZATIONS (Harel, 2017).

23. ZIMBABWEAN IN-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' UNDERSTANDING OF MATRIX OPERATIONS (Kazunga y Bansilal, 2016).

24. UN ESQUEMA DE TRANSFORMACIÓN LINEAL: CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS ABSTRACTOS A PARTIR DE LA INTERIORIZACIÓN DE ACCIONES CONCRETAS (González Rojas y Roa Fuentes, 2017).

25. AN EXPLORATORY STUDY ON THE UNDERSTANDING OF THE VECTOR SUBSPACE CONCEPT (Mutambara y Bansilal, 2019).

26. STUDENTS' UNDERSTANDING OF SOLVING A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS USING MATRIX METHODS: A CASE STUDY (Montenegro, 2018).

27. DEVELOPMENT OF STUDENTS' WORKSHEET BASED ON APOS THEORY APPROACH TO IMPROVE STUDENT ACHIEVMENT IN LEARNING SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS (Amawa et al., 2019).

Por lo tanto, considerando la información anterior y la falta de investigaciones sobre métodos de enseñanza como la descomposición genética en la ESPOCH y a nivel superior en el Ecuador, se resalta la necesidad de profundizar en estos campos. Además, el estudio que se realizó de las actas de calificaciones de la asignatura del Álgebra Lineal I y del tercer parcial, donde se enseñaron los conceptos de Transformaciones Lineales (Unidad N.° 4) de su sílabo, contó con el 24% de reprobados en un total de 205 estudiantes entre los años 2017 hasta 2022 y un promedio general de $5.6/10$.

Observación. Es importante señalar, para el desarrollo de la **Tabla 1-2**, las calificaciones del primer parcial se basan en una escala de 8, por lo que se ajustó a una escala de 10 para mantener la consistencia con el segundo y tercer parcial, que ya utilizan esta escala. De esta manera, los promedios de los tres parciales se presentan sobre 10. Por lo tanto, se observa que en el área del Álgebra Lineal y en la (Unidad N.° 4), tema de las Transformaciones Lineales, cuenta con un promedio de $5,6/10$ con respecto a los otros parciales y es el que tiene menor valor.

Tabla 1-2: Promedio general de la asignatura de Álgebra Lineal I, de los períodos académicos del primer, segundo y tercer parcial de los estudiantes de la carrera de matemática de la ESPOCH, entre los años 2017 hasta 2022

	PRIMER PARCIAL	**SEGUNDO PARCIAL**	**TERCER PARCIAL**
Períodos Académicos	**Determinantes Matrices Ecuaciones Lineales**	**Espacios Vectoriales**	**Transformaciones Lineales**
2017-2018	8,14	5,92	7,40
2018	7,06	7,23	7,30
2018-2019	7,03	7,00	6,30
2019	7,40	8,32	7,60
2019-2020	7,90	7,06	7,80
2020	7,35	7,58	6,70
2020-2021	9,75	8,25	7,80
2021	0,00	0,00	0,00
2021-2022	0,00	0,00	0,00
2022	4,72	5,63	5,00
SUMA	**59,35**	**56,99**	**55,90**
PROMEDIO	**5,9**	**5,7**	**5,6**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Como se aprecia, en la **Tabla 1-2** los promedios que se encontraron en las actas de calificaciones de los períodos académicos entre los años 2017 hasta 2022 de la carrera de matemática de la ESPOCH. En el primer, segundo y tercer parcial se observa según los 3 sílabos académicos desde Octubre 2017 Marzo 2018, Septiembre 2019 Febrero 2020 y Octubre 2023 Marzo 2024, constan de 4 unidades, de las cuales siguen con el mismo orden académico. Se describen a continuación:

- **Primer Parcial:** Determinantes, Matrices y Ecuaciones lineales. Obtuvo una suma total de $59,35$ y un promedio de $5,9/10$.
- **Segundo Parcial:** Espacios Vectoriales. Obtuvo una suma total de $56,99$ y un promedio de $5,7/10$.
- **Tercer Parcial:** Transformaciones lineales. Obtuvo una suma total de $55,90$ y un promedio de $5,6$.

Por estas razones, según la Ley Orgánica de Educación Superior (LOES). TÍTULO V: CALIDAD DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. CAPÍTULO II: NORMAS PARA LA GARANTÍA DE LA CALIDAD. Art 103.- Evaluación de resultados de aprendizaje de carreras y programas:

> "En caso de que un porcentaje mayor al 40 % de estudiantes de un programa o carrera no logre aprobar el examen durante dos ocasiones consecutivas, la institución de educación superior será objeto de intervención parcial en la unidad académica responsable de la carrera o programa evaluado por parte del Consejo de Educación Superior".

Es de vital importancia el seguimiento continuo de calidad de la educación superior, lo que incluye la evaluación del desempeño al docente y metodologías de enseñanza, mediante el Consejo de Aseguramiento de la Calidad de la Educación Superior (CACES), que es el órgano encargado de diseñar y aplicar esta evaluación y de determinar, en coordinación con el ente rector de la política pública de educación superior, las carreras que serán sometidas a la misma.

En consecuencia, al analizar las calificaciones obtenidas entre los años 2017 hasta 2022 en la asignatura de Álgebra Lineal I y de las Transformaciones Lineales (Unidad N.° 4) de la carrera de matemática de la ESPOCH, se reflejó en la **Tabla 1-3** que los porcentajes correspondientes a cada uno de los tres parciales, donde se tomó notas menores a 7 dio como resultado el 46 %. Esta tendencia subraya la importancia de examinar detenidamente las causas subyacentes y de implementar estrategias efectivas que permitan a los estudiantes mejorar su desempeño en evaluaciones futuras, como se menciona en Ley Orgánica de Educación Superior (LOES). TÍTULO V: CALIDAD DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. CAPÍTULO II: NORMAS PARA LA GARANTÍA DE LA CALIDAD. Art 103.- Evaluación de resultados de aprendizaje de carreras y programas.

Tabla 1-3: Porcentaje de notas < a 7, entre los períodos 2017 hasta 2022

	T. NOTAS < 7	**PORCENTAJE**	
Primer parcial	168	81,95	
Segundo parcial	49	23,90	
Tercer parcial	63	30,73	
TOTAL		**45,53**	**46 %**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

De acuerdo con la tesis de (Aldás Castro, 2022, pág. 51), México lidera la elaboración de artículos científicos a nivel mundial, con 22 trabajos identificados, lo que representa el $17,89\,\%$ de los 123 estudiados tras aplicar criterios de inclusión, exclusión y calidad. Por otro lado, a nivel superior en Ecuador se ha logrado actualizar y demostrar la existencia del primer artículo titulado "La teoría APOE: Un mapeo sistemático parcial" (Pazmiño et al., 2022, pág. 128). Este representa la primera publicación de autores ecuatorianos de la ESPOCH en el año 2022.

La teoría APOE es una herramienta creada para simplificar la comprensión de las matemáticas. Se implementa a través de la descomposición genética, una técnica que utiliza cuatro etapas: acciones, procesos, objetos para organizarlos en esquemas. Esta teoría tiene sus fundamentos en el trabajo del psicólogo *Jean Piaget* y fue desarrollada por el profesor *Ed Dubinsky* en el año 1980.

Además, es importante destacar que el Álgebra Lineal aborda conceptos abstractos, entre los cuales se incluyen las Transformaciones Lineales. Este término se refiere a una función establecida entre dos espacios vectoriales, donde los procesos de espacio vectorial y función se sincronizan para formar una transformación. Este concepto fue estudiado de forma independiente por *Jacobi* en 1830, *Kronecker* en la década de 1950, y *Weierstrass* en 1860, y adoptó su forma actual en 1918 gracias al matemático alemán *Hermann Weyl* $(1885-1955)$.

Antes de tratar el tópico del siguiente Trabajo de Integración Curricular (TIC), es fundamental establecer algunos conceptos básicos. Desde su definición y notación hasta sus operaciones clave, estos conceptos serán esenciales para comprender y abordar la aplicación del escenario de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH.

2.1. Revisión sistemática de literatura (RSL)

Las revisiones sistemáticas de literatura científica (RSL) son una herramienta fundamental, para evaluar y resumir investigaciones científicas. Estas reúnen y sintetizan la evidencia disponible sobre un tema específico de manera rigurosa y objetiva. Para llevar a cabo una (RSL), se siguen pasos predefinidos y se aplican criterios estrictos para seleccionar los estudios relevantes. El objetivo es minimizar el sesgo y obtener una visión completa y confiable del tema en cuestión (Aguilera Eguía, 2014, pág. 359).

Según, la tesis que trata la "Revisión sistemática de la teoría APOE en los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH " (Aldás Castro, 2022, pág. 20), utilizó el desarrollo de una encuesta para conocer las necesidades que tuvieron los estudiantes de los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH sobre la teoría APOE. En este estudio, se exploró el interés de los participantes en conocer más sobre la teoría APOE. Además, se tuvo en cuenta el área temática de los artículos científicos que aplican la teoría mencionada.

Cada pregunta se formuló basándose en la evidencia obtenida de gráficos c omparativos, que analizaban el nivel de conocimiento de los participantes sobre la teoría APOE y su interés en aprender más sobre los siguientes aspectos de los artículos científicos: afiliación principal, año de publicación, autores, autores con afiliación ecuatoriana, caracterización del software, idioma, país, revista, área en matemáticas y temática de la teoría APOE que el artículo científico utiliza.

De acuerdo con (Pazmiño et al., 2021), se muestran los elementos para una correcta revisión sistemática, a continuación considera lo siguiente (pág. 3-7):

- Claro enunciado de las preguntas de investigación a responder.
- Método *PICOC*.
- Tiempo de identificación de la evidencia disponible.
- Fuente de la extracción de los datos.
- Definición de los criterios de inclusión, exclusión y calidad.
- Evaluación de la calidad de los estudios.
- Análisis estadísticos.

2.2. Método *PICOC*

Cualquier pregunta que se formule correctamente debe cumplir con dos criterios. En primer lugar, la pregunta debe ser pertinente para el problema que se ha identificado. Posteriormente, debe estructurarse de tal manera que facilite la búsqueda de una respuesta precisa y exhaustiva.

Para satisfacer estos criterios, tal como (Petticrew y Roberts, 2016) expone, la formulación de preguntas durante la revisión puede requerir a menudo la creación de múltiples cuestionamientos relacionados. Esto conlleva la necesidad de llevar a cabo estudios con distintos diseños. Así, la definición de las (RSL) no se circunscribe al acrónimo **PICO** (Población, Intervención, Comparación, Resultados); sino que sé añade una quinta letra, **C** de Contexto, conformando el acrónimo **PICOC** (pág. 42).

Población (P): ¿Quién?, etapa que describe la situación que se va a abordar.
Intervención (I): ¿Qué o cómo?, tratamiento o causa que se va a estudiar.
Comparación (C): ¿Con qué?, se establece una comparación relevante para evaluar la intervención.
Resultados (O): ¿Qué se intenta conseguir o mejorar?, determinan los resultados que se esperan obtener.
Contexto (C): ¿En qué tipo de organización / circunstancias?

2.3. Declaración *PRISMA*

La declaración *PRISMA*, asiste a los revisores sistemáticos a informar de forma transparente por qué se realizó la revisión, qué hicieron los autores y qué encontraron. Su primera publicación se realizó en 2009, y de acuerdo a (Mendoza et al., 2021):

> La declaración (Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses) *(PRISMA)* 2020, es una guía actualizada para informar sobre revisiones sistemáticas, reemplaza la versión anterior de 2009 y refleja los avances en metodología y terminología. Proporciona directrices claras para la presentación transparente y rigurosa de los hallazgos en las revisiones sistemáticas (pág. 1).

2.3.1. *Objetivo de la declaración PRISMA* 2020

Según como se enuncia en (Yepes Nuñez et al., 2021):

> El propósito de la declaración *PRISMA* 2020 no es guiar la realización de revisiones sistemáticas, ya que existen varios recursos disponibles para ello. Sin embargo, estar familiarizado con *PRISMA* 2020 es útil al planificar y llevar a cabo revisiones sistemáticas para

garantizar que se capture toda la información recomendada. Además, *PRISMA* 2020 no debe utilizarse para evaluar la realización o la calidad metodológica de las revisiones sistemáticas, ya que existen herramientas específicas para este propósito. *PRISMA* 2020 tampoco está destinada a documentar la publicación de protocolos de revisión sistemática, para lo cual ya existe una declaración específica (Declaración *PRISMA* para protocolos *[PRISMA-P]* 2015) (pág. 792).

2.3.2. *Cómo se utilizó la declaración PRISMA en la (RSL) sobre la teoría APOE en el área de la matemática, entre los años* 2015 *hasta* 2023

Los 27 ítems de la lista de verificación y las recomendaciones para las revisiones originales y actualizadas de la metodología PRISMA, se encuentran detalladas en el Anexo: A: DECLARACIÓN PRISMA 2020: REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LITERATURA SOBRE LA TEORÍA APOE EN EL ÁREA DE LA MATEMÁTICA, ENTRE LOS AÑOS 2015 HASTA 2023. A continuación, se describe cómo se aplicó esta metodología en la actualización de la (Revisión Sistemática de Literatura) hasta el año 2023 (J. et al., 2021, pág. 1-2).

1. **Sección 1, TÍTULO**: Se identificó como una (RSL).
2. **Sección 2, RESUMEN:** Se usó como guía para garantizar la (RSL).
3. **Sección 3, INTRODUCCIÓN:** Como justificación, se tomó como base la (RSL) de la Tesis realizada por (Aldás Castro, 2022) y se actualizó hasta el 2023. Además, como objetivo se abordó 10 preguntas para la Revisión Sistemática de Literatura.
4. **Sección 4, MÉTODOS:**
   a) Se establecieron los criterios de inclusión y exclusión para la revisión.
   b) Se llevaron a cabo búsquedas exhaustivas en todas las bases de datos relevantes (PICOS), registros y sitios web, aplicando los filtros y límites correspondientes.
   c) Se utilizó los buscadores de múltiples bases de datos de alto nivel, que brindaron información sobre distintas disciplinas académicas como: *Google Scholar, SciELO, Scopus y Wos*.
   d) Se definió el método para determinar la conformidad de los estudios con los criterios de inclusión de la revisión.
   e) Se identificaron los métodos empleados para recoger datos de los informes y las herramientas de automatización usadas en el proceso.

f) Se establecieron procedimientos para seleccionar los resultados a recopilar.

g) Se describieron las suposiciones realizadas ante cualquier información ausente o ambigua.

h) Las características de las intervenciones de los estudios se tabularon en Excel, siguiendo los criterios de inclusión y exclusión.

i) Se aplicaron métodos en Excel para organizar y presentar visualmente los resultados de los estudios y las síntesis individuales.

j) En cuanto a la representación de datos, se implementó la conversión de datos utilizando resultados binarios, que se refieren a variables con dos posibles valores: 1 (para "si" o "éxito") y 0 (para "no" o "fracaso").

5. **Sección 5, RESULTADOS:**

a) Se describió los resultados del proceso de búsqueda y selección, desde la cantidad de registros identificados en la búsqueda hasta la cantidad de estudios incluidos en la revisión, idealmente utilizando un diagrama de flujo, como se observa en la **Ilustración 3-1**.

b) Se detalló cada uno de los artículos que pudieron cumplir con los criterios de inclusión, pero que fueron excluidos.

c) 6 artículos se evidenciaron que fueron citas, revisar el siguiente enlace https://docs.google.com/spreadsheets/d/1nlX6PebJKwhF6XxOInBVU3cG1vbNSAGF/edit?usp=sharing&ouid=109900342582328389854&rtpof=true&sd=true. Además, se citó cada artículo resultante, para el desarrollo de la (RSL) en NORMAS ISO 690.

d) Se usó tablas y gráficos para una mejor explicación y precisión de los resultados.

e) Se comparó el resultado de las preguntas de la Revisión Sistemática, entre los años 2015 hasta 2021 con la actualización que se realizó hasta el 2023.

f) La base de datos contiene todos los artículos científicos relacionados con la teoría APOE en el campo de la matemática, publicados entre los años 2015 y 2023. Incluye tanto los artículos duplicados como aquellos de subáreas que presentan similitudes entre sí.

g) Se usó la metodología PICOS.

6. **Sección 6, 7 DISCUSIÓN - OTRA INFORMACIÓN:**

a) Se consideró el impacto de estos resultados en el campo de estudio actual y se detalló los que tienen mayor aportación para futuras investigaciones o prácticas.

b) Se determinó que estudios fueron relevantes para la pregunta de investigación y se estableció criterios claros para su selección.

c) Se realizó una búsqueda exhaustiva en las siguientes bases de Literatura Científica: *Google Scholar, SciELO, Scopus y Wos*. Así se aseguró la validez y confiabilidad de los resultados y minimizar en la medida de lo posible el error sistemático.

d) El interés de la Revisión Sistemática de Literatura Científica sobre la teoría APOE en el área de la matemática, fue actualizar la que se encuentra en la siguiente tesis (Aldás Castro, 2022).

e) Toda la información, base de datos (artículos entre los años 2015 hasta 2023), sistematización se encuentran en el siguiente link: https://drive.google.com/drive/folders/1MvhGFhGzXBiSV-I1nOEze19bXr2M4dSu?usp=sharing

2.4. Buscadores de literatura científica

Los inicios de los buscadores en Internet se remontan a finales de los años ochenta. En 1991, se introdujo *Archie*, el primer buscador en Internet, una innovación de *Alan Emtage*, *Bill Heelan* y *Peter Deutsch*. En la era actual, donde la tecnología e Internet nos brindan una conexión global, la información científica se ha convertido en una herramienta esencial para el progreso de la investigación y el ámbito académico. Con el paso del tiempo, estos buscadores digitales han experimentado una notable evolución y mejora. Los más destacados, que se mencionarán a continuación, desempeñan un papel fundamental en el (TIC), ya que facilitan el acceso a contenido específico y meticulosamente organizado.

2.4.1. *Google Scholar*

Es un motor de búsqueda especializado en literatura científica (https://scholar.google.com/) (Acharya, 2004), que se lanzó por primera vez en noviembre de 2004 con la etiqueta “BETA”, ha experimentado una evolución significativa. Hoy en día, ya no lleva la etiqueta “BETA”. Se han introducido mejoras excelentes, como una función de búsqueda avanzada y una biblioteca personal llamada “my library”. Además, se ha añadido la capacidad de acceder al perfil personal, así como métricas de revistas, alertas y opciones de configuración.

Este motor de búsqueda realiza una indexación exhaustiva del texto completo y los metadatos de la literatura académica. Esta literatura abarca una amplia gama de fuentes, incluyendo revistas científicas, libros, resúmenes y opiniones de editores académicos. Además, se incluyen contribuciones de sociedades profesionales, repositorios en línea y universidades, entre otros sitios webs relevantes (Peña y Lara, 2018, pág. 3).

Según lo manifiesta (Warner, 2012), Google Académico incorpora investigaciones históricas que se remontan a los albores del siglo *XX* (e incluso más antiguas). Esto es posible gracias al uso de la tecnología *Optical Character Recognition* (OCR), que permite realizar búsquedas en textos, incluso si estos no están indexados en las bases de datos convencionales.

2.4.2. *SciELO*

(Scientific Electronic Library Online), se trata de un motor de búsqueda digital gratuito y especializado en literatura científica, (https://www.scielo.org/es/) (Packer, 1997). Los países que contribuyen a esta plataforma incluyen (Argentina, Brasil, Bolivia, Chile, Costa Rica, Colombia, Cuba, España, México, Paraguay, Perú, Portugal, Sudáfrica y Venezuela). (Arroyo, 2010, pág. 1).

SciELO, es una iniciativa de la Fundación para el Apoyo a la Investigación del Estado de São Paulo en Brasil, fue lanzada entre 1997 y 1998. De acuerdo a (Curioso et al., 2008), esta plataforma permite el acceso a través de varios mecanismos, incluyendo listas de títulos y temas, así como índices de autores y materias. No obstante, su motor de búsqueda presenta ciertas limitaciones, ya que no proporciona una búsqueda unificada de artículos en todas las colecciones de revistas científicas indexadas en la red *ScieELO* (pág. 2).

2.4.3. *Scopus*

Buscador de literatura científica sobre ciencia y tecnología (https://www.scopus.com/) (V, 2004), fue desarrollada por *Elsevier* en el 2004, *Scopus,* facilita la exploración y el uso de las referencias bibliográficas de 14,000 trabajos científicos, que provienen de 4,000 editoriales distintas. En total, brinda acceso a 27 millones de referencias, siendo un buscador de literatura científica de alto impacto.

Además, Scopus ofrece cinco criterios de ordenación: fecha, relevancia, autor, título de la publicación y cantidad de citas que el documento ha recibido y gracias a la combinación de *Cross-Ref*, *DOI* y tecnología interna, puede identificar de manera automática las publicaciones a las que nuestra institución está suscrita. *Elsevier*, la caracteriza precisamente como una "Herramienta multidisciplinaria para navegar a través de la información científica" (Codina, 2005, pág. 5).

2.4.4. *Wos*

(*Web of Science*), anteriormente conocido como *Web of Knowledge*, es una plataforma de búsqueda de alto impacto en referencia a literatura científica (JCR) (https://www.webofscience.com/wos/)(Garfield, 1 997), *Wos* e s u na p lataforma d e *C larivate A nalytics* q ue r ecopila c itas y referencias bibliográficas de publicaciones periódicas desde 1900. Incluye la *Core Collection* con índices de diversas disciplinas, *Proceedings* y herramientas de análisis como el *Journal Citation Report y Essential Science Indicators*.

Estos indicadores que ofrece (Wos) y según (Pérez, 2017), son los siguientes:

1. ***The Journal Citation Reports (JCR):*** Es un indicador de calidad ampliamente reconocido y apreciado por las organizaciones que evalúan la actividad investigadora.
2. ***InCites:*** Es una herramienta que se basa en las citas para permitir la comparación de la actividad científica, resultando útil para los administradores académicos y gubernamentales al analizar la actividad de sus instituciones.
3. ***Essential Science Indicators (ESI):*** Accesible a través de ISI *Web of Science*, permite medir el rendimiento científico y seguir las tendencias de investigación.
4. ***ResearcherID:*** Propuesta por *Thomson Reuters*, con el fin de dar a cada autor un identificador único, evitando así, confusiones y duplicidades que pueden ocurrir cuando los autores comparten nombres y apellidos comunes.

2.5. Teoría APOE (*Acción, Proceso, Objetos y Esquemas*)

Desarrollada por *Ed Dubinsky* y el grupo de investigación *(RUMEC) Research in Undergraduate Mathematics Education Community*, esta teoría considera que el mecanismo principal para la construcción de conocimiento es la abstracción reflexiva de *Piaget* (D. Núñez y Kú, 2015, pág. 46). Se utiliza como un modelo cognitivo para describir cómo se puede aprender y comprender los conceptos matemáticos. Como toda teoría debe ser objetiva, la APOE lo realiza a través de la descomposición genética, donde, define un modelo hipotético que revela las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante necesita para formular la construcción del conocimiento matemático.

Las siglas de la teoría **APOE**, según lo menciona, (Quintanilla Cóndor, 2009, pág. 23) significan:

- **Acción:** Transformación del objeto, que es percibido por el individuo externamente, generando sugerencias para proporcionar detalles de lo que se debe hacer, como debe evaluar la base del espacio y sean linealmente independientes de las transformaciones lineales, dando.

- **Proceso:** Los conceptos se interiorizan, para luego ser razonados, de esta forma se justifica el porqué de las acciones previamente realizadas.

- **Objeto:** La encapsulación de todas las actividades llevadas a cabo por el individuo conduce a una desencapsulación, representando así las acciones y procesos realizados.

- **Esquema:** Es el nivel en el que ya se puede realizar una representación del concepto matemático dado (Construcción cognitiva), gracias a esa construcción coherente de acciones, procesos, objetos y esquemas. Estas construcciones son llamadas abstracciones reflexivas que incluyen la interiorización, coordinación, encapsulación o desencapsulación.

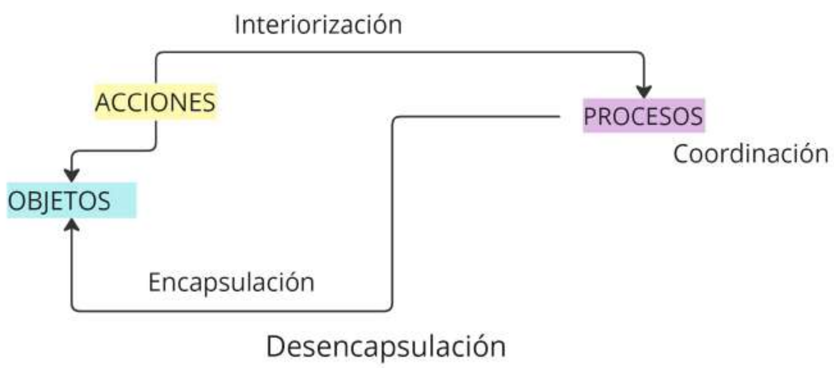


Ilustración 2-1: Mecanismos de construcción en la teoría APOE
Adaptado de: Arnon et al., 2014, p.10

2.5.1. *Didáctica de la matemática*

Como menciona (Contreras, 2012):

> Entre los años 50, la enseñanza de la matemática era deficiente y los estudiantes tenían un nivel más bajo en esta materia que en otras. Por lo tanto, las universidades estadounidenses empezaron a reformar sus planes de estudio en matemáticas y estar al día con los avances en ciencias matemáticas y físicas. En los años 70 del siglo *XX*, en el Instituto de Investigación sobre la Enseñanza de la Matemática *(IREM)*, *Guy Brousseau* (Medalla Félix Klein 2003), profesor de la Universidad de Burdeos (Francia), sentó las bases de una nueva ciencia

educativa: la Didáctica de la Matemática o Didáctica Fundamental, reformando paradigmas psico-cognitivos (pág. 20).

La Didáctica de la matemática, se refiere al estudio de cómo enseñar y aprender matemáticas de manera efectiva. Es un campo que investiga las estrategias, métodos y enfoques para transmitir conceptos matemáticos de manera comprensible y significativa. Los docentes de matemáticas utilizan la didáctica para diseñar planes de lecciones, seleccionar materiales educativos y evaluar el progreso de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

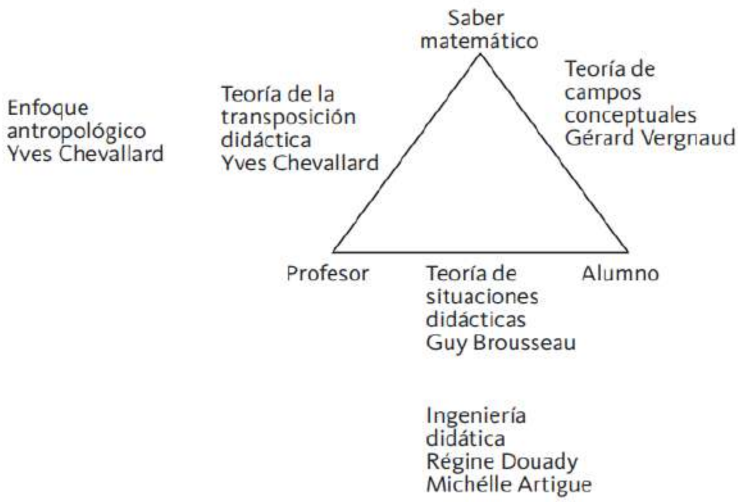


Ilustración 2-2: Estado actual de didáctica fundamental de la matemática
Fuente: Contreras, F., 2012, p.24

2.6. Abstracción reflexiva

La abstracción reflexiva, desde la perspectiva de *Jean Piaget*, se manifiesta como la coordinación de acciones que un individuo lleva a cabo con los objetos que lo rodean. En esencia, es el proceso mediante el cual, el sujeto extrae significado de sus propias acciones sobre dichos objetos. Esta habilidad desempeña un papel fundamental en la construcción del conocimiento lógico-matemático. Cuando interactuamos con objetos o situaciones, nuestra mente no se limita a registrar las características específicas de cada elemento, sino que también busca patrones, relaciones y generalizaciones. A través de la abstracción reflexiva, podemos ir más allá de lo evidente y crear conceptos más amplios que trascienden las particularidades de cada objeto.

Ejemplo. Cuando un estudiante se familiariza con las operaciones matemáticas básicas, como la adición, sustracción, multiplicación y división, inicialmente se centra en comprender sus reglas y 23 aplicaciones directas. Sin embargo, a medida que avanza en su aprendizaje, comienza a coordinar acciones más complejas. Cuando empieza a utilizar estas operaciones en el contexto del Álgebra. En este proceso, el estudiante generaliza conceptos más amplios, como la "ley de composición", que es un tipo de operación binaria fundamental para comprender diversas estructuras algebraicas. En resumen, la abstracción reflexiva permite generar nuevos conocimientos al observar, experimentar y reflexionar sobre las acciones en el mundo que nos rodea.

2.7. Construcciones cognitivas

El desarrollo de estructuras cognitivas está intrínsecamente vinculado a la abstracción reflexiva. A través de este proceso, las construcciones cognitivas se forman y evolucionan. Además, el sistema de *Piaget* se refiere a las estructuras cognitivas, como las propiedades o procedimientos que comprenden desde el lenguaje y el pensamiento hasta la memoria, la percepción, la atención o la resolución de problemas. Todo lo que está relacionado con estos procesos de adquisición de conocimiento en diversas áreas se considera cognitivo (Quintanilla Cóndor, 2009).

2.8. Descomposición genética

Es un modelo que se construye a partir del análisis de las construcciones cognitivas que se requiere para el aprendizaje de dicho concepto, en ella se incluyen las acciones, los procesos y la forma en que estos se coordinan e interiorizan, de manera que se permita el encapsulamiento del concepto (Quintanilla Cóndor, 2009, pág. 18). Una descomposición genética no es única, se la puede modificar cuantas veces se la requiera.

Además, (Trigueros, 2005) señala que la descomposición genética:

> "En la Teoría APOE se parte, entonces, de un análisis de los conceptos matemáticos en el que se ponen de relieve las construcciones cognitivas que pueden ser requeridas en su aprendizaje. A este análisis se le conoce como descomposición genética del concepto" (pág. 8).

2.8.1. *Esquema de una descomposición genética*

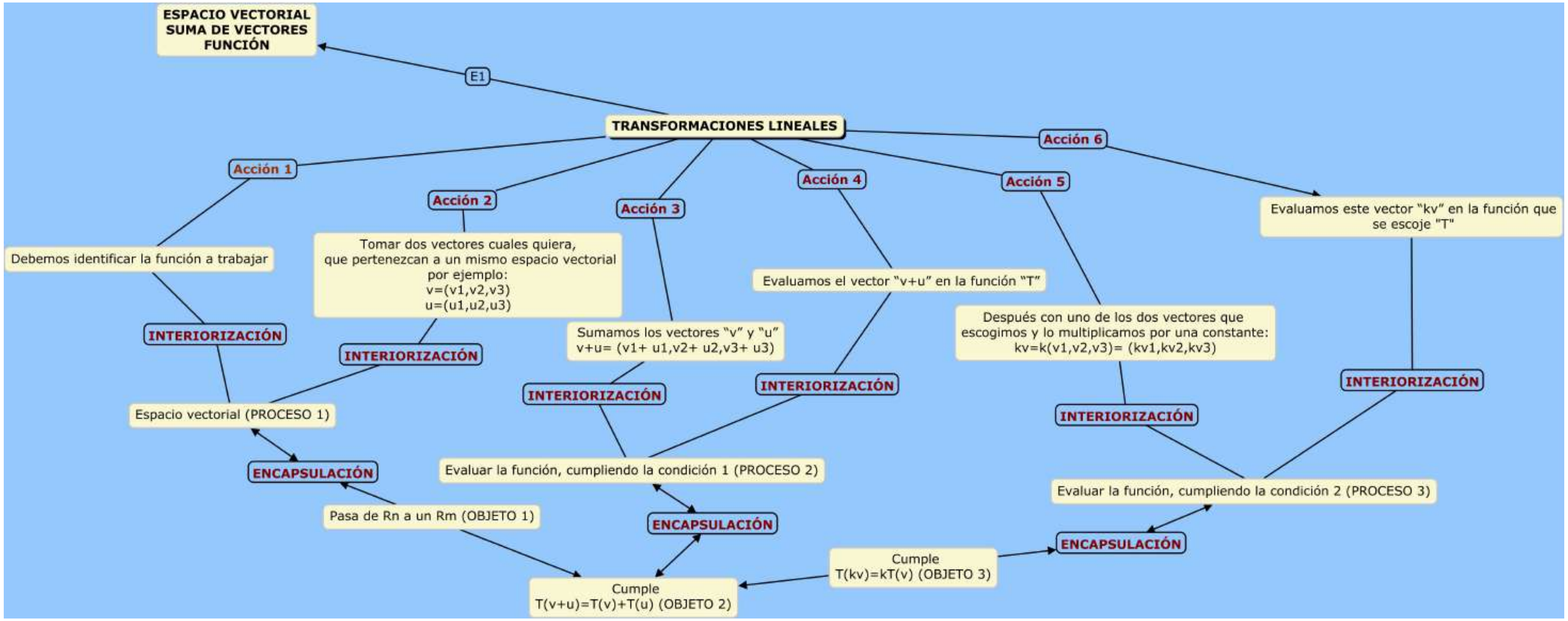


Ilustración 2-3: Ejemplo de una descomposición genética
Realizado por: Sarango, T., 2024.

2.9. Ciclo de Enseñanza *ACE* y *PACIE* con Moodle

El ciclo de enseñanza ACE (*Actividades, Discusión en clase y Ejercicios*), se ha estructurado como una herramienta educativa que se adapta al modelo cognitivo propuesto en la descomposición genética. Además, de la interacción y el aprendizaje colaborativo, busca facilitar la construcción de conocimientos mentales. Esto se logra mediante la realización de acciones y procesos, permitiendo que dichos procesos se encapsulen en objetos y conduzcan a la esquematización del objeto matemático.

La metodología PACIE (Presencia, Alcance, Capacitación, Interacción y *E-learning*), creada por el ingeniero ecuatoriano Pedro Camacho en el año 2009, se incorporó con la tecnología denominada web 2.0 para el proceso educativo (Oñate, 2009, pág. 5). Satisface la necesidad de un trabajo virtual de calidad, colaborativo y en equipo con los estudiantes. Su adaptación con Moodle se implementó en el proceso de enseñanza-aprendizaje con el grupo de estudio del 4^{to} semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH.

La metodología PACIE engloba cuatro conceptos aplicados:

- **Presencia:** Fomenta en los estudiantes el interés y la motivación por integrarse activamente al entorno virtual Moodle de aprendizaje.
- **Alcance:** Se deben establecer metas que sean específicas, cuantificables y alcanzables para guiar de manera efectiva las actividades educativas dentro del entorno digital Moodle.
- **Capacitación:** En esta etapa el facilitador (Docente) y los estudiantes deben estar debidamente preparados para abordar los desafíos de la educación en línea.
- **Interacción:** Etapa donde el tutor (Docente) genera un ambiente de estimulación, en el cual utiliza recursos y actividades diseñados específicamente para promover la socialización y el intercambio de ideas entre los participantes (Estudiantes) del entorno educativo en Moodle.
- **E-learning:** Se emplea la tecnología estratégicamente para propiciar la interacción y el enriquecimiento del conocimiento, sin perder de vista la importancia fundamental de la pedagogía.

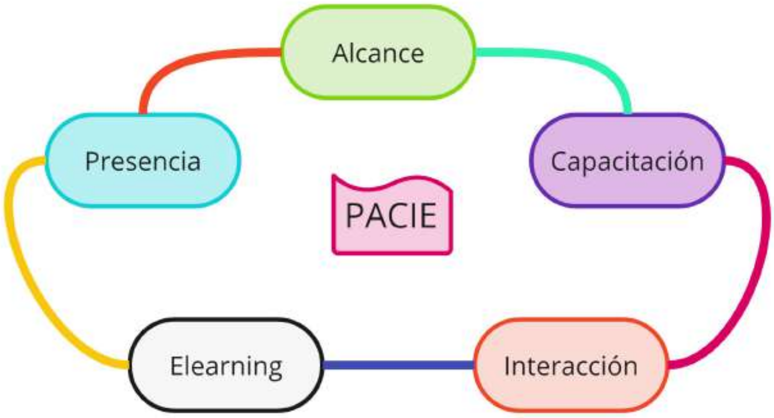


Ilustración 2-4: Esquema de la Metodología PACIE
Realizado por: Sarango, T., 2024.

2.9.1. *Ciclo de enseñanza (ACE) Activities, Class Discussion, Exercises*

Se trata de una estrategia pedagógica que se alinea estrechamente con la visión APOE del aprendizaje matemático. Esta estrategia implica la implementación de actividades diseñadas para estimular a los estudiantes a realizar construcciones mentales y promover discusiones en el aula. El objetivo es facilitar a los estudiantes la aplicación de sus estructuras mentales recién desarrolladas a conceptos y ejercicios matemáticos. De esta manera, se consolida el aprendizaje matemático en la mente de los estudiantes y se ponen de relieve las ideas para futuros aprendizajes (Arnon et al., 2014).

2.9.2. *Metodología PACIE (Presencia, Alcance, Capacitación, Interacción, E-Learning)*

El enfoque *PACIE* se desarrolla en respuesta a la demanda educativa de utilizar correctamente las Tecnologías de Información y Comunicación *(TIC's)* y las plataformas de aprendizaje en línea (como las aulas virtuales). Este método es aplicable en varios formatos de enseñanza, ya sean presenciales, semipresenciales o completamente en línea. Cabe mencionar el sincero agradecimiento al grupo de investigación Ciencia de Datos - *CIDED* de la ESPOCH, por el uso del Moodle e implementar la Metodología *PACIE* con el ciclo de enseñanza *ACE* y así tener una mejor comunicación con los estudiantes.

De acuerdo con (Oñate, 2009), la metodología *PACIE* se distribuye de la siguiente manera (pág. 9-39):

1. **Bloque 0 - *PACIE***

   Información : Incorpora todos los elementos iniciales del EVA (Entornos Visuales de Aprendizaje), es decir, describe sus componentes y la manera como el usuario puede desplazarse en él; entre los que se destacan están:

   - Guía para Iniciar.
   - ¿Quién lleva la tutoría?
   - Rúbrica de Evaluación.

   Comunicación : Está relacionado con todo el proceso operativo del Aula Virtual y su principal recurso es:

   - Cartelera en Línea.

   Interacción: Son los espacios creados para generar el intercambio colaborativo, participativo, social y de aprendizaje mediado entre el tutor y los participantes a través de:

   - Foros de Apoyo .
   - Foros Sociales.
   - Cafetín Virtual.
   - Taller.

2. **Bloque académico**

   - Exposición: En esta sección el tutor presenta la información de los contenidos de manera clara, la expone apoyada en diversos recursos: Videos, PDF, Documentos, Libros y/o Enlaces, para la obtención y generación de conocimiento.
   - Rebote: Esta sección ha sido diseñada por el tutor para permitir que el estudiante realice una autoevaluación y asimile la información adquirida. De esta forma, puede verificar su conocimiento previo, lo que le incentiva a continuar con las actividades pendientes hasta alcanzar los objetivos (tareas) propuestos.
   - Construcción: En esta sección el participante deberá leer los contenidos, y presentar una opinión o postura frente a la información que se le expone. La finalidad es que pueda construir, generar y exponer nueva información, de manera reflexiva sobre los temas tratados.
   - Comprobación: En ella el tutor no interactúa. Colocar a los recursos que considere necesarios para comprobar los conocimientos adquiridos por los participantes; los mismos llevan calificación y entre otros, puede ser: Cuestionarios, Consultas, Blogs, Wikis, etc.

3. **Bloque de Cierre**

   - Negociación: Esta sección permite la interacción entre todos los que son parte del aprendizaje, tutores, alumnos, personal administrativo, esto se lo logra a través de los diferentes recursos, como: Foro de despedida, Datos de la certificación, actividades de recuperación; también le permite al tutor establecer los parámetros para la recuperación de notas.

   - Retroalimentación: Permite conocer como estuvo el desarrollo del curso, esto es, en el contenido, la interacción con los compañeros, con el tutor, así como con el tiempo de respuesta del mismo. Esto lo realiza mediante el recurso de cuestionarios, que la plataforma le proporciona y adicionalmente podría agregarse un foro donde se incluya comentarios respecto al curso en general con el fin de mejorar el aspecto que sea necesario (pedagógico, administrativo, académico).

2.10. Álgebra Lineal

Aunque los problemas algebraicos se habían planteado y resuelto desde los babilonios, el desarrollo del Álgebra fue extremadamente lento y doloroso, principalmente debido a la ausencia de notaciones convenientes hasta finales del siglo XVI. Hasta alrededor de 1850, el Álgebra, para todos los matemáticos, consistía en el estudio de ecuaciones algebraicas (o sistemas de tales ecuaciones) y los métodos ideados para resolverlas. Los valores buscados para las "incógnitas" son "números", y antes de *Viéte* los coeficientes de las ecuaciones son números dados explícitamente.

Para numerosos estudiantes, el Álgebra Lineal representa su primera inmersión en el mundo de las matemáticas avanzadas, marcando un hito significativo en su educación. Este campo de estudio aborda definiciones como vectores, matrices y sistemas de ecuaciones lineales. De manera más formal, se enfoca en los espacios vectoriales y sus correspondientes transformaciones lineales. Su aplicación abarca diversas áreas, como la física, la ingeniería, la informática y la estadística.

A continuación, como se menciona en el texto de (Grossman y Flores Godoy, 2012, pág. 46), se enuncia:

- **Vector:** El estudio de vectores, comenzó con el trabajo del irlandés Sir *William Hamilton* $(1805 - 1865)$. Los vectores son entidades matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido. Cualquier vector puede ser representado gráficamente mediante una flecha, cuya longitud es proporcional al módulo del vector. El módulo de un vector es un número que indica cuántas veces la unidad de medida está contenida en su longitud.

Existen los vectores renglón y los vectores columna:

Definición 2.1. Vector renglón de *n* componentes

Un vector de n componentes se define como un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

Definición 2.2. Vector columna de *n* componentes

Un vector columna de n componentes es un conjunto ordenado de n números escritos de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

- **Matriz:** En 1850 el matemático inglés *James Joseph Sylverter*, fue el primero que utilizó el término "matriz" para distinguir los determinantes de las matrices. La matriz es un conjunto de elementos (números) ordenados en filas y columnas. Para designar una matriz se emplean letras mayúsculas. Cada uno de los elementos de la matriz (a_{ij}) tiene dos subíndices. El primero i indica la fila a la que pertenece y el segundo j la columna.

  Definición 2.3. Matriz

  Una matriz A de $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números, dispuestos en m renglones y n columnas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{ij} & a_{in} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Sistema de ecuaciones lineales:** Desde los babilonios se resuelve sistemas de ecuaciones lineales "eliminando" sucesivamente las incógnitas hasta reducir el problema a una sucesión de "regla de tres", ecuaciones con una única incógnita $ax = b$. Con respecto a las ecuaciones (con una incógnita) de grado ≥ 2, a la fórmula para resolver la ecuación de segundo grado (conocida en sustancia por los babilonios) se sumaron los dos grandes descubrimientos de los italianos del siglo XVI , la fórmula conocida como "Cardano",

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

dando raíces de $x^3+px+q=0$, y el método reduciendo la resolución de una ecuación de cuarto grado a la de una ecuación de tercer grado y la extracción de raíces cuadradas,

Un sistema de ecuación lineal, se compone por dos o más ecuaciones que contienen más de una incógnita (x, y, z, etc,) y las cuales están acompañadas por coeficientes $(a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{mn})$, donde cualquier par de números reales que satisface el sistema se denomina como solución. Este sistema cuya complejidad puede variar dependiendo del número de ecuaciones lineales que incluya.

$$a_{11}x_1+\cdots a_{12}x_2+a_{1n}x_n=b_1$$

$$a_{21}x_1+\cdots a_{22}x_2+a_{2n}x_n=b_2$$

$$a_{m1}x_1+\cdots a_{m2}x_2+a_{mn}x_n=b_m$$

2.11. Espacios vectoriales

Las primeras ideas que condujeron a los espacios vectoriales modernos se remontan al siglo $XVII$. Estos espacios se derivan de la geometría analítica, las matrices y los sistemas de ecuaciones lineales.

2.11.1. *Concepción del concepto de espacios vectoriales a partir de la teoría APOE*

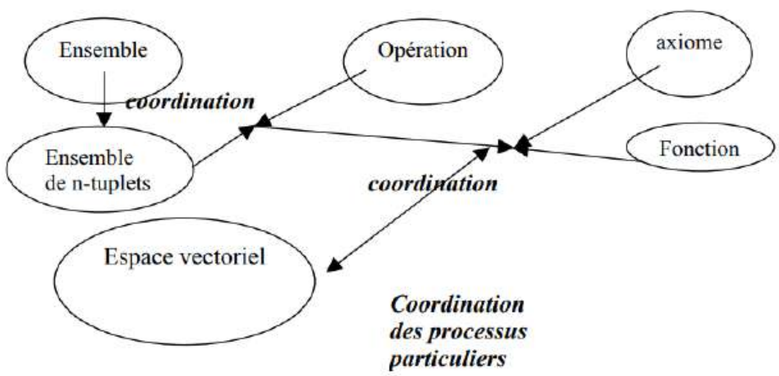


Ilustración 2-5: Descomposición genética del concepto de espacio vectorial
Fuente: (Trigueros y Oktaç, 2005, pág. 168)

De acuerdo a las siguientes autoras (Oktaç y Trigueros, 2010, pág. 377) y como se observa en la **Ilustración 2-5**, para la concepción del concepto de espacio vectorial:

> Implica coordinar cuatro esquemas fundamentales: el de conjunto, operación binaria, axiomas y el de función. Mediante la realización de acciones sobre elementos de un conjunto específico y siguiendo operaciones binarias previamente definidas, los estudiantes pueden internalizar los diversos axiomas que caracterizan a ese espacio vectorial concreto. Al ampliar estas acciones a múltiples espacios determinados, se vuelven parte de un objeto más amplio que se denominó "espacio vectorial". Este objeto adquiere su estructura particular gracias a las propiedades que lo definen.

Además, los conjuntos en $\mathbb{R}^2$ (plano bidimensional) y en $\mathbb{R}^3$ (espacio tridimensional) anexa con las operaciones de suma de vectores y multiplicación por un escalar se denominan espacios vectoriales. Estas operaciones deben seguir ciertas reglas, como la asociatividad y la distributividad, para que el conjunto sea considerado un espacio vectorial.

Anteriormente, se establecieron las definiciones de vectores columna y vectores fila. A continuación se establece otro conjunto de vectores conocidos como espacios vectoriales.

Definición 2.4. Un espacio vectorial V, sobre un campo W y denotado como $(V,+,W,.)$ es una estructura matemática que consta de un conjunto no vacío **V** de elementos u objetos llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones: la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, las cuales están sujetas a los siguientes axiomas:

- **Suma de vectores**

1. Para todo $u,v \in V : u+v \in V$ (Cerradura bajo la suma)
2. Para todo $u,v \in V : u+v = v+u$ (Conmutatividad)
3. Para todo $u,v,w \in V : u+(v+w) = (u+v)+w$ (Asociatividad)
4. Existe el vector e en V tal que para todo $u \in V : u+e = e+u = u$ (Existencia de elemento neutro)
5. Para todo $u \in V$ existe $u' \in V$ tal que $u+u' = u'+u = e$ (Existencia de elemento inverso)

- **Multiplicación de un vector por un escalar**

1. Si $u \in V$ y $\alpha \in K$ (campo de escalares): $\alpha v \in V$ (Cerradura bajo la multiplicación por un escalar)

2. Para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in K$ un escalar: $\alpha(u+v) = \alpha u + \alpha v$

3. Para todo $u \in V$ y para todo par de escalares α y β en K : $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

4. Para todo $u \in V$ y para todo par de escalares α y β en K : $\alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$

5. Para cada $u \in V$ se tiene que $1 \cdot u = u$ (1 es el elemento neutro en K)

- **Subespacio Vectorial:**

  Definición 2.5. Sean $(V, +, F, .)$ un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío del conjunto V. Si S es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V, entonces se dice que S es un subespacio vectorial de V

  Observación. Un subconjunto no vacío S de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las siguientes propiedades:

  1. El vector $0 \in S$
  2. Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$
  3. Si $u \in S$, entonces $\alpha u \in S$ para todo escalar α

2.12. Transformaciones Lineales

Las proyecciones se visualizan como la reducción de la totalidad del espacio a un solo plano, o de un plano a una línea recta. Los cambios en las coordenadas cartesianas resultan en operaciones que son esencialmente equivalentes a aquellas encontradas en la teoría de las transformaciones lineales. Específicamente, estos cambios de variables se describen utilizando parámetros que optimizan el proceso. En cuanto al término "transformación lineal", se revela con mayor claridad cuando se le denomina "sustitución lineal", un concepto ampliamente utilizado en estudios de formas cuadráticas con coeficientes enteros. Para dos variables, los trabajos de *Lagrange* son fundamentales, y para tres variables, las contribuciones de *Gauss* son particularmente notables.

La interpretación del concepto de transformaciones lineales se la considera de la siguiente manera:

- Desde una perspectiva **geométrica**, las transformaciones lineales se interpretan como operaciones que pueden alterar la forma y posición de figuras en el espacio.

- En el contexto de las **funciones** matemáticas, las transformaciones establecen correspondencias regulares entre vectores de distintos espacios vectoriales.
- En términos **matriciales**, las transformaciones lineales se concretizan a través del uso de matrices, que actúan como herramientas para mapear vectores en diferentes dimensiones.

A continuación se evidenció una forma de representación geométrica de una transformación lineal en el texto de (González Rojas y Roa Fuentes, 2017):

> Se describe, cómo una persona puede entender, las transformaciones lineales en el plano $\mathbb{R}^2$ mediante la representación geométrica y la manipulación de objetos físicos. Este entendimiento facilita la formación de conceptos abstractos (véase Ilustración 2-5), donde señala que la persona ya ha empezado a comprender las transformaciones lineales a través de su definición funcional y representación matricial. La interiorización de este concepto se distingue por la habilidad de definir cualquier transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ utilizando las imágenes de los vectores de una base, lo que permite determinar la imagen de cualquier otro vector en el espacio $\mathbb{R}^2$ (pág. 99).

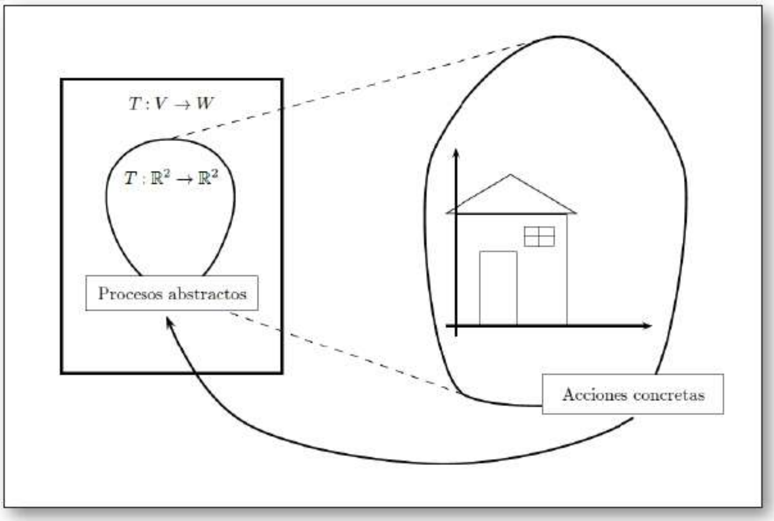


Ilustración 2-6: Representación geométrica de transformaciones lineales como un subesquema
Fuente: (González Rojas y Roa Fuentes, 2017, pág. 99)

2.12.1. *Concepción del concepto de transformación lineal a partir de la teoría APOE*

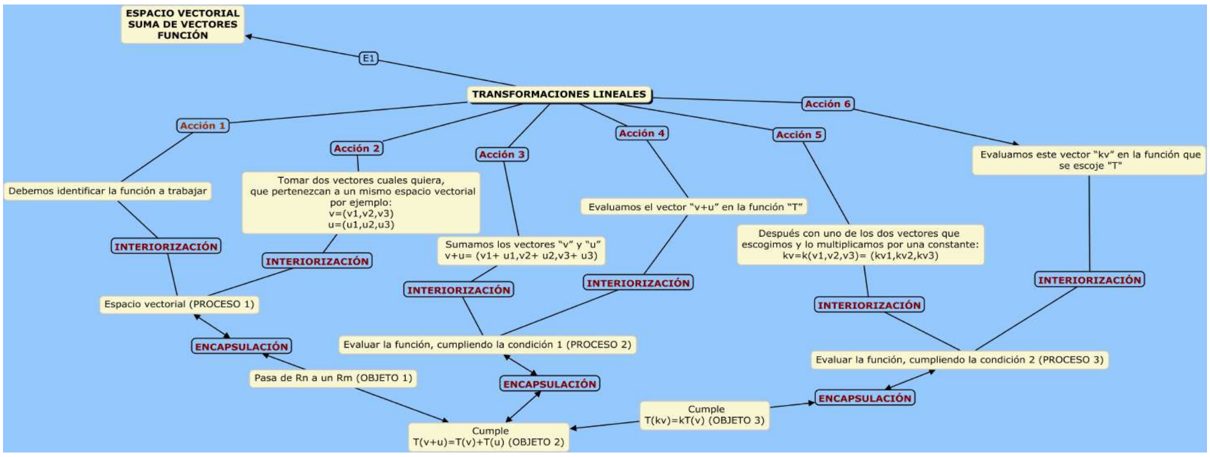


Ilustración 2-7: Descomposición genética del concepto de las Transformaciones Lineales
Realizado por: Sarango, T., 2024.

La **Ilustración 2-7** indica la descomposición genética del concepto de transformaciones lineales que se compone de dos esquemas mentales. Estos esquemas se presentan de la siguiente manera:

1. **E1: Conocimientos previos de las Transformaciones Lineales:**
   a) Comprender el concepto de un espacio vectorial.
   b) Entender la operación suma de vectores.
   c) Familiarizarse con el concepto de función.
2. **E2: Transformaciones Lineales:**
   a) Acciones de cómo realizar una transformación lineal.
   b) Procesos que se presentan en las transformaciones lineales.
   c) Objeto de las transformaciones lineales (encapsulación - desencapsulación).

2.12.2. *¿Qué son las transformaciones lineales?*

Las transformaciones lineales, o también llamados operadores lineales, se interpretan como procesos que modifican los objetos del Álgebra Lineal, como vectores, espacios y subespacios. Estas transformaciones son fundamentales para comprender cómo los elementos matemáticos interactúan y se relacionan entre sí.

Esta definición captura la linealidad y se aplica a espacios vectoriales V y W sobre un cuerpo $(\mathbb{K})$.

Definición 2.6. Sean V y W dos espacios vectoriales. Una trasformación lineal $(T : V \to W)$ es una función que asigna a cada vector $v \in V$ un vector único $Tv \in W$ y que satisface, para cada u y v en V y para cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$:

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$ (Propiedad aditiva).

2. $T(\alpha V) = (\alpha T(v))$ (Propiedad homogénea).

Nota. Se denota por $T : V \to W$ la transformación que asigna elementos del espacio vectorial real V a elementos en el espacio vectorial real W. En otras palabras, T es una función cuyo dominio es V y cuya imagen es un subconjunto de W.

Definición 2.7. **[Operador lineal]** Sea V es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$, un operador lineal sobre V es una transformación lineal de $V \to V$, es decir, es una función que asigna un vector de entrada a un vector de salida.

2.12.3. *Tipos de transformaciones lineales*

Según lo citado en el texto de (Núñez et al., 2019, pág. 166-169) se enuncia lo siguiente:

- **Monomorfismos**: Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es un monomorfismo si y sólo si T es inyectiva.

- **Epimorfismos**: Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es un epimorfismo si y solo si T es sobreyectiva.

- **Isomorfismos**: Sea $T : V \to W$ una transformación lineal. Se dice que T es un isomorfismo si y sólo si T es biyectiva, es decir, inyectiva y sobreyectiva.

- **Monomorfismos**: Sean V y W espacios vectoriales con producto interno y $T : V \Rightarrow W$ una transformación lineal. Se dice que T es una isometría si y sólo si $\|T(v)\|_W = \|v\|_V$ para todo vector v en V.

2.12.4. *Nulo o Núcleo*

Definición 2.8. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T una transformación lineal de $V \to W$, se define núcleo de T como:

$$Nuc(T) = \{v \in V : t(v) = 0_w\}$$

2.12.5. *Rango de una transformación lineal*

Definición 2.9. Dada la transformación lineal $T : V \to W$ se define rango de T como:

$$Rango(T) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ y } T(v) = w\}$$

En términos más sencillos, el rango comprende todas las imágenes resultantes de la transformación lineal.

$$Rango(T) = Img(T)$$

2.12.6. *Cambio de base*

1. En $\mathbb{R}^2$ se expresan vectores en términos de la base canónica $i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, j = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. En $\mathbb{R}^n$ se define la base canónica $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$

3. En P_n se define la base estándar $\left\{1, x, x^2, \cdots, x_n\right\}$

Definición 2.10. Un conjunto finito de vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$ es una **base** para un espacio vectorial V si:

1. Los vectores de B son linealmente independientes

2. El subespacio generado por B coincide con V, esto es $V = Gen\{b_1, ..., b_n\}$

2.12.7. *Matriz asociada a la transformación lineal*

De conformidad con lo expuesto en la descomposición genética del concepto de matriz asociada a las transformaciones lineales, por (Trigueros Gaisman et al., 2015, pág. 101-102), se construye a partir:

> Del esquema de espacios vectoriales. En este contexto, consideramos dos espacios vectoriales, V y W, con dimensiones finitas (m y n, respectivamente). La transformación lineal T coordina estos espacios, actuando como una función que mapea vectores de V a W. Además, la noción de base permite calcular las imágenes de los vectores de una base B de V bajo T. Así, se pueden representar las imágenes de B en el espacio vectorial W y expresar un vector w en términos de los vectores de una base B' de W, denotado como $[W]_{B'}$.
>
> El proceso de cálculo de la imagen de un vector en una base B de un espacio vectorial V, mediante la transformación lineal T, se relaciona con el proceso de escribir todas las imágenes de los vectores de la base B. Además, al considerar una nueva base B' en el espacio vectorial W, se identifica las imágenes de la base B de V como elementos en W. Así, es posible expresar los vectores imagen como combinaciones lineales de los vectores de la base B' de W (generalización dada por el cuantificador, que establece que el proceso de coordenadas de un vector se repetirá en todos los vectores de la base ordenada B de V). Este proceso se coordina con el uso de matrices para obtener una representación ordenada de las imágenes mediante T, utilizando una matriz de coordenadas. Finalmente, se encapsula este proceso en el objeto matriz asociado a la transformación lineal, etiquetado como $[T]_B^{B'}$. La matriz de coordenadas se relaciona con las coordenadas de un vector v en V, a través de la matriz resultante del producto matricial $[[T]_B^{B'}[v]B]$. Este proceso se encapsula en un objeto que puede etiquetarse como [T(v)]B'. Mediante la comparación de los objetos $[[T]_B^{B'}]$ y $[T(v)]_{B'}]$, es posible determinar su igualdad $([[T]_B^{B'}[v]B = [T(v)]_{B'}])$. Estas acciones se internalizan en un proceso que se coordina con la función, permitiendo considerar esta igualdad como el resultado de aplicar una función mental, denominada proceso de las matrices asociadas a las transformaciones lineales. Finalmente, este proceso se encapsula en el objeto $([[T]_B^{B'}[v]B = [T(v)]_{B'}])$.

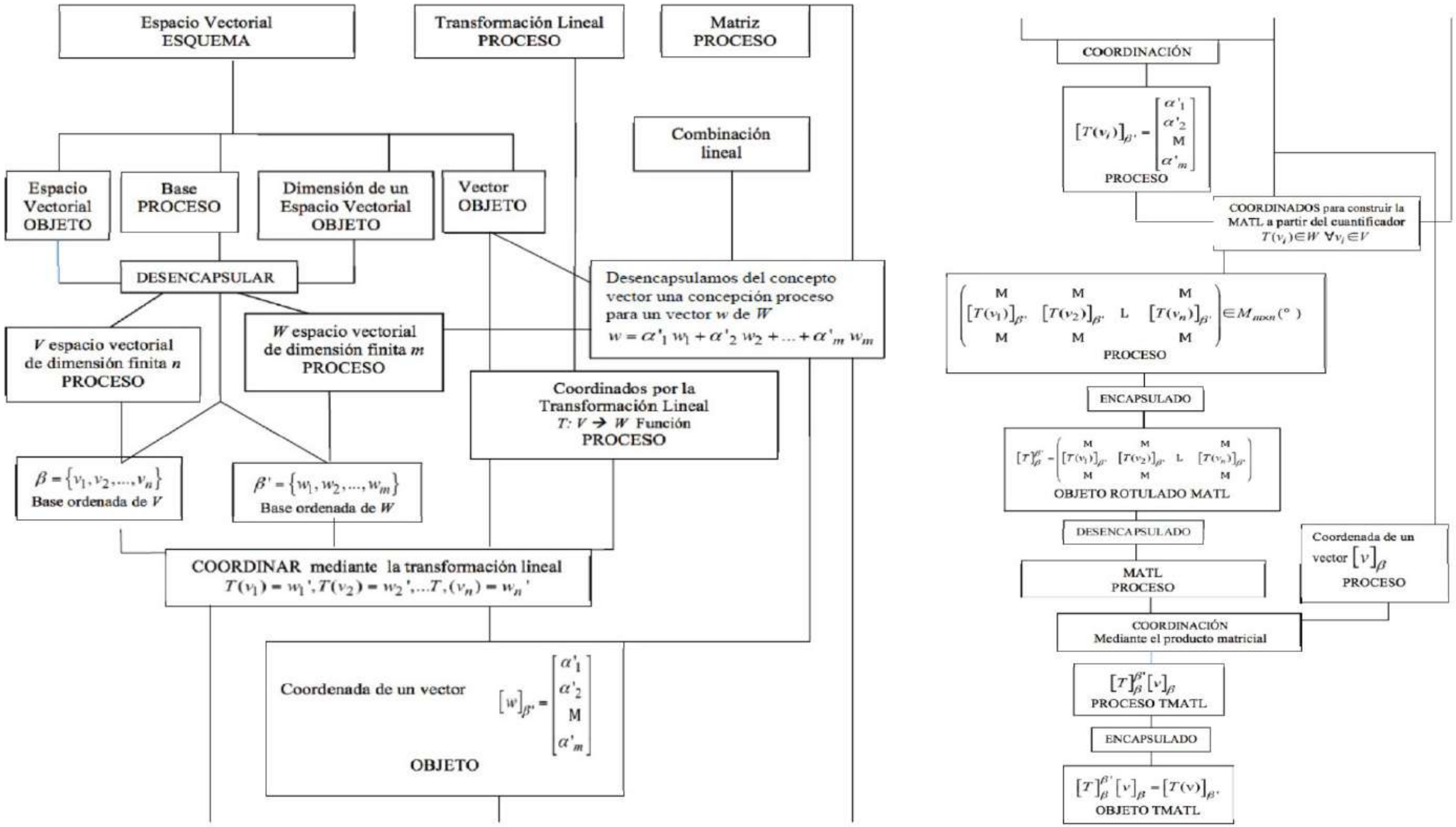


Ilustración 2-8: Descomposición genética del concepto de matriz asociada a las transformaciones lineales
Fuente: (Trigueros Gaisman et al., 2015, pág. 102-103)

Definición 2.11. Sea $T : V \to W$ una transformación lineal, entonces la matriz A de orden $m \times n$ es la matriz asociada a la transformación lineal si y sólo si:

$$A\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

2.13. Eigenvalores - Eigenvectores

Observación. A los eigenvalores se los llama: valores propios, valores característicos o autovalores, de la misma manera, los eigenvectores se los llama: vectores propios, vectores característicos o autovectores.

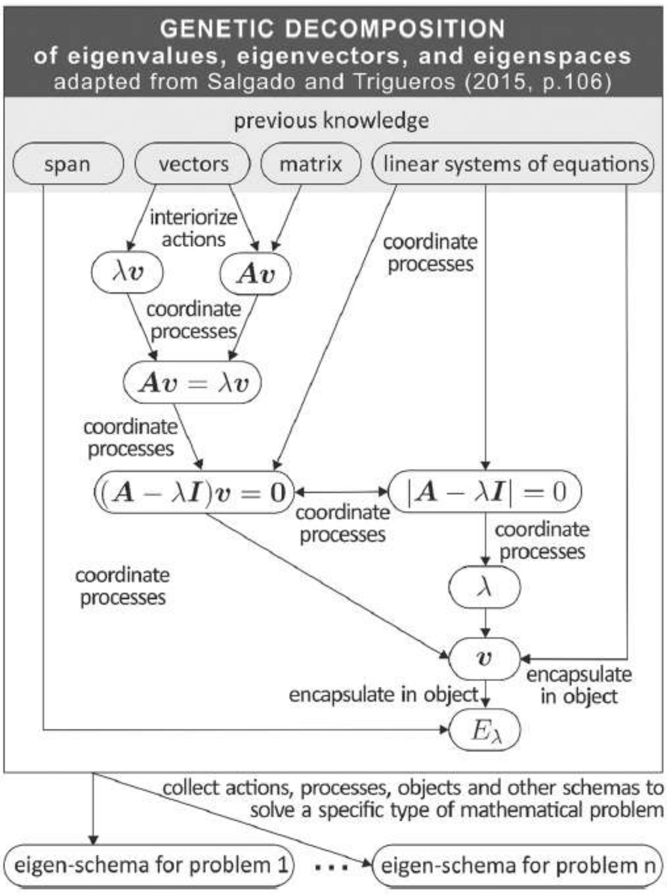


Ilustración 2-9: Adaptación de la descomposición genética del concepto de eigenvalores - eigenvectores
Fuente: (Salgado y Trigueros, 2015, pág. 106)

La noción de valor propio de un endomorfismo aparece en el siglo XVIII, con respecto a la teoría de los sistemas de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes. En 1762 *Lagrange*, al examinar los pequeños movimientos de un sistema con n parámetros en la vecindad de una posición de equilibrio, fue llevado a integrar un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de la forma:

$$x_j^{''} = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}x_k \qquad (1 \leq j \leq n)$$

donde a_{jk} son constantes; buscando, según el método dado por *Euler* para ecuaciones escalares de cualquier orden, una solución de la forma $x_j(t) = y_j e^{\rho t}$ donde las y_i son constantes a determinar y ρ un número complejo, llega al sistema lineal;

$$\rho^2{}_y j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}y_k \qquad (1 \leq j \leq n),$$

y dado que no es necesario que todos los y_k sean cero, ρ^2 debe ser (en términos modernos) el valor propio de la matriz (a_{jk}). En 1774 encontró un sistema análogo en la teoría de las desigualdades “seculares” de los planetas y *Laplace* también estudió este problema en 1784. En estas preguntas, las partes imaginarias de los exponentes ρ aparecen como las “frecuencias” de los fenómenos estudiados.

Un endomorfismo es una transformación lineal T que se aplica a un espacio vectorial y que devuelve un resultado dentro del mismo espacio. Es decir, T es de la forma: $T: V \to V$.

Definición 2.12. Sean el espacio vectorial $(V, +F, \cdot)$ y un endomorfismo $T: V \to V$. El escalar $\lambda \in F$ es un valor propio de T, si y sólo si existe un vector no nulo $x \in V$ tal que:

$$T(x) = \lambda(x) \tag{2.1}$$

Cualquier vector que no sea nulo y cumpla con esta condición se clasifica como un vector propio del endomorfismo T, vinculado al valor propio λ.

Teorema 2.1. *Sean $(V, +F, \cdot)$ un espacio vectorial. T un endomorfismo de V en V, λ un autovalor de T, S'_λ el conjunto de los valores propios asociados al valor propio λ O el vector nulo de V, entonces el conjunto $S_\lambda = S'_\lambda \bigcup O$, es un subespacio vectorial de V*

2.13.1. *Valores y vectores propios de una matriz cuadrada*

Definición 2.13. Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos pertenecen a un cuerpo F, la cual se simboliza así: $A \in M_{n\times n}(F)$. El escalar $\lambda \in F$ es un valor propio de A si y sólo si existe un vector no nulo $x \in F^n$ tal que:

$$Ax = \lambda x \tag{2.2}$$

2.13.2. *Ecuación característica*

Definición 2.14. Sea A una matriz cuadrada de orden n, λ un valor propio de A y x un vector propio de A asociado a λ, entonces se cumple que $Ax = \lambda x$, lo cual equivale a:

$$Ax = \lambda I x$$

, donde I es la matriz identidad de orden n, entonces:

$$Ax = \lambda I x$$

$$\rightarrow Ax - \lambda I x = 0$$

$$\rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \tag{2.3}$$

Proposición 2.1. *El polinomio característico de un endomorfismo definido en un espacio vectorial de dimensión finita es igual al polinomio característico de la matriz asociada con respecto a cualquier base del espacio vectorial.*

2.14. Análisis Estadístico Implicativo (*ASI)*

El Análisis Estadístico Implicativo *(ASI)*, también conocido como *Analyse Statistique Implicative* en francés, se originó en la década de 1980 como respuesta a problemas específicos en la Didáctica de la matemática. Fue desarrollado por Régis Gras y colaboradores de la Escuela Politécnica de la Universidad de Nantes, Francia.

Él *(ASI)* surgió como una alternativa a los enfoques tradicionales de análisis estadístico, que a menudo no consideraban las excepciones y matices en las relaciones entre variables. Los investigadores se dieron cuenta de que, en situaciones reales, las relaciones causa-efecto no siempre pueden expresarse de manera rígida mediante teoremas. Por lo tanto, él *(ASI)* se propuso como una herramienta más flexible y realista para explorar estas relaciones.

2.14.1. *Definiciones del Análisis Estadístico Implicativo (ASI)*

El *ASI* busca establecer relaciones de cuasi implicación entre variables en contextos donde los teoremas tradicionales del tipo "si $a \Rightarrow b$" no son aplicables debido a excepciones. A diferencia de los métodos deductivos, el *ASI* permite considerar las siguientes definiciones:

Definición 2.15. Índices Implicativos: En lugar de afirmaciones categóricas, el *(ASI)* utiliza índices que miden la fuerza de la relación entre dos variables. Estos índices pueden reflejar la probabilidad de que se cumpla b dado que se cumple a, considerando las excepciones.

Definición 2.16. Excepciones: El *(ASI)* reconoce que, en la realidad, las relaciones no siempre son absolutas. Algunos sujetos pueden desafiar la tendencia general, y es importante considerar estas excepciones al analizar datos.

2.14.2. *Matemáticas del Análisis Estadístico Implicativo*

Para calcular los índices implicativos, consideremos dos variables a y b. Supongamos que tenemos una tabla de contingencia que muestra la frecuencia conjunta de los eventos a y b. Definimos los siguientes términos:

- n: Número total de sujetos en la población.
- n_{ab}: Número de sujetos en los que se cumple tanto a como b.
- n_a: Número de sujetos en los que se cumple a.
- n_b: Número de sujetos en los que se cumple b.

El índice implicativo $I(a \Rightarrow b)$ se calcula como:

$$I(a \Rightarrow b) = \frac{n_{ab}}{n_a}$$

Este índice mide la probabilidad de que se cumpla b dado que se cumple a. Valores cercanos a 1 indican una fuerte implicación.

Se consideran árboles de similaridad y árboles de cohesión con el propósito de establecer semejanzas y dependencias entre los trabajos de titulación y las líneas de investigación mediante las técnicas *(ASI)*, analizadas mediante el software libre Rchic *(Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive)*.

2.14.3. *Similaridad de Israel Lerman*

La similaridad de *Lerman* es una técnica que forma parte del Análisis Estadístico Implicativo *(ASI)* y fue creada por el matemático Israel César Lerman. En esencia, la similaridad se define como una medida de semejanza entre los datos que serán agrupados. Esta herramienta es valiosa para comparar y evaluar la similitud entre diferentes conjuntos de datos, lo que facilita la clasificación y el análisis en diversas áreas, como es la estadística.

2.14.4. *Pre orden cohesitivo*

Se dice pre orden inicial y global cohesitivo sobre $V \times V$ (o pre ordenamiento), al pre orden Ω inducido por la aplicación cohesión c sobre $V \times V$ (Gras y Kuntz, 2009, pág. 34).

Definición 2.17. Sea $G(\Omega)$ su gráfico en $V \times V$. Según los párrafos anteriores, se sigue que:

- De una parte, la clase de pre orden correspondiente a $c = 0$ contiene todas las parejas tales que $\psi(a,b) \leq 0.5$.
- Por otra parte, si $n_a < n_b$, entonces $c(b,a) \leq c(a,b)$.
- Observemos, por el contrario, que si $c(a,b) \leq c(c,d)$, no se tiene necesariamente $c(b,a) \leq c(d,c)$ ó $c(b,a) \geq c(d,c)$.

2.14.5. *Nodo significativo*

Definición 2.18. Se llama "nodo significativo" a todo nodo correspondiente a un máximo local de $s(\Omega,k)$ durante la creación de la jerarquía implicativa. Diremos en este caso que la partición Π_k está en "resonancia parcial" con Ω.

Si además, $G(\Omega) \subseteq |\Pi_k \times R|$, diremos que la partición Π_k está en "resonancia total" con Ω. El programa informático de análisis *Rchic* permite el tratamiento completo de datos cuantitativos, así como la salida del grafo implicativo y la jerarquía implicativa, resaltando los nodos significativos.

2.14.6. *Árbol de similaridad*

Para cada pareja de variables a_i, a_j se calcula los índices de proximidad o similaridad de *(Lerman)* (Zamora et al., 2023).

$$s\left(a_i, a_j\right) = Pr\left\{Card\left(X_i \cap X_j\right) \leq K\right\}, \tag{2.4}$$

donde $K := Card(A_i \cap A_j)$, es decir, el valor observado de la cantidad de copresencias entre a_i y a_j. el cálculo de estas probabilidades dependerá de la ley asumida, sin embargo, Rchic, independientemente del tipo de ley seleccionada, *Poisson* o Binomial, realiza la aproximación de éstas a la Normal y devuelve:

$$s(a_i, a_j) = \Pr\left|\frac{\text{Card}(X_i \cap X_j) - \frac{n_{a_i} * n_{a_j}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a_i} * n_{a_j}}{n}}} \leq K_c\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{K_c} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx,$$

donde: $K_c := \frac{K - \frac{n_{a_i} * n_{a_j}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{a_i} * n_{a_j}}{n}}}$

Los $s(a_i, a_j)$ obtenidos mediante (1) representan las similaridades de cada pareja (a_i, a_j) al nivel cero de la jerarquía.

A continuación, se ilustra el proceso de cálculo de las copresencias, la similitud de Israel Lerman y los niveles de las matrices de similitud mediante un ejemplo práctico.

Ejemplo.

> Según (Córdova Ruíz, 2023) "Considerando una muestra aleatoria de 20 estudiantes de la carrera de Matemática de la ESPOCH, a quienes se les planteó la pregunta ¿Le gusta esta materia de la carrera? Las asignaturas escogidas para el análisis son las siguientes, encontrándose cada una con su respectiva variable: Lógica Matemática (LM), Geometría Analítica (GA), Topología (TO), Ecuaciones Diferenciales (ED), Análisis Funcional (AF), Historia de la Matemática (HM) y Álgebra (Al)" (pág. 16).

TABLA DE DATOS BINARIOS					
	LM	GA	TO	ED	AF
al1	1	1	0	1	1
al2	1	1	0	0	0
al3	1	0	1	1	0
al4	0	0	1	1	1
al5	0	0	1	1	1
al6	0	1	0	1	0
al7	0	0	0	0	0
al8	0	1	0	0	1
al9	0	0	1	1	0
al10	1	1	0	0	1
al11	0	1	0	1	1
al12	1	0	0	1	1
al13	0	0	1	0	0
al14	1	1	1	1	0
al15	0	0	1	0	1
al16	1	1	1	0	0
al17	0	1	0	1	0
al18	1	1	0	1	1
al19	0	0	1	0	1
al20	0	1	1	1	1
n_{ai}	10	9	11	12	12
n	20	20	20	20	20

Para cada variable: n(LM) = 10, n(GA) = 9, n(TO) = 11, n(ED) = 12, n(AF) = 12.

Desarrollo:

Para calcular los índices de proximidad $s(a_i, a_j)$ para cada par de variables procedemos a resolver la $Card(A_i \cap A_j)$, tomaremos como muestra el par de variables (LM,GA).

Entonces, la $Card(LM \cap GA) = 6$ es la cantidad de copresencias entre LM y GA, en otras palabras, es el valor del total de 1 que se encuentra tanto en la variable LM como en la variable GA.

Calculemos:

$$Kc = \frac{K - \frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}}$$

$$Kc = \frac{Card(LM \cap GA) - \frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}}$$

$$Kc = \frac{6 - \frac{10 * 9}{20}}{\sqrt{\frac{10 * 9}{20}}}$$

$$Kc = 0,707$$

Con estos datos procedemos a calcular la similaridad de Lerman:

$$s(LM, GA) = Pr\left[\frac{Card(LM \cap GA) - \frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Kc} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

Ahora, tomemos como otro ejemplo la similaridad entre las variables LM y TO.

Entonces, la $Card(LM \cap TO) = 5$ es la cantidad de copresencias entre LM y TO, en otras palabras, es el valor del total de 1 que se encuentra tanto en la variable LM como

en la variable TO.

Calculemos:

$$Kc = \frac{K - \frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}}$$

$$Kc = \frac{Card(LM \cap GA) - \frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}}$$

$$Kc = \frac{5 - \frac{10 * 11}{20}}{\sqrt{\frac{10 * 11}{20}}}$$

$$Kc = 0,213$$

Con estos datos procedemos a reemplazar y calcular la similaridad de Lerman:

$$s(LM, GA) = Pr\left[\frac{Card(LM \cap GA) - \frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}{\sqrt{\frac{n_{LM} * n_{GA}}{n}}}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{Kc} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

En la siguiente tabla se evidencia los valores de copresencias.

Valores de copresencias e índices de similaridad			
Variables	**Card**	**kc**	**s**
LM, GA	6	0.7071	0.7602
LM, TO	5	-0.2132	0.4156
LM, ED	6	0	0.5
LM, AF	6	0	0.5
GA, TO	4	-0.4270	0.3347
GA, ED	7	0.6885	0.7544
GA, AF	4	-0.6025	0.2734
TO, ED	7	0.1557	0.5619
TO, AF	6	-0.2335	0.4077
ED, AF	5	-0.8199	0.2061

Además se observa los índices de similaridad en nivel cero. Obteniendo así una matriz con los índices de similaridad a partir de todas las combinaciones de todas las variables y usando las fórmulas antes vistas.

A continuación, se detalla la matriz de similaridad al nivel 0:

	LM	**GA**	**TO**	**ED**	**AF**
LM	1	0.7602	0.4156	0.5000	0.5000
GA	0.7602	1	0.3347	0.7544	0.2734
TO	0.4156	0.3347	1	0.5619	0.4077
ED	0.5000	0.7544	0.5619	1	0.2061
AF	0.5000	0.2734	0.4077	0.2061	1

Ahora, se buscan los nuevos índices de similaridad al combinar la clase (a_i, a_j) con el mayor índice de la tabla anterior. En el nivel uno de la jerarquía se unen las variables LM Y GA, ya que tienen como índice de similaridad 0.7602 que viene siendo el número mayor.

Entonces, usando la siguiente fórmula se tiene:

$$s((a_i,a_j),a_k) = \{Max[s(a_i,a_k);s(a_i,a_k)]\}^2$$

$$s((LM,GA),TO) = \{Max[s(LM,TO);s(GA,TO)]\}^2$$

$$s((LM,GA),TO) = \{Max[(0.4156;0.3347]\}^2$$

$$s((LM,GA),TO) = (0.4156)^2$$

$$s((LM,GA),TO) = 0.1727$$

Matriz de similaridad de primer nivel:

	LM, GA	**TO**	**ED**	**AF**
LM, GA	1	0.1727	0.5692	0.2500
TO	0.1727	1	0.5619	0.4077
ED	0.5692	0 .5619	1	0.2061
AF	0.2500	0.4077	0.2061	1

En el nivel dos de la jerarquía se unen las variables ((LM, GA); ED) pues en la tabla anterior se observa que el índice mayor es 0.5692 que corresponde a dichas variables.

Entonces, usando la siguiente fórmula se tiene:

$$s((a_i,a_j,),a_k1) = \left\{Max\left[s(a_i,a_k1);s(a_j,a_k1);s(a_k,a_k1)\right]\right\}^3$$

$$s(((LM,GA),ED),TO) = \{Max[s((LM,GA),TO);s(ED,TO)]\}^3$$

$$s(((LM,GA),ED),TO) = \{Max[(0.1727;0.5619]\}^3$$

$$s(((LM,GA),ED),TO) = (0.5619)^3$$

$$s((LM,GA),ED),TO) = 0.1774$$

Matriz de similaridad de segundo nivel:

	LM, GA, ED	**TO**	**AF**
LM, GA, ED	1	0.1774	0.1250
TO	0.1774	1	0.4077
AF	0.1250	0.4077	1

En el nivel tres de la jerarquía se unen las variables (AF; AF) pues en la tabla anterior se observa que el índice mayor es 0.4077 que corresponde a dichas variables.

Entonces, usando la siguiente fórmula se tiene:

$$s((a_i,a_j,a_k);(a_l,a_m)) = \left\{Max\left[s(a_i,a_l),s(a_i,a_m);s(a_j,a_l);s(a_j,a_m);s(a_k,a_l);s(a_k,a_m)\right]\right\}$$

$$s((LM,GA,ED),(TO,AF)) = \{Max[s((LM,GA,ED),(TO));s((LM,GA,ED),(AF))]\}^6$$

$$s((LM,GA,ED),(TO,AF)) = \{Max[0.1774;0.1250]\}^6$$

Matriz de similaridad de tercer nivel:

	LM, GA, ED	**TO, AF**
LM, GA, ED	1	0.0177
TO, AF	0.0177	1

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

La investigación que se propone es en el área matemática educativa, por el paradigma de la investigación es de tipo cuantitativo a nivel explicativo, por el tipo de diseño utilizado es pre-experimental, por el tiempo de estudio es transversal, el colectivo de estudio lo conformó: 4^{to} ~~se~~mestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, del periodo académico 2 de octubre 2023 hasta 4 de marzo 2024.

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnicas e instrumentos de investigación empleada

En el siguiente estudio, se adoptó un **enfoque** cuantitativo, donde se recogió y analizó datos numéricos en el programa informático *Excel* versión 2021; como son, las actas de calificaciones de los estudiantes entre los años 2017 hasta 2022, con el objetivo de profundizar en los promedios de calificaciones en la materia de Álgebra Lineal I, II, que se dicta hasta la fecha de esta investigación en el 3^{er} ~~y 4~~^{to} ~~se~~mestre de la carrera de matemática de la ESPOCH.

Este enfoque se complementa con un alcance de investigación de naturaleza **explicativa**. El estudio abarcó la teoría APOE, con un énfasis particular en el Álgebra Lineal y su aplicación a los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales. El objetivo principal fue resolver problemas en la didáctica de la matemática por medio de la descomposición genética (DG) y determinar los escenarios de aplicación en la carrera de matemática de la ESPOCH. Este objetivo se logró mediante la similaridad de *Israel Lerman*, utilizando el sistema informático Rchic, lo que a su vez promoverá la investigación de nuevas propuestas de descomposiciones genéticas.

Este estudio, se llevó a cabo utilizando un diseño de tipo **pre-experimental** y de manera transversal. Se trabajó con un grupo de 11 estudiantes del 4^{to} semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, del periodo académico 2 de octubre 2023 hasta 1 de marzo 2024.

Tras identificado los problemas que los estudiantes enfrentaron en los dos parciales impartidos hasta la realización de la investigación, se formaron dos grupos: El de control y el experimental, donde, se puso a prueba la (DG) y así se equilibró los problemas; tantos de los estudiantes y los que se encontró en la (DG), para luego proceder a medirlos $(Objetos)$ y realizar el análisis cuantitativo.

Para obtener la similaridad de *Israel Lerman*, se utilizó el software libre R versión 4.2.1 con el paquete Rchic de *Raphael Couturier*. En la interpretación de los resultados del *ASI*, se abordaron los gráficos de tipo: árboles de similaridad. Además, se utilizó el programa informático *Excel* versión 2021 para facilitar el cálculo de datos cuantitativos y variables de respuestas múltiples, al igual que las Boxplot (Caja con Bigote). Por otro lado, el software desarrollado por IBM SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*), se utilizó también para la representación gráfica de los datos.

Los instrumentos que se utilizaron en la investigación fueron: cuestionario de diagnóstico y prueba de conocimientos una vez impartida la clase, a los estudiantes del $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH en el área de Álgebra Lineal; subárea de las Transformaciones Lineales, específicamente en el tema: Valores y Vectores Propios de las matrices asociadas a las Transformaciones Lineales.

De la "Revisión sistemática de la teoría APOE para los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH" (Aldás Castro, 2022, pág. 52) y según las respuestas a las preguntas de investigación (PI09), se descubrió que en el área de Álgebra Lineal se utilizaron más artículos científicos con la teoría APOE, resultó que 27 artículos (equivalentes al 22 %), utilizaron más la teoría APOE en el área de Álgebra Lineal de un total 123 artículos que se analizaron luego de aplicar los criterios de inclusión, exclusión y calidad. Estos artículos fueron la base de la investigación y se enumeran a continuación:

1. DIÁLOGO ENTRE LAS TEORÍAS APOE Y TAD (Trigueros, 2019).
2. IMPULSIVE AND REFLECTIVE STUDENTS' UNDERSTANDING TO LINEAR EQUATIONS SYSTEM: AN ANANALYSIS THROUGH APOS THEORY (Rachmawati y Siswono, 2020).
3. ANALYSIS OF STUDENTS' UNDERSTANDING FOR THE CONCEPT OF MATRIX RANK BASED ON APOS THEORY (Inganah, 2018).
4. EVOLUCIÓN EN EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL. UNA MIRADA A TRES INTERPRETACIONES DESDE LA TEORIA APOE (Maturana et al., 2015).
5. TEACHING EIGENVALUES AND EIGENVECTORS USING MODELS AND APOS THEORY (Salgado y Trigueros, 2015).

6. EL APRENDIZAJE DE ESPACIOS VECTORIALES EN ÁLGEBRA: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE (Montenegro, 2018).
7. DOES THE USE OF APOS THEORY PROMOTE STUDENTS' ACHIEVEMENT IN ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA? (Arnawa et al., 2021).
8. LA COMPRENSIÓN DE LA RECTA DESDE LA TEORÍA APOE (Suárez Gil et al., 2021).
9. LEARNING THE CONCEPT OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS: A COMPARATIVE ANALYSIS OF ACHIEVED CONCEPT CONSTRUCTION IN LINEAR ALGEBRA USING APOS THEORY AMONG STUDENTS FROM DIFFERENT EDUCATIONAL BACKGROUNDS (Schirmer y Altieri, 2019).
10. ESTUDIO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA MATRIZ DE CAMBIO DE BASE EN TÉRMINOS DE LA TEORÍA APOE (Mendoza et al., 2021).
11. ESTRUCTURAS MENTALES QUE MODELAN EL APRENDIZAJE DE UN TEOREMA DEL ÁLGEBRA LINEAL: UN ESTUDIO DE CASOS EN EL CONTEXTO UNIVERSITARIO (Roa y Parraguez, 2017).
12. PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' MENTAL CONSTRUCTIONS WHEN USING CRAMER'S RULE (Ndlovu y Brijlall, 2019).
13. CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DEL ESPACIO VECTORIAL R^2 (M. Rodríguez Jara et al., 2018).
14. CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL (Trigueros Gaisman et al., 2015).
15. MENTAL CONSTRUCTIONS IN LINEAR ALGEBRA (Oktaç, 2019).
16. AN APOS ANALYSIS OF SOLVING SYSTEMS OF EQUATIONS USING THE INVERSE MATRIX METHOD (Kazunga y Bansilal, 2020).
17. COGNITIVE CONSTRUCTION OF THE SOLUTION SET OF A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS WITH TWO UNKNOWNS (M. A. Rodríguez Jara et al., 2019).
18. ESTRUCTURAS MENTALES PARA MODELAR EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE CAMBIO BASE DE VECTORES (Parraguez et al., 2016).
19. MATRIX MULTIPLICATION AND TRANSFORMATIONS: AN APOS APPROACH (Figueroa et al., 2018).

20. CONSTRUCCIÓN DE LOS OPERADORES LINEALES DIAGONALIZABLES CON BASE EN LA TEORÍA APOE (Mendoza et al., 2021).

21. TASK DESIGN IN APOS THEORY (Trigueros, 2019).

22. THE LEARNING AND TEACHING OF LINEAR ALGEBRA: OBSERVATIONS AND GENERALIZATIONS (Harel, 2017).

23. ZIMBABWEAN IN-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' UNDERSTANDING OF MATRIX OPERATIONS (Kazunga y Bansilal, 2016).

24. UN ESQUEMA DE TRANSFORMACIÓN LINEAL: CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS ABSTRACTOS A PARTIR DE LA INTERIORIZACIÓN DE ACCIONES CONCRETAS (González Rojas y Roa Fuentes, 2017).

25. AN EXPLORATORY STUDY ON THE UNDERSTANDING OF THE VECTOR SUBSPACE CONCEPT (Mutambara y Bansilal, 2019).

26. STUDENTS' UNDERSTANDING OF SOLVING A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS USING MATRIX METHODS: A CASE STUDY (Montenegro, 2018).

27. DEVELOPMENT OF STUDENTS' WORKSHEET BASED ON APOS THEORY APPROACH TO IMPROVE STUDENT ACHIEVMENT IN LEARNING SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS (Amawa et al., 2019).

Así, mediante la similaridad de *Israel Lerman*, se puede fomentar la investigación de nuevas propuestas de descomposiciones genéticas con el apoyo de una sistematización actualizada de la teoría APOE. Por lo tanto, el uso de nuevas metodologías podría contribuir a una mejor enseñanza de los conceptos de Transformaciones Lineales y promover investigaciones experimentales futuras en la carrera de matemática de la ESPOCH.

1. **Pasos para la revisión sistemática de literatura (RSL)**

   Diagrama de Flujo, para la secuencia de actividades en la actualización de la Revisión Sistemática de Literatura Científica, sobre la teoría APOE en el área de la matemática, entre los años 2015 hasta 2023 :

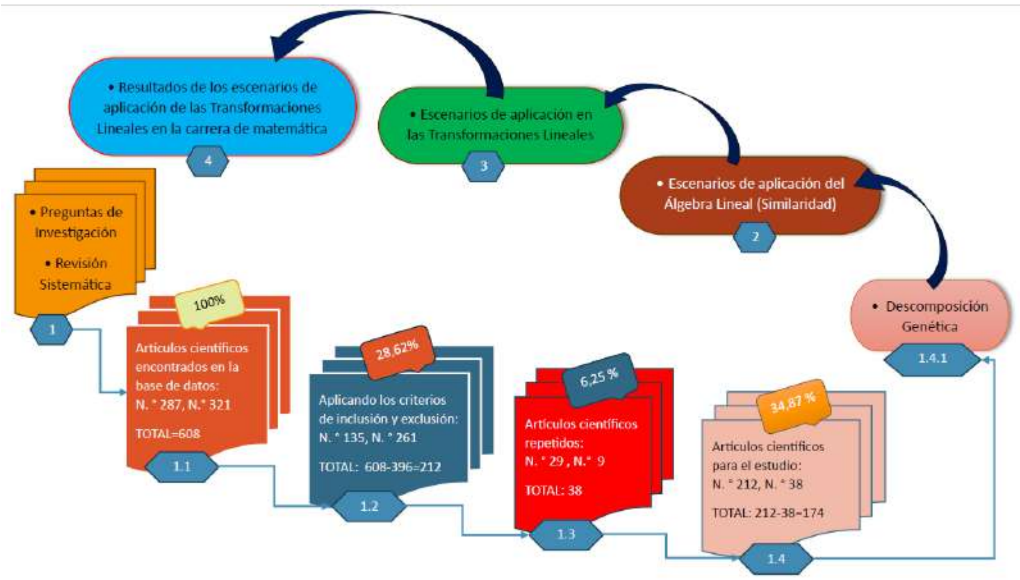


Ilustración 3-1: Diagrama de Flujo para la (RSL): Pasos de la investigación
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Como se aprecia en la **Ilustración 3-1**, para la ejecución de la Revisión Sistemática de Literatura Científica, se procedió de la siguiente manera:

a) **Formulación de las preguntas de investigación aplicadas en la carrera de matemática según (Aldás Castro, 2022, pág. 21).**

b) **Ejecución de la Revisión Sistemática de Literatura Científica:**

- Artículos científicos sobre el tema para la (RSL) que alberga la base de datos.
- Artículos científicos aplicados los criterios de inclusión y exclusión.
- Artículos científicos repetidos de la literatura científica.
- Artículos científicos para el desarrollo del estudio en cuestión.

c) **Detallar todas las descomposiciones genéticas de la teoría APOE al Álgebra Lineal.**

d) **Determinar los escenarios de aplicación del Álgebra Lineal en la carrera de matemática, mediante la similaridad de Isra Lerman.**

e) **Aplicar el escenario de las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH.**

f) **Resultados de los escenarios de aplicación de las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH.**

✓**Cuestionamientos derivados del cuestionario que se desarrolló en la tesis "Revisión sistemática de la teoría APOE para los últimos semestres de la carrera de matemática de la**

ESPOCH", para la revisión sistemática (**Aldás Castro, 2022, pág. 26**). A partir de los resultados del cuestionario antes mencionado, se formularon las siguientes preguntas:

PI01: ¿Cuál es el principal lugar de afiliación institucional de los artículos científicos?

PI02: ¿Cuál es el año de publicación que contiene más artículos científicos en el periodo de estudio entre los años 2015 hasta 2023?

PI03: ¿Cuál es el país que contiene más artículos científicos?

PI04: ¿Existe autores que tienen afiliación en instituciones ecuatorianas en los artículos científicos?

PI05: ¿Existe algún software que más se utilizó en los artículos científicos?

PI06: ¿Cuál es el idioma más utilizado en los artículos científicos?

PI07: ¿Cuál es el autor que tiene más participación en los artículos científicos?

PI08: ¿Cuál es la principal temática de la teoría APOE que utiliza el artículo científico?

PI09: ¿Cuál es la principal revista que se utiliza en la publicación de los artículos científicos?

PI10: ¿En qué área de la matemática (Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Didáctica de la Matemática, etc.) se utiliza más la teoría APOE?

✓**Método *PICOC***

A continuación, en esta investigación se implementó la metodología PICOC. Esto nos permitió formular preguntas completas y detalladas, lo que resultó en una metodología apropiada para el estudio en cuestión:

Población (P): Todos los trabajos de investigación científica, relacionados con la teoría APOE en el área de la matemática y publicados en el periodo comprendido entre los años 2015 hasta 2023.

Intervención (I): Para la Revisión Sistemática de Literatura Científica, se consideraron todos los artículos científicos en el campo de las matemáticas que aplican de manera explícita la teoría APOE, publicados en el periodo comprendido entre los años 2015 hasta 2023.

Comparación (C): Sin una intervención para comparar.

Resultados (O): Porcentajes derivados de las respuestas a las preguntas de investigación.

Contexto (C): Tópicos de estudio en matemáticas y analizadas a través de la teoría APOE.

✓**periodo de tiempo en el estudio**

Los artículos científicos se recopilaron durante el periodo de 9 años, desde enero de 2015 hasta diciembre del 2023.

✓**Fuentes donde se recopilaron los datos de los artículos científicos**

- ***Google Scholar:*** (https://scholar.google.com/)
- ***Scientific Electronic Library Online (SciELO):*** (https://www.scielo.org/es/)
- ***Scopus:*** (https://www.scopus.com/)
- ***Web of Science (Wos):*** (https://www.webofscience.com/wos/woscc/basic-search/)

✓**Criterios de inclusión y exclusión**

En esta etapa, los documentos identificados en las bases de datos y repositorios se someten a un proceso de categorización y clasificación, siguiendo criterios específicos de inclusión y exclusión. Los artículos que no se refieren a los temas centrales, como el título, los autores, el resumen y las palabras clave, no se consideran para el análisis. Este enfoque garantiza que solo se incluyan los documentos más relevantes y pertinentes para el estudio.

- **Criterios de inclusión**

CI01: Los artículos científicos que traten de la teoría APOE.

CI03: Los artículos científicos que contengan la teoría APOE referente a la matemática y cumplan con las áreas temáticas que aplican dicha teoría.

CI02: Los artículos científicos que utilizan la teoría APOE entre los años 2015 hasta 2023.

- **Criterios de exclusión**

Se excluyen los artículos científicos si:

CE01: No se puede buscar por las siglas “APOS”.

CE02: Los artículos científicos que no traten de la teoría APOE entre los años 2015 hasta 2023.

CE03: No contiene la teoría APOE referente a la matemática.

CE04: No son artículos científicos.

✓**Criterios de calidad**

Denotar alta calidad e impacto de los artículos científicos en alguna base de datos, índice o reportorio de consulta mundial:

CC01: Son artículos indexados en JCR (*Journal Citation Reports*).

CC02: Son artículos indexados en Wos (*Web of Science*).

✓**Cadena de búsqueda**

En el contexto de esta investigación, es esencial reunir una colección de artículos científicos que se centren en la teoría APOE. Se identificó este material mediante búsquedas en diversas bases de datos y repositorios que se han citado con anterioridad. Para nuestras cadenas de búsqueda, se incorporó los siguientes descriptores (Aldás Castro, 2022, pág. 23):

Descriptores de Google Scholar: "allintitle: teoría Apoe y allintitle: Apos Theory".

Descriptores de SciELO: "(ab:(apos theory)) y (teoría APOE)".

Descriptores de Scopus: "(TITLE-ABS-KEY (APOS)) AND (LIMIT-TO (SUBJAREA, PSYC)) AND (LIMIT-TO (PUBYEAR, 2021) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2020) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2019) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2018) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2017) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2016) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2015))".

Descriptores de Wos: "All (theory apos in math) y All= (APOE theory)".

En la nueva actualización de la revisión sistemática de la teoría APOE entre los años 2022 hasta 2023, se incluyó los siguientes descriptores:

Descriptores de Google Scholar: APOS math 2023 y APOE matemática 2023.

Descriptores de SciELO: (ab:(teoría APOE)).

Descriptores de Scopus: TITLE-ABS-KEY (apos AND theory) AND (LIMIT-TO (SUBJAREA, "MATH")) AND (LIMIT-TO (DOCTYPE, "ar")) AND (LIMIT-TO (EXACTKEYWORD, "APOS Theory")) AND (LIMIT-TO (PUBYEAR, 2022) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2023)).

Descriptores de Wos: All (APOS math 2023).

✓**Análisis estadístico**

Análisis de artículos científicos: Para este análisis se trabajó mediante la frecuencia y a su vez los gráficos de frecuencia.

Soluciones a las interrogantes de investigación: Se dio respuesta a las 10 preguntas de investigación (PI).

2. **Pasos para la similaridad de *Israel Lerman***

   Preguntas para el análisis de similaridad entre artículos científicos:

   - ¿Hay artículos científicos que aborden subáreas similares en relación con la teoría APOE y el Álgebra Lineal?

- ¿Existen artículos científicos que discutan subáreas similares entre la teoría APOE (Álgebra Lineal) y el plan de estudios de la materia de (Álgebra Lineal I) de la carrera de Matemáticas en la ESPOCH?

✓**Método**

Se trabajó con variables binarias, ya sea para determinar la similaridad entre los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal y la similaridad entre los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal, en la carrera de matemática de la ESPOCH.

✓**Selección**

Se utilizó el resultado del análisis de los artículos científicos, mediante la base de datos bibliográficos especializada, entre los años 2015 hasta 2021 de la "Revisión sistemática de la teoría APOE en los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH" (Aldás Castro, 2022, pág. 93-107). Además, se incluyó la nueva actualización que se realizó hasta el año 2023.

✓**Transformación de datos**

El resultado de las preguntas fue transformar a una codificación binaria equivalente a $1 = Si$ y $0 = No$, para el manejo de los datos.

✓**Interpretación de resultados**

Para los resultados de *(ASI)*, se trabajó con los gráficos de tipo: árboles de similaridad de *Israel Lerman* que se encuentran en la ventana de Rchic una vez activado cada uno de sus paquetes (*BiocManager, Rgraphviz, Rcpp, Rchic, stringr, stringi, tcltk, tcltk2*), además, se trabajó con un archivo en el programa informático *Excel* versión 2021 con extensión CSV (MS-DOS) "(*.csv)", donde se encuentran los resultados de los datos binarios que pertenecen a las preguntas entre artículos científicos y pueden ser seleccionados por su similitud en la Matriz de similaridad que se obtienen en *R*.

3. **Pasos para aplicar el escenario de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, por medio de la (DG).**

✓**Muestra:** Se empleó un muestreo aleatorio simple, en el cual cada elemento del colectivo de estudio tienen la misma probabilidad de ser seleccionados, la selección fue al azar. Esto se hace con el objetivo de aumentar la probabilidad de obtener una muestra representativa.

✓**Adaptación de la (DG)**: Se utilizó el artículo *Scopus_014: "Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model"*. Tema: Eigenvalores - Eigenvectores a partir de las Transformaciones Lineales; es subtema del (Álgebra Lineal), para impartir la clase con la teoría APOE.

✓**Contexto del artículo Scopus_014:**

"Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model"

De acuerdo a (Betancur et al., 2022, pág. 29) el artículo **Scopus_14**, se desarrolló de la siguiente manera:

- El estudio del artículo antes mencionado se basó en la construcción de la (DG), que fue el resultado del diseño de la primera componente del Ciclo de Investigación. En el artículo del siguiente link https://relime.org/index.php/relime/article/view/68/71,p, específicamente en la página 270, se presentan con detalle los aspectos que resultaron clave para la formulación de la (DG) adaptada a la aplicación del escenario de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH.
- En el diseño de las tareas, logró el objetivo de interiorizar las acciones, coordinar los procesos y aplicar la encapsulación del tema. Todo esto contribuyó a alcanzar el objeto del concepto de los valores y vectores propios.
- Para la implementación del método de enseñanza del ciclo *ACE* propuesto por la teoría APOE para la implementación en el aula, son las siguientes:

  Actividades: Los estudiantes debieron trabajar en las actividades que fueron organizadas y planificadas con un orden lógico, como parte de su aprendizaje, cumpliendo así con el propósito educativo del artículo.

  Discusión en clase: Los estudiantes se organizaron en grupos reducidos para analizar y debatir preguntas específicas. Durante estas interacciones, compartieron ideas y argumentaron puntos de vista sobre el tema en cuestión.

  Ejercicios: Con el objetivo de desarrollar las construcciones mentales relacionadas con el concepto de valores y vectores propios, y reforzar el aprendizaje de los estudiantes, se asignaron tareas adicionales que posteriormente se retomaban en la próxima clase para su análisis.
- **Participantes:**

  "Esta investigación fue de tipo cualitativo con carácter descriptivo, participaron 30 estudiantes $[E_1, E_2, \cdots, E_{30}]$ de una universidad colombiana pública vinculados a programas de ingeniería o matemáticas. Tales estudiantes cursaban Álgebra Lineal I por primera vez, con una intensidad 4 horas por semana. El tiempo de implementación de la enseñanza fue de 7 sesiones cada una de 120 minutos. Después de cada sesión la profesora del curso y uno de los investigadores se reunían con el propósito de discutir, planear o ajustar diferentes aspectos de la instrucción".

✓**<u>Elegir el grupo experimental y de control</u>**: El primer grupo contó con **6** estudiantes y se lo identificó como **PE1, PE2, PE3, PE4, PE5, PE6** (Participante del Grupo Experimental), mientras que el segundo grupo contó con **5** estudiantes y se identificó como **PE1, PE2, PE3, PE4, PE5** (Participante del Grupo de Control). Las pruebas, tareas, foros y participaciones se entregaron a ambos grupos pero en distinto tiempo.

Mediante la **Ilustración 3-2**, se detallan los métodos por los cuales las hipótesis serán aplicadas a ambos grupos y los procedimientos que se siguen en una prueba no paramétrica:

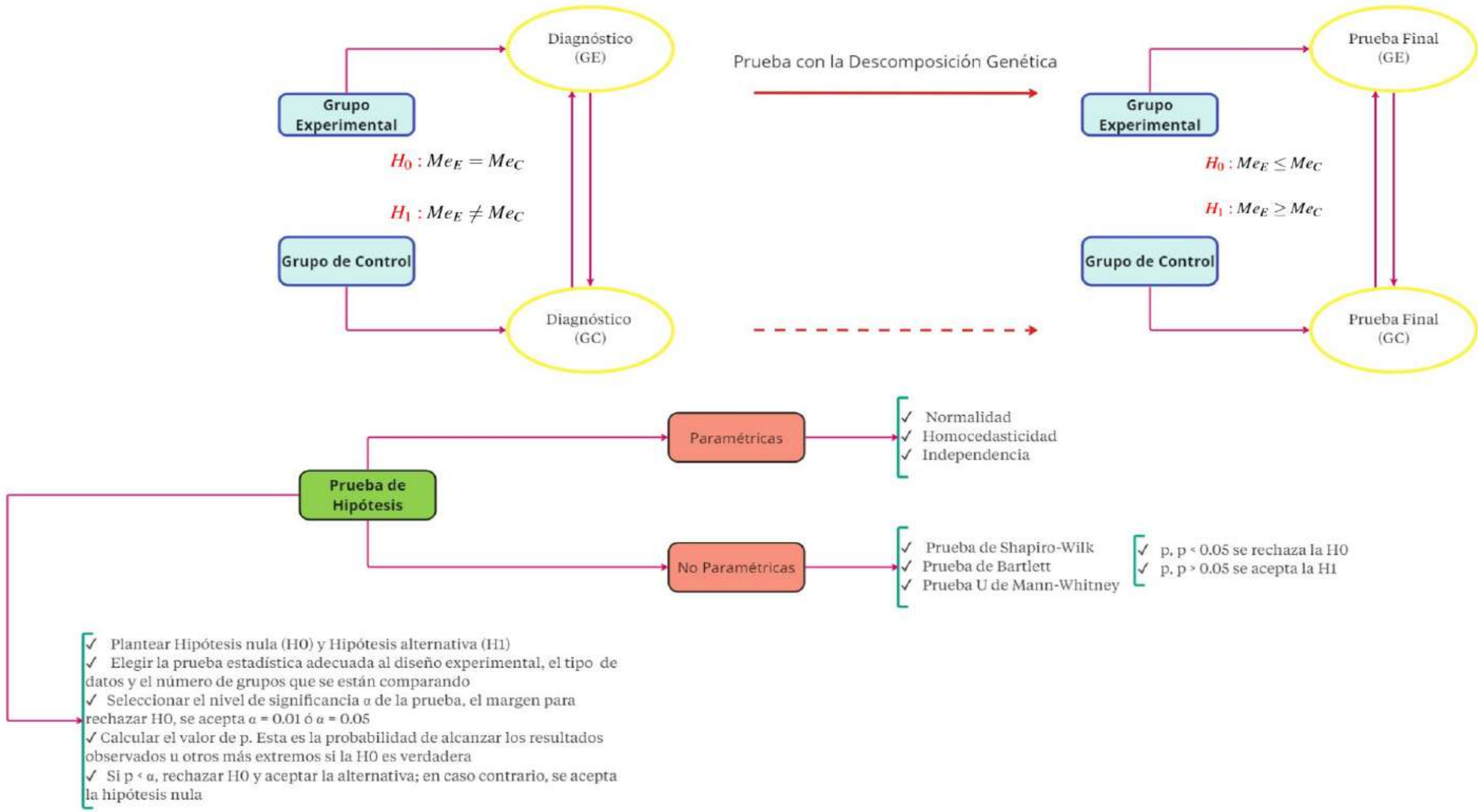


Ilustración 3-2: Esquema del planteamiento de las Hipótesis al Grupo Experimental y Grupo de Control
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Con el propósito de aplicar el escenario relacionado con el concepto de Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, se seleccionó al 4^{to} semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH como el grupo de estudio.

- La (DG) del artículo $Scopu\_014$ (Betancur et al., 2022, pág. 41) mediante la teoría APOE, se adaptó al colectivo de estudio del 4^{to} semestre, donde constó de dos Esquemas Mentales:

  a) **E1:** Conocimientos previos para el concepto de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales.

  b) **E2:** Construcción de la (DG) del concepto de Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, mediante la teoría APOE

  En el Esquema **E2**, se implementó los siguientes conocimientos previos que el estudiante debe poseer, además, de los que se encontró en la (DG) del artículo $Scopus\,014$:

  a) Álgebra Lineal.

  b) Sistema de Ecuaciones Lineales.

  Del mismo modo, se implementó una segunda Acción en el Esquema **E2** de la (DG). Esto permitió una mejor interiorización sobre lo que se necesita (como la base vectorial) para avanzar al Proceso 3, que es la construcción de la matriz asociada a la transformación T y así coordinar entre acciones y procesos, como se observa en la nueva **Ilustración 4-24** de la (DG) refinada. Para avanzar hacia la siguiente coordinación, primero se debe determinar la determinante. Luego, se procede a encapsular el Proceso de valor y vector propio, logrando así el objeto relacionado con el concepto de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales.

- Durante el diseño de tareas y ejercicios, se creó un ambiente en el que los enunciados de las preguntas, el tiempo y las instrucciones reflejan el tipo de proceso mental que se busca evaluar. Además, se logró el objetivo de interiorizar las acciones, coordinar los procesos y aplicar la encapsulación del tema. Todo esto contribuyó a alcanzar el concepto de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales.

- **Participantes:**

  En la investigación del siguiente (TIC) se llevó a cabo un estudio de tipo cuantitativo con carácter explicativo. Participaron 11 estudiantes $[Est_1, Est_2, \cdots, Est_{11}]$ de la universidad ecuatoriana pública de la ESPOCH, todos vinculados a la carrera de matemática de la Facultad de Ciencias. Los estudiantes cursaban Álgebra Lineal II por primera vez, con una carga horaria de 7 horas por semana. La enseñanza se llevó a cabo en 2 sesiones: la primera de 60 minutos y la segunda de 120 minutos. Después de cada sesión mi persona (Tanya Johana

Sarango Jumbo) acató ciertas recomendaciones de la docente del $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH. El objetivo era ajustar diferentes aspectos para el desarrollo del material didáctico relacionado con el tema.

✓**Implementar el método de enseñanza Ciclo (*ACE*)**: Se trabajó con el grupo experimental y se lo hará con Actividades en clase, Discusiones en clases y Ejercicios sobre el tópico a tratar que es: Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, de igual manera será, para el grupo de control, con la diferencia que su clase fue impartida de manera tradicional.

- Para la implementación de la enseñanza aplicó el ciclo *ACE* propuesto por la teoría APOE para la implementación en el aula, son las siguientes:

  Actividades en clase: Se impartió el tema propuesto por la Docente en una master clase, aplicando la (DG) refinada antes diseñada y con ayuda de una presentación. La clase se grabó y está subida en un repositorio de Drive (https://drive.google.com/drive/folders/1HFUd7Ar3GxAi3iM-nQYNuBYsC3Svlihw?usp=sharing). Además, en el bloque académico del Moodle se implementó:

  1. Video de apoyo.
  2. Material teórico sobre valores y vectores propios de las matrices asociadas a las transformaciones lineales.
  3. Conocimiento del artículo: "Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model"; Álgebra Lineal sub área Vectores y Valores Propios, Transformaciones Lineales.

  Discusión en clase: Para la interacción de los estudiantes se implementó:

  1. Chat grupal sobre dudas de la clase.
  2. **Foro:** ¿Cómo se interpreta geométricamente los valores y vectores propios de las matrices asociadas a las transformaciones lineales?
  3. Glosario.

  Ejercicios: Con el objetivo de desarrollar las construcciones mentales y finalizar la intervención ante los estudiantes se les propuso un Post Test, adicional, en el bloque de cierre del Moodle una tarea que constó de 3 preguntas y así visualizar si se logró el objetivo de utilizar la teoría APOE para una primera representación de la forma de enseñar los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales.

✓<u>**Adecuación del Moodle**</u>: Sé lo que se encuentra en el siguiente link: https://cided.info/moodle/course/view.php?id=111 y se lo adecuó con la metodología *PACIE*, esta plataforma se dividió por bloques:

1. Bloque 0-*PACIE:*
2. Bloque Académico:
3. Bloque de Cierre

De esta manera hubo una interacción con los estudiantes, donde tuvieron la oportunidad de despejar dudas a través de foros y la visualización de videos para reforzar lo aprendido.

✓<u>**Presentar una clase magistral:**</u> Sobre los **Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales**, esta clase ya se realizó y se la puede visualizar en el siguiente link: https://drive.google.com/drive/folders/1HFUd7Ar3GxAi3iM-nQYNuBYsC3Svlihw?usp=drive_link

✓<u>**Análisis de resultados cuantitativos:**</u> Para asegurar la integración, compatibilidad y manejo de análisis de datos con otros lenguajes, como *Excel*, se utilizó el software libre *R* (2022), versión 4.2.1. Esta elección se debe a la capacidad de *R*: Software Libre y de Código Abierto, donde *R* permite a los usuarios examinar el código de los paquetes y modificarlos según sea necesario, a su vez *R*. Para mostrar el código *R*, se usó el entorno ***(lstlisting)*** y para cambiar el lenguaje con ***(lstset lenguaje=R)***. Además, para el análisis de la similaridad de *Israel Lerman*, se realizó con el paquete *Rchic* de Raphael Couturier y se utilizó un dendrograma o también llamado diagrama de árbol.

- **Prueba de Hipótesis: Prueba no paramétrica.**

  Debido a las características particulares de los datos, se optó por utilizar una prueba estadística no paramétrica, específicamente la ***Prueba U de Mann-Whitney***, adecuada para muestras de tamaño reducido, donde no se puede asumir una distribución normal. Luego, se procedió a comparar las medianas para determinar si existen diferencias significativas entre los valores del grupo experimental y el grupo de control. Estos valores provienen de los resultados de las calificaciones del $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH.

El análisis de las hipótesis planteadas, se realizó mediante el ingreso de los datos en el software libre *R* (2022), versión 4.2.1, lo que permitirá una eficaz representación de los resultados y sus gráficas.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En el capítulo siguiente, se presentarán los resultados correspondientes a cada uno de los objetivos específicos establecidos para el desarrollo de esta investigación. Los mismos incluyen:

1. Resultados de la (RSL) de la teoría APOE en el área de la matemática hasta el año 2023. Se contestó las preguntas de investigación planteadas en la tesis (Aldás Castro, 2022, pág. 21). Se elaboraron gráficas para representar los porcentajes correspondientes a las respuestas de cada pregunta. Adicionalmente, se incluyen tablas que resumen las frecuencias de los artículos científicos analizados.
2. El análisis de los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal y detallar todas las descomposiciones genéticas involucradas hasta el 2023.
3. Encontrar los escenarios de aplicación de la teoría APOE en el Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH, mediante la similaridad de *Israel Lerman*.
4. Aplicar el escenario de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH, mediante la adaptación de la descomposición genética.

Para finalizar, los resultados obtenidos de la aplicación de la descomposición genética en el tema de los "Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales". Además, se expone la implementación de la metodología PACIE y el ciclo de enseñanza ACE, los cuales se llevaron a cabo durante el $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH. Este periodo académico se extendió desde el 2 de octubre del 2023 hasta el 1 de marzo del 2024 y se distinguió por la utilización de cálculos cuantitativos para caracterizar los resultados.

4.1. Resultados de la Revisión Sistemática de Literatura Científica (RSL) de la teoría APOE en el área de la matemática hasta el año 2023.

A continuación, se detallan los pasos que se necesitaron para la ejecución y desarrollo de la (RSL), entre los años 2015 hasta 2023.

4.1.1. *Pasos para la elaboración de la Revisión Sistemática de Literatura*

En esta sección, se delineó meticulosamente cómo se llevó a cabo cada paso para la adecuada realización de la (RSL).

4.1.2. *Redacción de las preguntas de investigación*

Las preguntas que surgieron a partir de los resultados de la encuesta aplicada a los últimos semestres de la carrera de matemática, correspondientes a la tesis "Revisión sistemática de la teoría APOE para los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH" (Aldás Castro, 2022), revelaron el interés de los estudiantes por conocer detalles como la afiliación institucional, el año de publicación y el autor de los artículos analizados en los buscadores *(Google Scholar, SciELO, Scopus y Wos)*. Además, mostraron curiosidad por la afiliación de autores ecuatorianos, el software utilizado, el idioma, el país, la revista y la temática de los artículos científicos.

Según (Aldás Castro, 2022, pág. 26), se formularon las siguientes preguntas:

- **PI01:** ¿Cuál es el principal lugar de afiliación institucional de los artículos científicos?
- **PI02:** ¿Cuál es el año de publicación que contiene más artículos científicos en el periodo de estudio entre los años 2015 hasta 2023?
- **PI03:** ¿Cuál es el país que contiene más artículos científicos?
- **PI04:** ¿Existe autores que tienen afiliación en instituciones ecuatorianas en los artículos científicos?
- **PI05:** ¿Existe algún software que más se utilizó en los artículos científicos?
- **PI06:** ¿Cuál es el idioma más utilizado en los artículos científicos?
- **PI07:** ¿Cuál es el autor que tiene más participación en los artículos científicos?
- **PI08:** ¿Cuál es la principal temática de la teoría APOE que utiliza el artículo científico?
- **PI09:** ¿Cuál es la principal revista que se utiliza en la publicación de los artículos científicos?
- **PI10:** ¿En qué área de la matemática (Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Didáctica de la Matemática, etc.) se utiliza más la teoría APOE?

4.1.3. *Método PICOS*

De acuerdo con (Pazmiño et al., 2021, pág. 6), presenta como emplear el método PICOS: *(Population, Intervention, Comparison, Outcome, Study Type)* a los cuestionamientos de la investigación, para la (RSL) en la siguiente Tabla:

Tabla 4-1: Método PICOS

PI	P	I	C	O	S
1					
2					
3	Artículos				
4	científicos			Datos	
5	entre los años		No se aplica	cuantitativos	Frecuencia
6	2015 hasta 2023				
8					
9					
10					

Adaptado de: Pazmiño, R., 2021.

4.1.4. *Cadena de búsqueda para la teoría APOE en el área de la matemática*

Se seleccionaron cuidadosamente descriptores específicos para las cadenas de búsqueda, presentados en las tablas anexas, que son cruciales para la precisión y relevancia de los resultados de la investigación. Cada descriptor está vinculado a la cantidad, los años y el idioma de los artículos identificados. En el **ANEXO B:** se presentan las CAPTURAS DE LOS BUSCADORES QUE SE UTILIZARON PARA LA REVISIÓN SISTEMÁTICA de literatura científica, tanto en inglés como en español.

4.1.4.1. *Google Scholar*

Tabla 4-2: Descriptores de búsqueda en *Google Scholar*

Google Scholar				
		Años	**Idioma**	**Artículos**
Descriptores	APOS math 2023	2022 - 2023	Inglés	104
	APOE matemática 2023	2022 - 2023	Español	151
Total de Artículos				**255**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Tabla 4-2**, el descriptor de búsqueda utilizado en *Google Scholar* con el idioma inglés *(APOS math 2023)*, arrojó un total de 104 artículos. Su equivalente en español (APOE matemática 2023), resultó en 151 artículos. Esto garantizó que no se omitiera ningún estudio relevante, teniendo en cuenta que este motor de búsqueda constituye un extenso repositorio de conocimiento académico que abarca una diversidad de recursos, como artículos, libros, citas, etc.

Observación. Es relevante señalar que en *Google Scholar*, durante el periodo entre los años 2022 hasta 2023, se evidenció 5.750 artículos científicos en inglés relacionadas con la teoría APOE en el campo de la matemática. En la colección de *Google Scholar*, se decidió limitar la búsqueda hasta la página 24 en la barra de paginación, debido a que los 5.495 artículos subsiguientes no se centraban en la teoría APOE, quedando como resultado total 255 artículos para analizar. Para una observación más detallada de los artículos ingresar al siguiente link: https://docs.google.com/spreadsheets/d/1nlX6PebJKwhF6XxOInBVU3cG1vbNSAGF/edit?usp=sharing&ouid=109900342582328389854&rtpof=true&sd=true

4.1.4.2. *SciELO*

Tabla 4-3: Descriptores de búsqueda en *SciELO*

SciELO				
		Años	**Idioma**	**Artículos**
Descriptor	(ab:(teoría APOE)	2022 - 2023	Español	
Total de Artículos				**5**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la siguiente **Tabla 4-3**, se encontró 5 artículos, el descriptor de búsqueda utilizado en la base de datos de *Scielo* fue exclusivamente en español y se incluyó *(ab=Resumen)* para explorar los resúmenes de los artículos. Estos resúmenes, que son una parte esencial y accesible del contenido de los artículos científicos, resultaron ser de gran utilidad para nuestra investigación.

4.1.4.3. *Scopus*

Tabla 4-4: Descriptores de búsqueda en *Scopus*

Scopus				
		Años	**Idioma**	**Artículos**
Descriptor	TITLE-ABS-KEY (apos AND theory) AND (LIMIT-TO (SUBJAREA, "MATH")) AND (LIMIT-TO (DOCTYPE, "ar")) AND (LIMIT-TO (EXACTKEYWORD, "APOS Theory")) AND (LIMIT-TO (PUBYEAR, 2022) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2023))	2022 - 2023	Inglés	
Total de Artículos				**16**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Se observa que en la **Tabla 4-4**, se evidenció 16 artículos encontrados. El idioma del descriptor de la cadena de búsqueda en la base de datos de *Scopus*, es en inglés y se incluyó: *TITLE*, *SUBJAREA*, *APOS Theory*, *LIMIT-TO (PUBYEAR, 2022) OR LIMIT-TO (PUBYEAR, 2023)*.

4.1.4.4. *Web of Science (Wos)*

Tabla 4-5: Descriptores de búsqueda en *Web of Science*

Web of Science				
		Años	**Idioma**	**Artículos**
Descriptor	All (APOS math 2023)	2022 - 2023	Inglés	
Total de Artículos				**45**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Se evidencia en la **Tabla 4-5** un total de 45 artículos encontrados. La búsqueda del descriptor en la base de datos de *Web of Science* se realizó únicamente en inglés. Se incluyó el término *(All=todo al mismo tiempo)* ampliando así la búsqueda de información para el desarrollo de la investigación.

4.1.4.5. *Resultados generales de la cadena de búsqueda desde los años* 2022 *hasta* 2023

Tabla 4-6: Total de artículos científicos y sus respectivos buscadores (2022 – 2023)

Buscadores de datos académicos	**Idioma**	**Años**	**Artículos**	**Total**
Google Scholar	Inglés	2022 - 2023	104	255
	Español		151	
SciELO	Español		5	5
Scopus	Inglés		16	16
Wos	Inglés		45	45
Total de Artículos				**321**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Tabla 4-6**, se puede observar 321 artículos como el total del resultado de la cadena de búsqueda de artículos de la teoría APOE en el área de la matemática. Todos los artículos científicos que se recopiló para la base de datos, entre los años 2022 hasta 2023 serán sometidos a un análisis y posteriormente incorporados en la nueva actualización de la (RSL) de la tesis de (Aldás Castro, 2022).

4.1.4.6. *Resultados de la cadena de búsqueda de la tesis "Revisión sistemática de la teoría APOE en los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH" (Aldás Castro, 2022, pág. 37), entre los años* 2015 *hasta* 2021

Tabla 4-7: Todos los buscadores y el total de artículos científicos (2015 - 2021)

<table>
<tr><th></th><th>Años</th><th>Artículos</th><th>Total</th></tr>
<tr><td>Scopus</td><td>2015-2021</td><td>54</td><td>54</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Google Scholar</td><td rowspan="2">2015-2022</td><td>54</td><td rowspan="2">129</td></tr>
<tr><td>75</td></tr>
<tr><td rowspan="2">SciELO</td><td rowspan="2">2015-2024</td><td>70</td><td rowspan="2">77</td></tr>
<tr><td>7</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Web of Science</td><td rowspan="2">2015-2023</td><td>19</td><td rowspan="2">27</td></tr>
<tr><td>8</td></tr>
<tr><td>Total</td><td></td><td>287</td><td>287</td></tr>
</table>

Fuente: Aldás, Angélica, 2022.

Además, la siguiente **Tabla 4-7** de la tesis de (Aldás Castro, 2022, pág. 37), presenta los resultados de la (RSL), entre los años 2015 hasta 2021. Estos resultados serán incorporados en la actualización de la nueva base de datos hasta el 2023.

4.1.4.7. *Resultados totales de los artículos científicos de la teoría APOE en el área de la matemática, desde los años* 2015 *hasta* 2023

Tabla 4-8: Artículos científicos y sus respectivos buscadores (2015 – 2023)

Buscadores de datos académicos	Artículos	Años	Total
Google Scholar	129	2015 - 2023	255
	384		
SciELO	27		32
	5		
Scopus	54		70
	16		
Wos	77		122
	45		
Total de Artículos			**608**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.1.5. *Criterios de inclusión y exclusión*

En la siguiente etapa, se realizó una meticulosa organización y categorización de los documentos recopilados de la base de datos, siguiendo los criterios específicos de inclusión, exclusión y calidad (Kitchenham, 2010, pág. 795). Este proceso será fundamental para la realización de la nueva (RSL) que se extendió hasta el año 2023.

4.1.5.1. *Criterios de inclusión para la (RSL)*

Además de los artículos científicos hallados en la base de datos, no se incorporaron otros.

4.1.5.2. *Criterios de exclusión para la (RSL)*

Para actualizar la (RSL) hasta el 2023, se consideraron los artículos científicos. Estos se excluyen si:

CE01: No se puede buscar por las siglas "APOS".

CE02: Los artículos científicos que no traten de la teoría APOE entre los años 2015 hasta 2023.

CE03: No contiene la teoría APOE referente a la matemática.

CE04: No son artículos científicos.

Una vez aplicados estos criterios de exclusión a los artículos que se encuentran ubicados en la base de datos https://docs.google.com/spreadsheets/d/1nlX6PebJKwhF6XxOInBVU3cG1vbNSAGF/edit?usp=sharing&ouid=109900342582328389854&rtpof=true&sd=true y son el resultado de la cadena de búsqueda de literatura científica entre los años 2022 hasta 2023, se eliminaron 261 artículos.

4.1.5.3. *Análisis de artículos científicos entre los años* 2022 *hasta* 2023

Tabla 4-9: Artículos científicos para el análisis (2022 – 2023)

	N.° Artículos	**Total**
Criterios de inclusión	0	0
Criterios de exclusión	261	261
Artículos repetidos	9	9
Artículos elegidos para el análisis	51	51
Total, artículos identificados		**321**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Como se muestra, en la **Tabla 4-9**, se identificó 321 artículos científicos relacionados con la teoría APOE. Tras aplicar los criterios de inclusión y exclusión, así como se corroboraron 9 artículos duplicados, por lo tanto, se excluyeron 270 artículos. Este dejó un total de 51 artículos válidos para el análisis, estos artículos se encuentran detallados en el **ANEXO D:** LISTA DE ARTÍCULOS CIENTÍFICOS QUE SE ANALIZARON PARA LA ACTUALIZACIÓN DE LA

REVISÓN SISTEMÁTICA ENTRE LOS AÑOS (2022 – 2023).

4.1.6. ***Artículos encontrados para la investigación entre los años*** 2015 ***hasta*** 2021

A continuación, se evidencia en la siguiente tabla el análisis de los artículos científicos de la (RSL), entre los años 2015 hasta 2021.

Tabla 4-10: Total de artículos científicos para la investigación (2015 – 2021)

Artículos científicos	N.° de artículos
Artículos eliminados por los criterios	135
Artículos repetidos	29
Artículos seleccionados para la revisión	123
Total, de artículos encontrados	287

Fuente: Aldás, Angélica, 2022.

Es importante mencionar, que los artículos seleccionados para la revisión en la **Tabla 4-10** deben ser incluidos en la nueva (RSL), la cual se extiende hasta el año 2023.

En la siguiente **Tabla 4-11**, se unió el resultado de los artículos de la Revisión Sistemática de Literatura Científica, entre los años 2015 hasta 2021 y la Revisión Sistemática de Literatura Científica, entre los años 2022 hasta 2023. Se seleccionaron para el análisis un total de 174 artículos científicos, todos ellos enfocados en la teoría APOE aplicada a las matemáticas.

Tabla 4-11: Artículos científicos para la investigación (2015 – 2023)

	Total
Criterios de inclusión	396
Criterios de exclusión	
Artículos repetidos	38
Artículos elegidos para el análisis	**174**
Total, artículos identificados	**608**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

El resultado de los 123 artículos se encuentran enunciados por buscador, título y autor en el **ANEXO C:** LISTA DE ARTÍCULOS CIENTÍFICOS QUE SE ANALIZARON PARA LA REVISIÓN SISTEMÁTICA ENTRE LOS AÑOS (2015 - 2021)

4.1.7. *Criterios de calidad para la (RSL) entre los años 2022 hasta 2023*

Durante el periodo 2022 hasta 2023, se encontró 7 artículos indexados en *Wos*, lo cual resalta como (JCR) al desarrollo de esta investigación y la relevancia de los artículos científicos en la comunidad científica y se enuncian a continuación:

1. *Wos*_039: Lógica (Teoría de conjuntos, Lógica de Segundo Orden) (Väänänen y Welch, 2023).
2. *Wos*_040: Álgebra Lineal (Transformaciones De Funciones) (Koyunkaya y Boz Yaman, 2023).
3. *Wos*_041: Álgebra Lineal (, Rango) (Dogan, 2023).
4. *Wos*_042: Análisis Real (Funciones Exponenciales Y Logarítmicas) (Berrios y Martínez Planell, 2022).
5. *Wos*_043: Didáctica De La Matemática) (APOS, Educación Matemática Realista, Pensamiento Algebraico, Sentido Estructural) (Joaquin Veith et al., 2022a).
6. *Wos*_044: Cálculo Diferencial (Integrales, Regla De La Cadena) (Toh, 2022).
7. *Wos*_045: Cálculo Multivariado (Derivadas Direccionales) (Vahid Borji et al., 2023b).

A continuación, mediante el buscador de base de datos de literatura científica en *Wos*, se indexaron 33 artículos científicos en la Revisión Sistemática de Literatura Científica, entre los años 2015 hasta 2021, seguidamente, se los enuncia:

Wos_1, Wos_11, Wos_14, Wos_16, Wos_18, Wos_20, Wos_25, Wos_26, Wos_30, Wos_34, Wos_35, Wos_37, Wos_43, Wos_44, Wos_46, Wos_47, Wos_5, Wos_50, Wos_52, Wos_53, Wos_54, Wos_56, Wos_58, Wos_59, Wos_6, Wos_60, Wos_61, Wos_67, Wos_69, Wos_70, Wos_72, Wos_76, Wos_9 (Aldás Castro, 2022).

4.1.8. *Análisis de resultados a las interrogantes de investigación*

Se proporcionaron respuestas a las 10 preguntas de investigación, basándose en los resultados obtenidos en la **Tabla 4-9**. Los datos adicionales que se presentaron en la **Tabla 4-11** se emplearon en el análisis de 174 artículos que fueron seleccionados para la investigación. Para una mejor visualización y comprensión de los resultados, se elaboraron gráficos y tablas utilizando el programa informático *Excel* versión 2021, donde se detallaron los porcentajes correspondientes.

4.1.8.1. *PI01: ¿Cuál es el principal lugar de afiliación institucional de los artículos científicos?*

Tabla 4-12: Afiliación de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE

Afiliaciones	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
Instituto Tecnológico Autónomo De México	12	6,90	6,90
Universidad De Kwazulu Natal	8	4,60	11,49
Universidad Industrial De Santander	8	4,60	16,09
Universidad Ferdousí De Mashhad	6	3,45	19,54
Universidad Austral De Chile	5	2,87	22,41
Pontificia Universidad Católica De Valparaíso	5	2,87	25,29
Universidad Charles	5	2,87	28,16
Universidad De Puerto Rico De Mayagüez	4	2,30	30,46
Instituto Politécnico Nacional	4	2,30	32,76
Universidad Católica Del Norte	3	1,72	34,48
Otras afiliaciones	114	65,52	**100,00**
TOTAL	**174**	**100,00**	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Tabla 4-12**, se observa que la afiliación con mayor número de publicaciones de artículos científicos es el Instituto Tecnológico Autónomo de México, con una frecuencia absoluta de 12 artículos que son: Google_104, Google_57, Scielo_9, Scopus_10, Wos_35, Wos_50, Wos_54, Wos_56, Wos_59, Wos_72, Google_067, Scielo_004, lo que representa una frecuencia porcentual del 6,90 % del total. Además, se menciona que las otras afiliaciones cuentan con un total de 114 artículos, lo que equivale a una frecuencia por porcentual del 65,52 % en un total de 174 artículos.

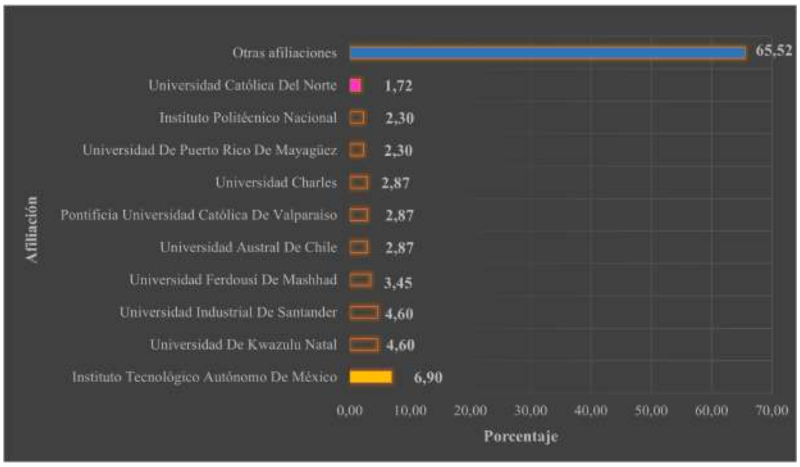


Ilustración 4-1: Porcentaje de afiliación de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Se observa que en la **Ilustración 4-1**, otras afiliaciones representan un 65,52 %, seguido por el Instituto Tecnológico Autónomo de México con un 6,90 %, y la Universidad Católica del Norte con el porcentaje más bajo, que es 1,72 %.

4.1.8.2. *PI02: ¿Cuál es el año de publicación que contiene más artículos científicos en el periodo de estudio entre los años 2015 hasta 2023?*

En la **Tabla 4-13**, se observa que en la primera revisión realizada en el año 2022, empezó con una frecuencia absoluta de 8 publicaciones. En la nueva actualización en el año 2023, se terminó con 30 artículos publicados y una frecuencia porcentual del 17,24 %.

Tabla 4-13: Años de publicación de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE

Año	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
2015	8	4,60	4,60
2016	13	7,47	12,07
2017	19	10,92	22,99
2018	19	10,92	33,91
2019	25	14,37	48,28
2020	18	10,34	58,62
2021	21	12,07	70,69
2022	21	12,07	82,76
2023	30	17,24	**100,00**
TOTAL	**174**	**100,00**	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Ilustración 4-2: Porcentaje de los artículos científicos publicados por año
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la siguiente **Ilustración 4-2**, se evidencian tres porcentajes que resaltan entre los 9 años que se hicieron publicaciones con la teoría APOE en el área de la matemática. El año 2023 destaca con una frecuencia porcentual del $17,24\,\%$, mientras que en el año 2015 presenta un menor porcentaje. Se contempla un alto interés de estudio sobre el tópico, existiendo una diferencia de la frecuencia porcentual del$12,64\,\%$ entre los años 2015 hasta 2023.

Tabla 4-14: Países con publicaciones de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE

País	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
México	28	16,09	16,09
Indonesia	25	14,37	30,46
Sudáfrica	21	12,07	42,53
Otros países	19	10,92	53,45
USA	18	10,34	63,79
Chile	17	9,77	73,56
Colombia	12	6,90	80,46
Turquía	9	5,17	85,63
Irán	8	4,60	90,23
Puerto Rico	5	2,87	93,10
Alemania	5	2,87	95,98
España	4	2,30	98,28
China	3	1,72	**100,00**
TOTAL	**174**	**100,00**	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.1.8.3. *PI03: ¿Cuál es el país que contiene más artículos científicos?*

Como se observa en la **Tabla 4-14**, México sigue liderando con una frecuencia absoluta de28 artículos, lo que representa una frecuencia porcentual del 16,09 % de total. Por otro lado, China cuenta con una frecuencia absoluta de 3 artículos analizados, lo que equivale a una frecuencia porcentual del 1,72 %. Además otros países han contribuido con una frecuencia absoluta de 19 publicaciones, representando una frecuencia porcentual del 10,92 % del análisis.

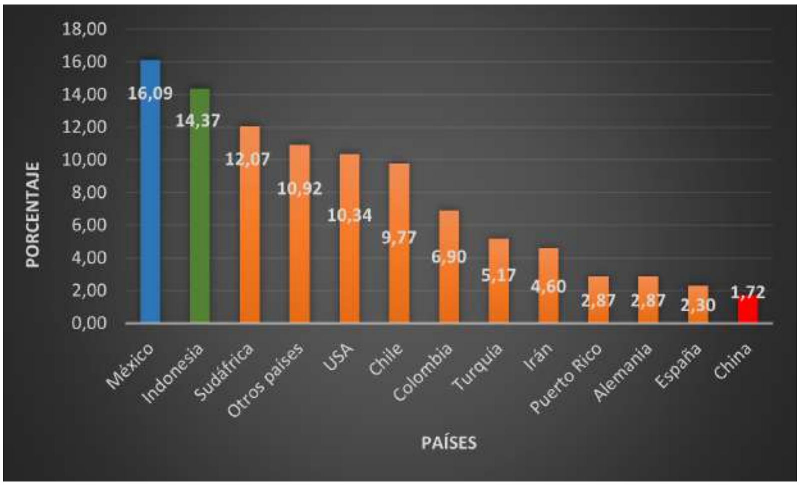


Ilustración 4-3: Porcentaje de países con publicaciones de artículos científicos relacionados con la teoría APOE
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Se evidencia en la **Ilustración 4-3**, México lidera con una frecuencia porcentual del 16,09 %, seguido por Indonesia con una frecuencia porcentual del14, 37, y China ocupa el último lugar con una frecuencia porcentual del 1, 72.

4.1.8.4. *PI04: ¿Existen autores que tienen afiliación en instituciones ecuatorianas en los artículos científicos?*

En la siguiente Revisión Sistemática de Literatura Científica que se realizó entre los años 2022 hasta 2023, se evidenció una aportación con afiliación ecuatoriana: "La teoría APOE: Un mapeo sistemático parcial (2015 – 2022)" (Aldás Castro, 2022, pág. 128). Disponible en: http://dspace.espoch. edu.ec/handle/123456789/19829.

4.1.8.5. *PI05: ¿Existe algún software que más se utilizó en los artículos científicos?*

En la **Tabla 4-15**, se caracterizó el software *GeoGebra* con una frecuencia absoluta de 23. De los 174 artículos analizados, 102 tuvieron la frecuencia porcentual más alto. Por último, el software *MAXQDA* se menciona con 2 artículos.

Tabla 4-15: Caracterización del software de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE

Software	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
MAXQDA	2	1,15	1,15
Ninguno	102	58,62	59,77
GeoGebra	23	13,22	72,99
Otros softwares	19	10,92	83,91
Maple	14	8,05	91,95
SPSS	7	4,02	95,98
Excel	4	2,30	98,28
The geometer's sketchpad	3	1,72	**100,00**
TOTAL	**174**	**100,00**	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

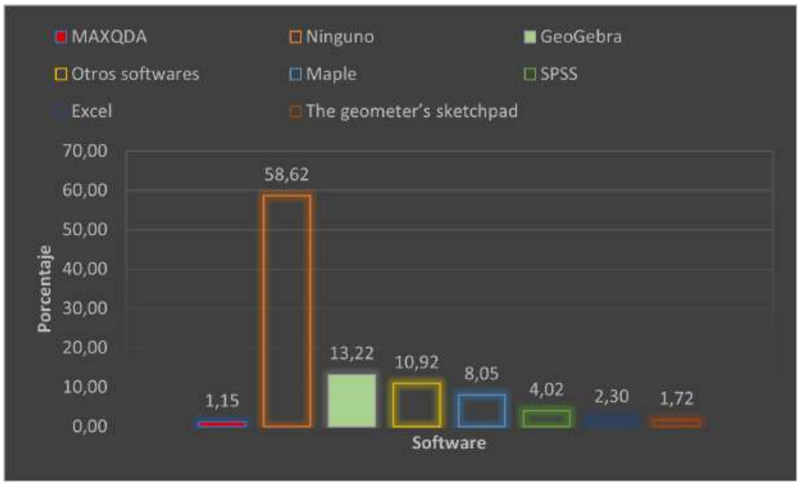


Ilustración 4-4: Porcentaje de la caracterización del software de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-4**, en la caracterización del software, ninguno prevalece con un $58,62\,\%$, seguido por *GeoGebra* con un $13,22\,\%$.

4.1.8.6. *PI06: ¿Cuál es el idioma más utilizado en los artículos científicos?*

Tabla 4-16: Idioma de artículos científicos relacionados con la teoría APOE

Idioma	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
Chino	1	0,57	0,57
Español	42	24,14	24,71
Inglés	131	75,29	**100,00**
TOTAL	**174**	**100,00**	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Se aprecia en la **Tabla 4-16**, el idioma inglés prevalece como el idioma con más publicaciones, con una frecuencia absoluta de 131 artículos. Le sigue el idioma español, con una frecuencia absoluta de 42 artículos, y por último, China con una frecuencia absoluta de 1 artículo.

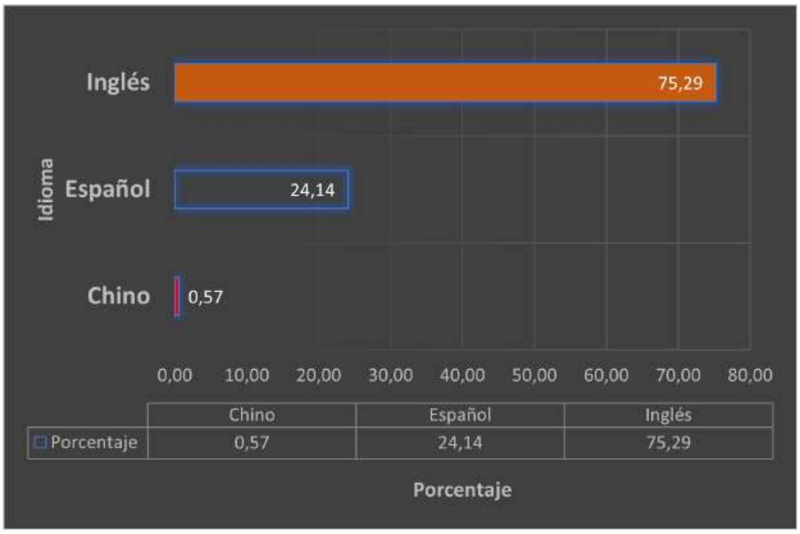


Ilustración 4-5: Porcentaje de los idiomas en los artículos científicos publicados
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-5**, el idioma inglés es el que más se utilizó en los artículos científicos con la teoría APOE en el área de la matemática con una frecuencia porcentual del 75,29 %, le sigue el idioma español con una frecuencia porcentual del 24,14 %.

4.1.8.7. *PI07: ¿Cuál es el autor que tiene más participación en los artículos científicos?*

Tabla 4-17: Autores con participaciones en los artículos científicos relacionados con la teoría APOE

Autores	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
María Trigueros Gaisman	24	5,54	5,54
Rafael Martínez Planell	17	3,93	9,47
Marcela Parraguez González	13	3,00	12,47
Vahid Borji	13	3,00	15,47
Solange Roa Fuentes	8	1,85	17,32
Draga Vidakovic	6	1,39	18,71
Deonarain Brijlall	5	1,15	19,86
Aneshkumar Maharaj	4	0,92	20,79
Edelmira Badillo	4	0,92	21,71
Lidia Aurora Hernández Rebollar	4	0,92	22,63
Asuman Oktaç	3	0,69	23,33
Otros autores	332	76,67	**100,00**
TOTAL	**433**	**100,00**	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Tabla 4-17**, sigue liderando PhD. María Trigueros Gaisman con la participación de una frecuencia absoluta de 24 artículos científicos, de un total de 174 analizados. Estos artículos se basan en variables de respuestas múltiples en el programa informático *Excel* versión 2021, y representan una frecuencia porcentual del $5,54\,\%$ del conjunto. Le sigue otros autores, con una frecuencia porcentual del $76,67\,\%$ en 332 artículos, y por último, Asuman Oktaç con una frecuencia porcentual del $0,69\,\%$ en un total de 3 artículos.

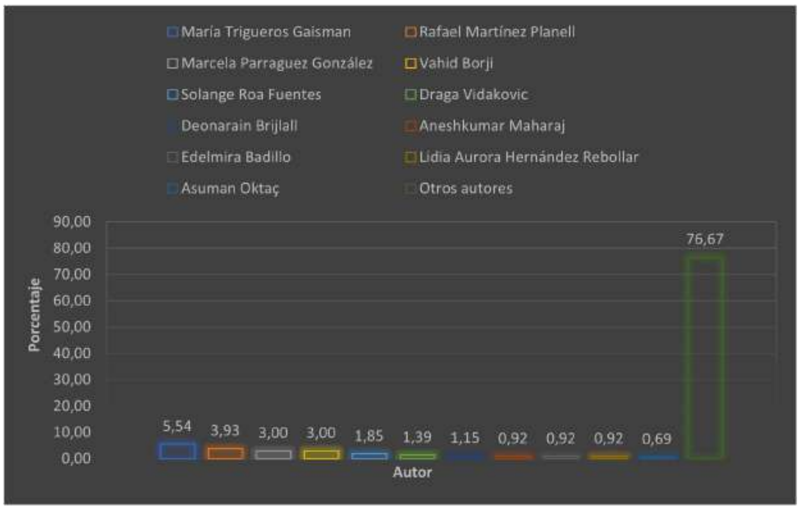


Ilustración 4-6: Porcentaje de las participaciones de los autores en los artículos científicos
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-6**, la Dra. María Trigueros Gaisman, destaca una impresionante frecuencia porcentual del 76,67 % de participación en artículos científicos sobre la teoría APOE y el Álgebra Lineal, entre los años 2015 hasta 2023. Posicionándola a nivel mundial como una figura relevante en dicha área de la matemática.

4.1.8.8. *PI08: ¿Cuál es la principal temática de la teoría APOE que utiliza el artículo científico?*

Tabla 4-18: Temática de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE

Temática	N.°	Porcentaje
Acciones	143	82,18 %
Procesos	147	84,48 %
Objetos	148	85,06 %
Esquemas	130	74,71 %
Descomposición genética	116	66,67 %
N.° Papers	**174**	**100,00 %**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Tabla 4-18**, la principal temática de la teoría APOE que se encontró en los artículos científicos fueron los objetos con 148 aciertos en un total de 174 papers.

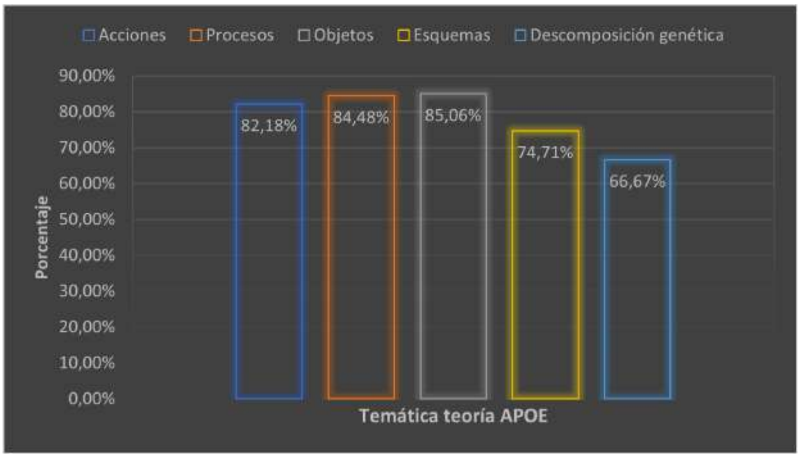


Ilustración 4-7: Porcentaje de la temática en los artículos científicos relacionados con la teoría APOE
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-7**, se observa que la temática de la descomposición genética cuenta con un total de 116 artículos, lo que representa un $66,67\,\%$. Por otro lado, la temática de los objetos cuenta con 148 artículos, lo que equivale a un $85,06\,\%$ del análisis, tomando como base del análisis un total de 174 artículos.

4.1.8.9. *PI09: ¿En qué área de la matemática (Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Didáctica de la Matemática, etc.) se utiliza más la teoría APOE?*

En la **Tabla 4-19**, la revista *The Journal of Mathematical Behavior*, continúa liderando con una frecuencia absoluta de 23 artículos, lo que representa una frecuencia porcentual del $13,22\,\%$ de total. Además, otras revistas cuentan con una frecuencia absoluta de 99 artículos en una frecuencia porcentual del $56,90\,\%$, cabe mencionar que son artículos con una publicación y las revistas varían. La Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería cuenta con una frecuencia absoluta menor, con 2 artículos, lo que equivale a una frecuencia porcentual del $1,15\,\%$.

Tabla 4-19: Revista de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE

Revista	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje acumulado
The Journal Of Mathematical Behavior	23	13,22	13,22
International Journal Of Education In Mathematics In Science And Technology	12	6,90	20,11
Educational Studies In Mathematics	8	4,60	24,71
Educación Matemática	6	3,45	28,16
Enseñanza De Las Ciencias	6	3,45	31,61
Advances In Social Science, Education And Humanities Research	5	2,87	34,48
Eurasia Journal Of Mathematics, Science And Technology Education	4	2,30	36,78
International Journal Of Research In Undergraduate Mathematics Education	3	1,72	38,51
European Journal Of Educational Research	3	1,72	40,23
ZDM: The International Journal On Mathematics Education	3	1,72	41,95
Revista De Proyectos Y Textos Académicos En Didáctica De Las Ciencias Y La Ingeniería	2	1,15	43,10
Otras revistas	99	56,90	**100,00**
TOTAL	**174**	**100,00**	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

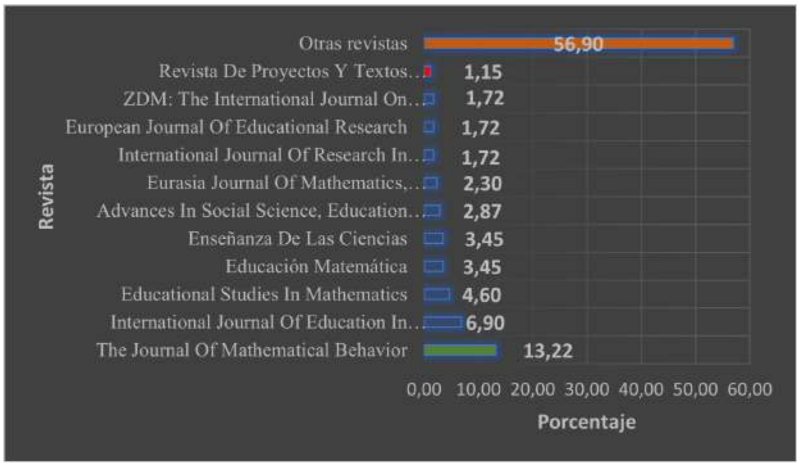


Ilustración 4-8: Porcentaje de las revistas en los artículos científicos
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-8**, con una frecuencia porcentual, del 56.90 % las publicaciones están en revistas independientes. Le sigue, un 13.22 % la revista *The Journal of Mathematical Behavior* y con un 1.55 %, la Revista de Proyectos y Textos Académicos en Didáctica de las Ciencias y la Ingeniería.

4.1.8.10. *PI10: ¿En qué área de la matemática (Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Didáctica de la Matemática, etc.) se utiliza más la teoría APOE?*

Tabla 4-20: Área de la matemática de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE

Área	Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje Acumulado
Álgebra Lineal	34	19,54	19,54
Didáctica De La Matemática	26	14,94	34,48
Cálculo Diferencial	23	13,22	47,70
Análisis Real	15	8,62	56,32
Geometría	12	6,90	63,22
Geometría Analítica	10	5,75	68,97
Álgebra Superior	8	4,60	73,56
Cálculo Multivariable	8	4,60	78,16
Cálculo Integral	7	4,02	82,18
Geometría Euclidiana	7	4,02	86,21
Educación Matemática	4	2,30	88,51
Lógica Matemática	4	2,30	90,80
Ecuaciones Diferenciales	4	2,30	93,10
Álgebra Abstracta	4	2,30	95,40
Estadística	3	1,72	97,13
Aritmética	2	1,15	98,28
Matemática Financiera	1	0,57	98,85
Cálculo Infinitesimal	1	0,57	99,43
Cálculo Complejo	1	0,57	**100,00**
TOTAL	**174**	**100,00**	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Tabla 4-20**, Álgebra Lineal lidera con una frecuencia porcentual del $19,54\,\%$, donde se evidenció una frecuencia absoluta de 34 artículos relacionados en el área de la matemática con la teoría APOE. Además, se encontró una frecuencia absoluta de 1 artículo relacionado con el Cálculo Complejo, representando una frecuencia porcentual del $0,57\,\%$ y 1 artículo con el Cálculo Infinitesimal, representando de igual manera un $0,57\,\%$ del total de 174 artículos que se analizaron en la nueva (RSL).

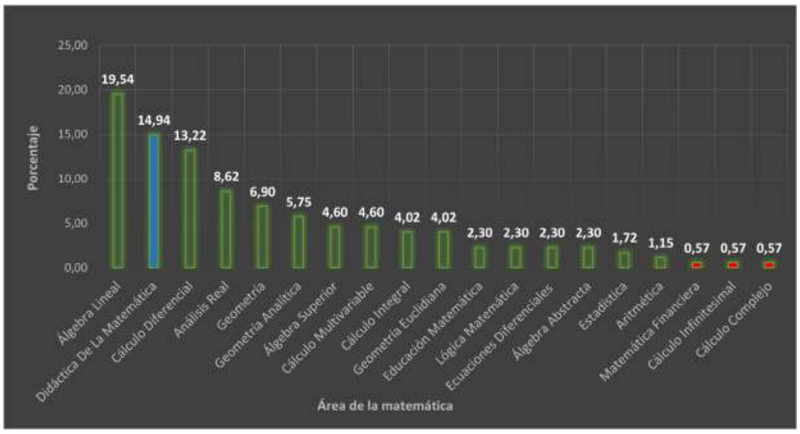


Ilustración 4-9: Porcentajes en el área de la matemática de los artículos científicos
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-9**, sigue liderando el área del Álgebra Lineal con una frecuencia porcentual del $19,54\,\%$ y con una frecuencia porcentual menos del $1\,\%$: Matemática Financiera, Cálculo Infinitesimal y Cálculo Complejo.

Artículos en el área del Álgebra Lineal:

1. DIÁLOGO ENTRE LAS TEORÍAS APOE Y TAD (Trigueros, 2019).
2. IMPULSIVE AND REFLECTIVE STUDENTS' UNDERSTANDING TO LINEAR EQUATIONS SYSTEM: AN ANANALYSIS THROUGH APOS THEORY (Rachmawati y Siswono, 2020).
3. ANALYSIS OF STUDENTS' UNDERSTANDING FOR THE CONCEPT OF MATRIX RANK BASED ON APOS THEORY (Inganah, 2018).
4. EVOLUCIÓN EN EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL. UNA MIRADA A TRES INTERPRETACIONES DESDE LA TEORIA APOE (Maturana et al., 2015).
5. TEACHING EIGENVALUES AND EIGENVECTORS USING MODELS AND APOS THEORY (Salgado y Trigueros, 2015).

6. EL APRENDIZAJE DE ESPACIOS VECTORIALES EN ÁLGEBRA: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE (Montenegro, 2018).
7. DOES THE USE OF APOS THEORY PROMOTE STUDENTS' ACHIEVEMENT IN ELEMENTARY LINEAR ALGEBRA? (Arnawa et al., 2021).
8. LA COMPRENSIÓN DE LA RECTA DESDE LA TEORÍA APOE (Suárez Gil et al., 2021).
9. LEARNING THE CONCEPT OF EIGENVALUES AND EIGENVECTORS: A COMPARATIVE ANALYSIS OF ACHIEVED CONCEPT CONSTRUCTION IN LINEAR ALGEBRA USING APOS THEORY AMONG STUDENTS FROM DIFFERENT EDUCATIONAL BACKGROUNDS (Schirmer y Altieri, 2019).
10. ESTUDIO SOBRE LA CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DE LA MATRIZ DE CAMBIO DE BASE EN TÉRMINOS DE LA TEORÍA APOE (Mendoza et al., 2021).
11. ESTRUCTURAS MENTALES QUE MODELAN EL APRENDIZAJE DE UN TEOREMA DEL ÁLGEBRA LINEAL: UN ESTUDIO DE CASOS EN EL CONTEXTO UNIVERSITARIO (Roa y Parraguez, 2017).
12. PRE-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' MENTAL CONSTRUCTIONS WHEN USING CRAMER'S RULE (Ndlovu y Brijlall, 2019).
13. CONSTRUCCIÓN COGNITIVA DEL ESPACIO VECTORIAL R^2 (M. Rodríguez Jara et al., 2018).
14. CONSTRUCCIONES Y MECANISMOS MENTALES PARA EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA MATRIZ ASOCIADA A UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL (Trigueros Gaisman et al., 2015).
15. MENTAL CONSTRUCTIONS IN LINEAR ALGEBRA (Oktaç, 2019).
16. AN APOS ANALYSIS OF SOLVING SYSTEMS OF EQUATIONS USING THE INVERSE MATRIX METHOD (Kazunga y Bansilal, 2020).
17. COGNITIVE CONSTRUCTION OF THE SOLUTION SET OF A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS WITH TWO UNKNOWNS (M. A. Rodríguez Jara et al., 2019).
18. ESTRUCTURAS MENTALES PARA MODELAR EL APRENDIZAJE DEL TEOREMA DE CAMBIO BASE DE VECTORES (Parraguez et al., 2016).
19. MATRIX MULTIPLICATION AND TRANSFORMATIONS: AN APOS APPROACH (Figueroa et al., 2018).

20. CONSTRUCCIÓN DE LOS OPERADORES LINEALES DIAGONALIZABLES CON BASE EN LA TEORÍA APOE (Mendoza et al., 2021).
21. TASK DESIGN IN APOS THEORY (Trigueros, 2019).
22. THE LEARNING AND TEACHING OF LINEAR ALGEBRA: OBSERVATIONS AND GENERALIZATIONS (Harel, 2017).
23. ZIMBABWEAN IN-SERVICE MATHEMATICS TEACHERS' UNDERSTANDING OF MATRIX OPERATIONS (Kazunga y Bansilal, 2016).
24. UN ESQUEMA DE TRANSFORMACIÓN LINEAL: CONSTRUCCIÓN DE OBJETOS ABSTRACTOS A PARTIR DE LA INTERIORIZACIÓN DE ACCIONES CONCRETAS (González Rojas y Roa Fuentes, 2017).
25. AN EXPLORATORY STUDY ON THE UNDERSTANDING OF THE VECTOR SUBSPACE CONCEPT (Mutambara y Bansilal, 2019).
26. STUDENTS' UNDERSTANDING OF SOLVING A SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS USING MATRIX METHODS: A CASE STUDY (Montenegro, 2018).
27. DEVELOPMENT OF STUDENTS' WORKSHEET BASED ON APOS THEORY APPROACH TO IMPROVE STUDENT ACHIEVMENT IN LEARNING SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS (Amawa et al., 2019).
28. THE PROCESS OF SYSTEM OF LINEAR EQUATIONS IN THREE VARIABLES SOLVING PROCEDURE'S CONSTRUCTION USING ANALOGY: INDIVIDUAL VS PAIRED (Hasanah y Rosyid, 2023).
29. CHANGES IN STUDENTS' MENTAL CONSTRUCTIONS OF FUNCTION TRANSFORMATIONS THROUGH THE APOS FRAMEWORK (Koyunkaya y Boz Yaman, 2023).
30. COORDINATED TOPICS AS TRANSITIONAL ENABLERS TOWARDS HIGHER-LEVEL CONCEPTUALISATIONS OF THE RANGE CONCEPT (Dogan, 2023).
31. UNDERGRADUATE STUDENTS' CONCEPTUALIZATION OF ELEMENTARY ROW OPERATIONS IN SOLVING SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS (Tatira, 2023b).
32. MENTAL CONSTRUCTS ASSOCIATED WITH EIGENVALUES AND EIGENVECTORS: REFINING A COGNITIVE MODEL (Betancur et al., 2022).
33. EL PAPEL DE LOS CONCEPTOS GEOMÉTRICOS COMO BASE PARA EL APRENDIZAJE DEL MÉTODO SIMPLEX (Simg y Trigueros, 2022).

34. ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES QUE DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA MODELAN Y ARTICULAN EL APRENDIZAJE DE VALOR Y VECTOR PROPIO EN $\mathbb{R}^2$ (Parraguez et al., 2022).

Artículos en el área del Matemática Financiera:

1. PRE-SERVICE MATHEMATICS STUDENT TEACHERS'S CONCEPTIONS OF NOMINAL AND EFFECTIVE INTEREST RATES (Makonye, 2017).

Artículos en el área del Cálculo Infinitesimal:

1. EXAMINING OPPORTUNITIES TO LEARN LIMIT IN WIDELY USED CALCULUS TEXTBOOKS (Hong, 2023).

Artículos en el área del Cálculo Complejo:

1. INVESTIGATING STUDENTS' UNDERSTANDING OF COMPLEX NUMBER AND ITS RELATION TO ALGEBRAIC GROUP USING AND APOS THEORY (LONGE y MAHARAJ, 2023).

4.1.9. *Discusión de resultados de las Revisiones Sistemáticas de Literatura Científica, entre los años* 2015 *hasta* 2021 *y la nueva actualización hasta* 2023

En la **Tabla 4-21**, se observa los resultados de los artículos científicos para la (RSL) entre los años 2015 hasta 2021 y a continuación los resultados de la (RSL) entre los años 2022 hasta 2023.

Tabla 4-21: Resultados de los artículos científicos para la actualización de la (RSL)

Revisión Sistemática de Literatura Científica entre los años 2015 hasta 2021	
	N.°
Artículos científicos encontrados en la base de datos	**287**
Artículos científicos aplicados los criterios de inclusión	0
Artículos científicos aplicados los criterios de exclusión	135
Artículos de la base de datos menos artículos de exclusión	**152**
Artículos científicos aplicados los criterios de calidad	33
Artículos científicos repetidos	29
Artículos científicos para el estudio	**123**
Revisión Sistemática de Literatura Científica entre los años 2022 hasta 2023	
	N.°
Artículos científicos encontrados en la base de datos	**321**
Artículos científicos aplicados los criterios de inclusión	0
Artículos científicos aplicados los criterios de exclusión	261
Artículos de la base de datos menos artículos de exclusión	**60**
Artículos científicos aplicados los criterios de calidad	7
Artículos científicos repetidos	9
Artículos científicos para el estudio	**51**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Como se observa, en la **Tabla 4-22**, los resultados de ambas (RSL) ya se incluyeron a un resultado final, obteniendo una base de datos de 608 artículos, donde 174 fueron seleccionados para el análisis.

Tabla 4-22: Resultados finales para la (RSL) entre los años 2015 hasta 2023

(RSL) entre los años 2015 hasta 2023	
	TOTAL
Artículos identificados en la base de datos	**608**
Criterios de inclusión	0
Criterios de exclusión	396
Artículos de la base de datos menos artículos de exclusión	**212**
Criterios de calidad	40
Artículos repetidos	38
Artículos elegidos para el análisis	**174**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-10**, Se evidencia los porcentajes y las respuestas a las preguntas de investigación de la Revisión sistemática de literatura científica (RSL), entre los años 2015 y 2021.

Ilustración 4-10: Respuestas a las preguntas de Investigación de la (RSL) entre los años 2015 hasta 2021
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-11**, Se han evidenciado los nuevos porcentajes y la respuesta a las preguntas de investigación, así como los cambios que se han producido en la Revisión sistemática de literatura científica (RSL), entre los años 2015 hasta 2023.

Ilustración 4-11: Resultados finales de la actualización de la (RSL)

Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.1.9.1. *Descomposiciones genéticas de la teoría APOE en el área de la matemática, entre los años* 2015 *hasta* 2023

En la siguiente **Tabla 4-23**, se detallan los 116 artículos que cuentan con una (DG) según cada área de la matemática, entre los años 2015 hasta 2023. Se denominó como a 1=si, lo que indica que "si" cuenta el artículo con una descomposición genética. Además, se resalta en color amarillo los artículos que son entre los años 2022 hasta 2023.

A continuación, se detalla el total de las descomposiciones genéticas correspondientes a cada área de la matemática y sus subáreas:

1. **Álgebra Lineal:** El análisis contó con 28 artículos que representan con una descomposición genética.
2. **Álgebra Abstracta:** 2 artículos.
3. **Álgebra Superior:** 6 artículos.
4. **Análisis Real:** 11 artículos.
5. **Cálculo Diferencial:** 13 artículos.
6. **Cálculo Infinitesimal:** 1 artículo.
7. **Cálculo Integral:** 5 artículos.
8. **Cálculo Multivariado:** 8 artículos.
9. **Didáctica de la Matemática:** 14 artículos.
10. **Ecuaciones Diferenciales:** 3 artículos.
11. **Estadística:** 1 artículo.
12. **Geometría:** 10 artículos.
13. **Geometría Analítica:** 7 artículos.
14. **Geometría Euclidiana:** 3 artículos.
15. **Lógica Matemática:** 3 artículos.
16. **Matemática Financiera:** 1 artículo.

Seguidamente, se enuncian por su buscador las descomposiciones genéticas correspondientes a cada área de la matemática y sus subáreas entre los años 2015 y 2023.

Observación. Cabe mencionar que las celdas de los buscadores destacadas en color amarillo corresponden a las descomposiciones genéticas entre los años 2022 y 2023, mientras que las demás abarcan los años entre 2015 hasta 2021.

Tabla 4-23: Descomposiciones Genéticas de la teoría APOE en cada área de la matemática, entre los años 2015 hasta 2023

BUSCADOR	ÁREA	SUB ÁREA	DG
Scopus_54	Álgebra Abstracta	Teorema del Isomorfismo	1
Google_59	Álgebra Abstracta	Comprensión en temas de Álgebra Abstracta	1
Google_112	Álgebra Lineal	Sistema de Ecuaciones Lineales de dos Variables	1
Google_35	Álgebra Lineal	Matriz Multiplicación	1
Google_42	Álgebra Lineal	Transformaciones Lineales	1
Google_57	Álgebra Lineal	Vectores	1
Google_6	Álgebra Lineal	Espacios Vectoriales	1
Google_64	Álgebra Lineal	Matrices y Espacios Vectoriales	1
Google_7	Álgebra Lineal	Ecuaciones Lineales	1
Google_75	Álgebra Lineal	Ecuaciones Lineales	1
Google_77	Álgebra Lineal	Vectores Propios	1
Google_8	Álgebra Lineal	Matriz Cambio de Base	1
Scielo_14	Álgebra Lineal	Teorema del Álgebra Lineal	1
Scielo_19	Álgebra Lineal	Regla de Cramer	1
Scielo_9	Álgebra Lineal	Matriz Asociada	1
Scopus_9	Álgebra Lineal	Sistema de Ecuaciones	1
Wos_16	Álgebra Lineal	Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas	1
Wos_25	Álgebra Lineal	Cambio de Base	1
Wos_35	Álgebra Lineal	Matriz Multiplicación	1
Wos_52	Álgebra Lineal	Sistema de Ecuaciones Lineales con Dos Incógnitas	1
Wos_53	Álgebra Lineal	Conceptos de Álgebra Lineal	1
Wos_56	Álgebra Lineal	Matriz Inversa	1
Wos_60	Álgebra Lineal	Sistema de Ecuaciones Lineales	1
Wos_69	Álgebra Lineal	Operaciones con Matrices	1
Wos_76	Álgebra Lineal	Transformaciones Lineales	1
Wos_9	Álgebra Lineal	Subespacio Vectorial	1

Wos_040	Álgebra Lineal	Transformaciones de Funciones	1
Scopus_014	Álgebra lineal	Vectores, Valores Propios, Transformaciones Lineales	1
Scielo_004	Álgebra Lineal	Programación Lineal, Representación Geométrica Método Simplex	1
Scielo_005	Álgebra lineal	Valor Propio, Vector Propio, Rotación, Múltiplo Escalar	1
Google_130	Algebra Superior	Estimación por mínimos cuadrados	1
Google_50	Álgebra Superior	Aritmética	1
Google_68	Álgebra Superior	Pensamiento Matemático	1
Wos_18	Álgebra Superior	Prueba por Contradicción, Prueba por Comprensión	1
Wos_44	Álgebra Superior	Operaciones Numéricas	1
Google_035	Álgebra Superior	Prueba por Inducción	1
Google_47	Análisis Real	Infinitos	1
Google_54	Análisis Real	Conceptos de Función	1
Google_91	Análisis Real	Series Binomiales	1
Scopus_13	Análisis Real	Función Cuadrática	1
Scopus_15	Análisis Real	Funciones de Dos Variables	1
Scopus_16	Análisis Real	Concepto de la Función	1
Wos_26	Análisis Real	Límite de una Serie	1
Wos_46	Análisis Real	Convergencia, Series de Funciones	1
Wos_50	Análisis Real	Plano Tangente	1
Wos_54	Análisis Real	Funciones de Dos Variables	1
Wos_042	Análisis Real	Funciones Exponenciales y Logarítmicas	1
Google_4	Cálculo Diferencial	Límite de una Función	1
Google_67	Cálculo Diferencial	Concepto de Límite	1
Google_74	Cálculo Diferencial	Derivada	1
Google_80	Cálculo Diferencial	Derivada, Límite	1

Scielo_12	Cálculo Diferencial	Concepto Derivada de una Función	1
Scielo_20	Cálculo Diferencial	Concepto de la Derivada	1
Scielo_27	Cálculo Diferencial	Regla de la Cadena	1
Scopus_35	Cálculo Diferencial	Gráficas de la Función y su Derivada	1
Scopus_7	Cálculo Diferencial	Diferenciación Implícita	1
Wos_30	Cálculo Diferencial	Concepto de Derivada	1
Wos_61	Cálculo Diferencial	Derivada de una Función	1
Google_006	Cálculo Diferencial	Derivadas	1
Scielo_001	Cálculo Diferencial	Límite de una Función de una Variable	1
Scopus_013	Cálculo Infinitesimal	Límite	1
Google_13	Cálculo Integral	Integral Definida	1
Scopus_10	Cálculo Integral	Integrales	1
Wos_11	Cálculo Integral	Integración	1
Wos_5	Cálculo Integral	Integral Indefinida	1
Google_008	Cálculo Integral	Sumas de Riemann	1
Scopus_52	Cálculo Multivariado	Ecuaciones Cuadráticas	1
Wos_67	Cálculo Multivariado	Funciones de Dos Variables	1
Wos_72	Cálculo Multivariado	Funciones de Dos Variables	1
Google_015	Cálculo Multivariado	Derivadas Parciales	1
Google_232	Cálculo Multivariado	Funciones de Dos Variables	1
Wos_045	Cálculo Multivariado	Derivadas Direccionales	1
Scopus_004	Cálculo Multivariado	Integrales Dobles	1
Scopus_006	Cálculo Multivariado	Derivadas Parciales	1
Google_2	Didáctica de la Matemática	Teoría APOE	1
Google_30	Didáctica de la Matemática	Teoría APOE	1
Google_33	Didáctica de la Matemática	Teoría APOE	1
Google_98	Didáctica de la Matemática	Teoría APOE	1

Scopus_17	Didáctica de la Matemática	La Enseñanza y el Aprendizaje Artificial de las Matemáticas	1
Scopus_24	Didáctica de la Matemática	Analizando Tipos de Resoluciones	1
Scopus_40	Didáctica de la Matemática	La Abstracción Reflexiva	1
Scopus_42	Didáctica de la Matemática	Teoría APOE	1
Wos_20	Didáctica de la Matemática	Diseño de Materiales Didácticos	1
Wos_34	Didáctica de la Matemática	Teoría APOS, OSA	1
Wos_47	Didáctica de la Matemática	El Ciclo de Enseñanza ACE y el Pensamiento Ocupacional	1
Google_011	Didáctica de la Matemática	APOS	1
Google_039	Didáctica de la Matemática	APOS, Estilo Cognitivo, Resolución de Problemas Reflexivo	1
Google_067	Didáctica de la Matemática	APOS, Descomposición Genética	1
Google_24	Ecuaciones Diferenciales	Modelación	1
Google_82	Ecuaciones Diferenciales	Modelación	1
Wos_59	Ecuaciones Diferenciales	Modelos	1
Google_41	Estadística	Distribución Binomial	1
Google_69	Geometría	Seno y funciones del coseno (Trigonometria)	1
Scielo_6	Geometría	Triángulo de Sierpinski	1
Scopus_12	Geometría	Límite, Tangente	1
Scopus_21	Geometría	Función Implícita	1
Scopus_28	Geometría	Pendiente	1
Scopus_41	Geometría	Funciones Sobreyectiva e Inyectivas	1
Wos_1	Geometría	Pendiente	1
Wos_14	Geometría	La Función Cuadrática y la Función Derivada	1
Wos_37	Geometría	Triángulo de Sierpinski	1
Wos_6	Geometría	Concepción de la Función y su Representación	1
Google_32	Geometría Analítica	Área en Figuras Planas	1

Google_36	Geometría Analítica	Inecuaciones Lineales	1
Google_66	Geometría Analítica	Coordenadas Polares	1
Scopus_5	Geometría Analítica	Ecuaciones Paramétricas	1
Scopus_6	Geometría Analítica	Coordenadas Polares	1
Wos_70	Geometría Analítica	Trasformaciones Geométricas	1
Google_052	Geometría Analítica	Funciones Cuadráticas, Vértices	1
Scopus_11	Geometría Euclidiana	Gráficas de Inecuaciones de Dos Variables	1
Scopus_26	Geometría Euclidiana	Gráficas de Inecuaciones de Dos Variables	1
Scopus_39	Geometría Euclidiana	Triángulo Rectángulo	1
Google_44	Lógica Matemática	Tablas de Verdad	1
Google_5	Lógica Matemática	Implicaciones	1
Wos_58	lógica Matemática	Principio de inducción	1
Wos_43	Matemática Financiera	Tasas de Interés	1

Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.2. Resultados de los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal, para detallar todas las descomposiciones genéticas.

En la siguiente sección se detalla los escenarios de la teoría APOE al Álgebra Lineal por año, para luego, detallar las que cuentan con una descomposición genética.

Observación. Es importante señalar que las celdas de los buscadores destacadas en color azul corresponden a los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal entre los años 2022 y 2023, mientras que las demás abarcan los años entre 2015 hasta 2021.

4.2.1. *Resultados de los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal entre los años* 2015 *hasta* 2023.

Tabla 4-24: Escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal.

BUSCADORES	ÁREA	SUB - ÁREAS	AÑO
Google_42	Álgebra Lineal	Transformaciones Lineales	2015
Google_57	Álgebra Lineal	Vectores	2015
Scielo_9	Álgebra Lineal	Matriz Asociada	2015
Google_77	Álgebra Lineal	Vectores Propios	2016
Wos_25	Álgebra Lineal	Cambio De Base	2016
Scielo_14	Álgebra Lineal	Teorema Del Álgebra Lineal	2017
Wos_35	Álgebra Lineal	Matriz Multiplicación	2017
Wos_60	Álgebra Lineal	Sistemas De Ecuaciones Lineales	2017
Wos_69	Álgebra Lineal	Operaciones En Matrices	2017
Wos_76	Álgebra Lineal	Transformación Lineal	2017
Google_116	Álgebra Lineal	Concepto Del Rango De La Matriz	2018
Google_6	Álgebra Lineal	Espacios Vectoriales	2018
Scielo_8	Álgebra Lineal	Espacio Vectorial $\mathbb{R}^2$	2018
Wos_52	Álgebra Lineal	Sistema De Ecuaciones Lineales Con Tres Incógnitas	2018
Google_104	Álgebra Lineal	Matriz	2019
Google_75	Álgebra Lineal	Ecuación Lineal	2019
Scielo_19	Álgebra Lineal	Regla De Cramer	2019
Scopus_29	Álgebra Lineal	Transformaciones Lineales	2019
Wos_16	Álgebra Lineal	Sistema De Ecuaciones Lineales Con Dos Incógnitas	2019
Wos_56	Álgebra Lineal	Matriz Inversa	2019
Wos_9	Álgebra Lineal	Subespacio Vectorial	2019

Google_112	Álgebra Lineal	Sistema De Ecuaciones Lineales De Dos Variables,	2020
Scopus_9	Álgebra Lineal	Sistema De Ecuaciones	2020
Google_64	Álgebra Lineal	Matrices Y Espacios Vectoriales	2021
Google_7	Álgebra Lineal	Ecuación Lineal	2021
Google_8	Álgebra Lineal	Matriz Cambio De Base	2021
Wos_53	Álgebra Lineal	Conceptos En Álgebra Lineal	2021
Scopus_014	Álgebra Lineal	Vectores, Valores Propios, Transformaciones Lineales	2022
Scielo_004	Álgebra Lineal	Programación Lineal, Representación Geométrica, Método Simplex	2022
Scielo_005	Álgebra Lineal	Valor Propio; Vector Propio; Rotación; Múltiplo Escalar	2022
Google_142	Álgebra Lineal	Sistema De Ecuaciones Lineales Con Tres Variables	2023
Wos_040	Álgebra Lineal	Transformaciones De Funciones	2023
Wos_041	Álgebra Lineal	Transformaciones Lineales, Rango	2023
Scopus_005	Álgebra Lineal	Sistema De Ecuaciones Lineales	2023

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Tabla 4-24**, durante el año 2019, se constató un incremento en las publicaciones en el campo del Álgebra Lineal, existiendo 7 artículos científicos.

A continuación, se detalla los artículos:

1. Google_104: Diálogo entre las Teorías Apoe y Tad, área del Álgebra Lineal, subárea (Matriz).
2. Google_75: Development Of Students' Worksheet Based On APOS Theory Approach To Improve Student Achievment In Learning System Of Linear Equations, área del Álgebra Lineal, subárea (Ecuación Lineal).
3. Scielo_19: Pre-Service Mathematics Teachers' Mental Constructions When Using Cramer's Rule, área del Álgebra Lineal, subárea (Regla De Cramer).

4. Scopus_29: Mental Constructions In Linear Algebra, área del Álgebra Lineal, subárea (Transformaciones Lineales).

5. Wos_16: Cognitive Construction Of The Solution Set Of A System Of Linear Equations With Two Unknowns, área del Álgebra Lineal, subárea (Sistema de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas).

6. Wos_56: Task Design In APOS Theory, área del Álgebra Lineal, subárea (Matriz Inversa).

7. Wos_9: An Exploratory Study On The Understanding Of The Vector Subspace Concept, área del Álgebra Lineal, subárea (Subespacio Vectorial).

4.2.2. *Descomposiciones genéticas de la teoría APOE al Álgebra Lineal*

En la siguiente Tabla, se detalla los artículos que cuenta con una descomposición genética y los que carecen de la misma. Para el desarrollo se usó el programa informático *Excel* versión 2021 con extensión *Comma Separated Values* ("csv") y sus datos sean binarios, es decir: $1 = si$, que representa que "si" cuenta con una (DG) y $0 = no$, que "no" cuenta con una (DG).

Posteriormente, se implementó una función lógica en *Excel*, que realizó una comparación y devolvió un resultado basado en si la comparación es verdadera o falsa: **=SI(C3=1;1;" ")**

Desglose de la fórmula:

- **SI:** Es la función que se está utilizando.
- **C3=1:** Es la condición que se está comprobando, en este caso, si el valor de la celda C3 es igual a 1.
- **1:** Es el valor que la función devuelve si la condición es verdadera.
- **" ":** Es el valor que la función devuelve si la condición es falsa (en este caso, una cadena de texto vacía), como se puede observar en la celda de (DG).

Tabla 4-25: Descomposiciones genéticas del Álgebra Lineal

BUSCADORES	ÁREA	DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA	DG
Google_104	Álgebra Lineal	0	
Google_112	Álgebra Lineal	1	1
Google_116	Álgebra Lineal	0	
Google_42	Álgebra Lineal	1	1
Google_57	Álgebra Lineal	1	1
Google_6	Álgebra Lineal	1	1
Google_64	Álgebra Lineal	1	1
Google_7	Álgebra Lineal	1	1
Google_75	Álgebra Lineal	1	1
Google_77	Álgebra Lineal	1	1
Google_8	Álgebra Lineal	1	1
Scielo_14	Álgebra Lineal	1	1
Scielo_19	Álgebra Lineal	1	1
Scielo_8	Álgebra Lineal	1	1
Scielo_9	Álgebra Lineal	1	1
Scopus_29	Álgebra Lineal	0	
Scopus_9	Álgebra Lineal	1	1
Wos_16	Álgebra Lineal	1	1
Wos_25	Álgebra Lineal	1	1
Wos_35	Álgebra Lineal	1	1
Wos_52	Álgebra Lineal	1	1
Wos_53	Álgebra Lineal	1	1
Wos_56	Álgebra Lineal	1	1
Wos_60	Álgebra Lineal	1	1
Wos_69	Álgebra Lineal	1	1
Wos_76	Álgebra Lineal	1	1

Wos_9	Álgebra Lineal	1	1
Google_142	Álgebra Lineal	0	
Wos_040	Álgebra Lineal	1	1
Wos_041	Álgebra Lineal	0	
Scopus_005	Álgebra Lineal	0	
Scopus_014	Álgebra Lineal	1	1
Scielo_004	Álgebra Lineal	1	1
Scielo_005	Álgebra Lineal	1	1
		Total	**28**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Tabla 4-25**, se recopiló 34 artículos en el área del Álgebra Lineal con la teoría APOE entre los años 2015 hasta 2023, de los cuales, luego de identificar los que tienen descomposición genética y gracias al manejo de información, donde los resultados fueron transformados a una codificación binaria equivalente a 1 = si y 0 = no y así se pueda hacer un proceso de filtrado, esto se lo realizó en el programa informático *Excel* versión 2021 y la fórmula que se utilizó es la siguiente **=SI(C2=1;1;“ ”)**. De esta manera, se determinó que 28 de los artículos poseen una descomposición genética, mientras que 6 no la tienen.

4.3. Escenarios de aplicación de la teoría APOE en el Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH, mediante la similaridad de *Israel Lerman.*

Acto continuo, se realizó el análisis de la similaridad de *Israel Lerman*

4.3.1. *Similaridad de Israel Lerman.*

Para cumplir este objetivo, se procedió a identificar cada uno de los paquetes que son necesarios en el *R* para el *(ASI)*, a continuación, para los usuarios de *MAC OS*, deben copiar y pegar en la consola *R* el siguiente *script* para la instalación:

```
install.packages(c("stringr", "tcltk2", "Rcpp"))
if (!requireNamespace("BiocManager", quietly = TRUE))
```

```
    install.packages("BiocManager")
BiocManager::install("Rgraphviz")
install.packages
("http://bilbo.iut-bm.univ-fcomte.fr/staff/couturie/RCHIC/rchic_0.27.tgz",
repos = NULL)
```

Luego, cada vez que desees usar **Rchic**, ejecuta en la consola de R:

```
library(rchic)
rchic()
```

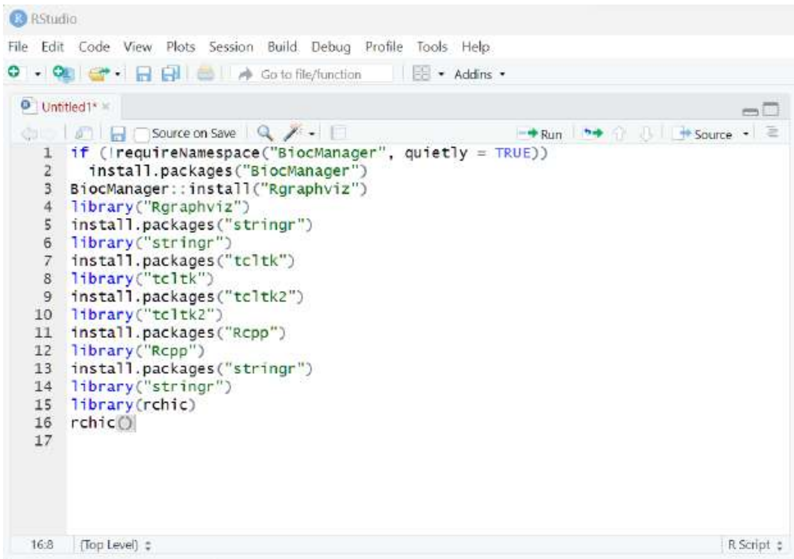


Ilustración 4-12: Paquetes en *R*, para la similaridad de *Israel Lerman* generado por **Rchic**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-12**, se describió cada uno de los paquetes necesarios para hacerlos correr y así genere la nueva ventana **Rchic**.

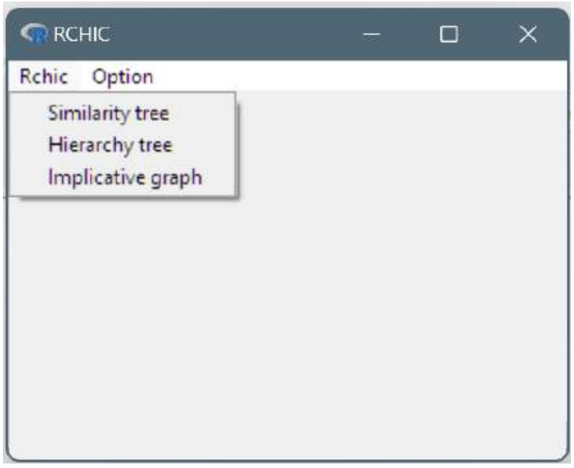


Ilustración 4-13: Ventana de **Rchic** para la similaridad de *Israel Lerman*

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 4-13**, una vez hecho correr los paquetes, se genera una nueva ventana **Rchic**, en ella se puede evidenciar que existen tres opciones para trabajar con él *(ASI)*, son las siguientes:

1. Árbol de Similaridad.
2. Árbol Jerárquico.
3. Gráfico Implicativo.

El objetivo de este (TIC), es trabajar con el Árbol de similaridad, para lo cual es necesario generar un archivo en el programa informático *Excel* versión 2021 con extensión *Comma Separated Values* ("csv") y sus datos sean binarios, es decir: $1 = Si$ y $0 = No$.

4.3.2. *Similaridad de los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal entre los años* 2015 *hasta* 2023.

En la **Ilustración 4-14** e **Ilustración 4-15**, son la base de datos de los escenarios de la teoría APOE al Álgebra Lineal entre los años 2015 hasta 2024, con un total de 34 artículos científicos.

AG1 | TL

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W
1	Art	Matriz	Sist de Ec L de 2 variables	Concepto del rango de la matriz	TL	Vectores	Esp Vec	Matrices y esp vec	Ec L	Ec L	Vectores propios	Matriz cambio de base	Teorema de algebra lineal	Regla de cramer	Esp Vec R^2	Matriz asociada	TL	Sistema de ecuaciones	Sist de ec lineales 2 incog	Cambio de base	Matriz multiplicacion	Sist de ec lineales 3 incog	Conceptos en algebra lineal
2	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1
3	2	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
4	3	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	1
5	4	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
6	5	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
7	6	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
8	7	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
9	8	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
10	9	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
11	10	1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1
12	11	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
13	12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
14	13	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1
15	14	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
16	15	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
17	16	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
18	17	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
19	18	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
20	19	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
21	20	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
22	21	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
23	22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
24	23	1	0	1	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
25	24	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
26	25	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
27	26	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
28	27	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	0	1
29	28	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
30	29	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1
31	30	1	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1
32	31	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
33	32	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1
34	33	1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1
35	34	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1
36																							

Similaridad AL1

Ilustración 4-14: Base de datos con extensión en *csv*, para la similaridad de Álgebra Lineal

Realizado por: Sarango, T., 2024.

X	Y	Z	AA	AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH	AI
Matriz inversa	Sist de ec lineales	Operaciones en matrices	TL	Subesp Vec	Sist de ec lineales 3 vbles	T de funciones	TL	Sist de ec lineales	TL	Programacio n lineal	Valor propio
1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0		1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1

Ilustración 4-15: Continuación de base de datos de los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Una vez que se importó la base de datos a *R* se obtuvo la matriz de similaridad en **Rchic**.

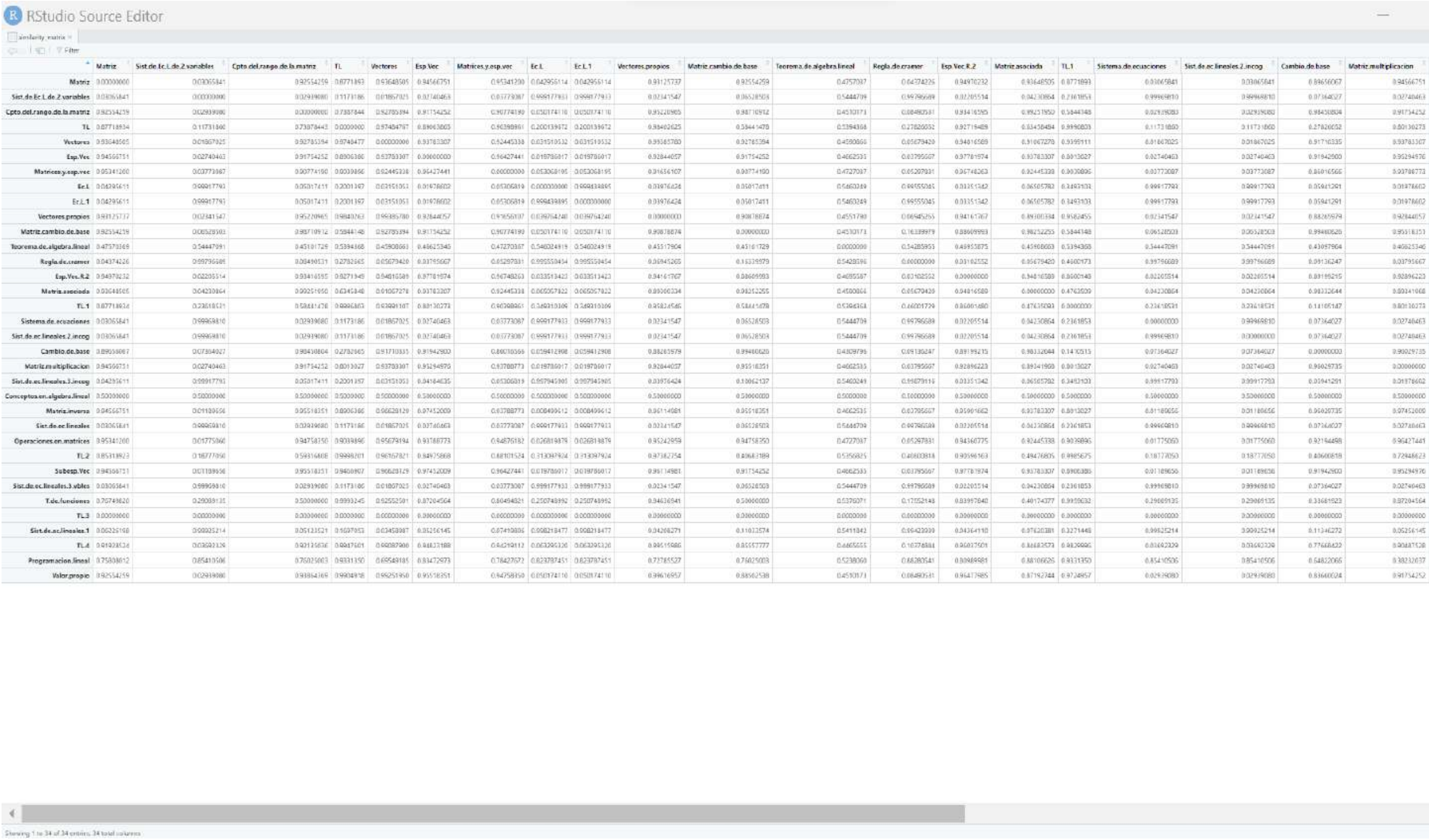


Ilustración 4-16: Matriz de similaridad del Álgebra Lineal

Realizado por: Sarango, T., 2024.

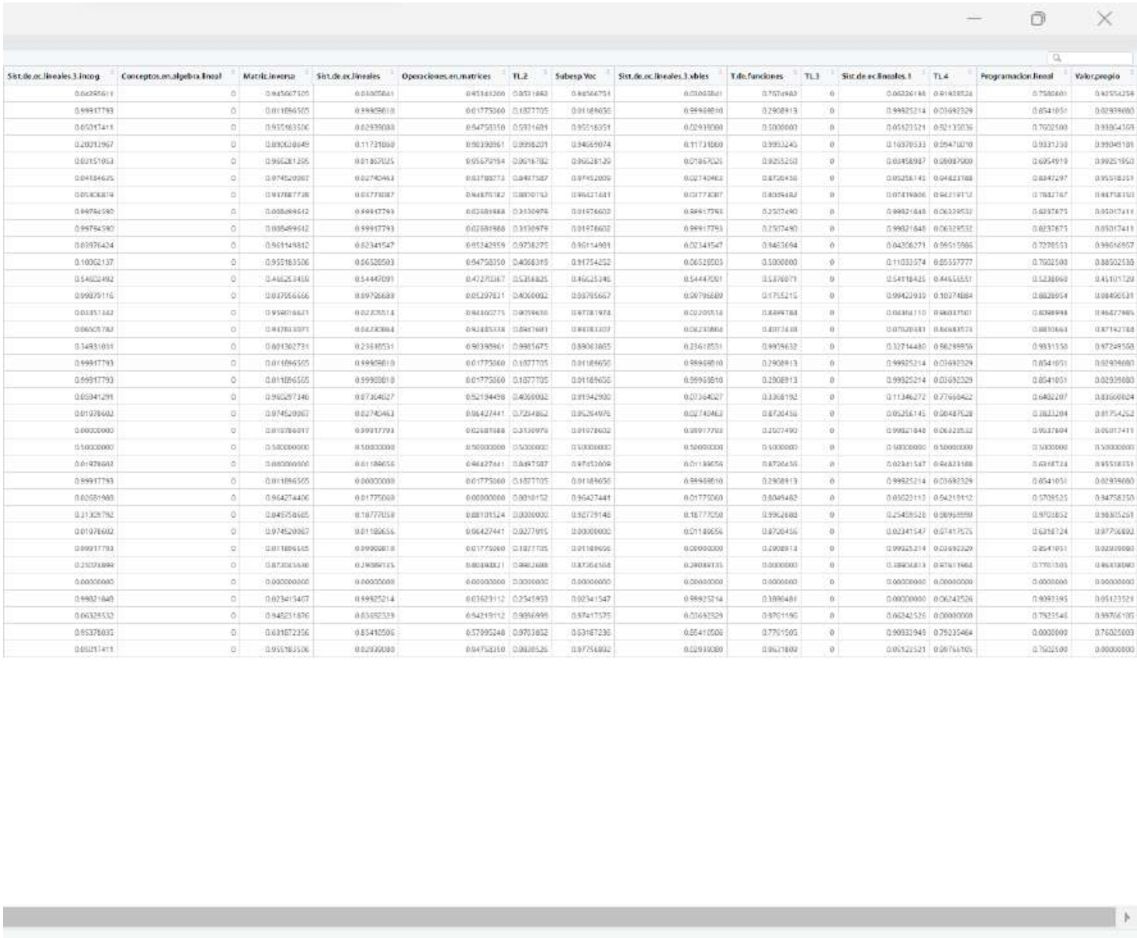


Ilustración 4-17: Continuación de la Matriz de similaridad del Álgebra Lineal

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Previamente, se generó la matriz de similaridad y árbol de similaridad. Este árbol muestra cómo se agrupan los objetos según su nivel de similitud.

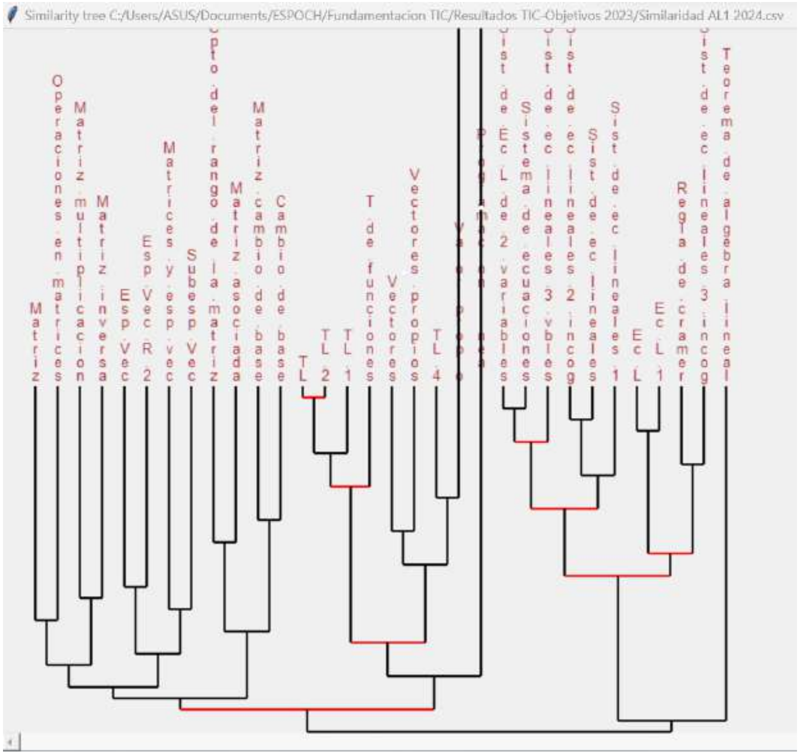


Ilustración 4-18: Árbol de similaridad: Álgebra Lineal

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Se detallan los artículos según su buscador:

Google_104, Google_112, Google_116, Google_42, Google_57, Google_6,Google_64, Google_7, Google_75, Google_77, Google_8, Scielo_14, Scielo_19, Scielo_8, Scielo_9, Scopus_29, Scopus_9, Wos_16, Wos_25, Wos_35, Wos_52, Wos_53, Wos_56, Wos_60, Wos_69, Wos_76, Wos_9, Google_142, Wos_040, Wos_041, Scopus_005, Scopus_014, Scielo_004, Scielo_005.

Como se observa en la **Ilustración 4-18**, representa el árbol de similaridad, donde se contemplan dos grupos distintos, en los cuales se identifican ocho nodos que comparten similitudes. Los artículos más similares se **localizan a la izquierda** en el primer nodo, el cual asocia los artículos con la subárea de Transformaciones Lineales (TL) y Transformaciones Lineales 2. Estos artículos tienen en común las mismas subáreas en el campo del Álgebra Lineal. Este conjunto se conecta a un segundo nodo que, en su otro extremo, agrupa los artículos de Transformaciones Lineales 1 y Transformaciones de Funciones. Prosiguiendo con la secuencia, se encuentran los artículos relacionados con Vectores y Vectores Propios.

Avanzando en el árbol de similaridad, se destacan los conceptos de Transformaciones Lineales 4 y los Valores Propios, formando el tercer nodo. El cuarto nodo incluye los artículos sobre la Matriz de Cambio de Base y el Cambio de Base. En el extremo siguiente, se abordan los Conceptos del Rango de la Matriz en similitud con la Matriz Asociada.

Siguiendo la secuencia, se encuentran los Espacios Vectoriales y los Espacios Vectoriales en $\mathbb{R}$ dos, y en el extremo opuesto, las Matrices y Espacios Vectoriales con Subespacios Vectoriales. Continuando, los artículos tratan sobre la Multiplicación de Matrices y la Matriz Inversa. Finalmente, en el último extremo, se discute la Operación en Matrices y la Matriz.

En el grupo de lado derecho, se identificó una similitud inicial en la subárea de Sistemas de Ecuaciones Lineales de dos variables y Sistemas de Ecuaciones, generando el quinto nodo. Continuando con la estructura del árbol, se vincula el artículo sobre Sistemas de Ecuaciones de Tres Variables. Posteriormente, se detecta una similitud entre los artículos que abordan los conceptos de Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas y Sistemas de Ecuaciones Lineales. Los artículos mencionados también se relacionan con el que trata sobre Sistemas de Ecuaciones Lineales 1, completando así el sexto nodo. A continuación, se agrupan los artículos con temas similares como Ecuaciones Lineales y Ecuaciones Lineales 1. Este conjunto se conecta al extremo siguiente, donde los artículos sobre la Regla de Cramer y el Sistema de Ecuaciones Lineales con tres incógnitas conforman los nodos siete y ocho.

4.3.3. *Similaridad de los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal en la carrera de Matemática de la ESPOCH.*

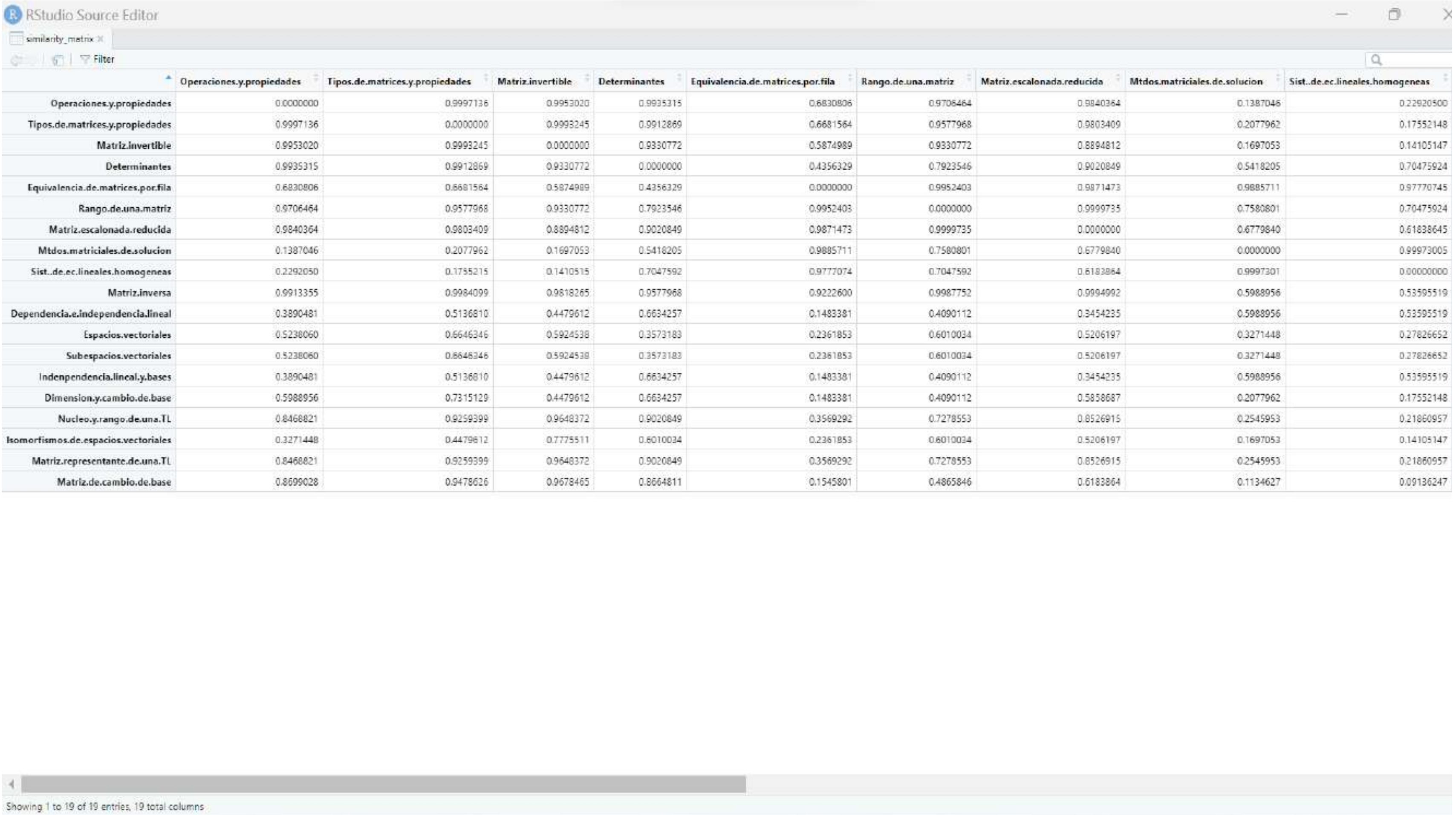
Como se observa en la **Ilustración 4-17**, se utilizó el sílabo del tercer semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH , periodo académico octubre - marzo para obtener la base de datos antes mencionada. Se pudo evidenció en el sílabo la existencia de 19 variables.

Articulo	Operaciones y propiedades	Tipos de matrices y propiedades	Matriz invertible	Determinantes	Equivalencia de matrices por fila	Rango de una matriz	Matriz escalonada reducida	Mtdos matriciales de solucion	Sist. de ec lineales homogeneas	Matriz inversa	Dependencia e independencia lineal	Espacios vectoriales	Subespacios vectoriales	Indenpendencia lineal y bases	Dimension y cambio de base	Nucleo y rango de una TL	Isomorfismos de espacios vectoriales	Matriz representante de una TL	Matriz de cambio de base
1	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	0
3	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
5	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	1
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
7	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1
8	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0
11	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
13	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0
15	1	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
17	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
20	1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
23	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
24	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	1	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	1	1
26	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1
27	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
28	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
30	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1
31	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
32	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	1	0
33	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
34	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1

Ilustración 4-19: Base de datos, para la similaridad de Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Una vez que se importó la base de datos, se obtuvo la matriz de similaridad de los escenarios de aplicación de la teoría APOE al Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH.



	Operaciones.y.propiedades	Tipos.de.matrices.y.propiedades	Matriz.invertible	Determinantes	Equivalencia.de.matrices.por.fila	Rango.de.una.matriz	Matriz.escalonada.reducida	Mtdos.matriciales.de.solucion	Sist..de.ec.lineales.homogeneas
Operaciones.y.propiedades	0.0000000	0.9997136	0.9953020	0.9935315	0.6830806	0.9706464	0.9840364	0.1387046	0.22920500
Tipos.de.matrices.y.propiedades	0.9997136	0.0000000	0.9993245	0.9912869	0.6681564	0.9577968	0.9803409	0.2077962	0.17552148
Matriz.invertible	0.9953020	0.9993245	0.0000000	0.9330772	0.5874989	0.9330772	0.8894812	0.1697053	0.14105147
Determinantes	0.9935315	0.9912869	0.9330772	0.0000000	0.4356329	0.7923546	0.9020849	0.5418205	0.70475924
Equivalencia.de.matrices.por.fila	0.6830806	0.6681564	0.5874989	0.4356329	0.0000000	0.9952403	0.9871473	0.9885711	0.97770745
Rango.de.una.matriz	0.9706464	0.9577968	0.9330772	0.7923546	0.9952403	0.0000000	0.9999735	0.7580801	0.70475924
Matriz.escalonada.reducida	0.9840364	0.9803409	0.8894812	0.9020849	0.9871473	0.9999735	0.0000000	0.6779840	0.61838645
Mtdos.matriciales.de.solucion	0.1387046	0.2077962	0.1697053	0.5418205	0.9885711	0.7580801	0.6779840	0.0000000	0.99973005
Sist..de.ec.lineales.homogeneas	0.2292050	0.1755215	0.1410515	0.7047592	0.9777074	0.7047592	0.6183864	0.9997301	0.00000000
Matriz.inversa	0.9913355	0.9984099	0.9818265	0.9577968	0.9222600	0.9987752	0.9994992	0.5988956	0.53595519
Dependencia.e.independencia.lineal	0.3890481	0.5136810	0.4479612	0.6634257	0.1483381	0.4090112	0.3454235	0.5988956	0.53595519
Espacios.vectoriales	0.5238060	0.6646346	0.5924538	0.3573183	0.2361853	0.6010034	0.5206197	0.3271448	0.27826652
Subespacios.vectoriales	0.5238060	0.6646346	0.5924538	0.3573183	0.2361853	0.6010034	0.5206197	0.3271448	0.27826652
Indenpendencia.lineal.y.bases	0.3890481	0.5136810	0.4479612	0.6634257	0.1483381	0.4090112	0.3454235	0.5988956	0.53595519
Dimension.y.cambio.de.base	0.5988956	0.7315129	0.4479612	0.6634257	0.1483381	0.4090112	0.5858687	0.2077962	0.17552148
Nucleo.y.rango.de.una.TL	0.8468821	0.9259399	0.9648372	0.9020849	0.3569292	0.7278553	0.8526915	0.2545953	0.21860957
Isomorfismos.de.espacios.vectoriales	0.3271448	0.4479612	0.7775511	0.6010034	0.2361853	0.6010034	0.5206197	0.1697053	0.14105147
Matriz.representante.de.una.TL	0.8468821	0.9259399	0.9648372	0.9020849	0.3569292	0.7278553	0.8526915	0.2545953	0.21860957
Matriz.de.cambio.de.base	0.8699028	0.9478626	0.9678465	0.8664811	0.1545801	0.4865846	0.6183864	0.1134627	0.09136247

Ilustración 4-20: Matriz de similaridad del Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH
Realizado por: Sarango, T., 2024.

RStudio Source Editor

similarity_matrix

Filter

Matriz.inversa	Dependencia.e.independencia.lineal	Espacios.vectoriales	Subespacios.vectoriales	Indenpendencia.lineal.y.bases	Dimension.y.cambio.de.base	Nucleo.y.rango.de.una.TL	Isomorfismos.de.espacios.vectoriales	Matriz.representante.de.una.TL	Matriz.de.cambio.de.base
0.9913355	0.3890481	0.5238060	0.5238060	0.3890481	0.5988956	0.8468821	0.3271448	0.8468821	0.86990279
0.9984099	0.5136810	0.6646346	0.6646346	0.5136810	0.7315129	0.9259399	0.4479612	0.9259399	0.94786263
0.9818265	0.4479612	0.5924538	0.5924538	0.4479612	0.4479612	0.9648372	0.7775511	0.9648372	0.96784651
0.9577968	0.6634257	0.3573183	0.3573183	0.6634257	0.6634257	0.9020849	0.6010034	0.9020849	0.86648107
0.9222600	0.1483381	0.2361853	0.2361853	0.1483381	0.1483381	0.3569292	0.2361853	0.3569292	0.15458013
0.9987752	0.4090112	0.6010034	0.6010034	0.4090112	0.4090112	0.7278553	0.6010034	0.7278553	0.48658460
0.9994992	0.3454235	0.5206197	0.5206197	0.3454235	0.5858687	0.8526915	0.5206197	0.8526915	0.61838645
0.5988956	0.5988956	0.3271448	0.3271448	0.5988956	0.2077962	0.2545953	0.1697053	0.2545953	0.11346272
0.5359552	0.5359552	0.2782665	0.2782665	0.5359552	0.1755215	0.2186096	0.1410515	0.2186096	0.09136247
0.0000000	0.2915729	0.4479612	0.4479612	0.2915729	0.5136810	0.9259399	0.4479612	0.9259399	0.72629875
0.2915729	0.0000000	0.9993245	0.9993245	0.9999807	0.9984099	0.3454235	0.9378612	0.3454235	0.86715972
0.4479612	0.9993245	0.0000000	0.9999600	0.9993245	0.9959632	0.5206197	0.9659332	0.5206197	0.80916613
0.4479612	0.9993245	0.9999600	0.0000000	0.9993245	0.9959632	0.5206197	0.9659332	0.5206197	0.80916613
0.2915729	0.9999807	0.9993245	0.9993245	0.0000000	0.9984099	0.3454235	0.9378612	0.3454235	0.86715972
0.5136810	0.9984099	0.9959632	0.9959632	0.9984099	0.0000000	0.5858687	0.9378612	0.5858687	0.94786263
0.9259399	0.3454235	0.5206197	0.5206197	0.3454235	0.5858687	0.0000000	0.9917088	0.9999909	0.99300522
0.4479612	0.9378612	0.9659332	0.9659332	0.9378612	0.9378612	0.9917088	0.0000000	0.9917088	0.99029738
0.9259399	0.3454235	0.5206197	0.5206197	0.3454235	0.5858687	0.9999909	0.9917088	0.0000000	0.99300522
0.7262987	0.8671597	0.8091661	0.8091661	0.8671597	0.9478626	0.9930052	0.9902974	0.9930052	0.00000000

Showing 1 to 19 of 19 entries, 19 total columns

Ilustración 4-21: Continuación de la Matriz de Similaridad del Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Una vez generada la matriz de similaridad de los escenarios de aplicación de la teoría APOE, se obtuvo el árbol de similaridad.

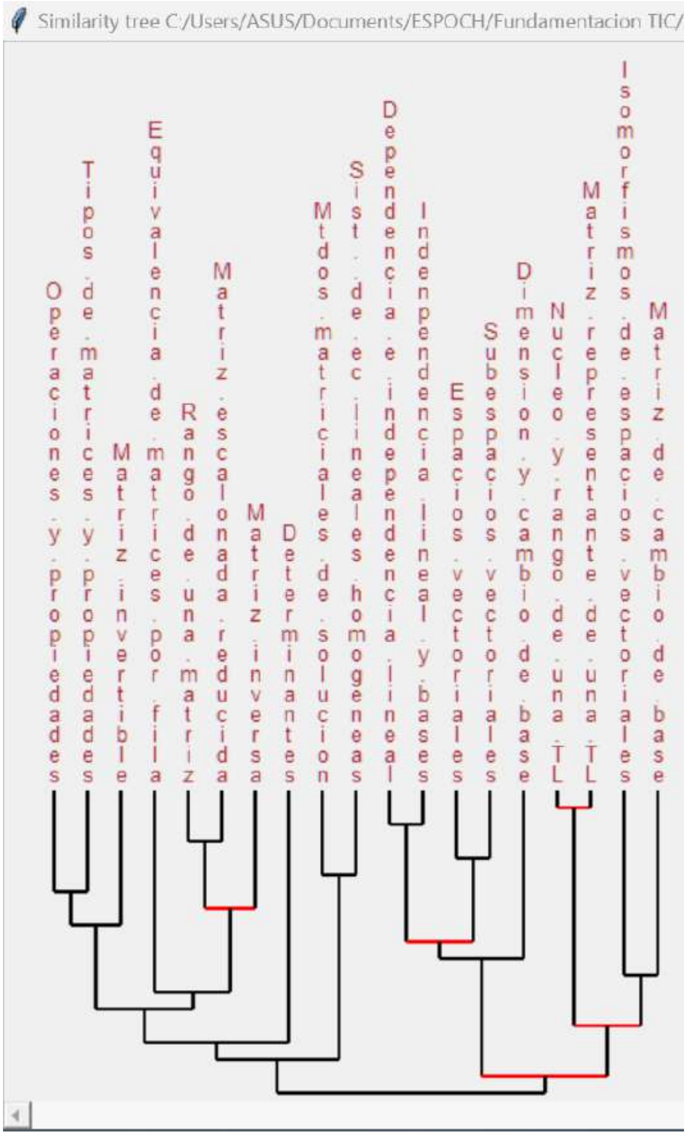


Ilustración 4-22: Árbol de Similaridad del Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Los artículos usados para la creación del árbol de similaridad en la carrera de matemática de la ESPOCH son los 34 que tratan sobre la teoría APOE al Álgebra Lineal que resultaron de la (RSL) y las variables fueron tomadas de las unidades del sílabo de Álgebra Lineal I de la carrera de matemática de la ESPOCH y son las siguientes:

Operaciones y propiedades, Tipos de Matrices y Propiedades, Matriz Invertible, Determinantes, Equivalencia de Matrices por Fila, Rango de una Matriz, Métodos Matriciales de Solución de un Sistema de Ecuaciones Lineales, Sistema de Ecuaciones Lineales Homogéneas, Matriz

Inversa, Dependencia e Independencia Lineal, Espacios Vectoriales, Subespacios Vectoriales, Independencia Lineal y Bases, Núcleo y Rango de una Transformación Lineal, Isomorfismos de Espacios Vectoriales, Matriz Representante de una Transformación Lineal, Matriz de Cambio de Base.

En la **Ilustración 4-22**, en la estructura del árbol de similitud, se observan dos grupos distintos con cinco nodos. En el grupo de lado derecho, se identifica una mayor similitud entre los artículos que abordan las subáreas relacionadas con los conceptos de Núcleo, Rango de una Transformación Lineal y Matriz Representante de una Transformación Lineal. Estos temas forman el primer nodo. A su vez, este nodo se conecta con un segundo nodo, cuya otra terminal agrupa los artículos relacionados con los conceptos de Isomorfismos de Espacios Vectoriales y Matriz de Cambio de Base.

Siguiendo la estructura del árbol de similitud, encontramos los artículos que tratan sobre Dependencia e Independencia Lineal, así como Independencia Lineal y Bases, formando una conexión. El siguiente nodo agrupa los artículos relacionados con Espacios Vectoriales y Subespacios Vectoriales, conectándose a la siguiente terminal con el artículo sobre Dimensión y Cambio de Base. Finalmente, el cuarto nodo representa el conjunto de temas del grupo de lado derecho en el árbol de similitud.

En el grupo de lado izquierdo y la primera conexión que formará el quinto nodo, está relacionado con los conceptos de Rango de una Matriz y La Matriz Escalonada Reducida. Este nodo se conecta con la subárea que trata sobre La matriz Inversa. A su vez, la siguiente terminal se enlaza con el artículo que trata sobre Equivalencias de Matrices por Fila.

Posteriormente, encontramos otro grupo de terminales con similitud. Este grupo abarca los conceptos de Operaciones y Propiedades con Tipos de Matrices y Propiedades. Estos se conectan con el concepto de Matriz Invertible.

Siguiendo en la clase izquierda del árbol de similaridad, se encuentra el artículo con menor similitud y que trata sobre los Determinantes. Finalmente, la última terminal forma el grupo de artículos relacionados con Métodos Matriciales de Solución y Sistemas de Ecuaciones Lineales Homogéneas.

Estas subáreas comparten similitudes en las palabras clave de los artículos relacionados con la teoría APOE del álgebra lineal en la carrera de matemáticas. Es importante mencionar que se tomó como base el sílabo de Álgebra Lineal I, para analizar las similitudes.

4.4. Escenario de las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH

Mediante el árbol de similaridad de *Israel Lerman*, que se obtuvo en la **Ilustración 4-22**, se evidenciaron cinco nodos, donde se encontraron, después de analizar, que cinco artículos científicos tenían sub-áreas similares en las Transformaciones Lineales, en las cuales se evidenció la existencia de similitud.

A continuación se enuncia los artículos científicos:

1. Scopus_29: (Álgebra Lineal) Transformaciones Lineales.
2. Google_42: (Álgebra Lineal) Transformaciones Lineales.
3. Wos_76: (Álgebra Lineal) Transformaciones Lineales.
4. Scopus_014: (Álgebra Lineal) Vectores propios, valores propios y transformaciones lineales.
5. Wos_041: (Álgebra Lineal) Transformaciones Lineales, Rango.

4.4.1. *Escenario de las Transformaciones Lineales que cuentan con una descomposición genética*

Tabla 4-26: Artículos con descomposiciones genéticas en las Transformaciones Lineales

Buscador	Título
Google_42	Evolución En Esquema Del Concepto Transformación Lineal: Una Mirada A Tres Interpretaciones Desde La Teoría Apoe
Scopus_29	Mental Constructions In Linear Algebra
Wos_76	Un Esquema De Transformación Lineal: Construcción De Objetos Abstractos A Partir De La Interiorización De Acciones Concretas
Wos_041	Coordinated Topics As Transitional Enablers Towards Higher-Level Conceptualisations Of The Range Concept
Scopus_014	Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Como se observa en la **Tabla 4-23** y **Tabla 4-24**, el artículo seleccionado para ser aplicado en la carrera de matemática de la ESPOCH, periodo académico octubre 2023 - marzo 2024 y tiene una descomposición genética es el Scopus_014: “Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model”. Este artículo pertenece al área del Álgebra Lineal y como sub-área estudia los Valores propios - Vectores propios a partir de las Transformaciones Lineales y así representar una forma de enseñar por medio de la descomposición genética que se puede adaptar.

Tabla 4-27: Artículo con las Transformaciones Lineales

Sub área	Área	Descomposición Genética
Transformaciones Lineales	Álgebra Lineal	1
Transformaciones Lineales	Álgebra Lineal	0
Transformaciones Lineales	Álgebra Lineal	1
Transformaciones Lineales, Rango	Álgebra Lineal	0
Vectores, Valores Propios, Transformaciones Lineales	Álgebra Lineal	1

Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.4.2. *Aplicar el escenario de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales y así representar una forma de enseñanza por medio de la descomposición genética*

4.4.2.1. *Metodología*

Para el desarrollo de este objetivo: según lo manifiesta (Hernández et al., 2014), esta investigación se establece con un alcance explicativo, porque se pretende analizar cuál posee mayor validez y confiabilidad al momento de impartir la clase adaptada a la descomposición genético que se obtuvo en la **Tabla 4-22** y a una clase que se dicta de manera tradicional. El colectivo de estudio lo conformó: 4^{to} semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, del periodo académico 2 de octubre 2023 hasta 4 de marzo 2024, en la materia Álgebra Lineal II, con un total de 11 estudiantes.

Observación. El colectivo de estudio se planteó para el 3^{cer} semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, del periodo académico 2 de octubre 2023 hasta 4 de marzo 2024, pero al momento de elegir el artículo, se obtuvo como resultado cinco con la teoría APOE en los temas de: Transformaciones Lineales, de los cuales tres contaban con una descomposición genética.

El seleccionado fue, la sub-área de *valores propios - vectores propios*, que se imparte en el 4^{to} semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, este artículo cuenta con una descomposición genética que se adaptó y trata el tema a partir de las Transformaciones Lineales, que fue nuestro objetivo a cumplir. Además, por disponibilidad del docente y tiempo, se hizo más factible trabajar con 4^{to} semestre.

4.4.2.2. *Estilos de aprendizaje*

De acuerdo con (Keefe, 1988), el estilo de aprendizaje se refiere a las condiciones externas que afectan al contexto en el que el alumno aprende. Estas condiciones se relacionan con las características cognitivas, afectivas y fisiológicas de los alumnos, que muestran cómo los alumnos ven, interactúan y reaccionan a sus entornos de aprendizaje, citado en (Sáez López, 2018, pág. 28).

Antes de impartir la clase y usar el material didáctico que se fundamentó con la teoría APOE, se determinó el estilo de aprendizaje de cada estudiante. Para eso, empleamos el test de *VARK*, que se basa en un cuestionario en línea. *VARK* está comprendida por cuatro estilos de abstraer y procesar la información que se justifican en la programación neurolingüística (Guerri, 2020), cabe mencionar que las áreas de la matemática que no cuentan con artículos pueden ser de vital importancia, para estudios a futuro según su estilo de aprendizaje relacionado con la teoría APOE.

A continuación, se detalla cada estilo de aprendizaje con el área de la matemática en la teoría APOE y sus respectivos artículos que se obtuvo de la (RSL).

1. **Aprendizaje Visual (V)**: Personas que prefieren información visual; como ilustraciones, diagramas y esquemas.

   a) Geometría: Google_69, Google_86, Scielo_6, Scopus_12, Scopus_28, Scopus_41, Wos_1, Wos_14, Wos_37, Wos_6, Google_010, Scopus_21, Google_109, Scopus_11, Scopus_26, Scopus_3, Scopus_39, Google_004, Scopus_015.

   b) Álgebra: Google_104, Google_112, Google_116, Google_42, Google_57, Google_6, Google_64, Google_7, Google_75, Google_77, Google_8, Scielo_14, Scielo_19, Scielo_8, Scielo_9, Scopus_29, Scopus_9, Wos_16, Wos_25, Wos_35, Wos_52, Wos_53, Wos_56, Wos_60, Wos_69, Wos_76, Wos_9, Google_142, Wos_040, Wos_041, Scopus_005, Scopus_014, Scielo_004, Scielo_005.

   c) Cálculo: Google_007, Google_114, Google_123, Google_124, Google_4, Google_67, Google_74, Google_80, Google_89, Scielo_11, Scielo_12, Scielo_20, Scielo_27, Scopus_35, Scopus_7, Wos_30, Wos_61, Google_005, Google_006, Google_138, Wos_044, Scopus_010, Scielo_001, Scielo_002, Scopus_013, Google_13, Google_83, Scopus_10, Wos_11, Wos_5, Google_008, Scopus_011, Google_232, Scopus_52, Wos_67, Wos_72, Google_015, Wos_045, Scopus_004, Scopus_006.

   d) Estadística y Probabilidad: Google_41, Google_87, Scopus_30.

e) Topología.

f) Análisis Complejo: Google_1, Google_35, Google_47, Google_54, Google_91, Scopus_13, Scopus_15, Scopus_16, Wos_26, Wos_46, Wos_50, Wos_54, Google_228, Wos_042, Scopus_008.

g) Historia de la Matemática:

2. **Aprendizaje Auditivo (A):** Personas que prefieren oír la información, ya sea a través de charlas, audios y conferencias.

   a) Álgebra: Google_104, Google_112, Google_116, Google_42, Google_57, Google_6, Google_64, Google_7, Google_75, Google_77, Google_8, Scielo_14, Scielo_19, Scielo_8, Scielo_9, Scopus_29, Scopus_9, Wos_16, Wos_25, Wos_35, Wos_52, Wos_53, Wos_56, Wos_60, Wos_69, Wos_76, Wos_9, Google_142, Wos_040, Wos_041, Scopus_005, Scopus_014, Scielo_004, Scielo_005.

   b) Geometría Descriptiva.

   c) Cálculo: Google_007, Google_114, Google_123, Google_124, Google_4, Google_67, Google_74, Google_80, Google_89, Scielo_11, Scielo_12, Scielo_20, Scielo_27, Scopus_35, Scopus_7, Wos_30, Wos_61, Google_005, Google_006, Google_138, Wos_044, Scopus_010, Scielo_001, Scielo_002, Scopus_013, Google_13, Google_83, Scopus_10, Wos_11, Wos_5, Google_008, Scopus_011, Google_232, Scopus_52, Wos_67, Wos_72, Google_015, Wos_045, Scopus_004, Scopus_006.

   d) Estadística: Google_41, Google_87, Scopus_30.

   e) Teoría de Números.

   f) Matemáticas Aplicadas.

   g) Lógica Matemática: Google_44, Google_5, Wos_58, Wos_039.

   h) Matemáticas Discretas.

   i) Matemática Financiera: Wos_43.

   j) Análisis Complejo: Google_1, Google_35, Google_47, Google_54, Google_91, Scopus_13, Scopus_15, Scopus_16, Wos_26, Wos_46, Wos_50, Wos_54, Google_228, Wos_042, Scopus_008.

   k) Optimización.

   l) Probabilidad y Estadística: Google_41, Google_87, Scopus_30.

3. **Aprendizaje de Lectura/Escritura:** Personas que tienen preferencia por la información, ya sea escrita o leída.

a) Álgebra: Google_104, Google_112, Google_116, Google_42, Google_57, Google_6, Google_64, Google_7, Google_75, Google_77, Google_8, Scielo_14, Scielo_19, Scielo_8, Scielo_9, Scopus_29, Scopus_9, Wos_16, Wos_25, Wos_35, Wos_52, Wos_53, Wos_56, Wos_60, Wos_69, Wos_76, Wos_9, Google_142, Wos_040, Wos_041, Scopus_005, Scopus_014, Scielo_004, Scielo_005.

b) Geometría: Google_69, Google_86, Scielo_6, Scopus_12, Scopus_28, Scopus_41, Wos_1, Wos_14, Wos_37, Wos_6, Google_010, Scopus_21, Google_109, Scopus_11, Scopus_26, Scopus_3, Scopus_39, Google_004, Scopus_015.

c) Cálculo: Google_007, Google_114, Google_123, Google_124, Google_4, Google_67, Google_74, Google_80, Google_89, Scielo_11, Scielo_12, Scielo_20, Scielo_27, Scopus_35, Scopus_7, Wos_30, Wos_61, Google_005, Google_006, Google_138, Wos_044, Scopus_010, Scielo_001, Scielo_002, Scopus_013, Google_13, Google_83, Scopus_10, Wos_11, Wos_5, Google_008, Scopus_011, Google_232, Scopus_52, Wos_67, Wos_72, Google_015, Wos_045, Scopus_004, Scopus_006.

d) Estadística: Google_41, Google_87, Scopus_30.

e) Teoría de Números.

f) Matemáticas Discretas.

g) Lógica Matemática: Google_44, Google_5, Wos_58, Wos_039.

h) Matemáticas Financieras: Wos_43

i) Topología.

j) Análisis Complejo: Google_1, Google_35, Google_47, Google_54, Google_91, Scopus_13, Scopus_15, Scopus_16, Wos_26, Wos_46, Wos_50, Wos_54, Google_228, Wos_042, Scopus_008.

k) Optimización.

l) Historia de la Matemática

4. **Aprendizaje Kinestésico (K):** Personas que abstraen el conocimiento a través de experiencias prácticas, como hacer experimentos, construir simulaciones o participar en actividades que requieren desplazamiento.

   a) Geometría.

   b) Álgebra: Google_104, Google_112, Google_116, Google_42, Google_57, Google_6, Google_64, Google_7, Google_75, Google_77, Google_8, Scielo_14, Scielo_19, Scielo_8, Scielo_9, Scopus_29, Scopus_9, Wos_16, Wos_25, Wos_35, Wos_52, Wos_53, Wos_56, Wos_60, Wos_69, Wos_76, Wos_9, Google_142, Wos_040, Wos_041, Scopus_005, Scopus_014, Scielo_004, Scielo_005.

c) Cálculo: Google_007, Google_114, Google_123, Google_124, Google_4, Google_67, Google_74, Google_80, Google_89, Scielo_11, Scielo_12, Scielo_20, Scielo_27, Scopus_35, Scopus_7, Wos_30, Wos_61, Google_005, Google_006, Google_138, Wos_044, Scopus_010, Scielo_001, Scielo_002, Scopus_013, Google_13, Google_83, Scopus_10, Wos_11, Wos_5, Google_008, Scopus_011, Google_232, Scopus_52, Wos_67, Wos_72, Google_015, Wos_045, Scopus_004, Scopus_006.

d) Estadística: Google_41, Google_87, Scopus_30.

e) Topología.

f) Matemáticas discretas.

g) Teoría de números.

h) Matemáticas Financieras: Wos_43.

i) Optimización.

j) Matemáticas Aplicadas:

k) Lógica Matemática: Google_44, Google_5, Wos_58, Wos_039.

l) Criptografía.

El test se encuentra disponible en: https://www.psicoactiva.com/test/test-de-estilos-de-aprendizaje-de-vark.htm y consistió en un total de 16 preguntas. Posteriormente, se administró una prueba de diagnóstico (Pre Test) a ambos grupos. Según se detalla en la **Tabla 4-28**, el grupo experimental y el grupo de control obtuvieron, respectivamente, un promedio de 4.5/10 y 4.4/10. El primero con 6 estudiantes y el segundo con 5 estudiantes, sumando un total de 11 estudiantes para el estudio.

4.4.2.3. *Calificaciones y diagrama de caja del Pre Test correspondientes al $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática en la ESPOCH*

Tabla 4-28: Resultados cuantitativos del Pre Test del Grupo Experimental y Grupo de Control

Pre Test: Grupo Experimental	
	Sobre 10
Código	**Nota**
PE1	4
PE2	5
PE3	4
PE4	6
PE5	4
PE6	4
Total	**27**
Promedio	**4,5**
Mediana	**4**

Pre Test: Grupo de Control	
	Sobre 10
Código	**Nota**
PC1	6
PC2	4
PC3	4
PC4	2
PC5	6
Total	**22**
Promedio	**4,4**
Mediana	**4**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

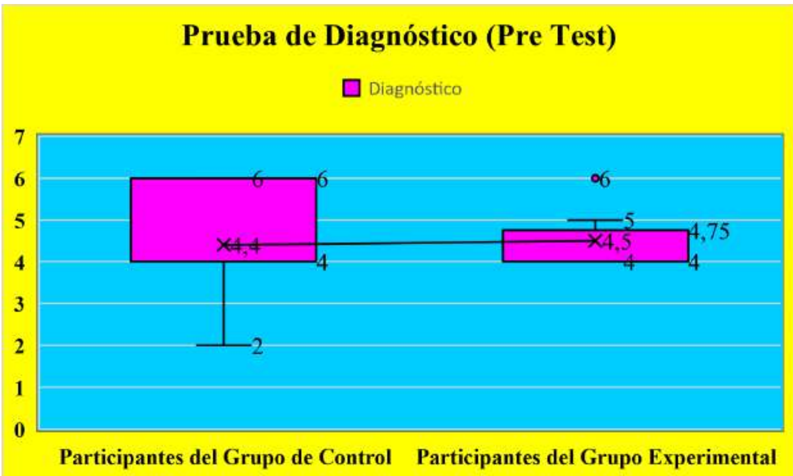


Ilustración 4-23: Diagrama de Caja y Bigotes (Boxplot) del (Pre Test) al Grupo de Control y Grupo Experimental
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En las **Tabla 4-29**, hay dos estilos de aprendizaje que precedieron: con un total de 4 aciertos, el primero el **Auditivo** y el segundo **Lectura - Escritura**, para el manejo de datos se trabajó con notación binaria $0 = No$ y $1 = Si$, donde los 0 indican que el estudiante no dio como resultado ese tipo de estilo de aprendizaje, por otro lado, los 1 indican que sí hubo un resultado favorable a ese estilo de aprendizaje.

Tabla 4-29: Estilos de aprendizaje del colectivo de estudio del $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH

Estilos de aprendizaje				
N.°	**Visual (V)**	**Auditivo**	**Lectura/Escritura**	**Kinestésico**
Est1	0	0	0	1
Est2	0	1	0	0
Est3	0	0	0	1
Est4	1	0	0	0
Est5	0	0	1	0
Est6	0	0	1	0
Est7	0	1	0	0
Est8	0	1	0	0
Est9	0	0	1	0
Est10	0	1	0	0
Est11	0	0	1	0
Total	**1**	**4**	**4**	**2**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.4.3. *Pasos para el desarrollo de la implementación de la descomposición genética con la teoría APOE*

4.4.3.1. *Objeto Cognitivo*

Resolución de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales.

4.4.3.2. *Pregunta de Investigación*

¿Los estudiantes comprenden como aplicar los conceptos de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales?

4.4.3.3. *Tema*

"Como aplicar los conceptos de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, mediante una descomposición genética".

4.4.3.4. *Problema*

La educación actual necesita fortalecerse ante la demanda social, lo que implica revisar las ofertas educativas y pedagógicas para la enseñanza de las matemáticas, con el objetivo de integrar al individuo en el proceso, considerando sus necesidades y su interacción con el entorno. El sistema educativo aspira a que todos, o la mayor cantidad posible, aprendan matemáticas con métodos adecuados que se ajusten al desarrollo científico y tecnológico que caracteriza a las sociedades actuales. Esto se condensa en la idea de que las matemáticas empoderan a quien las aprende.

El coronavirus generó gran impacto, no solo social, sino educativo, el estudiante se debió adaptar obligatoriamente a una modalidad virtual lo cual complicó más la enseñanza de las matemáticas, para lo que se propone varios métodos y así promover una mejor construcción del pensamiento matemático por parte de los propios alumnos. Según la teoría APOE, el conocimiento se lo desarrolla mediante las construcciones mentales denominadas: Acción, Proceso, Objeto y Esquema (Arnon et al., 2014, pág. 5).

En el siguiente TIC se evidenció un nivel de problema por parte de los estudiantes en el aprendizaje de las Transformaciones Lineales, subárea del Álgebra Lineal, causando un bajo rendimiento académico. Estos datos se corroboraron en las actas de calificaciones de la carrera de matemática de la ESPOCH, entre los años 2017 hasta 2022. Por lo tanto, como objetivo fundamental fue investigar la forma en que los alumnos construyen esos conceptos abstractos a través de una experiencia didáctica diseñada con base en los principios y la metodología de la teoría APOE.

En los resultados obtenidos de la Revisión sistemática de literatura científica hasta el 2023 y a través de la similaridad de *Israel Lerman* arrojó como resultado cinco artículos que tratan sobre las Transformaciones Lineales, después de un análisis y resaltar aquellos artículos que cuenten con una descomposición genética, se trabajó con: *Scopus_014:* (Álgebra Lineal) Valores y vectores propios a partir de las Transformaciones Lineales. Cabe recalcar que el colectivo de estudio se dirigió al 4^{to} semestre, por la facilidad y respectiva colaboración de la docente.

4.4.3.5. *Aproximación Histórica*

A lo largo de la historia, se ha buscado la forma más efectiva de transmitir al estudiante el máximo conocimiento, por lo que se requiere una metodología que permita al alumno entender y no tener lagunas que le impidan avanzar en el curso, a continuación, se mencionarán algunas estrategias:

1. El diseño de los problemas que se utilizarán en los cuestionarios y las entrevistas es de suma importancia en las investigaciones relacionadas con la teoría APOE. El objetivo es diferenciar, a través de estas preguntas, las diferentes estructuras mentales que los entrevistados pueden haber construido, o que están en proceso de desarrollar.

   Como punto de partida, aparte de las preguntas que se centran en la concepción de la acción, los problemas deben ser nuevos para los estudiantes; por ejemplo, la solución no debe ser accesible mediante un algoritmo previamente aprendido. En este sentido, la determinación de una concepción particular depende de la relación entre la situación del problema y el individuo que trabaja en él.

   Por ejemplo, un individuo que ha memorizado la demostración de un teorema no da necesariamente pruebas de una concepción de Proceso, aunque la demostración pueda implicar generalizaciones. Además, las preguntas deben prepararse de tal manera que, por ejemplo, si la intención es encontrar pruebas de una concepción de Objeto, una concepción de Proceso no debería ser suficiente para proporcionar una solución correcta.

Una forma de investigar un Esquema asociado a un concepto específico es que los estudiantes se enfrenten a situaciones problemáticas en las que no se nombre directamente el concepto involucrado. Un esquema se vuelve coherente cuando alcanza la madurez; como se indicó en la sección previa, esta coherencia le permite a una persona determinar si el concepto le serviría o no para solucionar un problema dado.

2. Las clases, tareas colaborativas de ejercitación y prácticas guiada por el docente. Esta técnica invierte los modelos tradicionales de enseñanza, dando instrucciones online desde fuera de la clase y trasladando los deberes dentro de la misma. El método tradicional representa al profesor como la persona que imparte la clase y manda deberes para el día siguiente.

   En el nuevo modelo, el profesor permanece a un lado ejerciendo como guía mientras que los alumnos trabajan en la clase. El modelo requiere que los educandos vean los videos en casa, en su propio espacio, en constante comunicación con otros compañeros y profesores, mediante debates online o en clases.

4.4.3.6. *Parte Teórica*

Tabla 4-30: Aplicación con el marco teórico de la teoría APOE

No.	Teoría APOE
1.	Materiales didácticos con atención en las etapas de la construcción de las acciones, procesos, objetos y esquemas mentales (APOE), en comprensión de un concepto, de valores y vectores propios de las matrices asociadas a las Transformaciones Lineales.
2.	El profesor actúa como facilitador, que proporciona asistencia a estudiantes, a través del andamiaje, por ejemplo, haciendo preguntas y dando pistas.
3.	Aprendizaje de los alumnos en entornos de aprendizaje cooperativo. El grupo de aprendizaje cooperativo promueve el aprendizaje interactivo, lo que permite a los alumnos recibir una retroalimentación positiva del proceso de pensamiento. Diseño de actividades didácticas utilizando Tecnologías de la Información y Telecomunicación (TIT), para la enseñanza-aprendizaje de valores y vectores propios de las matrices asociadas a las Transformaciones Lineales. (Metodología *PACIE*).
4.	Existen sesiones especiales para que los estudiantes entrenen ejercicios con definiciones, lemas y teoremas durante las clases (ciclo de enseñanza *ACE*).

Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.4.3.7. *Parte Epistemológica*

Las investigaciones con propios de las matrices asociadas a las Transformaciones Lineales. son escasas en la literatura científica, al igual que la matriz asociada. Estos temas se los abarca en la Álgebra Lineal, materia que se presenta en la mayoría de las carreras universitarias, por ejemplo las ingenierías, economía o sistemas.

(Gol, 2012, pág. 36) dio a sus alumnos matrices de A_{2x2}, y un vector, $A\bar{x}$, para multiplicar. Usando un programa, debían hallar los vectores y valores propios de la matriz. El programa les ayudó a ajustar los vectores hasta qué $\bar{x}$ y $A\bar{x}$ fueran paralelos y con igual sentido. Así obtenían el valor propio positivo, λ, y su vector propio. La autora también les mostró que pasaba cuando el valor propio era negativo.

Después, entrevistó a sus alumnos y vio que usaban manos y brazos para mostrar su imagen mental de los conceptos. Mencionó que la computadora les ayudó a formar imágenes dinámicas de los conceptos que expresaron con sus gestos. Así, los alumnos pudieron ver la dirección y posición de los vectores en el plano, estudiar vectores opuestos y colineales, entender a los vectores propios como vectores colineales con el producto de la matriz, y analizar su transformación y propiedades con la matriz A.

(Roa Fuentes y Oktaç, 2010, pág. 91) mostraron dos formas de analizar el concepto de Transformación Lineal basadas en distintos procesos mentales de los estudiantes y observaron que una era más común, según ellos, por el efecto de cómo se expone el concepto en los textos. Por otro lado, (Bagley et al., 2012) estudiaron cómo los estudiantes relacionan las matrices y las funciones lineales. Según ellos, los estudiantes que entienden ambos conceptos pueden manejar las matrices fácilmente, pero los que no lo hacen tienen problemas con las matrices.

El concepto de las Transformaciones Lineales ha sido investigado al igual que los propios, pero no de la transformación lineal, desde el aspecto matricial y principalmente del Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal.

4.4.3.8. *Descomposición Genética del artículo "Construcciones mentales asociadas a los Eigenvalores y Eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo"*

En la siguiente **Ilustración 4-22** se evidencia la descomposición genética que se va a adecuar al colectivo de estudio del $4^{\underline{to}}$ semestre, en un total de 11 de la carrera de matemática de la ESPOCH con la teoría APOE, periodo académico octubre 2023 - marzo 2024.

Datos del artículo científico:

- **Buscador:** Scopus_014 (Betancur et al., 2022).
- **Tema:** *"Construcciones mentales asociadas a los Eigenvalores y Eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo".*

- **Área:** Álgebra Lineal.
- **Subárea:** Vectores y Valores Propios, Transformaciones Lineales.
- **País:** Colombia.
- **Idioma:** Español.
- **Año:** 2022
- **Temática de la teoría APOE que usó el artículo:** Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas y cuenta con una Descomposición Genética.
- **DOI:** **https://doi.org/10.35763/aiem22.4005**

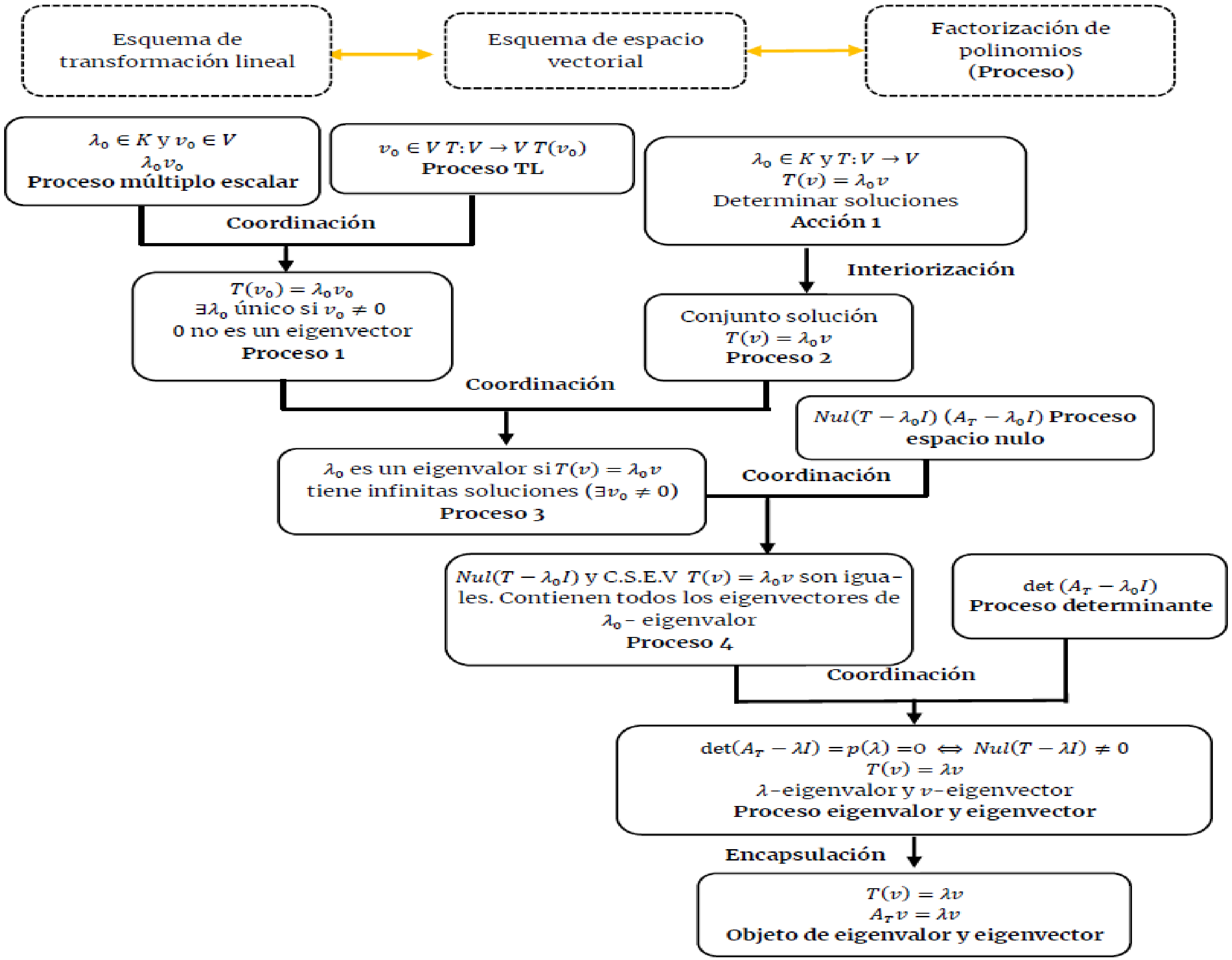


Ilustración 4-24: Descomposición Genética "Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model"
Fuente: (Betancur et al., 2022, pág. 41).

De acuerdo a (Betancur et al., 2022, pág. 41-42), se exponen a continuación, las estructuras cognitivas y los procesos que un individuo debe desarrollar para comprender los conceptos de *Eigenvalor* y *Eigenvector* mediante un enfoque de descomposición genética.

> "La reflexión sobre la **Acción** 1, determina soluciones de la ecuación vectorial $T(v) = \lambda_0 v$, permite interiorizarla en un Proceso **(Proceso 2)** para reconocer que el vector cero siempre es solución y argumentar cuándo la solución es única o cuándo existen infinitas soluciones. Mediante la coordinación de los Procesos 1 y 2 se puede entender que un escalar λ_0 es un eigenvalor cuando el conjunto de solución de $T(v) = \lambda_0 v$ es infinito **(Proceso 3)**.
>
> **La coordinación** entre el **Proceso 3** y el Proceso de espacio nulo mediante la pertenencia da paso a un entendimiento del conjunto solución de la ecuación vectorial $T(v) = \lambda_0 v$ en términos de un subespacio vectorial, eigenespacio **(Proceso 4)**. La reflexión sobre tal pertenencia favorece la construcción de la equivalencia entre $T(v) = \lambda_0 v$ y $(T - \lambda_0 I)v = 0$.
>
> El **Proceso 4** es coordinado con el Proceso de determinante para caracterizar los valores escalares que corresponde como Eigenvalores λ_0 de un operador lineal T o matriz asociada A_T y garantizan que $T - \lambda_0 I$ o $A_T - \lambda_0 I$ no sea invertible. Resultado de la coordinación de los Procesos subyacentes, se construye una concepción Proceso de *Eigenvalor* y *Eigenvector*. Esta permite entender y justificar el porqué de la existencia de las eigenparejas (λ, v), es decir, que refiere un Eigenvalor asociado a un operador T implica la existencia de eigenvectores; aún más, todos los Eigenvectores asociados al Eigenvalor λ (eigenespacio $E\lambda$). Así mismo, si se tiene un eigenvector de un operador lineal T necesariamente debe existir su respectivo Eigenvalor".

4.4.3.9. *Descomposición Genética refinada del concepto "Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales"*

La siguiente (DG) se aplicó al colectivo de estudio del $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, mediante el marco teórico de la teoría APOE.

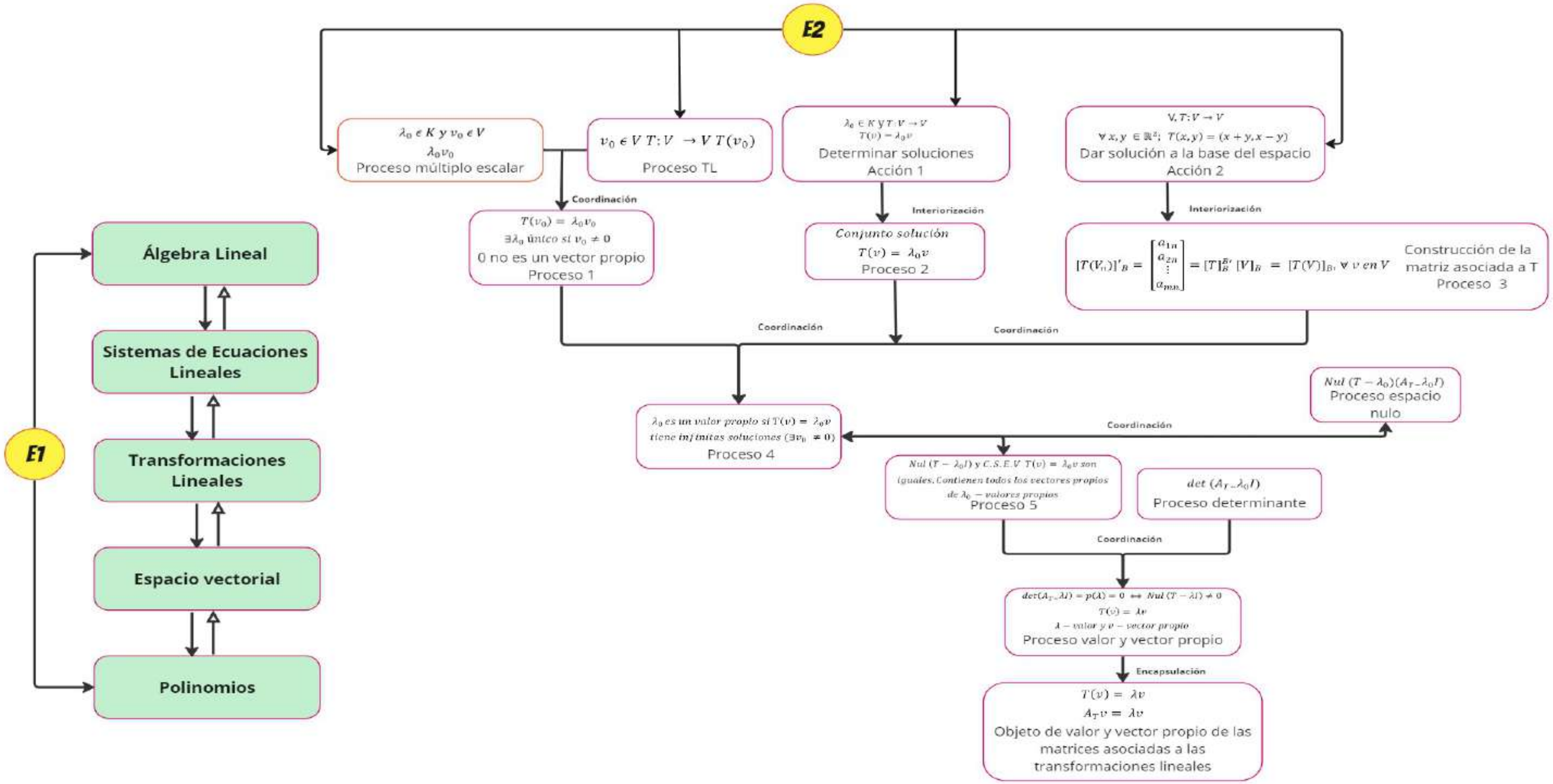


Ilustración 4-25: Descomposición Genética Refinada “Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales”
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Como se observa en la **Ilustración 4-25**, su aplicación y desarrollo se encuentra en la GUÍA PARA EL DESARROLLO DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA CON LA TEORÍA APOE EN ÁLGEBRA LINEAL: VALORES Y VECTORES PROPIOS DE LAS MATRICES ASOCIADAS A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES.

4.5. Resultados de la aplicación de la teoría APOE del escenario de los Valores y Vectores de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, mediante cálculos cuantitativos

A continuación, se detalla los resultados cuantitativos obtenidos en R.

4.5.1. *Pasos para trabajar con una prueba de hipótesis*

De acuerdo a (Dagnino, 2014, pág. 126) se sigue los siguientes pasos:

1. Plantear la Hipótesis nula H_0 y la Hipótesis alternativa H_1.
2. Elegir la prueba estadística adecuada al diseño experimental, el tipo de datos y el número de grupos que se están comparando.
3. Seleccionar el nivel de significancia α de la prueba, el margen para rechazar H_0, se acepta $\alpha = 0.01$ ó $\alpha = 0.05$, cifras que implican un 1 %, ó un, 5 %, de posibilidades de equivocarse cuando se rechaza H_0, es decir que hay una diferencia cuando en realidad no la hay, llamado error tipo I.
4. Calcular el valor de p. Esta es la probabilidad de alcanzar los resultados observados u otros más extremos si la H_0 es verdadera.
5. Si $p < \alpha$, rechazar H_0 y aceptar la alternativa; en caso contrario, se acepta la hipótesis nula.

Se comete un error tipo *I* si la H_0 es rechazada cuando H_0 es verdadera. La probabilidad de un error tipo *I* está denotado por α. El valor de α se denomina nivel de la prueba. Se comete un error tipo *II* si H_0 es aceptada cuando H_1 es verdadera. La probabilidad de un error tipo *II* está denotado por β (Wackerly et al., 2002, pág. 491).

Para el análisis de los datos se utilizó el software libre *R* (2022), versión 4.2.1, se implementó La **Prueba U de *Mann-Whitney*** y se comparó las medianas de las dos muestras: Grupo Experimental y Grupo de Control. A continuación, se plantea los resultados obtenidos:

1. **Análisis estadístico:**

   - La **Prueba U de *Mann-Whitney:*** Técnica estadística que se empleó para analizar datos que no se pudieron evaluar mediante una prueba no paramétrica. Esta prueba permitió comparar las medias de dos muestras provenientes del "Grupo Experimental" y "Grupo de Control" y determinar si son iguales o diferentes. A diferencia de la prueba *t* de muestras independientes, la **Prueba U de *Mann-Whitney***, permitió obtener conclusiones distintas sobre los datos , según las suposiciones que se realizó acerca de su distribución.

2. **Prueba de Hipótesis para el Grupo Experimental y Grupo de Control:**
   Me = Medianas
   Nivel de significancia = 0.05

Prueba de Diagnóstico: Pre Test

$$H_0 : Me_E = Me_C$$

$$H_1 : Me_E \neq Me_C$$

Prueba Final: Post Test

$$H_0 : Me_E \leq Me_C$$

$$H_1 : Me_E \geq Me_C$$

3. **Datos:**

```r
##Datos recolectados
    #Cargar los datos
datos <- data.frame(
Diagnostico = c(6, 4, 4, 2, 6, 4, 5, 4, 6, 4, 4),
Prueba = c(4.66, 4.66, 4.66, 7.33, 9.33, 9.33, 10, 7.33, 9.33, 6.66, 5.33),
Tarea = c(10, 10, 10, 8.88, 10, 8.88, 10, 8.88, 10, 10, 10),
Foro = c(10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10),
Participacion = c(10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10, 10),
Tipo = c("Control", "Control", "Control", "Control",
"Control", "Experimental", "Experimental",
"Experimental", "Experimental", "Experimental", "Experimental"))
```

4.5.2. *Análisis de resultados en R: Grupo Experimental y Grupo de Control*

✓Prueba de Diagnóstico: Pre Test

```r
    # Separar los datos por tipo
    datos_experimental <- datos$Diagnostico[datos$Tipo == "Experimental"]
    datos_control <- datos$Diagnostico[datos$Tipo == "Control"]

    # Prueba de normalidad para el grupo experimental shapiro_experimental
    <- shapiro.test(datos_experimental) print(shapiro_experimental)
```

Supuesto de Normalidad

```
##
##   Shapiro-Wilk normality test
##
##   data: datos_experimental
##   W = 0.70126, p-value = 0.006373
```

```r
    # Prueba de normalidad para el grupo de control shapiro_control
    <- shapiro.test(datos_control) print(shapiro_control)
```

```
##
##   Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  datos_control
## W = 0.88104, p-value = 0.314
```

Supuesto de Homocedasticidad

```
# Prueba   de   homogeneidad   de   varianzas
bartlett_test <- bartlett's.test(Diagnostico ~  Tipo, data = datos)
print(bartlett's_test)
```

```
##
##  Bartlett's test of homogeneity of variances
##
## data:  Diagnostico  by  Tipo
## Bartlett's K-squared = 1.8693, df = 1, p-value = 0.1716
```

```
# Realizar  prueba  U  de  Mann-Whitney
mann_whitney <- wilcox.test(Diagnostico ~  Tipo, data = datos)
```

```
## Warning in wilcox.test.default(x = DATA[[1L]], y = DATA[[2L]], ...): cannot
## compute exact p-value with ties
```

```
     print(mann_whitney)
```

Prueba de U de Mann Whitney

```
##
## Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  Diagnostico by Tipo
## W = 15, p-value = 1
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Supuesto de normalidad y homocedasticidad:

La variable diagnóstico cumple con el supuesto homocedasticidad más no con el de normalidad.

Interpretación: Dado que el valor $p = 1$, y el nivel de significancia es 0.05, esto significa que no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. En otras palabras, no se encontró una diferencia significativa entre los dos grupos, en términos de la variable "Diagnóstico", es decir, que la mediana de la variable de la prueba de diagnóstico del grupo de control como en el experimental son iguales a un 95 % de confiabilidad.

✓Prueba Final: Post Test

```
    # Separar los datos por tipo
    datos_experimental <- datos$Prueba[datos$Tipo == "Experimental"]
    datos_control <- datos$Prueba[datos$Tipo == "Control"]

```

```
   # Prueba de normalidad para el grupo experimental shapiro_experimental
   <- shapiro.test(datos_experimental) print(shapiro_experimental)
```

Supuesto de Normalidad

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  datos_experimental
## W = 0.91269, p-value = 0.4543
```

```
# Prueba de normalidad para el grupo de control shapiro_control
<- shapiro.test(datos_control) print(shapiro_control)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  datos_control
## W = 0.77355, p-value = 0.04847
```

Supuesto de Homocedasticidad

```
##
##  Bartlett's test of homogeneity of variances
##
## data:  Diagnostico  by  Tipo
## Bartlett's K-squared = 1.8693, df = 1, p-value = 0.1716
```

Prueba de U de Mann Whitney

```
# Prueba  U  de  Mann-Whitney  para  comparar  medianas  entre  los  grupos
mann_whitney <- wilcox.test(Prueba ~  Tipo, data = datos)
```

```
## Warning in wilcox.test.default(x = DATA[[1L]], y = DATA[[2L]], ...):
   cannot
## compute exact p-value with ties
```

```
 print(mann_whitney)
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test with continuity correction ##
## data:  Prueba by Tipo
## W = 6.5, p-value = 0.1359
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Supuesto de normalidad y homocedasticidad:

La variable prueba cumple con el supuesto de homocedasticidad pero no con el de normalidad.

Interpretación: Dado que el valor $p = 0.1359$ es mayor que un nivel de significancia comúnmente utilizado, como 0.05, no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. En otras palabras, no hay suficiente evidencia para concluir que hay una diferencia significativa en las medianas de la variable "Tarea" entre los grupos "Control" y "Experimental" con un 95 % de confiabilidad.

✓**Tarea:**

```
# Separar los datos por tipo
    datos_experimental <- datos$Tarea[datos$Tipo == "Experimental"]
    datos_control <- datos$Tarea[datos$Tipo == "Control"]

# Prueba de normalidad para el grupo experimental shapiro_experimental
    <- shapiro.test(datos_experimental) print(shapiro_experimental)
```

Supuesto de Normalidad

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  datos_experimental
## W = 0.63989, p-value = 0.001351
```

```
# Prueba de normalidad para el grupo de control shapiro_control
<- shapiro.test(datos_control) print(shapiro_control)
```

```
##
##  Shapiro-Wilk normality test
##
## data:  datos_control
## W = 0.55218, p-value = 0.0001351
```

Supuesto de Homocedasticidad

```
# Prueba   de   homogeneidad   de   varianzas
bartlett's_test <- bartlett's.test(Diagnostico ~  Tipo, data = datos)
print(bartlett's_test)
```

```
##
##  Bartlett test of homogeneity of variances
```

```
##
## data: Diagnostico  by  Tipo
## Bartlett's K-squared = 1.8693, df = 1, p-value = 0.1716
```

Prueba U de Mann Whitney

```
# Prueba  U  de  Mann-Whitney  para  comparar  medianas  entre  los  grupos
mann_whitney <- wilcox.test(Tarea ~  Tipo, data = datos)
```

```
## Warning in wilcox.test.default(x = DATA[[1L]], y = DATA[[2L]], ...):
cannot
## compute exact p-value with ties
```

```
    print(mann_whitney)
```

```
##
##  Wilcoxon rank sum test with continuity correction
##
## data:  Tarea by Tipo
## W = 17, p-value = 0.7237
## alternative hypothesis: true location shift is not equal to 0
```

Supuesto de normalidad y homocedasticidad:
La variable tarea cumple con el supuesto de normalidad y de homocedasticidad.

Interpretación: Dado que el valor $p = 0.7237$ es mayor que un nivel de significancia comúnmente utilizado, como 0.05, no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula. En otras palabras, no hay suficiente evidencia para concluir que hay una diferencia significativa en las medianas de la variable "Prueba" entre los grupos: "Control" y "Experimental", con un 95 % de confiabilidad.

Observación. La variable foro y participación no son concluyentes, ya que, no es posible evaluar una diferencia, ya que, prácticamente son iguales los puntajes.

4.5.3. *Desarrollo del código en R, para los gráficos por variable*

```
    # Cargar la biblioteca ggplot2
library(ggplot2)
    # Crear un grafico para cada variable
grafico_diagnostico <- ggplot(datos, aes(x = Tipo, y = Diagnostico, fill =
Tipo)) + geom_boxplot() +
labs(title = "Diagnostico por Tipo", x = "Tipo", y = "Diagnostico")
```

```
+ theme_minimal()
grafico_prueba <- ggplot(datos, aes(x = Tipo, y = Prueba, fill = Tipo))
+ geom_boxplot() + labs(title = "Prueba por Tipo", x = "Tipo", y = "Prueba")
+ theme_minimal()
grafico_tarea <- ggplot(datos, aes(x = Tipo, y = Tarea, fill = Tipo))
+ geom_boxplot() + labs(title = "Tarea por Tipo", x = "Tipo", y = "Tarea")
+ theme_minimal()
grafico_foro <- ggplot(datos, aes(x = Tipo, y = Foro, fill = Tipo))
+ geom_boxplot() +
labs(title = "Foro por Tipo", x = "Tipo", y = "Foro") + theme_minimal()
grafico_participacion <- ggplot(datos, aes(x = Tipo, y = Participacion,
fill =Tipo))  + geom_boxplot() + labs(title
= "Participacion por Tipo", x = "Tipo", y = "Participacion") + theme_minimal()
    # Mostrar los graficos
```

4.5.4. *Discusión de las gráficas resultantes para cada una de las variables, tomadas al Grupo Experimental y Grupo de Control*

La representación gráfica de cada variable se realizó en *R*, mediante los diagramas de cajas.

4.5.5. *Gráfico de la Prueba de Diagnóstico (Pre Test) por Tipo*

```
    print(grafico_diagnostico)
```

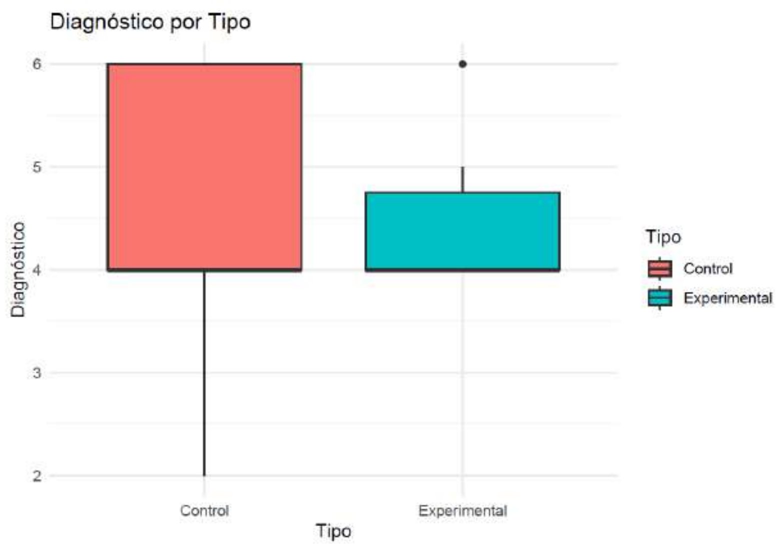


Ilustración 4-26: Gráfico del Pre Test: Grupo Experimental y Grupo de Control
Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.5.6. *Gráfico de la Prueba Final (Post Test) por Tipo*

```
print(grafico_prueba)
```

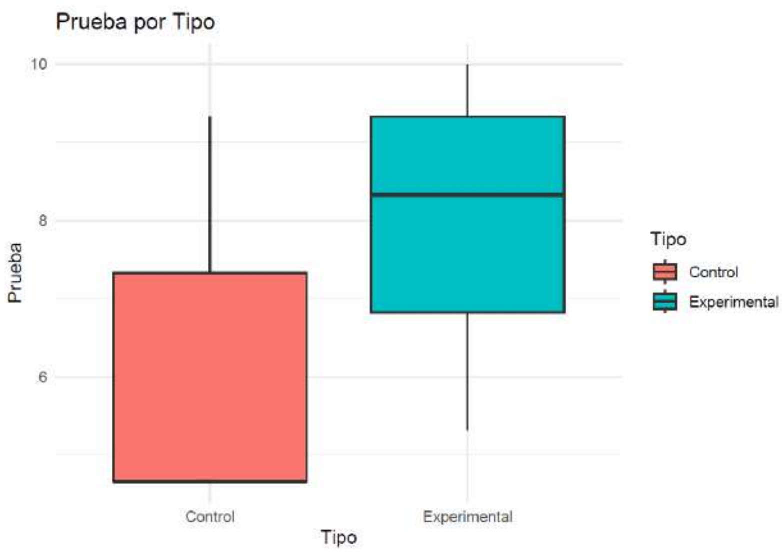


Ilustración 4-27: Gráfico del Post Test: Grupo Experimental y Grupo de Control
Realizado por: Sarango, T., 2024.

```
print(grafico_tarea)
```

4.5.7. *Gráfico de Tarea por Tipo: Grupo Experimental y Grupo de Control*

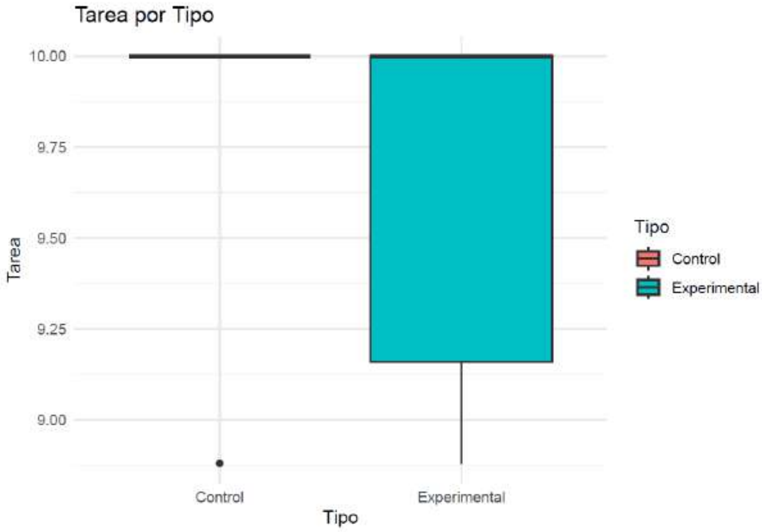


Ilustración 4-28: Gráfico de la Tarea: Grupo Experimental y Grupo de Control
Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.5.8. *Gráfico del Foro por Tipo: Grupo Experimental y Grupo de Control*

```
print(grafico_foro)
```

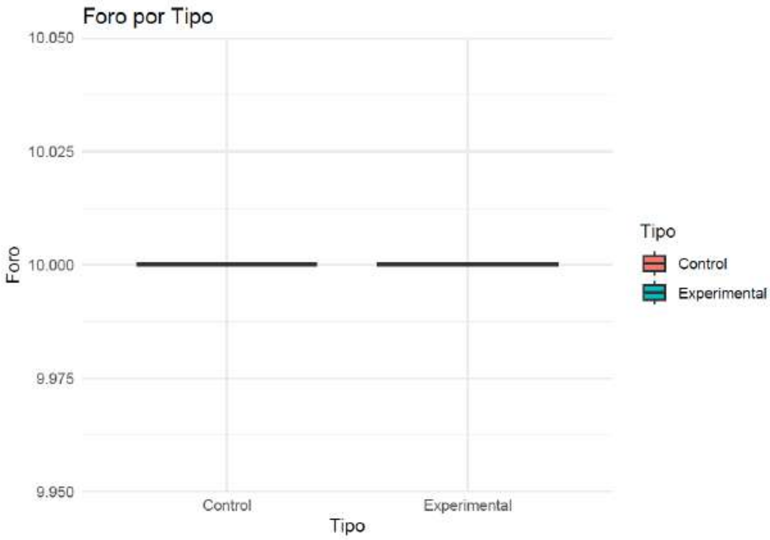


Ilustración 4-29: Gráfico del Foro: Grupo Experimental y Grupo de Control
Realizado por: Sarango, T., 2024.

4.5.9. *Gráfico de Participación por Tipo: Grupo Experimental y Grupo de Control*

```
print(grafico_participacion)
```

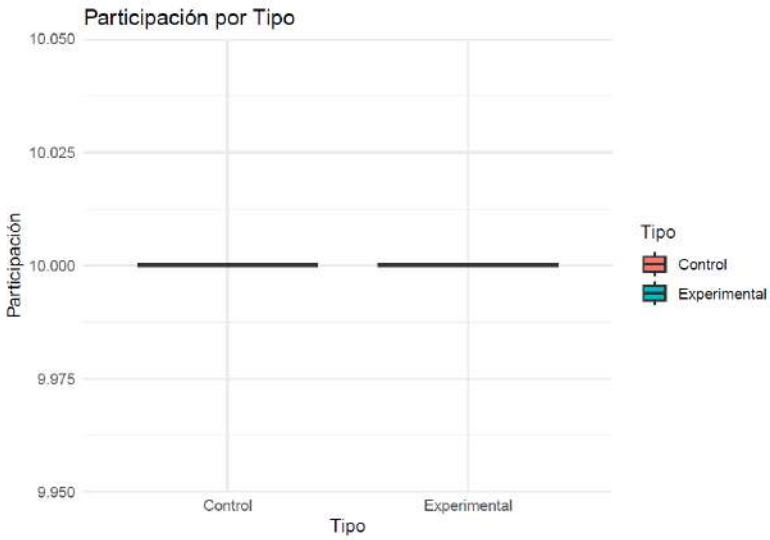


Ilustración 4-30: Gráfico de la Participación: Grupo Experimental y Grupo de Control
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Como se aprecia en la prueba de diagnóstico de la **Ilustración 4-26** del diagrama de caja, la gráfica de la prueba de diagnóstico en el grupo de control la varianza está un poco grande, se verifica que se encuentra en el 6, pero la mediana se mantiene en ambos grupos y se encuentra en el 4, esto quiere decir que la mediana está sobre el primer cuartil, en este caso específicamente. Además se encontró un dato atípico que está en el 6 y se ubicó en el grupo experimental.

En la prueba final de la **Ilustración 4-27** del diagrama de caja, se visualizó que en el grupo experimental se encuentra 1 cuartil, 2 cuartil y 3 cuartil, donde el 2 cuartil es la mediana. Esta gráfica compara el rendimiento de la prueba tanto en el control como en el experimental, en este caso la mediana del grupo experimental está sobre la de control, es decir que los estudiantes tienen mayor rendimiento en el grupo experimental.

Se observa en la tarea asíncrona de la **Ilustración 4-28** del diagrama de caja, que tienen la misma mediana en los grupos, pero en el grupo experimental cuenta con una mayor variabilidad, mientras que en la mediana no hay ninguna variabilidad, ya que todos los estudiantes han sacado 10/10 en sus notas. Además se evidencia un dato atípico en el grupo de control. En el foro de la **Ilustración 4-29** del diagrama de caja, se evaluó tanto en el grupo de control como el experimental para inferir lo que está sucediendo con los datos, lo que indicó que ambos grupos obtuvieron las mismas notas sobre $10/10$ no hay valores atípicos, no hay variabilidad.

Se evidenció en la participación de la **Ilustración 4-30** del diagrama de caja, que se evaluó en ambos grupos, para inferir lo que está sucediendo con los datos, lo que arrojó que ambos grupos obtuvieron las mismas calificaciones sobre 10. Además, no existen valores atípicos ni variabilidad.

Observación. Los datos en Excel se pueden observar en la GUÍA PARA EL DESARROLLO DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA CON LA TEORÍA APOE EN ÁLGEBRA LINEAL: VALORES Y VECTORES PROPIOS DE LAS MATRICES ASOCIADAS A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES, sección 2.17: Prueba Final (Post Test): Grupo Experimental y de Control, página 82.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En el siguiente apartado, se presentan las conclusiones y recomendaciones resultantes del estudio sobre la sistematización de la teoría APOE en la área de la matemática hasta el año 2023 y la determinación de los escenarios de aplicación de la teoría APOE en Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH, mediante la similaridad de Israel Lerman, para promover la investigación de nuevas propuestas de descomposiciones genéticas, aportando perspectivas valiosas para futuras investigaciones matemáticas.

✓**RESULTADOS FINALES**

Con las nuevas tendencias en Inteligencia Artificial **IA** y su actual auge, fue necesario verificar si es útil el uso de estos programas para minimizar el tiempo en investigaciones o desarrollo de actividades. Además, surge la pregunta: ¿Por qué es necesario realizar una Revisión Sistemática de Literatura Científica, si ya existen programas que realizan todo lo que se les pide? En este contexto, es relevante verificar si la IA puede reemplazar o igualar el trabajo que implica una (RSL). Se tomó como opciones dos IA, donde se interactuó sobre la Revisión Sistemática de Literatura Científica, relacionada con la teoría APOE en el área de la matemática, durante los años 2015 hasta 2023.

1. **IA: ChatGPT**, En ambas Inteligencias Artificiales (IA), se escribió lo siguiente, para verificar su utilidad.

    a) Genérame una revisión sistemática de la teoría APOE en el área de la matemática entre los años 2015 hasta 2023.

    b) Buscar artículos científicos en Scopus sobre la teoría APOE en el área de la matemática entre los años 2015 hasta 2023.

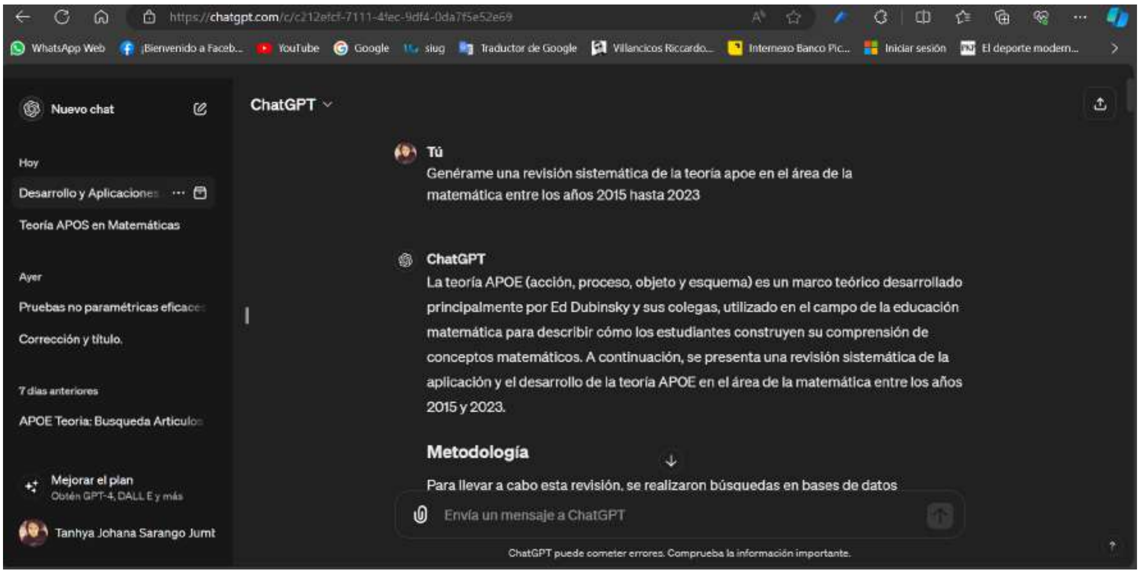


Ilustración 5-1: IA: ChatGPT

Realizado por: Sarango, T., 2024.

IA: Copilot, La IA de Copilot en *Edge* es una herramienta de Inteligencia Artificial integrada en el navegador Microsoft Edge.

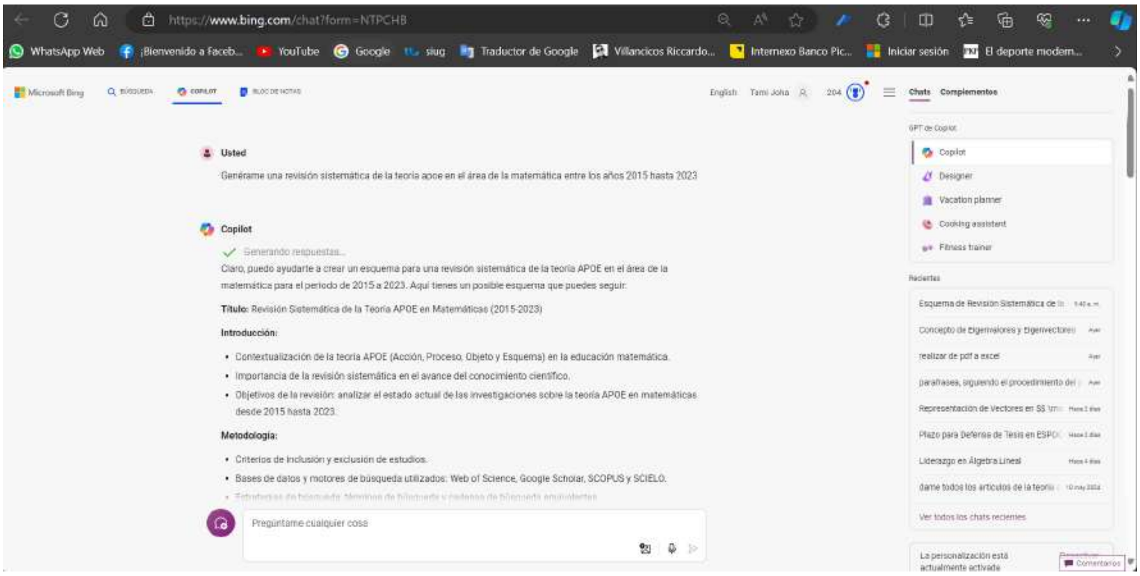


Ilustración 5-2: IA: Copilot en *Edge*

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Por lo tanto, aunque la IA resulta útil para buscar artículos científicos, su enfoque actual requiere que se escriban manualmente los nombres de cada uno de ellos. Esto puede generar una pérdida de tiempo al realizar la (RSL), ya que la IA simplemente redirige a los buscadores de literatura científica sin generar una lista específica de artículos por año. Además, los resultados pueden no ser actuales y podrían contener errores para el análisis. En consecuencia, se ha demostrado que el enfoque manual y técnico del investigador produce mejores resultados, especialmente cuando se busca minimizar cualquier sesgo, dado que la IA aún no reemplaza por completo la experiencia e interpretación de resultados por parte del investigador. No obstante, resulta evidente que la IA se proyecta hacia el futuro y plantea desafíos éticos de gran relevancia.

2. **Respuestas a las preguntas de investigación, para actualizar la (RSL) hasta el 2023:**

   Como se evidencia en la **Tabla 4-21** la actualización sistemática entre los años 2015 hasta 2021 sobre la teoría APOE, obtuvieron 123 artículos y con la nueva actualización hasta el 2023 cómo se evidencia en la **Tabla 4-22** se recopiló 51 artículos más, dando un resultado de 174 artículos, los cuales fueron analizados para el cumplimiento de esta investigación.

   Al realizar la revisión sistemática de la teoría APOE en el área de la matemática entre los años 2015 hasta 2023 se evidenció:

   PI01: ¿Cuál es el principal lugar de afiliación institucional de los artículos científicos?

   En la afiliación, el Instituto Tecnológico Autónomo de la ciudad de México con una frecuencia porcentual del 6,90 %, sigue liderando.

   PI01: ¿Cuál es el principal lugar de afiliación institucional de los artículos científicos?

   En la afiliación, el Instituto Tecnológico Autónomo de la ciudad de México con una frecuencia porcentual del 6,90 %, sigue liderando.

   PI02: ¿Cuál es el año de publicación que contiene más artículos científicos en el período de estudio entre los años 2015 hasta 2023?

   En el 2023, fue donde hubo la mayor publicación de artículos científicos sobre la teoría APOE en el área de la matemática, con un total de 30 artículos y un 17,24 %, entre los años 2015 hasta 2023.

   PI03: ¿Cuál es el país que contiene más artículos científicos?

   El país con más publicaciones de artículos sobre la teoría APOE hasta el 2023 fue México con una frecuencia porcentual del 16,09 %, sigue liderando.

   PI04: ¿Existe autores que tienen afiliación en instituciones ecuatorianas en los artículos científicos?

   Se evidenció la existencia de una aportación con afiliación ecuatoriana: "La teoría APOE: Un mapeo sistemático parcial (2015 – 2022)" (Aldás Castro, 2022, pág. 128). Disponible en: http://dspace.espoch.edu.ec/handle/123456789/19829.

   PI05: ¿Existe algún software que más se utilizó en los artículos científicos?

   El software característico de los artículos científicos relacionados con la teoría APOE lideró Ninguno con una frecuencia porcentual del 58,62 %, se evidenció que le sigue GeoGebra con una frecuencia porcentual del $13,22\,\%$.

PI06: ¿Cuál es el idioma más utilizado en los artículos científicos?

El inglés con una frecuencia porcentual del $75,29\,\%$ fue el idioma que más prevaleció en la publicación de artículos con la teoría APOE, sigue liderando.

PI07: ¿Cuál es el autor que tiene más participación en los artículos científicos?

Después de un análisis de variables de respuestas múltiples en el programa informático *Excel* versión 2021, se logró evidenciar que el autor con más publicaciones y con una frecuencia porcentual del $5,54\,\%$, es la **Dra. María Trigueros Gaisman, PhD.** con un total de 24 participaciones en la publicación de los artículos científicos con la teoría APOE, hasta el año 2023, sigue liderando.

PI08: ¿Cuál es la principal temática de la teoría APOE que utiliza el artículo científico?

Con una frecuencia porcentual, del $85,06\,\%$ la temática de los artículos científicos con la teoría APOE fueron los Objetos, sigue liderando.

PI09: ¿Cuál es la principal revista que se utiliza en la publicación de los artículos científicos?

Con una frecuencia porcentual del $13,22\,\%$ la revista que ha tenido más publicaciones de los artículos científicos con la teoría APOE, fue *The Journal of Mathematical Behavior,* sigue liderando.

PI10: ¿En qué área de la matemática (Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Didáctica de la Matemática, etc.) se utiliza más la teoría APOE?

Álgebra Lineal, es el área de la matemática, que se utiliza más en la teoría APOE, sigue liderando con una frecuencia porcentual del $19,54\,\%$.

3. **Resultados de las descomposiciones genéticas en el Álgebra Lineal, aplicadas en la teoría APOE:**

Mediante el análisis de los artículos de Álgebra Lineal aplicados en la teoría APOE, se evidenció

que 28, cuentan con una descomposición genética y 6 carecen de la misma, en un total de 34 artículos analizados. A continuación se detallará el artículo y la sub-área correspondiente al Álgebra Lineal que cuentan con una descomposición genética:

a) Google_112: Impulsive And Reflective Students' Understanding To Linear Equations System: An Analysis Through APOS Theory, subárea (Sistema de ecuaciones lineales de dos variables).

b) Google_42: Evolución En El Esquema Del Concepto Transformación Lineal, subárea (Transformaciones Lineales).

c) Google_57: Teaching Eigenvalues And Eigenvectors Using Models And APOS Theory, subárea (Vectores).

d) Google_6: El Aprendizaje De Espacios Vectoriales En Álgebra: Una, subárea (Espacios vectoriales).

e) Google_64: Does The Use Of APOS Theory Promote Students' Achievement In Elementary Linear Algebra?, subárea (Matrices y espacios vectoriales).

f) Google_7: La Comprensión De La Recta Desde La Teoría Apoe, Google_75: Development Of Students' Worksheet Based On APOS Theory Approach To Improve Student Achievment In Learning System Of Linear Equations, subárea (Ecuación Lineal).

g) Google_77: Learning The Concept Of Eigenvalues And Eigenvectors: A Comparative Analysis Of Achieved Concept Construction In Linear Algebra Using APOS Theory Among Students From Different Educational Backgrounds, subárea (Vectores propios).

h) Google_8: Estudio Sobre La Construcción Cognitiva De La Matriz De Cambio De Base En Términos De La Teoría Apoe, Matriz, cambio de base.

i) Scielo_14: Estructuras Mentales Que Modelan El Aprendizaje De Un Teorema Del Álgebra Lineal: Un Estudio De Casos En El Contexto Universitario, subárea (Teorema del Álgebra Lineal).

j) Scielo_19: Pre-Service Mathematics Teachers' Mental Constructions When Using Cramer's Rule, subárea (Regla de Cramer).

k) Scielo_8: Construcción Cognitiva Del Espacio Vectorial R2, subárea (Espacio vectorial R^2).

l) Scielo_9: Construcciones Y Mecanismos Mentales Para El Aprendizaje Del Teorema Matriz Asociada A Una Transformación Lineal, subárea (Matriz asociada).

m) Scopus_9: An APOS Analysis Of Solving Systems Of Equations Using The Inverse Matrix Method, subárea (Sistema de ecuaciones).

n) Wos_16: Cognitive Construction Of The Solution Set Of A System Of Linear Equations With Two Unknowns, subárea (Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas).

ñ) Wos_25: Estructuras Mentales Para Modelar El Aprendizaje Del Teorema De Cambio Base De Vectores, subárea (Cambio de base).

o) Wos_35: Matrix Multiplication And Transformations: An APOS Approach, subárea (Matriz multiplicación).

p) Wos_52: Students' Understanding Of Solving A System Of Linear Equations Using Matrix Methods: A Case Study, subárea (Sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas).

q) Wos_53: Construcción De Los Operadores Lineales Diagonalizables Con Base En La Teoría Apoe, subárea (Conceptos en Álgebra Lineal).

r) Wos_56: Task Design In APOS Theory, subárea (Matriz inversa).

s) Wos_60: The Learning And Teaching Of Linear Algebra: Observations And Generalizations, subárea (Sistema de ecuaciones lineales).

t) Wos_69: Zimbabwean In-Service Mathematics Teachers' Understanding Of Matrix Operations, subárea (Operaciones con matrices).

u) Wos_76: Un Esquema De Transformación Lineal: Construcción De Objetos Abstractos A Partir De La Interiorización De Acciones Concretas, subárea (Transformación Lineal).

v) Wos_9: An Exploratory Study On The Understanding Of The Vector Subspace Concept, subárea (Subespacio vectorial).

w) Wos_040: Changes In Students' Mental Constructions Of Function Transformations Through The APOS Framework, subárea (Transformaciones de funciones).

x) Scopus_014: Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model, subárea (Vectores propios, valores propios y transformaciones lineales).

y) Scielo_004: El Papel De Los Conceptos Geométricos Como Base Para El Aprendizaje Del Método Simplex, subárea (Programación lineal, representación geométrica, método simplex).

z) Scielo_005: Estructuras Y Mecanismos Mentales Que Desde Una Perspectiva Geométrica Modelan Y Articulan El Aprendizaje De Valor Y Vector Propio En $\mathbb{R}^2$, subárea (Valor propio, vector propio, rotación, múltiplo escalar).

4. **Resultados de los escenarios de aplicación de la teoría APOE en Álgebra Lineal en la carrera de matemática de la ESPOCH mediante la similaridad de *Israel Lerman*:**

a) Mediante la similaridad de Israel Lerman, se identificó que cinco artículos relacionados con la teoría APOE en el Álgebra Lineal abordan los conceptos de Transformaciones Lineales. Los artículos son los siguientes:

1) Scopus_29: Mental Constructions In Linear Algebra, subárea (Transformaciones Lineales).

2) Google_42: Evolución En El Esquema Del Concepto Transformación Lineal: Una Mirada A Tres Interpretaciones Desde La Teoría Apoe, subárea (Transformaciones Lineales).

3) Wos_76: Un Esquema De Transformación Lineal: Construcción De Objetos Abstractos A Partir De La Interiorización De Acciones Concretas, subárea (Transformaciones Lineales).

4) Scopus_014: Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model, subárea (Vectores propios, valores propios y transformaciones lineales).

5) Wos_041: Coordinated Topics As Transitional Enablers Towards Higher-Level Conceptualisations Of The Range Concept, subárea (Transformaciones Lineales, Rango).

b) De los artículos analizados, en un total de 34, se encontró que tres de ellos presentan una descomposición genética, mientras que dos no la tienen. Los artículos son los siguientes:

1) Google_42: Evolución En El Esquema Del Concepto Transformación Lineal: Una Mirada A Tres Interpretaciones Desde La Teoría Apoe, subárea (Transformaciones Lineales).

2) Wos_76: Un Esquema De Transformación Lineal: Construcción De Objetos Abstractos A Partir De La Interiorización De Acciones Concretas, subárea (Transformaciones Lineales).

3) Scopus_014: Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model, subárea (Vectores propios, valores propios y transformaciones lineales).

c) Artículo que se adaptó su descomposición genética y se implementó al colectivo de estudio mediante el marco teórico de la teoría APOE.

1) Scopus_014, *"Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model"*; Álgebra Lineal subárea Vectores, Valores Propios, Transformaciones Lineales.

5. **En el ámbito de la matemática, se identificó, que de acuerdo con ciertos estilos de aprendizaje, no existe artículos que evidencien investigaciones sobre esas áreas con la teoría APOE en específico, lo cual presenta una oportunidad para ser explorada en investigaciones de futuros proyectos. Acto seguido son los siguientes:**

a) **Aprendizaje Visual (V)**: Topología, Historia de la Matemática.

b) **Aprendizaje Auditivo (A):** Geometría Descriptiva, Teoría de números, Matemáticas aplicadas, Matemáticas discretas, Optimización.

c) **Aprendizaje de Lectura/Escritura:** Topología, Teoría de números, Matemáticas discretas, Optimización, Historia de la Matemática.

d) **Aprendizaje Kinestésico (K):** Geometría, Topología, Matemáticas discretas, Teoría de números, Optimización, Matemáticas Aplicadas, Criptografía.

6. **Resultados cuantitativos de la aplicación del escenario de las transformaciones lineales al colectivo de estudio:**

   Los estudios se los realizó en el software estadístico *R*.

   a) **Diagnóstico:** Cumple con el supuesto homocedasticidad más no con el de normalidad. **Interpretación:** Dado que el valor $p = 1$, esto significa que no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula con un 95 % de confiabilidad. En otras palabras, no se encontró una diferencia significativa entre los dos grupos en términos de la variable "Diagnóstico".

   b) **Prueba:** Cumple con el supuesto de homocedasticidad pero no con el de normalidad. **Interpretación**: Dado que el valor $p = 0.1359$ es mayor que un nivel de significancia comúnmente utilizado, como 0.05, no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula con un 95 % de confiabilidad. En otras palabras, no hay suficiente evidencia para concluir que hay una diferencia significativa en las medianas de la variable "Prueba" entre los grupos "Control" y "Experimental".

   c) **Tarea:** Cumple con el supuesto de normalidad y de homocedasticidad. **Interpretación:** Dado que el valor $p = 0.7237$ es mayor que un nivel de significancia comúnmente utilizado, como 0.05, no hay suficiente evidencia para rechazar la hipótesis nula con un 95 % de confiabilidad. En otras palabras, no hay suficiente evidencia para concluir que hay una diferencia significativa en las medianas de la variable "Tarea" entre los grupos "Control" y "Experimental".

   d) La variable **foro** y **participación** no son concluyentes, no es posible evaluar una diferencia, ya que, prácticamente son iguales los puntajes.

7. **Datos cuantitativos analizados en el programa informático *Excel* versión** 2021 **del grupo experimental y de control en las variables de diagnóstico, prueba, tarea, foro y participación.**

Tabla 5-1: Calificaciones Grupo de Control en *Excel*

		Sobre 10	Sobre 10	Sobre 10	Sobre 10	sobre 10
N°	**Código**	**Diagnóstico**	**Prueba**	**Tarea**	**Foro**	**Participación**
1	PC1	6	4,66	10	10	10
2	PC2	4	4,66	10	10	10
3	PC3	4	4,66	10	10	10
4	PC4	2	7,33	8,88	10	10
5	PC5	6	9,33	10	10	10
	Total	22	30,64	48,88	50	50
	Promedio	4,4	6,1	9,8	10	10
	Mediana	4,0	4,7	10	10	10

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Tabla 5-2: Calificaciones Grupo Experimental en *Excel*

		Sobre 10	Sobre 10	Sobre 10	Sobre 10	sobre 10
N°	**Código**	**Diagnóstico**	**Prueba**	**Tarea**	**Foro**	**Participación**
1	PE1	4	9,33	8,88	10	10
2	PE2	5	10	10	10	10
3	PE3	4	7,33	8,88	10	10
4	PE4	6	9,33	10	10	10
5	PE5	4	6,66	10	10	10
6	PE6	4	5,33	8,88	10	10
	Total	27	47,98	56,64	60	60
	Promedio	4,5	8,0	9,4	10	10
	Media	4	8,3	9,4	10	10

Realizado por: Sarango, T., 2024.

8. **Los resultados se discutieron en el contexto de análisis estadísticos avanzados realizados en el entorno de programación *R***. Gracias a *Boxplot* del Pre Test y Post Test, tanto del grupo de control como del grupo experimental, se evidenció que las medianas se mantuvieron en el Pre Test. En el Post Test, se observó que las medianas del grupo experimental superaron a las del grupo de control. Se encuentra en la página 72, sección 2.15 de la GUÍA PARA EL DESARROLLO DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA CON LA TEORÍA APOE

EN EL ÁLGEBRA LINEAL: VALORES Y VECTORES PROPIOS DE LAS MATRICES ASOCIADAS A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES.

5.1. CONCLUSIONES

1. **Respuestas a las preguntas de investigación, para la Revisión Sistemática de Literatura Científica, entre los años** 2015 **hasta** 2023.

Ilustración 5-3: Resultados finales de la actualización de la (RSL)

Realizado por: Sarango, T., 2024.

2. **Actualización de la página web para la difusión de la Revisión Sistemática de Literatura Científica sobre la teoría APOE, entre los años** 2015 **hasta** 2023: https://sites.google.com/view/apos-sr/home

Ilustración 5-4: Portada de la página web de la (RSL), entre los años 2015 hasta 2023 sobre la teoría APOE

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Ilustración 5-5: Introducción de la página web de la (RSL), entre los años 2015 hasta 2023 sobre la teoría APOE

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Ilustración 5-6: Documentos analizados de la actualización de la (RSL) sobre la teoría APOE, entre los años 2015 hasta 2021

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Ilustración 5-7: Documentos analizados de la actualización de la (RSL) sobre la teoría APOE, entre los años 2022 hasta 2023

Realizado por: Sarango, T., 2024.

3. **Respuestas de la Prueba de Hipótesis del Pre Test y Post Test.**

   a) **Pre Test:** Cumple con el supuesto de homocedasticidad más no con el de normalidad.

$$H_0 : Me_E = Me_C$$

$$H_1 : Me_E \neq Me_C$$

El valor de $p = 1$

Se evidenció, en la Boxplot (Caja de Bigotes) que las pruebas que se impartieron a ambos grupos en el Pre Test se mantuvieron en sus medianas. Por lo tanto: $Me_E = Me_C$.

b) **Post Test:** Cumple con el supuesto de homocedasticidad más no con el de normalidad.

$$H_0 : Me_E \leq Me_C$$

$$H_1 : Me_E \geq Me_C$$

El valor de $p = 0.1359$

En el caso de la Post Test, se verificó que en Boxplot (Caja de Bigotes), dio un resultado favorable en la mediana del grupo experimental y aunque el colectivo de estudio no fue extenso, se evidenció que el grupo experimental estuvo 2.1 puntos más que el grupo de control. Por lo tanto: $Me_E \geq Me_C$.

5.2. RECOMENDACIONES

1. En el marco de una revisión sistemática, es fundamental definir de manera precisa los objetivos y establecer una metodología rigurosa y explícita. Esto permite satisfacer todos los criterios requeridos para la investigación, mediante una búsqueda exhaustiva y meticulosa. Se ha identificado la necesidad de implementar software más versátil y eficiente en el manejo de datos, especialmente debido al volumen significativo de literatura científica que se debe analizar.

   Para mejorar la eficacia de la revisión, se consideró la implementación de algoritmos de aprendizaje automático o técnicas de procesamiento de lenguaje natural como el *Excel, R o IBM SPSS*. Estos pueden ayudar a automatizar el proceso de revisión, aumentar la eficiencia y reducir el sesgo humano, Así como la representación gráfica o prueba de hipótesis.

2. Para futuras investigaciones, se recomienda mantener una actualización constante de la base de datos utilizada en la revisión sistemática de la teoría APOE en matemáticas, asegurando que los datos reflejen los avances más recientes del campo, dada la rápida evolución de la información.

   Además, se sugiere que las investigaciones futuras en Ecuador, especialmente en la ESPOCH, se enfoquen en Álgebra Lineal. Esta disciplina representa el 19.54 % de las investigaciones actuales y puede satisfacer con mayor flexibilidad y precisión las necesidades analíticas de los investigadores. Su aplicación trasciende la educación matemática, beneficiando áreas como las descomposiciones genéticas y fomentando nuevas corrientes en la investigación multidisciplinaria.

3. Se sugiere visitar la página web disponible en el siguiente enlace: https://sites.google.com/view/apos-sr/home (APOE SR). Allí se podrá consultar la más reciente Revisión Sistemática de Literatura Científica sobre la teoría APOE en el campo de las matemáticas, que abarca desde el año 2015 hasta el 2023. De esta manera, los estudiantes de la carrera de matemática tendrán acceso a toda la información pertinente a los artículos que son esenciales para el curso de Didáctica de la Matemática y, simultáneamente, para sus proyectos de titulación.

4. Para próximas investigaciones, escoger un mayor grupo de estudio, ya que, en teoría estadística se requiere una mayor cantidad de datos posibles y se pueda detectar una diferencia significativa entre los grupos. Si los datos son mínimos, se aumenta el riesgo de cometer un error de tipo II, que es aceptar la hipótesis nula cuando es falsa. Es decir, se puede concluir que no hay efecto de la intervención cuando en realidad sí lo hay.

BIBLIOGRAFÍA

1. **ACHARYA, Anurag**. *Google Scholar.* [En línea]. 2004. [Consulta: 13 marzo 2024]. Disponible en: https://scholar.google.com/.
2. **AFKHAMI, R; et al.** "Desarrollo de un marco para evaluar la comprensión del estudiante en la generalización de patrones figurativos". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [En línea]. 2023, vol. 18(1), págs. 57-76 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.30827/pna.v18i1.16566.
3. **AFKHAMI, R; et al.** "Developing A Framework for Evaluating Student's Understanding of Figural Pattern Generalization". *PNA* [En línea]. 2023, 18(1), págs. 57-76 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.30827/pna.v18i1.16566.
4. **AGUILERA EGUÍA, R.** "¿Revisión sistemática, revisión narrativa o metaanálisis?" *Revista de la Sociedad Española del Dolor* [En línea]. 2014, vol. 21(6), págs. 359-360 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.4321/s1134-80462014000600010.
5. **ALDÁS CASTRO, Angélica Tatiana**. *Revisión sistemática de la teoría APOE en los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH.* [En línea]. Riobamba. Chimborazo-Ecuador, 2022 [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: http://dspace.espoch.edu.ec/bitstream/123456789/19829/1/76T00060.pdf.
6. **AMAWA, I Made; et al.** "Development Of Students' Worksheet Based On APOS Theory Approach To Improve Student Achievment In Learning System Of Linear Equations". *INTERNATIONAL JOURNAL OF SCIENTIFIC & TECHNOLOGY RESEARCH* [En línea]. 2019, vol. 8(4), págs. 371-387. [Consulta: 7 noviembre 2023]. ISSN 2277-8616. Disponible en: https://www.ijstr.org/final-print/apr2019/Developm....
7. **ARNAL PALACIÁN, Mónica**. "Infinite limit of a function at infinity and its phenomenology". *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis* [En línea]. 2022, vol. 14, págs. 25-41 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.24917/20809751.14.3.
8. **ARNAWA, I. Made; et al.** "Does The Use of APOS Theory Promote Students' Achievement in Elementary Linear Algebra?" *International Journal of Instruction* [En línea]. 2021, vol. 14(3), págs. 175-186. [Consulta: 7 noviembre 2023]. ISSN 1308-1470. Disponible en: https://doi.org/10.29333/iji.2021.14310a.

9. **ARNON, Ilana; et al.** *APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education* [En línea]. 1st. New York: Springer, 2014 [Consulta: 23 febrero 2024]. ISBN 978-1-4614-7966-6. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7966-6.

10. **ARROYO, Hugo.** "Propuesta de un buscador para artículos indizados a SciELO". *La Revista Científica CIMEL* [En línea]. 2010, vol. 14(2), págs. 130-131. [Consulta: 19 febrero 2024]. ISSN 1680-8398. Disponible en: https://sisbib.unmsm.edu.pe/bvrevistas/cimel/v14_n2/pdf/a11v14n2.pdf.

11. **BAGLEY, Spencer; et al.** "A Conceptual Framework for the Development of Students' Matrix Reasoning". *Mathematics and Computer Education* [En línea]. 2012, vol. 25(1), págs. 1-16 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.5951/matcom.25.1.0001.

12. **BERRIOS, Tomás & MARTÍNEZ PLANELL, Rafael**. "High school student understanding of exponential and logarithmic functions". *The Journal of Mathematical Behavior* [En línea]. 2022, vol. 66, págs. 100953 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100953.

13. **BETANCUR, Alexander; et al.** "Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo". *Avances de Investigación en Educación Matemática* [En línea]. 2022, vol. 22, págs. 23-46 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.35763/aiem22.4005.

14. **BORJI, V.; et al.** "Students' geometric understanding of partial derivatives and the locally linear approach". *Educ Stud Math* [En línea]. 2023, vol. 115, págs. 69-91 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10649-023-10242-z.

15. **BORJI, Vahid & MARTÍNEZ, Rafael**. "On students' understanding of volumes of solids of revolution: An APOS analysis". *The Journal of Mathematical Behavior* [En línea]. 2022, vol. 70, págs. 101027 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.101027.

16. **BORJI, Vahid; et al.** "Student understanding of functions of two variables: A reproducibility study". *The Journal of Mathematical Behavior* [En línea]. 2022, vol. 66, págs. 100950 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2022.100950.

17. **BORJI, Vahid; et al.** "Students' geometric understanding of partial derivatives and the locally linear approach". *Educational Studies in Mathematics* [En línea]. 2023, vol. 15(1), págs. 69-91 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10649-023-10242-z.

18. **BORJI, Vahid; et al.** "University Students' Understanding of Directional Derivative: An APOS Analysis". *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education* [En línea]. 2023, págs. 1-30 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s40753-023-00225-z.

19. **CODINA, Lluís.** "Scopus: el mayor navegador científico de la web." *El profesional de la información* [En línea]. 2005, vol. 14(1), págs. 44-49. [Consulta: 19 febrero 2024]. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Lluis-Codina/publication/28157718_Scopus_El_mayor_navegador_cientifico_de_la_web/links/0f317538c3d3f4d090000000/Scopus-El-mayor-navegador-cientifico-de-la-web.pdf.

20. **CONTRERAS, Fabio**. "La evolución de la didáctica de la matemática". *Horizonte de la Ciencia* [En línea]. 2012, vol. 2(2), págs. 20-25 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.26490/uncp.horizonteciencia.2012.2.25.

21. **CÓRDOVA RUÍZ, Anabel Dejaneira**. *Análisis y programación de la similaridad de Lerman entre variables binarias.* [En línea]. Riobamba. Chimborazo-Ecuador, 2023 [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: http://dspace.espoch.edu.ec/handle/123456789/19842.

22. **CURIOSO, Walter; et al.** "Una estrategia simple para mejorar la búsqueda de artículos indexados en SciELO". *Revista médica de Chile* [En línea]. 2008, vol. 136(6), págs. 812-814. [Consulta: 19 febrero 2024]. Disponible en: http://dx.doi.org/10.4067/S0034-98872008000600020.

23. **DAGNINO, Jorge**. "Inferencia Estadística: Pruebas de Hipótesis". *Revista chilena de Anestesia* [En línea]. 2014, vol. 43(2), págs. 125-128 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.25237/revchilanestv43n02.10.

24. **DOGAN, Hamide**. "Coordinated topics as transitional enablers towards higher-level conceptualizations of the range concept". *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* [En línea]. 2023, vol. 54(9), págs. 1819-1832 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2260790.

25. **FIGUEROA, A.P; et al.** "Matrix multiplication and transformations: an APOS approach". *The Journal of Mathematical Behavior* [En línea]. 2018, vol. 52, págs. 77-91 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.002.

26. **FIRDAUS, A. M; et al.** "Generalization of Patterns Drawing of High-Performance Students Based on Action, Process, Object, and Schema Theory ". *European Journal of Educational Research* [En línea]. 2023, vol. 12(1), págs. 421-433 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.421.

27. **FUENTEALBA, C.E; et al.** "Análisis de errores en tareas sobre el concepto de derivada: una mirada desde la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, y Esquema". *Formación Universitaria'* [En línea]. 2023, vol. 16(3), págs. 41-50 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: http://dx.doi.org/10.4067/s0718-50062023000300041.

28. **GARFIELD, Eugene**. *SciELO.org*. [En línea]. USA, 1997 [Consulta: 13 marzo 2024]. Disponible en: https://www.webofscience.com/wos/.

29. **GOL, S.** "Dynamic geometric representation of eigenvector." *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* [En línea]. 2012, págs. 53-58. [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://scholar.google.com.ec/scholar?q=Dynamic+geometric+representation+of+eigenvector&hl=es&as_sdt=0&as_vis=1&oi=scholart.

30. **GONZÁLEZ ROJAS, Doris Evila & ROA FUENTES, Solange**. "Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas". *Enseñanza de las Ciencias* [En línea]. 2017, vol. 35(2), págs. 89-107 [Consulta: 25 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150.

31. **GRAS, Régis & KUNTZ, Pascale**. "El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen". *Departamento de Matemática de la Universitat Jaume I* [En línea]. 2009, págs. 5-51 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://www.academia.edu/download/50132854/La-Metodologia-Pacie.pdf.

32. **GROSSMAN, Stanley L & FLORES GODOY, José Job**. *Álgebra Lineal*. 7th. Santa Fé. México-D.F: McGRAW-Hill, 2012. ISBN 978-607-15-0760-0.

33. **GUERRI, Martha**. *Test de estilos de aprendizaje de VARK* [blog]. España, 2020 [Consulta: 23 febrero 2024]. Disponible en: https://www.psicoactiva.com/test/test-de-estilos-de-aprendizaje-de-vark.htm.

34. **HANIFAH & GINA, Febrila Lilia**. "Student Response to Geometry Student's Worksheet Based on APOS Model Assisted GeoGebra". *Atlantis Press* [En línea]. 2022, vol. 23, págs. 70-79 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.2991/978-2-494069-19-0_9.

35. **HANIFAH, Hanifah & ISTIKOMAR, Istikomar.** "Validity and Practicality of Student Activity Sheets (LAM) of Real Number Sequences with the Aid of GeoGebra Based on the APOS Model". *Atlantis Press* [En línea]. 2023, págs. 97-106 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.2991/978-2-38476-012-1_14.

36. **HANKE, Erik & MARTÍNEZ PLANELL, Rafael**. "TWG2: Teaching and learning of analysis and calculus". *Fourth Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics* [En línea]. 2022, vol. 23(3), págs. 139-143 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://hal.science/hal-04026708.

37. **HAREL, Guershon**. "THE LEARNING AND TEACHING OF LINEAR ALGEBRA: OBSERVATIONS AND GENERALIZATIONS". *Journal of Mathematical Behavior* [En línea]. 2017, vol. 46, págs. 69-95. [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0732312316301705.

38. **HASANAH, Kurrotul & ROSYID, Abdul Haris**. "The Process of System of Linear Equations in Three Variables Solving Procedure's Construction Using Analogy: Individual VS Paired". *Jurnal Mathedunesa* [En línea]. 2023, vol. 12(2), págs. 534-556 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.26740/mathedunesa.v12n2.p534-556.

39. **HERNÁNDEZ, Roberto; et al.** *Metodología de la Investigación*. 1st. México-D.F: McGRAW-Hill, 2014. ISBN 978-1-4562-2396-0.

40. **HLANGWANI, Wisani; et al.** "Exploring Learners' Conceptual obstacles in quadratic functions: A case of vertex concept". *En Proceedings of the 28th National Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa* [En línea]. 2023, págs. 187-201 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/374556864_EXPLORING_LEARNERS%27_CONCEPTUAL_OBSTACLES_IN_QUADRATIC_FUNCTIONS_A_CASE_OF_VERTEX_CONCEPT.

41. **HONG, Dae S.** "Examining opportunities to learn limit in widely used calculus textbooks". *International journal of science and mathematics education* [En línea]. 2023, vol. 21(3), págs. 881-898 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10763-022-10273-7.

42. **INGANAH, Siti**. "Analysis of Students' Understanding for the Concept of Matrix Rank Based on APOS Theory". *5th International Conference on Community Development (AMCA 2018)* [En línea]. 2018, vol. 231, págs. 4. [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: https://www.atlantis-press.com/article/25901837.pdf.

43. **INTAN, Rezi; et al.** “Application Of The M-Apos Learning Model (Modification-Action, Process, Object, Scheme) To Improve Mathematics Outcomes In Class IV State Elementary School 011 Rambah Samo”. *Indonesian Journal of Basic Education* [En línea]. 2022, vol. 5(3), págs. 236-249 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.37728/ijobe.v5i3.631.

44. **J., Page M; et al.** “The PRISMA 2020 statement: an updated guideline for reporting systematic reviews BMJ 2021”. *PRISMA* [En línea]. 2021, vol. 372(31), págs. 1-2 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1136/bmj.n71.

45. **KAZUNGA, Cathrine & BANSILAL, Sarah**. “An APOS analysis of solving systems of equations using the inverse matrix method”. *Educational Studies in Mathematics* [En línea]. 2020, vol. 103(3), págs. 339-358 [Consulta: 25 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10649-020-09935-6.

46. **KAZUNGA, Cathrine & BANSILAL, Sarah**. “Zimbabwean in-service mathematics teacher’ understanding of matrix operations”. *The Journal of Mathematical Behavior* [En línea]. 2016, vol. 47, págs. 81-95 [Consulta: 25 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.05.003.

47. **KEEFE, James W**. *Profiling and utilizing learning style* [En línea]. First edition. Reston, VA: Natl Assn of Secondary School, 1988. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=qkAmAQAAIAAJ.

48. **KELECSÉNYI, Klára; et al.** “Understanding logarithm in a mathematical card game environment”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* [En línea]. 2023, págs. 1-22 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2268076.

49. **KEMP, A. & VIDAKOVIC, D.** “Students’ understanding and development of the definition of circle in Taxicab and Euclidean geometries: an APOS perspective with schema interaction”. *Educational Studies in Mathematics* [En línea]. 2023, vol. 112, págs. 567-588 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10649-022-10180-2.

50. **KHEMANE, Thabiso; et al.** “Exploring the complexities of swapping the order of integration in double integrals”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* [En línea]. 2023, vol. 54(9), págs. 1907-1927 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2265948.

51. **KITCHENHAM Barbara, et al.** “Systematic literature reviews in software engineering–a tertiary study.” *Information and software technology* [En línea]. 2010, vol. 52(8), págs. 792-805. [Consulta: 19 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.infsof.2010.03.006.

52. **KOYUNKAYA, M. & BOZ YAMAN, Burcak**. “Changes in student’ mental constructions of function transformations through the APOS framework”. *International Electronic Journal of Mathematics Education* [En línea]. 2023, vol. 18(4), págs. 1-21 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.29333/iejme/13515.

53. **LASNIBAT GODOY, T; et al.** “Un estudio de clases virtual para promover la construcción del infinito actual en estudiantes de educación media y primer año de universidad desde la perspectiva de la teoría APOE”. *Educación Matemática* [En línea]. 2022, vol. 34(3), págs. 218-247 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.24844/em3403.08.

54. **LONGE, Idowu Oluwaseun & MAHARAJ, Aneshkumar**. “Investigating Student’ Understanding of Complex Number and Its Relation to Algebraic Group Using and APOS Theory ”. *Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang* [En línea]. 2022, vol. 7(1), págs. 117 -134 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v7i1.2332.

55. **LONGE, Idowu Oluwaseun & MAHARAJ, Aneshkumar.** “Investigating Students’ Understanding of Complex Number and Its Relation to Algebraic Group Using and APOS Theory”. *Journal of Medives: Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang* [En línea]. 2023, vol. 7(1), págs. 117-134 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v7i1.2332.

56. **MAKONYE, J. P.** “Pre-service mathematics student teachers’ conceptions of nominal and effective interest rates”. *Pythagoras* [En línea]. 2017, vol. 38(1), págs. 1-10 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.4102/pythagoras.v38i1.307.

57. **MATURANA, Isabel; et al.** “EVOLUCIÓN EN EL ESQUEMA DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL. UNA MIRADA A TRES INTERPRETACIONES DESDE LA TEORÍA APOE”. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* [En línea]. 2015, págs. 291-299. [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/10786/1/Maturana2015Evolucion.pdf.

58. **MAULLINA, Eka Siti. & SETYANINGSIH, Nining.** "Students' Ability to Solve Arithmetic Problems Based on APOS Theory in Cognitive Styles Differences". *Jurnal Matematika Dan Pendidikan Matematika* [En línea]. 2023, vol. 7(1), págs. 13-26 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.25217/numerical.v7i1.3134.

59. **MENDOZA, Esteban; et al.** "Estudio sobre la construcción cognitiva de la matriz de cambio de base en términos de la Teoría APOE". *Avances de Investigación en Educación Matemática* [En línea]. 2021, vol. 20, págs. 65-87. [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: https://doi.org/10.35763/aiem20.4011.

60. **MONTENEGRO, Fabiana; et al.** "EL APRENDIZAJE DE ESPACIOS VECTORIALES EN ÁLGEBRA: UNA MIRADA DESDE LA TEORÍA APOE". *Actas de la XII conferencia Argentina de educación matemática* [En línea]. 2018, págs. 1137-1147. [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/19817/1/Montenegro2018El.pdf.

61. **MORANTE RODRÍGUEZ, J.D.; et al.** "Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función de una variable real en estudiantes de ingeniería". *Educación matemática* [En línea]. 2022, vol. 34(1), págs. 249-279 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.24844/em3401.09.

62. **MUTAMBARA, Lillias & BANSILAL, Sarah**. "An Exploratory Study on the Understanding of the Vector Subspace Concept". *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education* [En línea]. 2019, vol. 23(1), págs. 1-13 [Consulta: 25 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1080/18117295.2018.1564496.

63. **NASR, Layla**. "Students' resolutions of some paradoxes of infinity in the lens of the grossone methodology". *Informatics and Education* [En línea]. 2023, vol. 28(1), págs. 83-91 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.32517/0234-0453-2023-38-1-83-91.

64. **NDLOVU, Zelene & BRIJLALL, Deonarain**. "Pre-service mathematics teachers' mental constructions when using Cramer's rule". *South African Journal of Education* [En línea]. 2019, vol. 39(1), págs. 1-16. [Consulta: 25 febrero 2024]. ISSN 2076-3433. Disponible en: https://doi.org/10.15700/saje.v39n1a1550.

65. **NEEL, Báez Ureña; et al.** "From Process to Concept, Exemplified in the Functional Limit". *The Educational Review* [En línea]. 2022, vol. 7(2), págs. 121-130 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.26855/er.2023.02.002.

66. **NGUYEN, Thi Nga; et al.** “The Effectiveness of Teaching Derivatives in Vietnamese High Schools Using APOS Theory and ACE Learning Cycle.” *European Journal of Educational Research* [En línea]. 2023, vol. 12(1), págs. 507-523 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.507.

67. **NI, Chenmin**. “Research on Two-way Driven Teaching Mechanism of Higher Mathematics and Discipline Competition for Economics and Management Majors under OBE Philosophy ”. *International Journal of Social Science and Education Research* [En línea]. 2023, vol. 6(1), págs. 166-173 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.6918/IJOSSER.202301_6(1).0024.

68. **NÚÑEZ, D & KÚ, D**. “La teoría APOE en el desarrollo de competencias matemáticas en secundaria”. *Aproximaciones Teóricas en Matemática Educativa* [En línea]. 2015, págs. 45-48 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: http://redcimates.org/test/.

69. **NÚÑEZ; et al.** *Álgebra lineal* [En línea]. República Dominicana: Universidad Abierta para Adultos (UAPA), 2019 [Consulta: 23 febrero 2024]. ISBN 978-9945-580-76-1. Disponible en: https://elibro.net/es/ereader/espoch/176649?page=212.

70. **NURHAYATI, L; et al.** “Integral (antiderivative) learning with APOS perspective: A case study”. *Journal on Mathematics Education* [En línea]. 2023, vol. 14(1), págs. 29-148 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.22342/jme.v14i1.pp129-148.

71. **OKTAÇ, Asuman**. “Mental constructions in linear algebra”. *ZDM – Mathematics Education* [En línea]. 2019, vol. 51(6), págs. 1043-1054 [Consulta: 25 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s11858-019-01037-9.

72. **OKTAÇ, Asuman**. “What’s new with APOS theory? A look into levels and Totality”. *Avances de investigación en educación matemática* [En línea]. 2022, vol. 21, págs. 9-21 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.35763/aiem21.4245.

73. **OKTAÇ, Asuman & TRIGUEROS, María**. “¿ Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal?” *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* [En línea]. 2010, vol. 13(4), págs. 373-385 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33558827009.

74. **OÑATE, Luis**. “La metodología PACIE”. *FATLA* [En línea]. 2009, págs. 5 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://www.academia.edu/download/50132854/La-Metodologia-Pacie.pdf.

75. **PACKER, Abel**. *SciELO.org.* [En línea]. Brasil, 1997 [Consulta: 13 marzo 2024]. Disponible en: https://scielo.org/es/.

76. **PARRAGUEZ, Marcela; et al.** "Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del teorema de cambio base de vectores". *Enseñanza de las Ciencias* [En línea]. 2016, vol. 34(2), págs. 129-150 [Consulta: 25 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1950.

77. **PARRAGUEZ, Marcela; et al.** "Estructuras y mecanismos mentales que desde una perspectiva geométrica modelan y articulan el aprendizaje de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$". *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa* [En línea]. 2022, vol. 25(1), págs. 63-92 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.35763/aiem22.4005.

78. **PAZMIÑO, Rubén; et al.** "La teoría APOE: Un mapeo sistemático parcial". *ORCID; Connecting research and researchers* [En línea]. 2022, vol. 1, págs. 3-14. [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: http://https://orcid.org/0000-0002-6811-7876.

79. **PAZMIÑO, Rubén; et al.** "Learning analytics in Ecuador: a systematic review supported by statistical implicative analysis". *Universal Access in the Information Society* [En línea]. 2021, vol. 20, págs. 495-512. [Consulta: 19 febrero 2024]. ISSN 1680-8398. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10209-020-00773-0.

80. **PEÑA, Adriana & LARA, Graciela**. "Google académico en la visibilidad de revistas científicas". *En Cuarto Congreso Nacional y Segundo Congreso Iberoamericano de Revistas Científicas.* [En línea]. 2018, vol. 1, págs. 3-8. [Consulta: 19 febrero 2024]. Disponible en: http://www.congresoderevistas.unam.mx/index.php/congresoderevistas/congresoderevistas/paper/view/98.

81. **PÉREZ, Andrea.** "WOS Y SCOPUS: Los grandes aliados de todo investigador - Comunicar." *Escuela de autores* [blog]. 2017 [Consulta: 19 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.3916/escuela-de-autores-031.

82. **PETTICREW, Mark & ROBERTS, Helen**. *Systematic Reviews in the Social Sciences A PRACTICAL GUIDE.* First edition. USA: Blackwell Publishing, 2016. ISBN 9780470754887.

83. **QUINTANILLA CÓNDOR, Cerapio Nicéforo**. *Un estudio sobre las concepciones del concepto de función desde la perspectiva de la teoría APOE.* [En línea]. San Miguel. Lima-Perú, 2009 [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: http://hdl.handle.net/20.500.12404/1194.

84. **RACHMAWATI, Dinda & SISWONO, Tatag**. “Impulsive and Reflective Students’ Understanding to Linear Equations System: An Analysis Through APOS Theory”. *Revista científica de educación matemática - MATHEdunesa* [En línea]. 2020, vol. 9(1), págs. 1-48. [Consulta: 7 noviembre 2023]. ISSN 2301-9085. Disponible en: https://journal.unnes.ac.id/nju/index.php/kreano/article/view/39787.

85. **RAHAYU, R.; et al.** “Problem-Solving Process of Students with a Reflective Cognitive Style Based on the Action-Process-Object-Schema Theory”. *European Journal of Educational Research* [En línea]. 2023, vol. 12(1), págs. 41-58 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.12973/eu-jer.12.1.41.

86. **RAHMAWATI, Anisa Nur & SETYANINGSIH, Nining**. “Analysis of problem-solving ability in pythagorean theorem based on APOS theory reviewed from learning motivation ”. *AIP Conference Proceedings* [En línea]. 2022, vol. 2886(1), págs. 020037 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1063/5.0154672.

87. **ROA, Solange & PARRAGUEZ, Marcela**. “Estructuras Mentales que Modelan el Aprendizaje de un Teorema del Álgebra Lineal: Un Estudio de Casos en el Contexto Universitario”. *Avances de Investigación en Educación Matemática* [En línea]. 2017, vol. 10(4), págs. 15-32. [Consulta: 7 noviembre 2023]. ISSN 0718-5006. Disponible en: https://doi.org/10.4067/S0718-50062017000400003.

88. **ROA FUENTES, Solange & OKTAÇ, Asuman**. “Construcción de una descomposición genética”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [En Línea]. 2010, vol. 13(1), págs. 89-112 [Consulta: 19 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.12802/relime.10.1310.

89. **RODRÍGUEZ, Camilo; et al.** “Mathematical connections from a networking of theories between extended theory of mathematical connections and onto-semiotic approach”. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* [En línea]. 2022, vol. 53(9), págs. 2364-2390 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1875071.

90. **RODRÍGUEZ JARA, Miguel; et al.** “Construcción cognitiva del espacio vectorial R^{2}”. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [En línea]. 2018, vol. 21(1), págs. 1-16 [Consulta: 25 febrero 2024]. ISSN 1665-2436. Disponible en: https://doi.org/10.12802/relime.18.2113.

91. **RODRÍGUEZ JARA, Miguel Alejandro; et al.** "Cognitive construction of the solution set of a system of linear equations with two unknowns". *Enseñanza de las Ciencias* [En línea]. 2019, vol. 37(1), págs. 71-92 [Consulta: 25 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2194.

92. **SÁEZ LÓPEZ, José Manuel**. *Estilos de aprendizaje y métodos de enseñanza* [En línea]. First edition. Madrid: UNED Editorial, 2018. ISBN 978-84-362-7472-1. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?hl=es&lr=&id=fGVgDwAAQBAJ&oi=fnd&pg=PP1&dq=estilos+de+aprendizaje+definicion&ots=fTB6QSkH4_&sig=NYhqmJqu4tpzKReGtRnyUdWpkJ8&redir_esc=y#v=onepage&q&f=false.

93. **SALGADO, Hilda & TRIGUEROS, María**. "Teaching Eigenvalues and Eigenvectors Using Models and APOS Theory". *The Journal of Mathematical Behavior* [En línea]. 2015, vol. 39, págs. 100-120. [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: https://www.researchgate.net/profile/Hilda-Salgado/publication/280026303_Salgado_H_and_Trigueros_M_2015_Teaching_eigenvalues_and_eigenvectors_using_models_and_APOS_Theory_The_Journal_of_Mathematical_Behavior/links/5aa1e2caaca272d448b4beea/Salgado-H-and-Trigueros-M-2015-Teaching-eigenvalues-and-eigenvectors-using-models-and-APOS-Theory-The-Journal-of-Mathematical-Behavior.pdf.

94. **SCHIRMER, Evelyn & ALTIERI, Mike**. "Learning the concept of eigenvalues and eigenvectors: a comparative analysis of achieved concept construction in linear algebra using APOS theory among students from different educational backgrounds". *ZDM Mathematics Education* [En línea]. 2019, vol. 51, págs. 1125-1140 [Consulta: 7 noviembre 2023]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s11858-019-01074-4.

95. **SIMG, René & TRIGUEROS, María**. "El papel de los conceptos geométricos como base para el aprendizaje del método simplex". *Educación matemática* [En línea]. 2022, vol. 34(1), págs. 70-99. [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.24844/em3401.03.

96. **SUÁREZ GIL, Diana Carolina; et al.** "La comprensión de la recta desde la teoría APOE ". *Revista boletín Redipe: Red Iberoamericana de Pedagogía* [En línea]. 2021, vol. 10(9), págs. 371-387. [Consulta: 7 noviembre 2023]. ISSN 2256-1536. Disponible en: https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/1449/1368.

97. **TATIRA, Benjamin**. "Students' Cognition of The Induction Step in Proving Inequality Propositions"'. *Journal of Mathematics Education IKIP Veteran Semarang* [En línea]. 2023,

vol. 7(2), págs. 203-218 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.31331/medivesveteran.v7i2.2571.

98. **TATIRA, Benjamin**. "Undergraduate students' conceptualization of elementary row operations in solving systems of linear equations". *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* [En línea]. 2023, vol. 19(11), págs. 1-15 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.29333/ejmste/13679.

99. **TOH, T.L.** "Teachers' instructional goals and their alignment to the school mathematics curriculum: a case study of the calculus instructional material from a Singapore Pre-University Institution". *Math Ed Res J* [En línea]. 2022, vol. 34, págs. 631-659 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s13394-022-00419-9.

100. **TRIGUEROS, María**. "APOS Theory and the Role of the Genetic Decomposition". *Advances in the Anthropological Theory of the Didactic* [En línea]. 2022 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/978-3-030-76791-4_6.

101. **TRIGUEROS, María**. "Diálogo entre las teorías APOE y TAD Dialogue between APOE and ATD theories". *Educação Matemática Pesquisa : Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática* [En línea]. 2019, vol. 21(5), págs. 30-43. [Consulta: 7 noviembre 2023]. ISSN 1983-3156. Disponible en: https://doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i5p30-43.

102. **TRIGUEROS, María**. "La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior". *Educación Matemática* [En línea]. 2005, vol. 17(1), págs. 5-31 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://www.redalyc.org/pdf/405/40517101.pdf.

103. **TRIGUEROS, María & OKTAÇ, Asuman**. "LA THÉORIE APOS ET L'ENSEIGNEMENT DE L'ALGÉBRE LINÉAIRE". *ANNALES de DIDACTIQUE et de SCIENCES COGNITIVES* [En línea]. 2005, vol. 10, págs. 157-176 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://mathinfo.unistra.fr/websites/math-info/irem/Publications/Annales_didactique/vol_10/adsc10-2005_005.pdf.

104. **TRIGUEROS GAISMAN, María; et al.** "Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación lineal". *Educación Matemática* [En línea]. 2015, vol. 27(2), págs. 95-124 [Consulta: 25 febrero 2024]. ISSN 1665-5826. Disponible en: https://doi.org/10.24844/EM2702.05.

105. **V, Elsevier B.** *SciELO.org.* [En línea]. Ámsterdam, 2004 [Consulta: 13 marzo 2024]. Disponible en: https://www.scopus.com/.

106. **VÄÄNÄNEN, Jouko & WELCH, Philip D.** "When cardinals determine the power set: inner models and Härtig quantifier logic". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [En línea]. 2023, vol. 69(4), págs. 460-471 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1002/malq.202200030.

107. **VEITH, Joaquin; et al.** "Mathematics education research on algebra over the last two decades: quo vadis?" *Front. Educ* [En línea]. 2022, vol. 8, págs. 1211920 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1211920.

108. **VEITH, Joaquin; et al.** "Towards Describing Student Learning of Abstract Algebra: Insights into Learners' Cognitive Processes from an Acceptance Survey ". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* [En línea]. 2022, vol. 10(7), págs. 1138 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.3390/math10071138.

109. **VEITH, Joaquín; et al.** "Assessing Learners' Conceptual Understanding of Introductory Group Theory Using the CI^2GT : *Development and Analysis of a Concept Inventory*$''$. *Education Sciences* [En línea]. 2022, vol. 12(6), págs. 376 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.3390/educsci12060376.

110. **VOSKOGLOU, Michael Gr.** "Assessing the Effectiveness of the APOS/ACE Method for Teaching Mathematics to Engineering Students". *Wseas Transactions On Advances In Engineering Education* [En línea]. 2023, vol. 23, págs. 37-43 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.37394/232010.2023.20.6.

111. **WACKERLY, D; et al.** *Estadística matemática con aplicaciones* [En línea]. 7st. México D-F: Editorial Thomson, 2002 [Consulta: 23 febrero 2024]. ISBN 978-607-481-399-9.

112. **WARNER, Bijan**. "Is Google Scholar a reliable tool?" [En línea]. 2012 [Consulta: 19 febrero 2024]. Disponible en: http://www.congresoderevistas.unam.mx/index.php/congresoderevistas/congresoderevistas/paper/view/98.

113. **YEPES NUÑEZ, J. J.; et al.** "Declaración PRISMA 2020: una guía actualizada para la publicación de revisiones sistemáticas". *Revista Española de Cardiología* [En línea]. 2021, vol. 74(9), págs. 790-799 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1016/j.recesp.2021.06.016.

114. **ZAMORA, L; et al.** “Conceptos fundamentales del Análisis Estadístico Implicativo (ASI) y su soporte computacional CHIC”. *Contribuciones al ASI* [En línea]. 2023, vol. 4, págs. 65-101 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://scholar.google.com/scholar?hl=es&as_sdt=0%2C5&q=Conceptos+fundamentales+del+An%C3%A1lisis+Estad%C3%ADstico+Implicativo+%28ASI%29+y+su+soporte+computacional+CHIC&btnG=.

115. **ZHONG, Hua Xu; et al.** “Developing creative material in STEM courses using integrated engineering design based on APOS theory”. *Int J Technol Des Educ* [En línea]. 2023, vol. 33, págs. 1627-1651 [Consulta: 24 febrero 2024]. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10798-022-09788-5.

ANEXOS

ANEXO A: DECLARACIÓN PRISMA 2020: REVISIÓN SISTEMÁTICA DE LITERATURA SOBRE LA TEORÍA APOE EN EL ÁREA DE LA MATEMÁTICA, ENTRE LOS AÑOS 2015 HASTA 2023

La Guía de verificación *PRISMA* 2020, incluye siete secciones o dominios que cuentan con 27 ítems, algunas de las cuales incluyen subítems. En la declaración *PRISMA* 2020 se incluye una lista de verificación para la publicación de resúmenes estructurados de revisiones sistemáticas presentados en revistas y congresos.

PRISMA 2009 Checklist (Versión en español)

Section/Topic	Item #	Checklist item	Location where item is reported
TÍTULO			
Título	1	Identificar la publicación como revisión sistemática.	✓
RESUMEN			
Resúmen	2	Consulte la lista de verificación de PRISMA 2020 para resúmenes.	✓
INTRODUCCIÓN			
Justificación	3	Describir la justificación de la revisión en el contexto de lo que ya se conoce sobre el tema.	✓
Objetivos	4	Proporcione una declaración explícita de los objetivos o preguntas que aborda la revisión.	✓
MÉTODOS			
Criterios de elegibilidad	5	Especifique los criterios de inclusión y exclusión para la revisión y cómo se agruparon los estudios para las síntesis.	✓
Fuentes de información	6	Especifique todas las bases de datos, registros, sitios web, organizaciones, listas de referencias y otras fuentes buscadas o consultadas para identificar estudios. Especifique la fecha en la que se buscó o consultó cada fuente por última vez.	✓
Estrategia de búsqueda	7	Presente las estrategias de búsqueda completas para todas las bases de datos, registros y sitios web, incluidos los filtros y límites utilizados.	✓
Proceso de selección	8	Especifique los métodos utilizados para decidir si un estudio cumplió con los criterios de inclusión de la revisión, incluido cuántos revisores examinaron cada registro y cada informe recuperado, si trabajaron de forma independiente y, si corresponde, detalles de las herramientas de automatización utilizadas en el proceso.	✓
Proceso de recopilación de datos	9	Especifique los métodos utilizados para recopilar datos de los informes, incluido cuántos revisores recopilaron datos de cada informe, si trabajaron de forma independiente, cualquier proceso para obtener o confirmar datos de los investigadores del estudio y, si corresponde, detalles de las herramientas de automatización utilizadas en el proceso.	✓
Lista de datos	10a	Enumere y defina todos los resultados para los cuales se buscaron datos. Especifique si se buscaron todos los resultados que fueran compatibles con cada dominio de resultados en cada estudio (por ejemplo, para todas las medidas, puntos temporales, análisis) y, en caso contrario, los métodos utilizados para decidir qué resultados recopilar.	✓
	10b	Enumere y defina todas las demás variables para las que se buscaron datos (por ejemplo, características de los participantes y de la intervención, fuentes de financiación). Describa cualquier suposición hecha sobre cualquier información faltante o poco clara.	✓
Evaluación del riesgo de sesgo del estudio	11	Especifique los métodos utilizados para evaluar el riesgo de sesgo en los estudios incluidos, incluidos detalles de las herramientas utilizadas, cuántos revisores evaluaron cada estudio y si trabajaron de forma independiente y, si corresponde, detalles de las herramientas de automatización utilizadas en el proceso.	
Medidas de efecto	12	Especifique para cada resultado la(s) medida(s) del efecto (por ejemplo, índice de riesgos, diferencia de medias) utilizadas en la síntesis o presentación de los resultados.	
Síntesis de resultados	13a	Describa los procesos utilizados para decidir qué estudios fueron elegibles para cada síntesis (por ejemplo, tabular las características de la intervención del estudio y compararlas con los grupos planificados para cada síntesis (elemento n.° 5)).	✓

PRISMA 2009 Checklist (Versión en español)

	13b	Describa cualquier método utilizado para tabular o mostrar visualmente los resultados de estudios y síntesis individuales.	✓
	13c	Describa cualquier método utilizado para sintetizar los resultados y proporcione una justificación de la(s) elección(es). Si se realizó un metaanálisis, describa los modelos, los métodos para identificar la presencia y el alcance de la heterogeneidad estadística y los paquetes de software utilizados.	
	13d	Describa cualquier método utilizado para explorar posibles causas de heterogeneidad entre los resultados de los estudios (por ejemplo, análisis de subgrupos, metarregresión).	
	13e	Describa cualquier análisis de sensibilidad realizado para evaluar la solidez de los resultados sintetizados.	
	13f	Describa cualquier método necesario para preparar los datos para su presentación o síntesis, como el manejo de estadísticas resumidas faltantes o conversiones de datos.	✓
Evaluación del sesgo de notificación	14	Describa cualquier método utilizado para evaluar el riesgo de sesgo debido a la falta de resultados en una síntesis (que surge de sesgos en la notificación).	

Section and Topic	Item #	Checklist item	Location where item is reported
RESULTADOS			
Evaluación de certeza.	15	Describa cualquier método utilizado para evaluar la certeza (o confianza) en el conjunto de evidencia de un resultado.	
Selección de estudio	16a	Describa los resultados del proceso de búsqueda y selección, desde la cantidad de registros identificados en la búsqueda hasta la cantidad de estudios incluidos en la revisión, idealmente utilizando un diagrama de flujo.	✓
	16b	Cite los estudios que podrían parecer cumplir con los criterios de inclusión, pero que fueron excluidos, y explique por qué fueron excluidos.	✓
Características de los estudios	17	Cite cada estudio incluido y presente sus características.	✓
Riesgo de sesgo en los estudios	18	Presentar evaluaciones del riesgo de sesgo para cada estudio incluido.	
Resultados de los estudios individuales	19	Para todos los resultados, presente, para cada estudio: (a) estadísticas resumidas para cada grupo (cuando corresponda) y (b) una estimación del efecto y su precisión (p. ej., intervalo de confianza/creíble), idealmente utilizando tablas o gráficos estructurados.	✓
Síntesis de los resultados	20a	Para cada síntesis, resuma brevemente las características y el riesgo de sesgo entre los estudios contribuyentes.	
	20b	Presentar resultados de todas las síntesis estadísticas realizadas. Si se realizó un metaanálisis, presente para cada uno la estimación resumida y su precisión (p.ej. intervalo de confianza/creíble) y medidas de heterogeneidad estadística. Si compara grupos, describa la dirección del efecto.	✓
	20c	Presentar los resultados de todas las investigaciones sobre posibles causas de heterogeneidad entre los resultados de los estudios.	✓
	20d	Presentar los resultados de todos los análisis de sensibilidad realizados para evaluar la solidez de los resultados sintetizados.	✓
Sesgos de información	21	Presentar evaluaciones del riesgo de sesgo debido a resultados faltantes (que surgen de sesgos en la presentación de informes) para cada síntesis evaluada.	

PRISMA 2020 Checklist (Versión en español)

Certeza de la evidencia	22	Presentar evaluaciones de certeza (o confianza) en el conjunto de evidencia para cada resultado evaluado.	
DISCUSIÓN			
Discusión	23a	Proporcione una interpretación general de los resultados en el contexto de otras pruebas.	✓
	23b	Discuta cualquier limitación de la evidencia incluida en la revisión.	✓
	23c	Discuta cualquier limitación de los procesos de revisión utilizados.	✓
	23d	Discutir las implicaciones de los resultados para la práctica, las políticas y las investigaciones futuras.	
OTRA INFORMACIÓN			
Registro y protocolo	24a	Proporcione información de registro para la revisión, incluido el nombre y el número de registro, o indique que la revisión no fue registrada.	
	24b	Indique dónde se puede acceder al protocolo de revisión o indique que no se preparó un protocolo.	
	24c	Describa y explique cualquier modificación de la información proporcionada en el registro o en el protocolo.	
Apoyo	25	Describa las fuentes de apoyo financiero o no financiero para la revisión y el papel de los financiadores o patrocinadores en la revisión.	
Conflicto de intereses	26	Declare cualquier interés en competencia de los autores de la revisión.	✓
Disponibilidad de datos, códigos y otros materiales.	27	Indique cuáles de los siguientes están disponibles públicamente y dónde se pueden encontrar: formularios modelo de recopilación de datos; datos extraídos de los estudios incluidos; datos utilizados para todos los análisis; código analítico; cualquier otro material utilizado en la revisión.	✓

Fuente: Moher D, Liberati A, Tetzlaff J, Altman DG, The PRISMA Group (2009). Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses: The PRISMA Statement. PLoS Med 6(6): e1000097. doi:10.1371/journal.pmed1000097

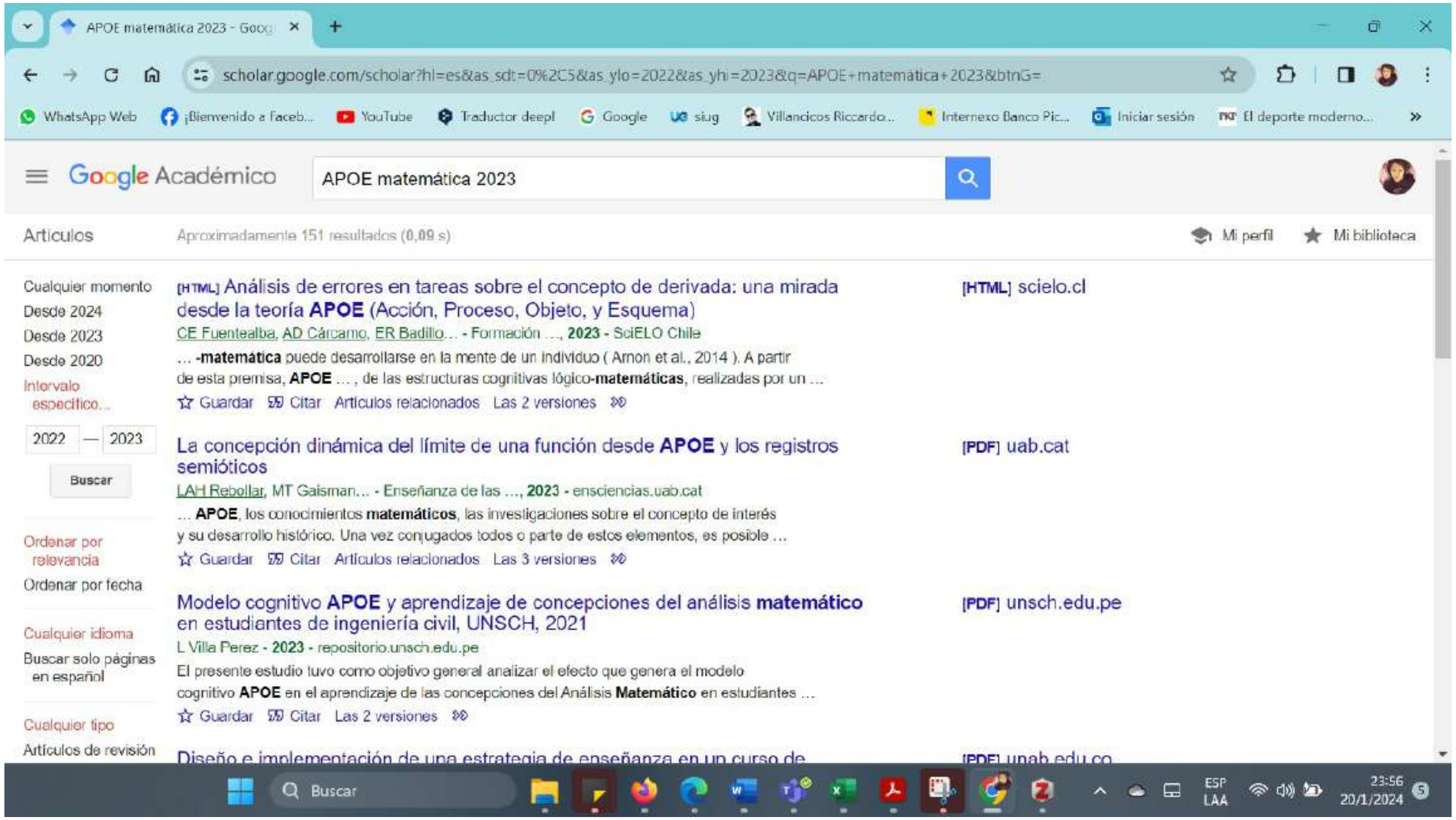
Para más información, visite: www.prisma-statement.org

ANEXO B: CAPTURAS DE LOS BUSCADORES QUE SE UTILIZARON PARA LA REVISIÓN SISTEMÁTICA

Se trabajó con buscadores de literatura científica de alto impacto como: *Google Scholar, SciELO, Scopus y Wos.*

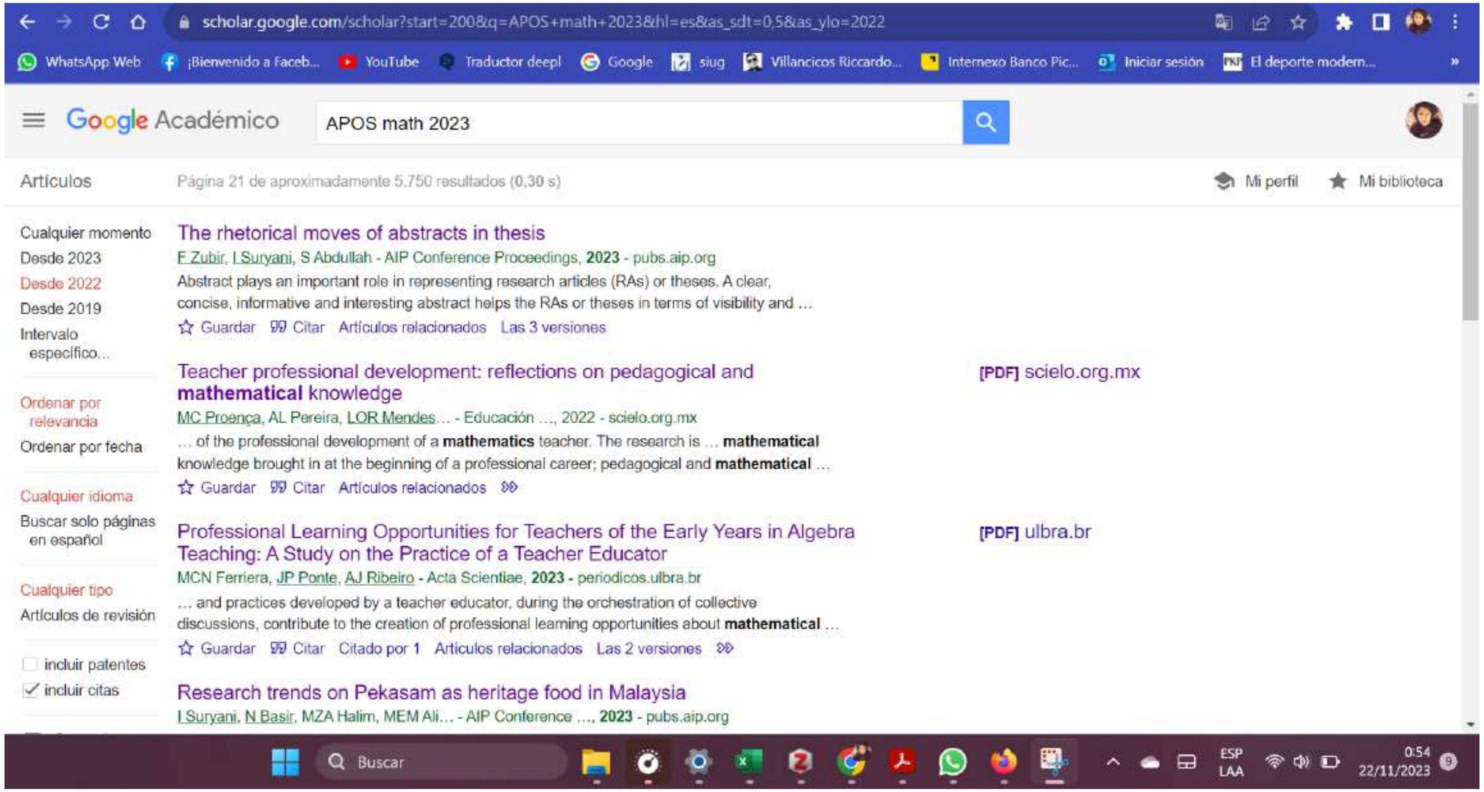
Disponibles en: https://drive.google.com/drive/folders/1nkFPdtlvNWpJ0akS-mWeMKvTXfyGoywb?usp=drive_link

✓ ***Captura: Google Scholar en Español entre los años** (2022 – 2023)*



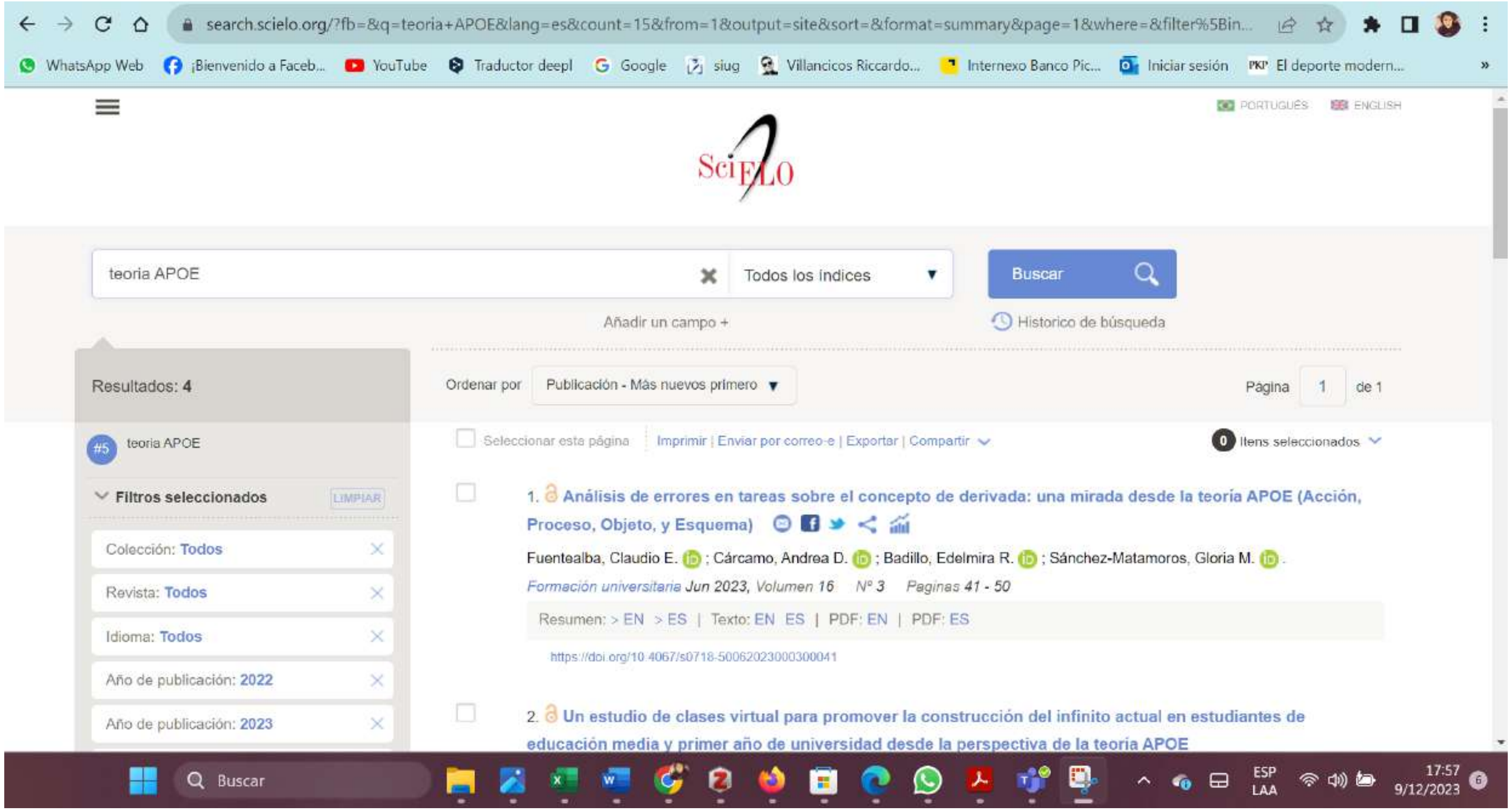
En esta ilustración, se evidenció 151 artículos científicos en español con la teoría APOE en el área de la matemática, en el buscador *Google Académico*.

✓ ***Captura: Google Scholar en Inglés entre los años** (2022 – 2023)*



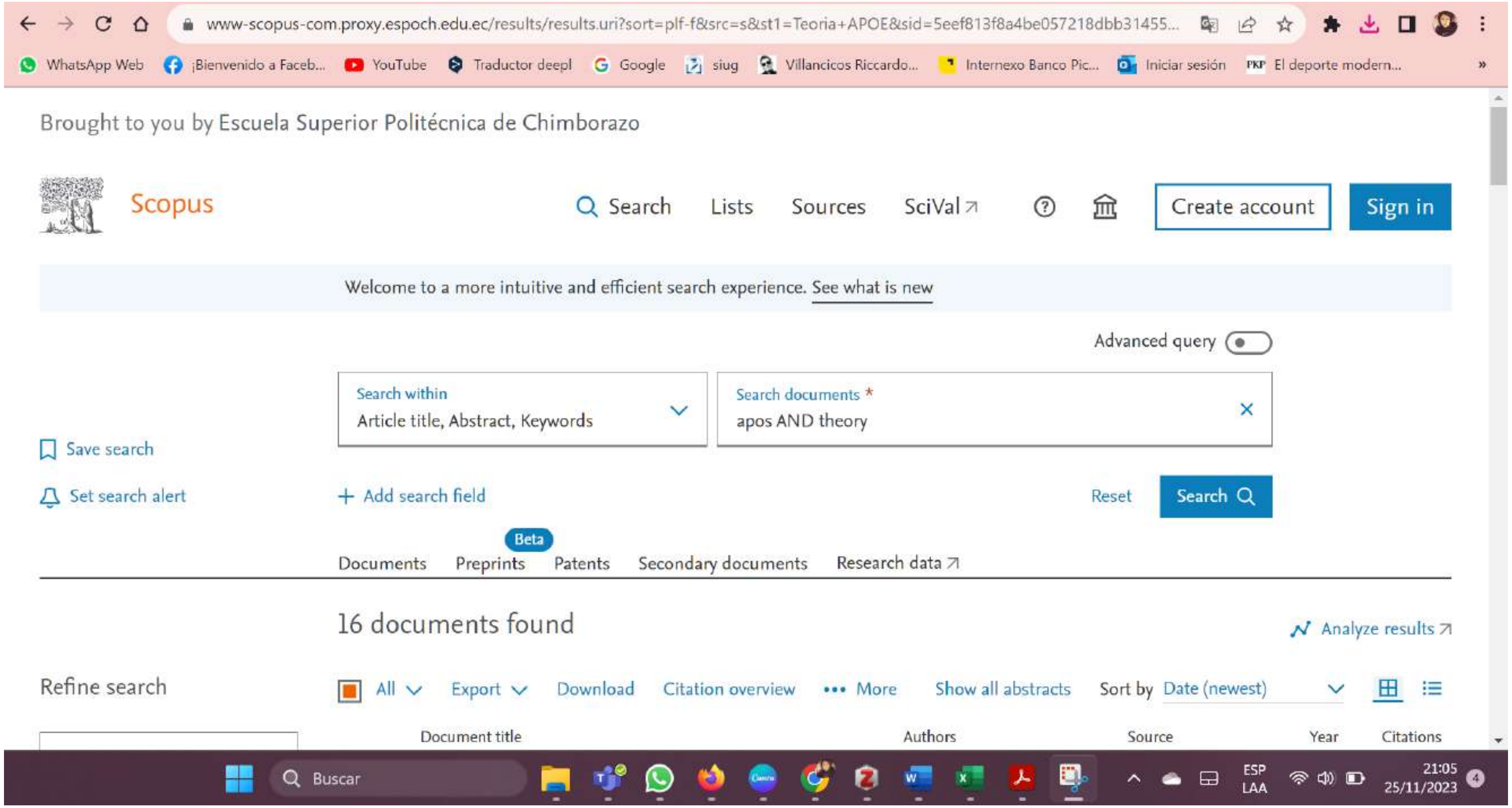
Entre los años 2022 hasta 2023, se encontró 5.750 artículos científicos en inglés con la teoría APOE en el área de la matemática, en la colección del buscador de *Google Académico*. En la barra de paginación de *Google Scholar*, se decidió limitar la búsqueda hasta la página 24, ya que los artículos posteriores no abordaban la teoría APOE. Dando un total de 321 artículos para analizar.

✓ ***Captura: SciELO en Español entre los años*** (2022 – 2023)



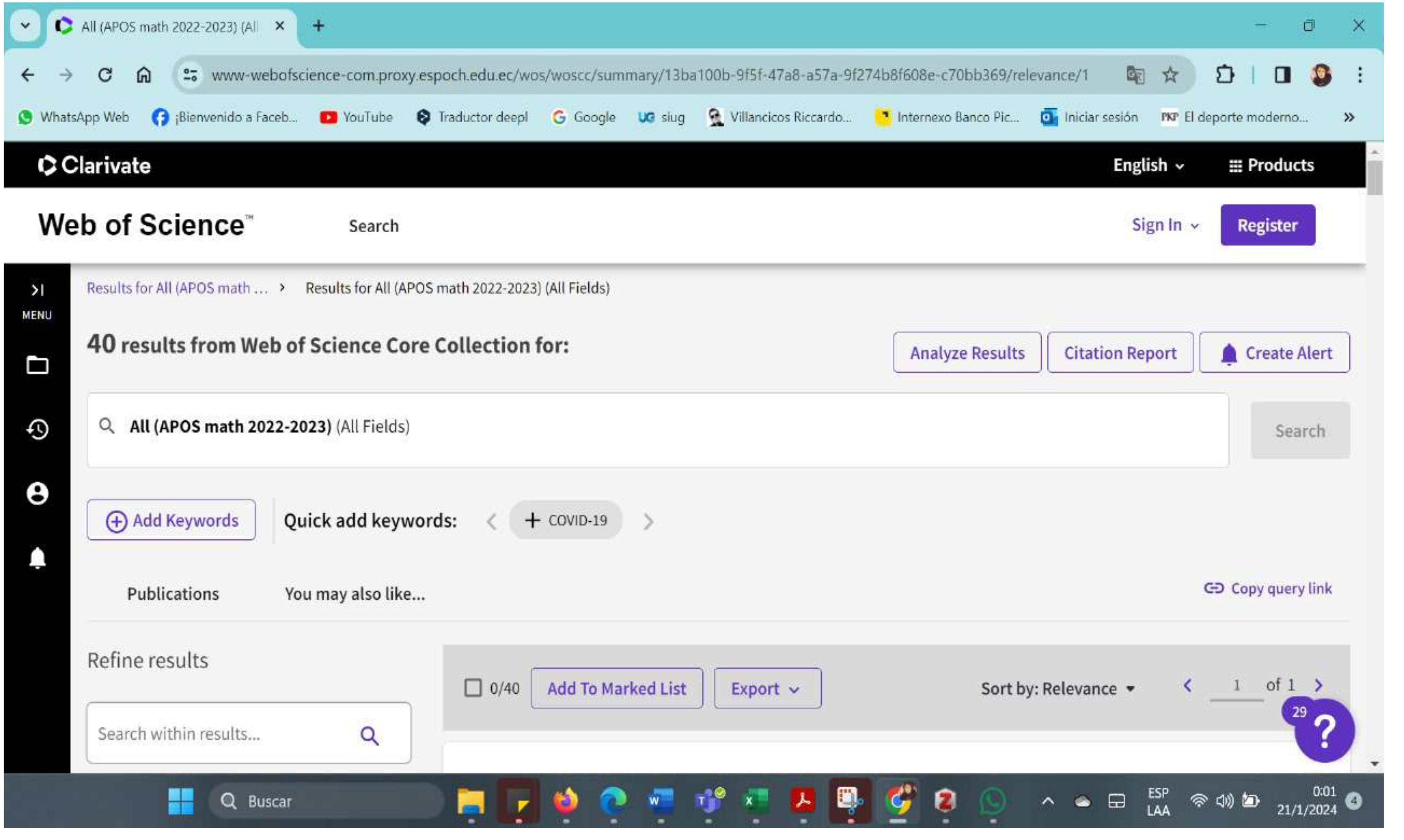
En la ilustración, se corroboró 4 artículos científicos en español con la teoría APOE en el área de la matemática, en la colección del buscador de *Scientific Electronic Library Online*.

✓ ***Captura: Scopus en Inglés entre los años** (2022 – 2023)*



Se observó 16 artículos científicos en español con la teoría APOE en el área de la matemática, en la colección del buscador de *Scopus*.

✓*Captura: Wos en Inglés entre los años* (2022 – 2023)



En esta ilustración, se evidenció 40 artículos científicos en español con la teoría APOE en el área de la matemática, en la colección del buscador de *Web of Science*.

ANEXO C: LISTA DE ARTÍCULOS CIENTÍFICOS QUE SE ANALIZARON PARA LA REVISIÓN SISTEMÁTICA ENTRE LOS AÑOS (2015 - 2021)

Los siguientes 123 artículos que se mencionan a continuación, son el resultado de un total de 287 artículos científicos que se obtuvieron de una revisión científica literaria en los siguientes buscadores: *Google Scholar, SciELO, Scopus y Wos*, para la "Revisión sistemática de la teoría APOE en los últimos semestres de la carrera de matemática de la ESPOCH" (Aldás Castro, 2022), entre los años (2015 - 2021). Están incluidos los 27 artículos con la teoría APOE en el Álgebra Lineal, los cuales fueron fundamentales en el desarrollo de la nueva revisión sistemática hasta el 2023 y es uno de los objetivos del siguiente TIC.

BUSCADOR	TÍTULO	AUTOR
Google_1	Procesos Iterativos Infinitos Y Objetos Trascendentes: Un Modelo De Construcción Del Infinito Matemático Desde La Teoría Apoe	Diana Paola Villabona Millan; Solange Roa Fuentes
Google_102	Comparison Of Processes Construct Concept Of Solo Theory And APOS Theory In Mathematics Learning	Achmad Hidayatullah
Google_104	Diálogo Entre Las Teorías Apoe Y Tad	María Trigueros
Google_106	APOS Theory Implementation Of A Module Contained With Autonomous Character And Mathematics Connection On Algebra Material	Krisno Budi Prasetyo; Yl. Sukestiyarno; Adi Nur Cahyono
Google_109	Preservice Teachers Understanding Of Two-Variable Inequalities: APOS Theory	Kyunghee Moon
Google_112	Impulsive And Reflective Students' Understanding To Linear Equations System: An Analysis Through APOS Theory	Dinda Ayu Rachmawati; Tatag Yuli Eko Siswono
Google_113	Content Analysis Of The APOS Theory Studies On Mathematics Education Conducted In Turkey And Internationally: A Meta-Synthesis Study	Özgün Şefik; Özge Erdem Uzun; Şenol Dost
Google_114	The Analysis Of Pre-Service Math Teachers' Level Of Understanding The Derivative Concept Within The Context Of APOS Theory	Selin Urhan; Şenol Dost

Google_116	Analysis Of Students' Understanding For The Concept Of Matrix Rank Based On APOS Theory Siti	Siti Inganah
Google_119	Stages In Partial Functional Thinking In The Form Of Linear Functions: APOS Theory	Suci Yuniati; Toto Nusantara; Subanji; I Made Sulandra
Google_123	Analysis Of Undergraduate Students' Mathematical Understanding Ability Of The Limit Of Function Based On APOS Theory Perspective	M. W. Afgani; D Suryadi; J. A. Dahlan
Google_124	Descomposiciones Genéticas Relacionadas Con El Concepto De La Ecuación Diferencial	Medina Abel; Alejandro Rosas
Google_125	Developing Calculus Learning Model Based On The Theory Of APOS (Action, Process, Object, And Schema)	H. Hanifah
Google_13	Análisis De La Conceptualización De La Integral Definida Por Medio De La Teoría Apoe	Martha Patricia Jiménez Villanueva; Elena Fabiola Ruiz Ledesma; Ángel Salvador Montiel Sánchez
Google_130	"Least Squares Estimation" Instructional Design Based Upon APOS Theory: Laying Mathematical Representation And Transformation Bridge	Xie Y.
Google_2	¿Cómo Impacta El Conocimiento Que Tiene Un Profesor Acerca De La Teoría Apoe Sobre Su Conocimiento Especializado?	José Antonio Sánchez-García
Google_24	Análisis De Un Diseño Instruccional Fundamentado En La Teoría Apoe Utilizando GeoGebra	Francisco Javier Anaya
Google_30	Análisis De Textos Usando La Teoría Apoe: El Caso Del Principio De Inducción En El Libro De Grimaldi	García Isabel; Parraguez Marcela

Google_32	Construcción Del Concepto De Área, Desde La Teoría Apoe Y El Uso Del Software GeoGebra	Gisselle Paola Bayona-Prieto; Solange Roa Fuentes; Jorge Winston Barbosa-Chacón
Google_33	Evidencias De Conocimiento Especializado Que Se Presentan Durante El Diseño De Actividades Basadas En La Teoría Apoe	Sánchez-García J.A.; Flores-Medrano E.; Lidia Aurora Hernández Rebollar; Juárez-Ruiz E.
Google_35	Construcción Del Concepto De Función Desde La Teoría Apoe: La Coordinación Entre Representaciones Como Apoyo	Hellen Catherine Serrano Iglesias; Solange Roa-Fuentes
Google_36	Estrategias En La Resolución De Inecuaciones Lineales Y Racionales En Educación Superior Desde La Teoría Apoe	Fuentes Gonzáles Marcela
Google_39	Construcción Del Concepto De Ángulo En Segundo Grado De Secundaria Desde La Teoría Apoe	Díaz Linda; Kú Darly
Google_4	Análisis De Actividades Didácticas Para El Estudio Del Límite De Una Función Por Medio De La Teoría Apoe	José Javier Guerrero Maldonado; Lidia Aurora Hernández Rebollar
Google_41	Construcción Cognitiva De La Distribución Binomial; Una Mirada Desde La Teoría Apoe	Vergara Andrea; Parraguez Marcela
Google_42	Evolución En El Esquema Del Concepto Transformación Lineal.	Maturana Isabel; Parraguez Marcela; Trigueros María
Google_44	Propuesta Didáctica Para La Enseñanza De Lógica Matemática En Un Curso Propedéutico Bajo La Teoría Apoe	Jesús Alfonso Noriega Márquez
Google_47	Una Aproximación A Las Concepciones Del Infinito De Estudiantes De Grado Once Desde La Teoría Apoe	Cano María Inés; Delgado Liliana Carolina; Gómez Jhon Alexander
Google_5	Diferentes Interpretaciones De La Implicación: Una	García Martínez Isabel; Parraguez Marcela

Google_50	La Aritmética Como Base Indispensable Para El Aprendizaje Del Álgebra: De La Aritmética Al Álgebra, Un Ejemplo Desde La Teoría Apoe	Daniela Hernández Jaramillo; Jesús Alfonso Noriega Márquez
Google_54	Construcción De Función Como Relación Entre Magnitudes Variables: Diseño De Enseñanza Desde La Teoría Apoe	César Fabián Romero Félix; Román Gpe. Esquer Armenta
Google_57	Teaching Eigenvalues And Eigenvectors Using Models And APOS Theory	Hilda Salgado; María Trigueros
Google_59	Improvement Students' Level Of Proof Ability In Abstract Algebra Trough APOS Theory Approach	I Made Arnawa; Yerizon; Sri Nita
Google_6	El Aprendizaje De Espacios Vectoriales En Álgebra: Una Mirada Desde La Teoría APOE	Fabiana Montenegro; Alejandra Gagliardo; Silvina Mangini; Aylén Carrasco
Google_64	Does The Use Of APOS Theory Promote Students' Achievement In Elementary Linear Algebra?	I Made Arnawa; Yanita; Yerizon; Bukti Ginting; Sri Nita
Google_66	Applying The APOS Theory To Study The Student Understanding Of Polar Coordinates	V Borji; Michael Gr. Voskoglou
Google_67	Implementing GeoGebra Integrated With Multi-Teaching Approaches Guided By The APOS Theory To Enhance Students' Conceptual Understanding Of Limit In Ethiopian Universities	Mulat Gebeyehu Baye; Mulugeta Atnafu Ayele; Tadele Ejigu Wondimuneh
Google_68	Problem-Based Learning Associated By Action-Process-Object-Schema (APOS) Theory To Enhance Students' High Order Mathematical Thinking Ability	Achmad Mudrikah
Google_69	The Unit Circle Approach To The Construction Of The Sine And Cosine Functions And Their Inverses: An Application Of APOS Theory	Rafael Martínez-Planell; Angel Cruz Delgado

Google_7	La Comprensión De La Recta Desde La Teoría Apoe	Suárez Gil, Diana Carolina, Suárez Aguilar Zagalo Enrique; Sepúlveda Delgado Omaida
Google_74	Application Of The APOS-Ace Theory To Improve Students' Graphical Understanding Of Derivative	Vahid Borji; Hassan Alamolhodaei; Farzad Radmehr
Google_75	Development Of Students' Worksheet Based On APOS Theory Approach To Improve Student Achievment In Learning System Of Linear Equations	I Made Arnawa; Yerizon; Sri Nita; Roni Tri Putra
Google_77	Learning The Concept Of Eigenvalues And Eigenvectors: A Comparative Analysis Of Achieved Concept Construction In Linear Algebra Using APOS Theory Among Students From Different Educational Backgrounds	Mike Altieri; Evelyn Schirmer
Google_8	Estudio Sobre La Construcción Cognitiva De La Matriz De Cambio De Base En Términos De La Teoría Apoe	Mendoza Esteban; Rodríguez Vásquez Flor Monserrat; Roa Solange; Romero Jesús
Google_80	Analysis Of Stem Majors' Calculus Knowledge By Using APOS Theory On A Quotient Function Graphing Problem	Emre Tokgoz
Google_81	Limit Learning With APOS Theory And Maple To Develop Mathematical Communication And Critical Thinking	Retno Marsitin; Nyamik Rahayu Sesanti
Google_82	Students' Perception Towards Mathematics Using APOS Theory: A Case Study	Anith Safura Daud; Nor Syamimi Mohamed Adnan; Mohd Kasturi Nor Abd Aziz; Zulmaryan Embong
Google_83	Evaluation Of Engineering & Mathematics Majors' Riemann Integral Definition Knowledge By Using APOS Theory	Emre Tokgoz

Google_86	Understanding The Quadrilateral Concept Of Junior High School Students Based On APOS Theory In Terms Of Differences In Cognitive Styles	A. C. Anam; D. Juniati; Pradnyo Wijayanti
Google_87	Thinking Structure Of Students' Understanding Of Probability Concept In Term Of APOS Theory	Syamsuri Syamsuri; Cecep Ahf Santosa
Google_88	Error Analysis On Prospective Teacher In Solving The Problem Of Critical Thinking Mathematics With APOS Theory	Ardi Dwi Susandi; Cholis Sa'dijah; Abdur Rahman As'ari; Susiswo
Google_89	Developing Students' Worksheet Of Derivative Based On APOS Theory	Yunika Lestaria Ningsih; Darmawijoyo; Yusuf Hartono
Google_91	Mathematics Education Students' Understanding Of Binomial Series Expansion Based On The APOS Theory	Benjamin Tatira
Google_93	Development Of Mathematics Teachings Based On APOS Theory: Construction Of Understanding The Concept Of Student Straight Line Equation	Kamid Kamid; Nizlel Huda; Rohati Rohati; Sufri Sufri; Dewi Iriani; Khairul Anwar
Google_97	An APOS Theory : Technoscience Framework To Understand Mathematical Thinking	Leckson Mukavhi; Deonarain Brijlall; José Abraham
Google_98	APOS Theory: Use Of Computer Programs To Foster Mental Constructions And Student's Creativity	Draga Vidakovic; Ed Dubinsky; Kirk Weller
Scielo_11	Dificultades En La Comprensión Del Concepto Derivada De Una Función	Nora Elisa Pereyra; Carlos Gabriel Herrera
Scielo_12	El Esquema Del Cálculo Diferencial E Integral Para Ser Enseñado En Simultáneo	Patricia Rojas Salinas; María Trigueros Gaisman
Scielo_14	Estructuras Mentales Que Modelan El Aprendizaje De Un Teorema Del Álgebra Lineal: Un Estudio De Casos En El Contexto Universitario	Solange Roa-Fuentes; Marcela Parraguez

Scielo_19	Pre-Service Mathematics Teachers' Mental Constructions When Using Cramer's Rule	Zanele Ndlovu; Deonarain Brijlall
Scielo_20	Puntos De No-Derivabilidad De Una Función Y Su Importancia En La Comprensión Del Concepto De Derivada	Fuentalba Claudio; Badillo, Edelmira; Sánchez-Matamoros Gloria
Scielo_27	Un Modelo Cognitivo Para La Comprensión Profunda De La Regla De La Cadena	Cristóbal Valdivia Sepúlveda; Marcela Parraguez González
Scielo_6	La Construcción De Curvas Fractales Como Objetos Que Trascienden De Procesos Iterativos Infinitos	Villabona Millán Diana Paola; Roa Fuentes Solange
Scielo_8	Construcción Cognitiva Del Espacio Vectorial $\mathbb{R}^2$	Miguel Rodríguez Jara; Marcela Parraguez González; María Trigueros Gaisman
Scielo_9	Construcciones Y Mecanismos Mentales Para El Aprendizaje Del Teorema Matriz Asociada A Una Transformación Lineal	Trigueros Gaisman María; Maturana Peña Isabel; Parraguez González Marcela; Rodríguez Jara Miguel
Scopus_10	Students' Understanding Of Riemann Sums For Integrals Of Functions Of Two Variables	Marcela Parraguez González; Miguel Rodríguez Jara
Scopus_11	New Approaches For Two-Variable Inequality Graphs Utilizing The Cartesian Connection And The APOS Theory	Moon Kyunghee
Scopus_12	An APOS Analysis Of University Students' Understanding Of Derivatives: A Lesotho Case Study	Eunice Kolitsoe Moru
Scopus_13	Exploring The Conceptual Understanding Of The Quadratic Function Concept In Teachers' Colleges In Zimbabwe	Lillias Hamufari Natsai Mutambara; Jane Tendere; Conilius Jaison Chagwiza

Scopus_16	Learning The Function Concept By Exploring Digital Images As Functions	Christiaan Venter
Scopus_17	Benefits A nd L imitations O f T he Artificial With Respect To The Traditional Learning Of Mathematics	Michael Gr. Voskoglou; Abdel-Badeeh M. Salem
Scopus_21	What Does 'Y Is Defined A s A n Implicit Function Of X' Mean?: An Application Of APOS-Ace	Vahid Borji; Martínez-Planell Rafael
Scopus_24	What Happens When Cas Procedures Are Objectified?—The C ase O f " Solve" And "Desolve"	Uffe Thomas Jankvist; Morten Misfeldt; Mario Sánchez Aguilar
Scopus_26	Graphs Of Two Variable Inequalities: Alternate Approaches To The Solution Test	Kyunghee Moon
Scopus_28	Using APOS Theory As A Framework For Considering Slope Understanding	Courtney Nagle; Rafael Martínez-Planell; Deborah Moore-Russo
Scopus_29	Mental Constructions In Linear Algebra	Asuman Oktaç
Scopus_3	Ways Secondary Mathematics Teachers Apply Definitions I n T axicab G eometry F or A Real-Life Situation: Midset	Aubrey Kemp; Draga Vidakovic
Scopus_30	Students' Understanding Of The Concepts Involved In One-Sample Hypothesis Testing	Harrison E. Stalvey; Annie Burns-Childers; Darryl Chamberlain Jr.; Aubrey Kemp, Leslie J. Meadows; Draga Vidakovic
Scopus_35	Application Of The Complementarities Of Two Theories, APOS And Osa, For The Analysis Of The University Students' Understanding On The Graph Of The Function And Its Derivative	Vahid Borji; Vicenç Font; Hassan Alamolhodaei; Alicia Sánchez
Scopus_39	An Examination Of A Pre-Service Mathematics Teacher's Mental Constructions Of Relationships In A Right Triangle	Melike Yigit Koyunkaya

Scopus_40	Developing Mathematical Conceptual Understanding Through Problem-Solving: The Role Of Abstraction Reflective	Lulu Choirun Nisa; St. Budi Waluya; Kartono; Scholastika Mariani
Scopus_41	An APOS Study On Pre-Service Teachers' Understanding Of Injections And Surjections	Sarah Bansilala; Deonarain Brijlallb; María Trigueros
Scopus_5	Complexities In University Students' Understanding Of Parametric Equations And Curves	Vahid Borji; Hassan Alamolhodaei
Scopus_52	Students' Understanding Of Quadratic Equation	Jonathan López; Izraim Robles; Rafael Martínez-Planell
Scopus_54	Mental Constructions For The Group Isomorphism Theorem	Arturo Mena-Lorca; Astrid Morales Marcela Parraguez
Scopus_6	A Combined Application Of APOS And Osa To Explore Undergraduate Students' Understanding Of Polar Coordinates	Borji V.; Erfani H.; Font V.
Scopus_7	On Students' Understanding Of Implicit Differentiation Based On APOS Theory	Vahid Borji; Rafael Martínez-Planell
Scopus_9	An APOS Analysis Of Solving Systems Of Equations Using The Inverse Matrix Method	Cathrine Kazunga; Sarah Bansilal1
Wos_1	8th Grade Students' Construction Processes Of The Concept Of Slope	Ömer Deniz; Tangül Kabael
Wos_11	Analysing Engineering Students' Understanding Of Integration To Propose A Genetic Decomposition	Deonarain Brijlall; Nokwethemba Jubilee Ndlazi
Wos_16	Cognitive Construction Of The Solution Set Of A System Of Linear Equations With Two Unknowns	Miguel Alejandro Rodríguez Jara; Arturo Mena Lorca; Jaime Juan Fernando Mena Lorca; Patricia Vásquez Saldias; María Del Valle Leo

Wos_14	Calculus Students' Understanding Of The Vertex Of The Quadratic Function In Relation To The Concept Of Derivative	Annie Burns-Childers; Draga Vidakovic
Wos_18	Cognitive Trajectory Of Proof By Contradiction For Transition-To-Proof Students	Darryl Chamberlain Jr.; Draga Vidakovic
Wos_20	Design And Development Of Mathematical Literacy-Oriented Subject Materials	Tso Tai-Yih; Lei, Kin Hang
Wos_25	Estructuras Mentales Para Modelar El Aprendizaje Del Teorema De Cambio Base De Vectores	Marcela Parraguez; Javier Lezama; Raúl Jiménez
Wos_26	Formulating A Modified Genetic Decomposition For The Concept Of 'Limit Of A Sequence'	Conilius Jaison Chagwiza; Aneshkumar Maharaj; Deonarain Brijlall
Wos_30	Identification A nd C haracterization O f The Development Sub-Levels Of The Derivative Schema	Claudio Fuentealba; Edelmira Badillo; Gloria Sánchez-Matamoros
Wos_34	Mathematical Objects Through The Lens Of Two Different Theoretical Perspectives: APOS And Osa	Vicenç Font Moll; María Trigueros; Edelmira Badillo; Norma Rubio
Wos_35	Matrix Multiplication And Transformations: An APOS Approach	Ana Paulina Figueroa; Edgar Possani; María Trigueros
Wos_37	Mental Mechanism Of Synthesis In The Learning Of The Sierpinski Triangle As A Totality	Ximena Gutiérrez Figueroa; Marcela Parraguez González
Wos_43	Pre-Service Mathematics Student Teachers' Conceptions Of Nominal And Effective Interest Rates	Judah P. Makonye
Wos_44	Pre-Service Mathematics Teachers' Development Process In Using Manipulatives In Number Operations	Zanele A. Ndlovu; Lytion Chiromo

Wos_46	Real Analysis Students' Understanding Of Pointwise Convergence Of Function Sequences In A Dgs Assisted Learning Environment	Günhan Caglayan
Wos_47	Reflective A bstraction I n Computational Thinking	Ibrahim Cetin; Ed Dubinsky
Wos_5	A Preliminary Genetic Decomposition For Conceptual Understanding Of The Indefinite Integral	Heather L.Tarr; Aneshkumar Maharaj
Wos_50	Student Understanding Of The Relation Between Tangent Plane And The Total Differential Of Two-Variable Functions	María Trigueros Gaisman; Rafael Martínez-Planell; Daniel Mcgee
Wos_52	Students' Understanding Of Solving A System Of Linear Equations Using Matrix Methods: A Case Study	Maharaj Aneshkumar
Wos_53	Construcción De Los Operadores Lineales Diagonalizables Con Base En La Teoría Apoe.	Mendoza Sandoval Esteban; Rodríguez Vasquez Flor Monserrat; Romero Valencia Jesús
Wos_54	Students' Understanding Of The Relation Between Tangent Plane And Directional Derivatives Of Functions Of Two Variables	Rafael Martínez-Planella; María Trigueros Gaisman; Daniel Mcgee
Wos_56	Task Design In APOS Theory	María Trigueros; Oktaç Asuman
Wos_58	The Basis Step In The Construction Of The Principle Of Mathematical Induction Based On APOS Theory	Isabel García-Martíneza; Marcela Parraguez
Wos_59	The Development Of A Linear Algebra Schema: Learning As Result Of The Use Of A Cognitive Theory And Models	María Trigueros
Wos_6	An Analysis Of Grade 11 Learners' Levels Of Understanding Of Functions In Terms Of APOS Theory	Tinoda Chimhande; Ana Naidoo, Gerrit Stols

Wos_60	The Learning And Teaching Of Linear Algebra: Observations And Generalizations	Guershon Harel
Wos_61	Thematization Of Derivative Schema In University Students: Nuances In Constructing Relations Between A Function's Successive Derivatives	Claudio Fuentealba; Gloria Sánchez-Matamoros; Edelmira Badillo; María Trigueros
Wos_67	Using Cycles Of Research In APOS: The Case Of Functions Of Two Variables	Rafael Martínez-Planell; María Trigueros
Wos_69	Zimbabwean In-Service Mathematics Teachers' Understanding Of Matrix Operations	Cathrine Kazunga; Sarah Bansilal
Wos_70	An Instructional Unit For Prospective Teachers' Conceptualization Of Geometric Transformations As Functions	Seher Avcu; Bülent Çetinkaya
Wos_72	Two-Variable Functions: Analysis From The Point Of View Of A Dialogue Between APOS Theory And ATD	María Trigueros; Rafael Martínez-Planell
Wos_76	Un Esquema De Transformación Lineal: Construcción De Objetos Abstractos A Partir De La Interiorización De Acciones Concretas	Doris Evila González Rojas; Solange Roa Fuentes
Wos_9	An Exploratory Study On The Understanding Of The Vector Subspace Concept	Lillias Mutambara; Sarah Bansilal
Scopus_42	Dialogue Between Theories Interpreted As Research Praxeologies: The Case Of APOS And The Atd	Marianna Bosch; Josep Gascón; María Trigueros
Scopus_15	The Analysis Of The Understanding Of The Three-Dimensional (Euclidian) Space And The Two-Variable Function Concept By University Students	Özgün Şefik, Şenol Dost

ANEXO D: LISTA DE ARTÍCULOS CIENTÍFICOS QUE SE ANALIZARON PARA LA ACTUALIZACIÓN DE LA REVISÓN SISTEMÁTICA ENTRE LOS AÑOS (2022 - 2023)

A continuación se detallan los 51 artículos científicos con la teoría APOE en la área de la matemática, que dieron como resultado de 321 artículos que se obtuvieron de una revisión literaria en los buscadores: *Google Scholar, SciELO, Scopus y Wos*, para la nueva revisión sistemática hasta el 2023 y poder cumplir una primera representación de la forma de enseñar las Transformaciones Lineales en la carrera de matemática de la ESPOCH, utilizando la teoría APOE.

BUSCADORES	**TÍTULO**	**AUTOR - CITA**
Google_002	Students' Ability To Solve Arithmetic Problems Based On APOS Theory In Cognitive Styles Differences.	Eka Siti Maullina, Nining Setyaningsih (Maullina y Nining. Setyaningsih, 2023).
Google_003	Validity And Practicality Of Student Activity Sheets (Lam) Of Real Number Sequences With The Aid Of GeoGebra Based On The APOS Model.	Hanifah Hanifah; Istikomar Istikomar (H. Hanifah y Istikomar, 2023).
Google_004	Analysis Of Problem-Solving Ability In Pythagorean Theorem Based On APOS Theory Reviewed From Learning Motivation.	Anisa Nur Rahmawati; Nining Setaningsih (Rahmawati y Nining Setyaningsih, 2022).
Google_005	Students As Prospective Teachers' Understanding Of Integral Based On The APOS Theory In Terms Of Gender Difference.	Langi Evy Lalan; Juniati Dwi; Abadi (Longe y Maharaj, 2022).
Google_006	The Effectiveness Of Teaching Derivatives In Vietnamese High Schools Using APOS Theory And Ace Learning Cycle.	Nguyen Thi Nga; Tang Minh Dung; Le Thai Bao Thien Trung; Tien-Trung Nguyen; Duong Huu Tong; Tran Quoc Van; Bui Phuong Uyen (Nguyen et al., 2023).
Google_008	On Students' Understanding Of Volumes Of Solids Of Revolution: An APOS Analysis.	Vahid Borji, Rafael Martínez Planell (Vahid Borji y Martínez, 2022).

Google_007	Investigating Students' Understanding Of Complex Number And Its Relation To Algebraic Group Using And APOS Theory.	Longe Idowu Oluwaseun; Aneshkumar Maharaj (Longe y Maharaj, 2022)
Google_010	Student Response To Geometry Student's Worksheet Based On APOS Model Assisted GeoGebra.	Hanifah, Febrila; Lilia Gina (Hanifah y Gina, 2022).
Google_011	Developing Creative Material In Stem Courses Using Integrated Engineering Design Based On APOS Theory.	Hua-Xu Zhong; Chin-Feng Lai; Jui-Hung Chang; Po-Sheng Chiu (Zhong et al., 2023).
Google_015	Students' Geometric Understanding Of Partial Derivatives And The Locally Linear Approach.	Vahid Borji; Rafael Martínez Planell; María Trigueros (V. Borji et al., 2023).
Google_027	Desarrollo De Un Marco Para Evaluar La Comprensión Del Estudiante En La Generalización De Patrones Figurativos.	Robabeh Afkhami; Nasim Asghary; Alireza Medghalchi (Afkhami et al., 2023a).
Google_029	Research On Two-Way Driven Teaching Mechanism Of Higher Mathematics And Discipline Competition For Economics And Management Majors Under Obe Philosophy.	Chenmi Ni (Ni, 2023).
Google_030	Application Of The M-APOS Learning Model (Modification-Action, Process, Object, Scheme) To Improve Mathematics Outcomes In Class Iv State Elementary School 011 Rambah Samo.	Rezi Intan; Rejeki; Rika Rosanti Panggabean; Indah Permata Sari; Sri Yunita Sari (Intan et al., 2022).
Google_031	Assessing The Effectiveness Of The APOS/Ace Method For Teaching Mathematics To Engineering Students.	Michael Gr. Voskoglou (Voskoglou, 2023).
Google_035	Students' Cognition Of The Induction Step In Proving Inequality Propositions.	Benjamin Tatira (Tatira, 2023a).

Google_037	Generalization Of Patterns Drawing Of High-Performance Students Based On Action, Process, Object, And Schema Theory.	Andi Mulawakkan Firdaus; Wasilatul Murtafiah; Marheny Lukitasari; Nurcholif Diah Sri Lestari; Tias Ernawati; Sri Adi Widodo (Firdaus et al., 2023).
Google_039	Problem-Solving Process Of Students With A Reflective Cognitive Style Based On The Action-Process-Object-Schema Theory.	Ratri Rahayu, Kartono; Dwijanto; Arief Agoestanto (Rahayu et al., 2023).
Google_052	Exploring Learners' Conceptual Obstacles In Quadratic Functions: A Case Of Vertex Concept.	Wisani Hlangwani; Zwethini Dhlamini; Kabelo Chuene (Hlangwani et al., 2023).
Google_067	APOS Theory And The Role Of The Genetic Decomposition.	María Trigueros (Trigueros, 2022).
Google_077	Concept Formation Processes Of Area And Its Formula With GeoGebra: Case Of Rectangle.	Agacdiken Fatma; Yilmaz Rezan (Ni, 2023).
Google_133	Students' Resolutions Of Some Paradoxes Of Infinity In The Lens Of The Grossone Methodology.	Layla Nasr (Nasr, 2023).
Google_138	From Process To Concept, Exemplified In The Functional Limit.	Báez Ureña Neel; Lalondriz Rincón Michelle Elizabeth; Blanco Sánchez Ramón (Neel et al., 2022).
Google_142	The Process Of System Of Linear Equations In Three Variables Solving Procedure's Construction Using Analogy: Individual Vs Paired.	Kurrotul Hasanah; Abdul Haris Rosyidi (Hasanah y Rosyid, 2023).
Google_176	Assessing Learners' Conceptual Understanding Of Introductory Group Theory Using The Ci2gt: Development And Analysis Of A Concept Inventory.	Joaquín Marc Veith; Philipp Bitzenbauer; Boris Girnat (Joaquín Veith et al., 2022).

Google_228	Twg2: Teaching And Learning Of Analysis And Calculus.	Erik Hanke; Rafael Martínez Planell (Hanke y Martínez Planell, 2022).
Google_232	Student Understanding Of Functions Of Two Variables: A Reproducibility Study.	Vahid Borji; Rafael Martínez Planell; María Trigueros (Vahid Borji et al., 2022).
Google_236	Mathematical Connections From A Networking Of Theories Between Extended Theory Of Mathematical Connections And Onto Semiotic Approach.	Camilo Andrés Rodríguez Nieto; Vicenç Font Moll; Vahid Borji; Flor Monserrat Rodríguez Vásquez (Rodríguez et al., 2022).
Google_244	Towards Describing Student Learning Of Abstract Algebra: Insights Into Learners' Cognitive Processes From An Acceptance Survey.	Joaquín Marc Veith; Philipp Bitzenbauer; Boris Girnat (Joaquin Veith et al., 2022b).
Wos_039	When Cardinals Determine The Power Set: Inner Models And Härtig Quantifier Logic.	Jouko Väänänen; Philip D. Welch (Väänänen y Welch, 2023).
Wos_040	Changes In Students' Mental Constructions Of Function Transformations Through The APOS Framework.	Melike Yiğit Koyunkaya; Burcak Boz Yaman (Koyunkaya y Boz Yaman, 2023).
Wos_041	Coordinated Topics As Transitional Enablers Towards Higher Level Conceptualisations Of The Range Concept.	Hamide Dogan (Dogan, 2023).
Wos_042	High School Student Understanding Of Exponential And Logarithmic Functions.	Tomás Díaz Berrios; Rafael Martínez Planell (Berrios y Martínez Planell, 2022).
Wos_045	University Students' Understanding Of Directional Derivative: An APOS Analysis.	Vahid Borji; Rafael Martínez Planell; María Trigueros (Vahid Borji et al., 2023b).

Wos_043	Mathematics Education Research On Algebra Over The Last Two Decades: Quo Vadis?	Joaquín Marc Veith; Meeri-Liisa Beste; Marco Kindervater; Michel Krause; Michael Straulino; Franziska Greinert; Philipp Bitzenbauer (Joaquin Veith et al., 2022a).
Wos_044	Teachers' Instructional Goals And Their Alignment To The School Mathematics Curriculum: A Case Study Of The Calculus Instructional Material From A Singapore Pre University Institution.	Tin Lam Toh (Toh, 2022).
Scopus_002	Developing A Framework For Evaluating Student's Understanding Of Figural Pattern Generalization.	Robabeh Afkhami; Nasim Asghary; Alireza Medghalchi (Afkhami et al., 2023b).
Scopus_004	Exploring The Complexities Of Swapping The Order Of Integration In Double Integrals.	Thabiso Khemane; Pragashni Padayachee; Corrinne Shaw (Khemane et al., 2023)
Scopus_005	Undergraduate Students' Conceptualization Of Elementary Row Operations In Solving Systems Of Linear Equations.	Benjamin Tatira (Tatira, 2023b).
Scopus_006	Students' Geometric Understanding Of Partial Derivatives And The Locally Linear Approach.	Borji Vahid; Martínez Planell Rafael; Trigueros María (Vahid Borji et al., 2023a)
Scopus_008	Understanding Logarithm In A Mathematical Card Game Environment.	Klára Kelecsényi; Éva Osztényiné Krauczi; Attila Végh (Kelecsényi et al., 2023).
Scopus_009	What's New With APOS Theory? A Look Into Levels And Totality.	Asuman Oktaç (Oktaç, 2022).
Scopus_010	Infinite Limit Of A Function At Infinity And Its Phenomenology.	Mónica Arnal Palacián (Arnal Palacián, 2022).

Scopus_011	Integral (Antiderivative) Learning With APOS Perspective: A Case Study.	Lina Nurhayati; Didi Suryadi; Dadan Dasari; Tatang Herman (Nurhayati et al., 2023).
Scopus_013	Examining Opportunities To Learn Limit In Widely Used Calculus Textbooks.	Hong Dae S (Hong, 2023).
Scopus_014	Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model.	Betancur Alexander; Fuentes Solange Roa; González Marcela Parraguez (Betancur et al., 2022).
Scopus_015	Students' Understanding And Development Of The Definition Of Circle In Taxicab And Euclidean Geometries: An APOS Perspective With Schema Interaction.	Aubrey Kemp; Draga Vidakovic (Kemp y Vidakovic, 2023).
Scielo_001	Contribuyendo a la transición de la concepción dinámica a la concepción métrica del límite de una función de una variable real en estudiantes de ingeniería.	José David Morante Rodríguez; Lidia Aurora Hernández Rebollar; Honoria Ruiz Estrada (Morante Rodríguez et al., 2022).
Scielo_002	Análisis De Errores En Tareas Sobre El Concepto De Derivada: Una Mirada Desde La Teoría Apoe (Acción, Proceso, Objeto, Y Esquema).	Claudio E. Fuentealba; Andrea D. Cárcamo; Edelmira R. Badillo; Gloria M. Sánchez-Matamoros (Fuentealba et al., 2023).
Scielo_003	Un Estudio De Clases Virtual Para Promover La Construcción Del Infinito Actual En Estudiantes De Educación Media Y Primer Año De Universidad Desde La Perspectiva De La Teoría Apoe.	Tamara Lasnibat Godoy; Mónica Flores Sepúlveda; Eduardo Puraivan Huenumán (Lasnibat Godoy et al., 2022).
Scielo_004	El Papel De Los Conceptos Geométricos Como Base Para El Aprendizaje Del Método Simplex.	Simg René; Trigueros María (Simg y Trigueros, 2022).

Scielo_005	Estructuras Y Mecanismos Mentales Que Desde Una Perspectiva Geométrica Modelan Y Articulan El Aprendizaje De Valor Y Vector Propio En $\mathbb{R}^2$.	Marcela Parraguez González; Solange Roa-Fuentes; Raúl Jiménez Alarcón; Alexander Betancur Sánchez (Parraguez et al., 2022).

ANEXO E: PRUEBA DE DIAGNÓSTICO (PRE TEST), PRUEBA DE CONOCIMIENTOS FINAL (POST TEST), TAREA ASÍNCRONA

✓**Preguntas para la prueba de diagnóstico (Pre Test).**

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Facultad de Ciencias

Carrera de matemática

Álgebra Lineal II

Resolver el siguiente listado de preguntas con esferográfico.

Ningún documento está autorizado.

Tiempo estimado: 15 min.

1. Dada una matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas?

   a) Los vectores columna de la matriz forman una base para el espacio columna de la matriz.

   b) Los vectores fila de la matriz forman una base para el espacio fila de la matriz.

   c) La base de una matriz es el conjunto de vectores propios de la matriz.

   d) Todas las anteriores.

2. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre las transformaciones lineales es correcta?

   a) Una transformación lineal siempre cambia la dirección de los vectores.

   b) Una transformación lineal puede representarse mediante una matriz.

   c) Los vectores propios de una transformación lineal siempre tienen una longitud de 1.

   d) Todas las transformaciones lineales reflejan los vectores a través del origen.

3. ¿Cuál es el resultado del siguiente sistema de ecuaciones 3x3?

$$\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 11 \\ x + y - 2z = -2 \\ -x - 2y + 5z = 5 \end{cases}$$

4. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones sobre los espacios vectoriales es verdadera?

   a) La suma de dos subespacios vectoriales siempre es un subespacio vectorial.

   b) Todo subespacio de un espacio vectorial finito-dimensional es finito-dimensional.

   c) Todas las anteriores.

   d) La intersección de dos subespacios vectoriales siempre es un subespacio vectorial.

5. Si T es una transformación lineal, entonces **T(x + y) = Tx + Ty**, fundamente su respuesta.

✓**Preguntas para la prueba final (Post Test).**

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Facultad de Ciencias

Carrera de matemática

Álgebra Lineal II

Nombre: **Curso:**

Resolver el siguiente listado de preguntas con esferográfico. Ningún documento está autorizado. Tiempo estimado: 1 h.

1. Identificar la base del espacio vectorial y representar los vectores:

   Sea el endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y definido por:

$$T(x,y) = (2a+3b, 3a-2b).$$

2. Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ representada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcula los valores propios de A.

3. Para cada valor propio calculado en la pregunta anterior, encuentra el vector propio correspondiente.

4. Considera la transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada por la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Si $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de B. ¿Cuál es el valor propio correspondiente?

5. Dada una matriz $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, escribir la ecuación característica de C en términos de a, b, c, y d.

   ¿Cómo usarías esta ecuación para encontrar los valores propios de C?

✓ **Preguntas para la tarea asíncrona.**

Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Facultad de Ciencias

Carrera de matemática

Álgebra Lineal II

Instrucciones:

- Resolver, con esferográfico, el siguiente listado de problemas.
- Redactar adecuadamente la resolución de cada problema, además, fundamentar sus respuestas.

TAREA ASÍNCRONA

GENERAL

1. Dada una transformación lineal $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ representada por la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, calcula los valores propios de A y explica cómo se relacionan con la transformación lineal T.

2. Para cada valor propio calculado en la pregunta anterior, encuentra el vector propio correspondiente. Explica cómo estos vectores propios se relacionan con la transformación lineal T.

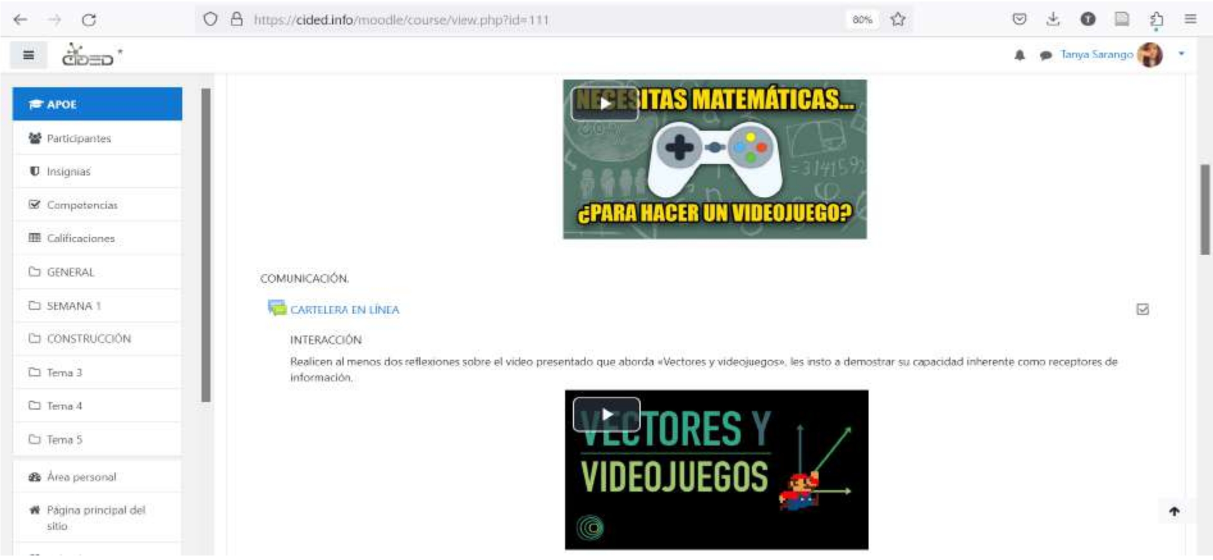
3. Considera una transformación lineal $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ y explica cómo podrías representar esta transformación lineal con una matriz.

ANEXO F: CAPTURAS DEL MOODLE (CIDED)

✓<u>**Moodle: Curso donde se encuentra la clase.**</u>

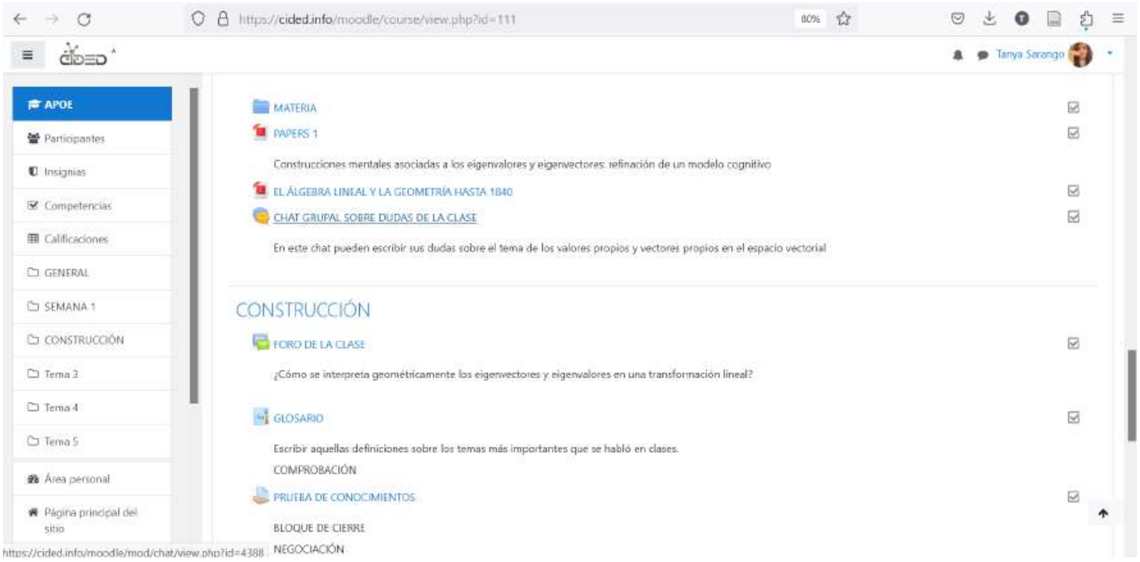
✓<u>**Moodle: Bloque *PACIE* 0.**</u>

✓**Moodle: Bloque *PACIE 1*.**

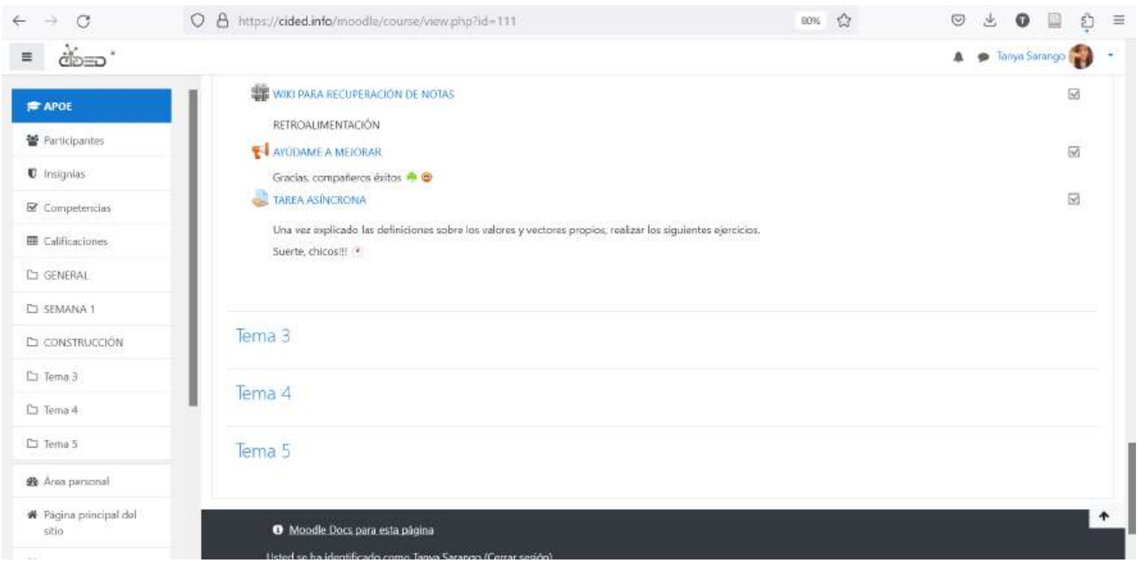


✓**Moodle: Bloque académico**

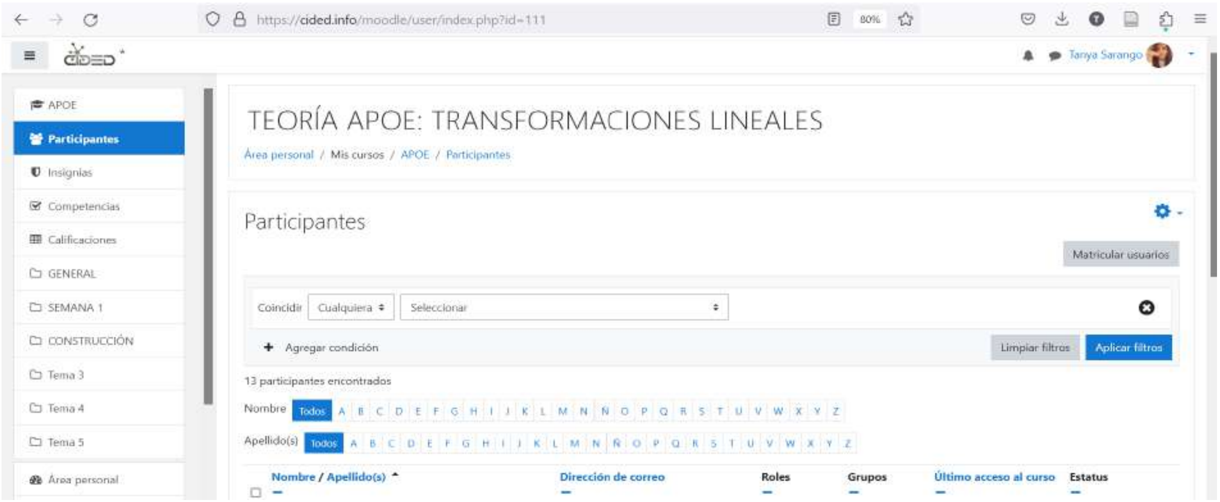
✓Moodle: Bloque Académico 1.



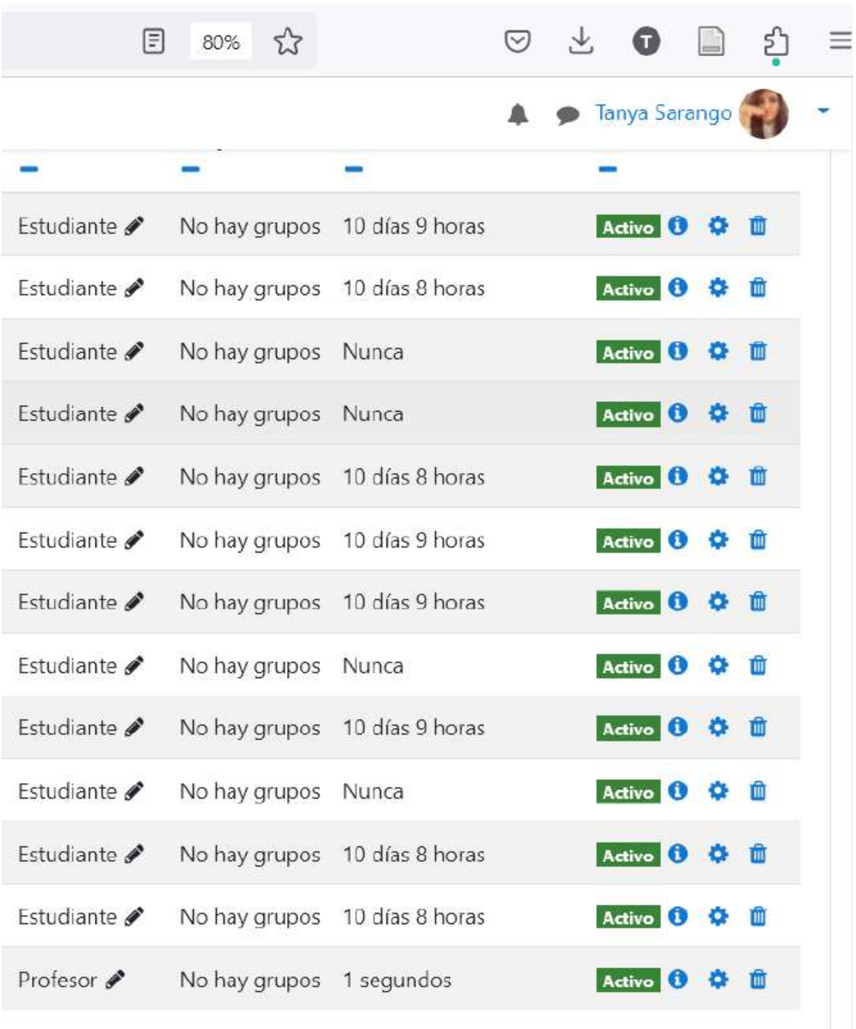
✓Moodle: Bloque de Cierre.



✓**Estudiantes matriculados con su nombre y apellido.**



✓**Estudiantes matriculados y se encuentran activos.**



ANEXO G: SÍLABO ÁLGEBRA LINEAL I, PERIODO OCTUBRE 2017 - MARZO 2018

✓**Sílabo Álgebra Lineal I.**

Se observa el sílabo de la materia de Álgebra Lineal I, que se imparte en el $1^{\underline{er}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH PERIODO, octubre 2017 marzo 2018.

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
VICERRECTORADO ACADÉMICO
DIRECCIÓN DE DESARROLLO ACADÉMICO

SÍLABO

1. Datos generales y específicos de la asignatura

FACULTAD	CIENCIAS	
ESCUELA	FÍSICA Y MATEMÁTICA	
CARRERA	MATEMÁTICA	
SEDE	MATRIZ ESPOCH	
MODALIDAD	PRESENCIAL	
ASIGNATURA	ÁLGEBRA LINEAL I	
NIVEL	PRIMERO	
PERÍODO ACADÉMICO	OCTUBRE 2017 – MARZO 2018	
CAMPO DE FORMACIÓN	**CÓDIGO**	**TOTAL HORAS**
FUNDAMENTOS TEÓRICOS	FCM1013	160
NÚMERO DE HORAS SEMANAL	**PRERREQUISITOS**	**CORREQUISITOS**
SEIS (6)	SNNA	NINGUNO

2. Estructura y Desarrollo de la asignatura

Unidad N° 1 Título de la Unidad: Matrices	**OBJETIVO DE LA UNIDAD:** Comprender y manejar el álgebra de matrices.			
TEMAS Y SUBTEMAS	**ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS**	**RECURSOS**	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**	
			En el Aula	**Autónomas**
TEMA Matrices. **SUBTEMAS** • Introducción. • Definiciones y terminología.	• **Clases teóricas:** Con exposición por parte del docente y la participación activa de los estudiantes. • **Práctica:** Se irán resolviendo ejercicios y casos según el tema teórico tratado.	• Los medios de enseñanza y aprendizaje. • Libros seleccionados.	• Exposición por parte del docente y análisis con los estudiantes de los conceptos y temas expuestos. • Resolución analítica de problemas y/o ejercicios por parte del docente.	• Lectura de textos seleccionados. • Resolución analítica de los ejercicios asignados por el docente. • Interpretar las soluciones obtenidas.

• Matrices especiales. • Adición y multiplicación por escalar. Propiedades. • Multiplicación de matrices. Propiedades de la multiplicación de matrices. • Potencia de una matriz. • Transpuesta de una matriz. • Inversa de una matriz. • Propiedades de las matrices invertibles.	• **Asesoría.** Se asesora la aplicación correcta de los conocimientos y procedimientos en forma personal a los estudiantes		• Resolución de ejercicios y problemas por parte de los estudiantes con asistencia del docente. • Análisis de los ejercicios resueltos.	• Plantear problemas propios y buscar alternativas de solución
LOGROS DE APRENDIZAJE: • Efectuar operaciones con matrices. • Comprender y aplicar las propiedades de las matrices especiales en los cálculos que las involucran. • Calcular la inversa de una matriz.				

Unidad N° 2 Título de la Unidad: Sistemas de ecuaciones lineales.	**OBJETIVO DE LA UNIDAD:** Analizar y resolver un sistema de ecuaciones lineales.			
TEMAS Y SUBTEMAS	**ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS**	**RECURSOS**	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**	
			En el Aula	**Autónomas**
TEMA Sistemas de ecuaciones lineales. **SUBTEMAS** • Introducción.	• **Clases teóricas:** Con exposición por parte del docente y la participación activa de los estudiantes. • **Práctica:** Se irán resolviendo ejercicios y casos según el tema teórico tratado.	• Los medios de enseña.ıza y aprendizaje. • Libros seleccionados.	• Exposición por parte del docente y análisis con los estudiantes de los conceptos y temas expuestos. • Resolución analítica de problemas y/o ejercicios por parte del docente.	• Lectura de textos seleccionados. • Resolución analítica de los ejercicios asignados por el docente. • Interpretar las soluciones obtenidas.

• Resolución de un sistema de ecuaciones lineales. • Sistemas lineales homogéneos. • Sistemas lineales no homogéneos. • Matrices y forma escalonada. • Operaciones elementales sobre las filas de una matriz. • Eliminación Gaussiana. Otros métodos para resolver sistemas de ecuaciones lineales.	• **Asesoría.** Se asesora la aplicación correcta de los conocimientos y procedimientos en forma personal a los estudiantes		• Resolución de ejercicios y problemas por parte de los estudiantes con asistencia del docente. • Análisis de los ejercicios resueltos.	• Plantear problemas propios y buscar alternativas de solución
LOGROS DE APRENDIZAJE: • Resolver un sistema de ecuaciones lineales, ya sea homogéneo o no homogéneo, a través del método de eliminación gaussiana. • Entender las propiedades que caracterizan a las matrices elementales, así como su relación con las operaciones elementales. • Determinar cuándo una n-pla de números reales es solución de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.				

Unidad N° 3 Título de la Unidad: Espacios Vectoriales	**OBJETIVO DE LA UNIDAD:** Comprender la estructura de espacio vectorial, base y dimensión.			
TEMAS Y SUBTEMAS	**ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS**	**RECURSOS**	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**	
			En el Aula	**Autónomas**
TEMA Espacios Vectoriales. **SUBTEMAS** • Introducción. • Definiciones y propiedades básicas. • Subespacios vectoriales.	• **Clases teóricas:** Con exposición por parte del docente y la participación activa de los estudiantes. • **Práctica:** Se irán resolviendo ejercicios y casos según el tema teórico tratado. • **Asesoría.** Se asesora la aplicación correcta	• Los medios de enseñanza y aprendizaje. • Libros seleccionados.	• Exposición por parte del docente y análisis con los estudiantes de los conceptos y temas expuestos. • Resolución analítica de problemas y/o ejercicios por parte del docente. • Resolución de ejercicios y	• Lectura de textos seleccionados. • Resolución analítica de los ejercicios asignados por el docente. • Interpretar las soluciones obtenidas. • Plantear problemas propios y buscar

• Combinación lineal y espacio generado. • Independencia lineal. • Bases y dimensión. • Espacios fundamentales de una matriz. • Rango de una matriz. Coordenadas y cambio de base.	de los conocimientos y procedimientos en forma personal a los estudiantes		problemas por parte de los estudiantes con asistencia del docente. • Análisis de los ejercicios resueltos.	alternativas de solución

LOGROS DE APRENDIZAJE:

- Comprender los aspectos centrales teóricos de la estructura de un espacio vectorial.
- Decidir si un conjunto dado es o no un espacio vectorial.
- Determinar la dependencia lineal de un conjunto de vectores.
- Hallar una base y la dimensión de un espacio vectorial.
- Calcular el rango de una matriz.
- Calcular la matriz de transición entre dos bases de un espacio vectorial.

Unidad N° 4 Título de la Unidad: Transformaciones lineales	**OBJETIVO DE LA UNIDAD:** Conocer y aplicar las propiedades de las transformaciones lineales.			
TEMAS Y SUBTEMAS	**ESTRATEGIAS METODOLÓGICAS**	**RECURSOS**	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**	
			En el Aula	**Autónomas**
TEMA. Transformaciones Lineales. **SUBTEMAS** • Introducción. • Definiciones, ejemplos y propiedades.	• **Clases teóricas:** Con exposición por parte del docente y la participación activa de los estudiantes. • **Práctica:** Se irán resolviendo ejercicios y casos según el tema teórico tratado. • **Asesoría.** Se asesora la aplicación correcta	• Los medios de enseñanza y aprendizaje. • Libros seleccionados.	• Exposición por parte del docente y análisis con los estudiantes de los conceptos y temas expuestos. • Resolución analítica de problemas y/o ejercicios por parte del docente. • Resolución de ejercicios y	• Lectura de textos seleccionados. • Resolución analítica de los ejercicios asignados por el docente. • Interpretar las soluciones obtenidas. • Plantear problemas propios y buscar

• Núcleo e imagen de una transformación lineal. • Representación matricial. • El espacio vectorial de las transformaciones lineales. • Isomorfismos.	de los conocimientos y procedimientos en forma personal a los estudiantes		problemas por parte de los estudiantes con asistencia del docente. • Análisis de los ejercicios resueltos.	alternativas de solución

LOGROS DE APRENDIZAJE:

- Decidir si una transformación dada entre espacios vectoriales es o no lineal. En caso de serlo, hallar su núcleo, imagen y rango.
- Conocer y aplicar correctamente el teorema de las dimensiones.
- Determinar si una transformación es invertible.
- Encontrar la matriz de una transformación lineal relativa a bases arbitrarias.

ANEXO H: SÍLABO ÁLGEBRA LINEAL I Y SÍLABO ÁLGEBRA LINEAL II, PERIODO OCTUBRE 2023 - MARZO 2024

✓ **Sílabo Álgebra Lineal I.**

Se observa el sílabo de la materia de Álgebra Lineal I, que se imparte en el 3^{cer} semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, PERIODO octubre 2023 marzo 2024.

Unidad No.	4	**OBJETIVO DE LA UNIDAD:**	Demostrar propiedades y teoremas referentes a las transformaciones lineales, representándolas en forma matricial en diferentes bases y reconociendo subespacios asociados a ellas con el fin de desarrollar la abstracción matemática.	
Título de la Unidad:	Transformaciones Lineales			
TEMAS Y SUBTEMAS	**ESTRATEGÍAS METODOLOGÍAS**	**RECURSOS**	**ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE**	
			En el Aula	**Autónomas**
1. Transformaciones lineales • Definición • Propiedades de transformaciones lineales • Composición de transformaciones lineales • Inversa de una transformación lineal 2. Núcleo y rango de una transformación lineal • Definiciones • Dimensión del núcleo y el rango de una transformación lineal • Teorema del rango de una transformación lineal 3. Isomorfismos de espacios vectoriales • Transformaciones lineales inyectivas • Transformaciones lineales sobreyectivas • Transformación lineal invertible • Isomorfismos • Espacios vectoriales isomórficos 4. Matriz representante de una transformación lineal • Conceptualización • Propiedades 5. Matriz de cambio de base • Conceptualización • Propiedades		• Computadora • Sílabo • Pantalla digital • Proyector	• Libro • Diagramas • Lluvia de ideas • Ejercicios	• Trabajos • Investigación
RESULTADOS DE APRENDIZAJE:	Demuestra propiedades y teoremas referentes a las transformaciones lineales, sus espacios asociados y su rango empleando la matriz representante de una transformación lineal con precisión. Argumenta de manera crítica la validez de razonamientos, relacionando las definiciones, propiedades y teoremas con la proposición a demostrar.			

✓ **Sílabo Álgebra Lineal II.**

Se observa el sílabo de la materia de Álgebra Lineal II, que se imparte en el $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, periodo octubre 2023 marzo 2024.

Unidad No.	2	OBJETIVO DE LA UNIDAD:	Aplicar las definiciones de autovalores y autovectores para la diagonalización de matrices, mediante su análisis y cálculo correspondiente.	
Título de la Unidad:	Diagonalización: Autovalores y autovectores			
TEMAS Y SUBTEMAS	ESTRATEGÍAS METODOLOGÍAS	RECURSOS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	
			En el Aula	Autónomas
1. Matrices y Operadores diagonizables • Introducción: Enfoque matricial y por operadores lineales, equivalencia • Definiciones • Polinomio de Matrices • Polinomio característico, Teorema de Cayley–Hamilton 2. Diagonalización, autovalores y autovectores • Autovalores y autovectores: Definiciones, propiedades y resultados • Cálculo de autovalores y autovectores • Diagonalización de matrices y de operadores lineales: Resultados 3. Diagonalización de matrices reales simétricas y formas cuadráticas • Resultados y aplicaciones • Polinomio minimal • Polinomios minimal y característico de matrices en bloques	• En el desarrollo de los temas de la asignatura se aplicarán procedimientos pedagógicos y didácticos, tales como: Clases magistrales con inducción a una participación activa de los estudiantes. Talleres grupales, tareas individuales y cuestionarios en aulas virtuales, para reforzar los temas tratados. • Dada la objetividad propia del curso son requeridos varios métodos de enseñanza, entre los cuales destacan: el deductivo, inductivo, comparativo, simbólico y el intuitivo.	• Computadora • Sílabo • Internet • Aula Virtual • Bibliografía básica y complementaria	• Libro • Lluvia de ideas • Resolución analítica de problemas y/o ejercicios.	• Trabajos • Investigación • Tarea
RESULTADOS DE APRENDIZAJE:	Aplica las definiciones de autovalores y autovectores en la diagonalización de matrices, para su análisis y cálculo correspondiente con exactitud y precisión.			

ANEXO I: PLANIFICACIÓN PERIODO OCTUBRE 2023 - MARZO 2024

✓**Planificación parte 1.**

Nombre de la institución:	**ESCUELA SUPERIOR POLÍTECNICA DE CHIMBORAZO**					
Nombre del Docente: **Celular:**	María José Mendoza Salazar 09 718 1436		**Fecha:**	7 enero 2024		
Área:	Matemática	**Grado/Curso:**	Cuarto Semestre	**Año lectivo:**	Octubre 2023 – Marzo 2024	
Asignatura:	**Álgebra Lineal I**		**Tiempo:**	2h		
Unidad didáctica:	Diagonalización: Valores y vectores propios.					
Objetivo de la unidad:	Aplicar las definiciones de valores y vectores propios de las matrices asociadas a las transformaciones lineales, para su análisis y cálculo correspondiente.					
¿Qué van a aprender? **DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO**	¿Cómo van a aprender? **ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE** (Estrategias Metodológicas)		¿Con que se va a aprender? **RECURSOS**	¿Qué y cómo evaluar? **EVALUACIÓN**		
				Indicadores de logro	**Técnicas e instrumentos de Evaluación**	
Indagar y explorar: ✍ Definiciones de valores propios, vectores propios y sus propiedades. ✍ Definición de matriz asociada en una transformación lineal. ✍ Polinomio característico. ✍ Cálculo de valores y vectores propios. ✍ Interpretación de resultados.	**ACTIVIDADES INICIALES** **1.1Motivación** ✍ Observar el video motivacional sobre las matemáticas. https://www.youtube.com/watch?v=JaM0kjtG-mQ **1.2. Prerrequisitos** ✍ Álgebra Lineal: operaciones con matrices, cálculo del determinante, matriz identidad y la inversa de una matriz. ✍ Sistema de ecuaciones lineales: Saber resolver sistemas de ecuaciones lineales. ✍ Transformaciones Lineales: Saber que es una transformación y como se representa con matrices ✍ Polinomios: Saber cómo resolver ecuaciones polinómicas **1.3. Conocimientos previos**		✍ Texto ✍ Computador ✍ Celular ✍ Pantalla digital ✍ PDF sobre el tema ✍ Problemas e ejercicios ✍ Discusión en clase	✍ Determinar la base del espacio vectorial y representar los vectores. ✍ Encontrar la matriz asociada. ✍ Hallar los valores propios de las matrices. ✍ Desarrollar el polinomio característico, encontrar los vectores propios.	**Técnica:** Prueba **Instrumento:** Cuestionario Tarea asíncrona	

✓ **Planificación parte 2.**

	Responder las siguientes preguntas: ✍ ¿Qué entiende por valores y vectores propios en el contexto de las transformaciones lineales? ✍ ¿Cuál es la relación entre los valores y vectores propios? ✍ ¿Qué es la matriz asociada a una transformación lineal? **1.4. Presentación del tema y objetivo de la clase**. ✍ Valores propios – vectores propios ✍ Dar a conocer de qué manera los conceptos de valores propios – vectores propios, parten a través de las Transformaciones Lineales. **ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE O DESARROLLO** **2.1. Etapa concreta** ✍ Reconocer, que un endomorfismo es un monomorfismo (o una transformación) de un objeto matemático así mismo. ✍ Identificar, que cualquier transformación lineal de un espacio vectorial a sí mismo es un endomorfismo. ✍ Determinar la base del espacio vectorial y representar los vectores ✍ Desarrollado el polinomio característico y darle la solución se identificar sus raíces, para proceder a calcular el vector propio de cada raíz y resolver el sistema siguiente $(A - I \curlywedge)x = 0$ ✍ Sea el endomorfismo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y definido por $T(a,b) = (4a + 3b), (3a - 4b)$, hallar la matriz asociada a $T\ con$ respecto a la base canónica $\mathbb{R}^2$ y determinar los valores y			

✓**Planificación parte 3.**

	vectores propios. **3. ACTIVIDADES FINALES O DE CIERRE** **3.1. Etapa de consolidación** ✍ Ingresar al siguiente enlace: ✍ https://cided.info/moodle/course/modedit.php?update=4394&return=0&sr=0, donde habrá una tarea asíncrona. **4. BIBLIOGRAFIAS:** ○ Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal (7ma. ed.)*. México: McGraw-Hill ○ Núñez, L. A. (2019). Álgebra lineal . Universidad Abierta para Adultos (UAPA).			

ANEXO J: AUTORIAZACIÓN DE LA DIFUSIÓN DE IMÁGENES Y VIDEOS POR PARTE DE LA DOCENTE, IMPARTIDAS EN EL DESARROLLO DE LA CLASE MAGISTRAL A 4$^{\underline{to}}$ SEMESTRE DE LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH

Riobamba, 06 de junio del 2024

Autorización de imágenes y videos

Yo, Ing. Mendoza Salazar María José, en mi calidad de Docente de la ESPOCH, por medio de la presente autorizo a la Srta. Sarango Jumbo Tanya Johana, estudiante de la carrera de Matemática de la ESPOCH, a utilizar las imágenes para fines académicos y específicamente para ser incluidas en los anexos de su Trabajo de Integración Curricular, con el tema "LA TEORÍA APOE Y EL ÁLGEBRA LINEALEN LA CARRERA DE MATEMÁTICA DE LA ESPOCH: TRANSFORMACIONES LINEALES".

Esta autorización se concede bajo el entendimiento de que el uso de las imágenes y videos serán exclusivamente para los fines mencionados anteriormente, sin implicar violación de derechos de autor o uso comercial de las mismas.

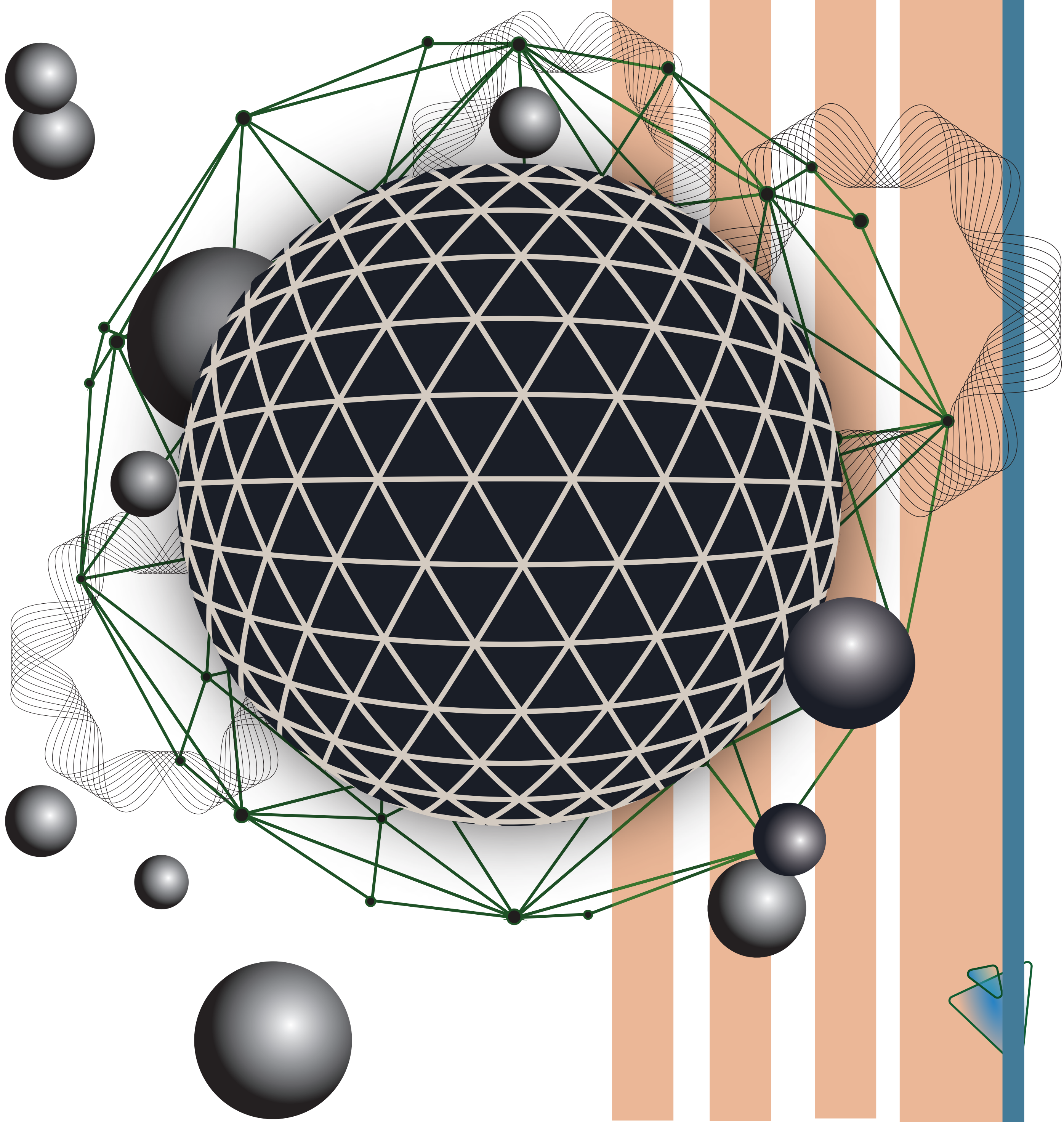
Ing. Mendoza Salazar María José. MSc.
Docente de la ESPOCH
C.I.: 0604444760

ANEXO K: GUÍA PARA EL DESARROLLO DE LA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA CON LA TEORÍA APOE EN ÁLGEBRA LINEAL: VALORES Y VECTORES PROPIOS DE LAS MATRICES ASOCIADAS A LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

TEORÍA APOE

Transformaciones Lineales

Eigenvalor y Eigenvector



Tanya Sarango J.

Índice de contenido

Índice de figuras

Índice de cuadros

1

Prólogo

En este viaje de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, la teoría APOE llega para describir la manera como se construye el conocimiento matemático, a través de la descomposición genética. Imaginemos un lienzo matemático donde los vectores propios son los pinceles y los valores propios son los colores.

Cada vector propio señala una dirección, mientras que los valores propios nos cuentan cuánto se estira o comprime el espacio bajo la influencia de una matriz. Los vectores propios, como guardianes de la dirección, nos guían hacia los puntos cardinales del conocimiento. Son los compañeros inseparables de los valores propios, y juntos revelan los secretos de las transformaciones.

Si te preguntas cómo los objetos matemáticos se transforman en el espacio, los vectores propios y valores propios son la respuesta. Así, en este viaje, descompondremos la teoría APOE en sus elementos fundamentales. Exploraremos cómo los procesos de acción y esquema se entrelazan en la construcción de estructuras cognitivas.

2

Introducción

La naturaleza abstracta del Álgebra Lineal y la necesidad de abstracción en la formalización de sus conceptos y lenguaje, han planteado desafíos significativos para los estudiantes en la comprensión de conceptos como las Transformaciones Lineales. Por lo tanto, es imperativo buscar enfoques específicos que faciliten a los estudiantes la comprensión de los conceptos a través de experiencias enriquecedoras, sin eludir el nivel de abstracción necesario para profundizar en ellos.

La motivación para implementar la teoría APOE surge de su enfoque central: la Descomposición Genética. Este modelo cognitivo se aplica para facilitar la comprensión de conceptos abstractos de la matemática como: Los Eigenvalores y Eigenvectores de las matrices asociadas a las Transformaciones Lineales. La teoría APOE, por lo tanto, proporciona una base sólida para explorar y entender estos conceptos matemáticos esenciales. En el ámbito del Álgebra Lineal, los Eigenvalores - Eigenvectores son conceptos fundamentales que tienen aplicaciones en diversas disciplinas, desde la física hasta la ingeniería y las ciencias de la computación.

La Descomposición Genética proporciona un marco para desglosar estos conceptos complejos en componentes más manejables, facilitando así su comprensión. A través de este proceso, se espera que los estudiantes puedan construir su propio conocimiento matemático, permitiéndoles entender y aplicar estos conceptos en contextos prácticos.

En este trabajo, se adoptará un lenguaje formal para el desarrollo y la comprensión de los "Eigenvalores - Eigenvectores de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales", por medio de una descomposición genética. A través, de este enfoque, se espera que los lectores adquieran una comprensión más profunda de estos conceptos y su aplicación en diversos campos.

Módulo 1

Espacios Vectoriales

Objetivo

Una vez que los estudiantes concluyan este módulo, habrán recordado los conceptos fundamentales que forman la base de la teoría de espacios y subespacios vectoriales. Estos conceptos, que son un componente esencial del Álgebra Lineal y serán indispensables para los estudios avanzados de las transformaciones lineales.

Este módulo brindará a los lectores una comprensión esencial del tema, presentando demostraciones, definiciones, teoremas y ejemplos. Esta sólida base, es crucial para un estudio en profundidad de este campo y entender las Transformaciones Lineales, donde se examinarán como trabajan con los valores y vectores propios de las matrices asociadas a dichas transformaciones. Un tema que será el foco de la investigación y que se investigará más detalladamente en el módulo 2, para la adaptación de la descomposición genética que se va a impartir al $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH. A continuación los temas que serán necesarios:

1.1 Vectores y Espacios Vectoriales

1.2 Subespacios vectoriales

1.3 Transformaciones lineales

1.4 Dependencia e Independencia Lineal

1.5 Bases y Cambio de Bases

2.1 Espacios Vectoriales

Definición 2.1 (Espacio Vectorial)

Un espacio vectorial V, sobre un campo W y denotado como $(V, +, W, .)$ es una estructura matemática que consta de un conjunto no vacío **V** de elementos u objetos llamados vectores, en el que están definidas dos operaciones: la suma de vectores y la multiplicación por un escalar, las cuales están sujetas a los siguientes axiomas:

- **Suma de vectores**

1. Para todo $u, v \in V : u + v \in V$ (Cerradura bajo la suma)
2. Para todo $u, v \in V : u + v = v + u$ (Conmutatividad)
3. Para todo $u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$ (Asociatividad)
4. Existe el vector e en V tal que para todo $u \in V : u + e = e + u = u$ (Existencia de elemento neutro)
5. Para todo $u \in V$ existe $u' \in V$ tal que $u + u' = u' + u = e$ (Existencia de elemento inverso)

- **Multiplicación de un vector por un escalar**

6. Si $u \in V$ y $\alpha \in K$ (campo de escalares) : $\alpha v \in V$ (Cerradura bajo la multiplicación por un escalar)
7. Para todo $u, v \in V$ y $\alpha \in K$ un escalar: $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
8. Para todo $u \in V$ y para todo par de escalares α y β en $K : (\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$
9. Para todo $u \in V$ y para todo par de escalares α y β en $K : \alpha(\beta u) = (\alpha\beta)u$
10. Para cada $u \in V$ se tiene que $1 \cdot u = u$ (1 es el elemento neutro en K)

Al sumergirnos en un espacio vectorial, es de suma importancia tener una comprensión y articulación nítida de sus pilares fundamentales: las dos operaciones inherentes (la adición de vectores y la multiplicación por escalares). En determinadas circunstancias, los elementos del conjunto V pueden divergir de los vectores tradicionales que se manejan en física. Un vector se caracteriza como un elemento de un espacio vectorial. Por ende, si los elementos de un espacio vectorial son polinomios, entonces los “vectores” en este marco son, en realidad, polinomios

A continuación, se enuncian un conjunto de teoremas y proposiciones que satisface todo espacio vectorial.

Teorema 2.1 Unicidad del elemento neutro

El vector nulo es único en V

Demostración. Sabemos que en V existe e tal que para todo $u : u + e = e + u = u$. Supongamos entonces que existe otro elemento neutro y denotémosle como e_2. Entonces

$$u + e_2 = e_2 + u = u$$

luego,

$$u + e\& = u + e_2$$

si sumamos por el elemento opuesto u' a esta expresión vemos que:

$$\begin{aligned} u' + u + e\& &= u' + u + e_2 \\ e + e\& &= e_2 + e_2 \\ e\& &= e_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto el vector nulo es único en V □

Teorema 2.2 Unicidad del elemento opuesto

Para todo $u \in V$ el vector opuesto u' es único en V tal que

$$u + u' = u' + u = e$$

Demostración.

Supongamos que el elemento u tiene dos inversos u' y u''. Es decir

$$u' + u = e \quad \text{y} \quad u'' + u = e$$

luego,

$$u' + u = u'' + u$$

si sumamos por el elemento opuesto u' a esta expresión tenemos lo siguiente

$$u' + (u + u') = u'' + (u + u')$$
$$u' + e = u'' + e$$
$$u' = u''$$

$\square$

Proposición. Muestra alguna de las consecuencias que se deducen a partir de los teoremas de la unicidad del vector (nulo y opuesto) y de los axiomas que definen un espacio vectorial.
Sea V un espacio vectorial, entonces para todo vector $u \in V$ y para todo escalar α se cumple las siguientes propiedades:

1. $\alpha 0 = 0$
2. $0u = 0$
3. Si $\alpha u = 0$ entonces $\alpha = 0$ o $u = 0$ o ambos son iguales a cero.
4. $(-1)u = -u$

Ejemplos de espacios vectoriales

Ejemplo 1.
El conjunto de polinomios $\mathbb{P}_n$ de grado menor o igual a n con coeficientes reales es un espacio vectorial.

Demostración.
Mostremos que la estructura $(\mathbb{P}_n, +, \cdot, \alpha)$ es un espacio vectorial. Los polinomios del conjunto $\mathbb{P}_n$ son de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

donde la variable x y cada coeficiente a_i son números reales. Recordemos que el grado de un polinomio $P(x)$ es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x

con coeficiente distinto de cero.

Sean $P(x), Q(x), R(x) \in \mathbb{P}_n$ y sea α, β escalares, donde los polinomios son de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + \cdots +_n x^n$$

$$Q(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n$$

$$R(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$$

con a_i, b_i y c_i números reales $(i = 1, 2, \ldots, n)$, entonces:

1. La cerradura bajo la suma de vectores, en este caso de polinomios.

   Sean $P(x), Q(x) \in \mathbb{P}_n$, entonces:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (a_0 + a_1x + \cdots +_n x^n) + (b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n) \\ &= a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n \end{aligned}$$

   Como podemos observar, la suma es otro polinomio de grado menor o igual a n; es decir, un polinomio de V, por lo tanto, la suma es cerrada y se cumple el axioma 1.

2. Conmutatividad:

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n \\ &= (b_0 + a_0) + (b_1 + a_1)x + (b_2 + a_2)x^2 + \cdots + (b_n + a_n)x^n \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n) + (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots +_n x^n) \\ &= Q(x) + P(x) \end{aligned}$$

3. Asociatividad

$$\begin{aligned} [P(x) + Q(x)] + R(x) &= [(a_0 + b_0) + \cdots + (a_n + b_n)x^n] + (c_0 + \cdots + c_nx^n) \\ &= (a_0 + b_0 + c_0) + \cdots + (an + b_n + c_n)x^n \\ &= (a_0 + \cdots +_n x^n) + [(b_0 + c_0) + \ldots (b_n + c_n)x^n] \\ &= (a_0 + \cdots +_n x^n) + [(b_0 + \cdots + b_nx^n) + c_0 + \cdots + c_nx^n] \\ &= P(x) + [Q(x) + R(x)] \end{aligned}$$

4. El elemento neutro para este espacio es el polinomio cero de $\mathbb{P}_n$ de la forma: $\mathbf{0} = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$, entonces

$$\begin{aligned} P(x) + \mathbf{0} &= (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + (0 + 0x + \cdots + 0x^n) \\ &= (a_0 + 0) + (a_1 + 0)x + \cdots + (a_n + 0)x^n \\ &= P(x) \end{aligned}$$

5. Para todo $P(x) \in \mathbb{P}_n$ existe $-P(x) \in \mathbb{P}_n$ tal que $P(x) + (-P(x)) = \mathbf{0}$

$$\begin{aligned} P(x) + (-P(x)) &= (a_0 + a_1 x + \cdots +_n x^n) + (-a_0 - a_1 x - \cdots - a_n x^n)) \\ &= (a_0 + (-a - 0)) + (a_1 + (-a_1))x + \cdots + (a_n + (-a_n))x^n \\ &= 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n = \mathbf{0} \end{aligned}$$

6. La multiplicación de un polinomio por un escalar α produce otro polinomio del mismo grado

$$\begin{aligned} \alpha P(x) &= \alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots +_n x^n) \\ &= \alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2 + \cdots + \alpha a_n x^n \end{aligned}$$

tal como lo establece el axioma 6.

7. Sean $P(x), Q(x) \in \mathbb{P}_n$ y α un escalar, entonces: $\alpha(P(x) + Q(x)) = \alpha P(x) + \alpha Q(x)$.

$$\begin{aligned} \alpha(P(x) + Q(x)) &= \alpha((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n) \\ &= \alpha(a_0 + b_0) + \alpha(a_1 + b_1)x + \cdots + \alpha(a_n + b_1)x^n \\ &= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + (\alpha a_1 + \alpha b_1)x + \cdots + (\alpha a_n + \alpha b_n)x^n \\ &= \alpha a_0 + \alpha b_0 + \alpha a_1 x + \alpha b_1 x + \cdots + \alpha a_n x^n + \alpha b_n x^n \\ &= (\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_n x^n) + (\alpha b_0 + \alpha b_1 + \ldots \alpha b_n x^n) \\ &= \alpha(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \alpha(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) \\ &= \alpha P(x) + \alpha Q(x) \end{aligned}$$

8. Sea $P(x) \in \mathbb{P}_n$ y α, β dos escalares, entonces: $(\alpha+\beta)P(x) = \alpha P(x) + \beta P(x)$.

$$
\begin{aligned}
(\alpha+\beta)P(x) &= (\alpha+\beta)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\
&= (\alpha+\beta)a_0 + (\alpha+\beta)a_1 x + \cdots + (\alpha+\beta)a_n x^n \\
&= \alpha a_0 + \beta a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_1 x + \cdots + \alpha a_{n x^n + \beta a_n x^n} \\
&= \alpha(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \beta(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\
&= \alpha P(x) + \beta P(x)
\end{aligned}
$$

9. Sea $P(x) \in \mathbb{P}_n$ y α, β dos escalares, entonces: $\alpha(\beta P(x)) = (\alpha\beta)P(x)$.

$$
\begin{aligned}
\alpha(\beta P(x)) &= \alpha(\beta(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)) \\
&= \alpha(\beta a_0 + \beta a_1 x + \cdots + \beta a_n x^n) \\
&= \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1 x + \cdots + \alpha\beta a_n x^n \\
&= (\alpha\beta)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\
&= (\alpha\beta)P(x)
\end{aligned}
$$

10. Para cada $P(x) \in \mathbb{P}_n$ se tiene que $1 \cdot P(x) = P$

$$
1 \cdot P(x) = 1(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = P(x)
$$

Por lo tanto, el conjunto de polinomios $\mathbb{P}_n$ es un espacio vectorial.

$\square$

2.2 Subespacios Vectoriales

A menudo, nos encontramos con un conjunto específico F que consta de elementos de un espacio vectorial V. Si este subconjunto F, bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar, cumple con los 10 axiomas de un espacio vectorial, entonces F también se considera un espacio vectorial. En tal caso, nos referimos a F como un subespacio de V.

Definición 2.2 (Subespacio Vectorial)

Sean $(V, +, F, .)$ un espacio vectorial y S un subconjunto no vacío del conjunto V. Si S es un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por escalar definidas en V, entonces se dice que S es un subespacio vectorial de V

Observación. Un subconjunto no vacío S de un espacio vectorial V es un subespacio de V si se cumplen las siguientes propiedades:

1. El vector $0 \in S$
2. Si $a, b \in S$, entonces $a + b \in S$
3. Si $a \in S$, entonces $\alpha a \in S$ para todo escalar α

Observemos que las propiedades $1), 2), 3)$ de un subespacio vectorial se alinean con los axiomas $1, 4, 6$ del espacio vectorial V. Esta correspondencia es suficiente para inferir o establecer que la estructura $(F, +, \cdot, \alpha)$ preserva la estructura del espacio vectorial $(V, +, \cdot, \alpha)$. En otras palabras, F hereda los demás axiomas, completando así los diez axiomas necesarios.

Ejemplo 2. Subespacios vectoriales triviales:

- Un espacio vectorial es un subespacio en sí mismo.
- El conjunto que consta únicamente del vector nulo en F es un subespacio vectorial de V, llamado subespacio cero o subespacio trivial.

Ejemplo 3. Sea V una matriz de orden dos definidas de la siguiente manera $V = M_{22}$ donde a, b, c, d son números reales. Mostrar que la estructura $(F, +, \cdot, \alpha)$ donde F está definida como:

$$F = \left\{ A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} ; a \in \mathbb{R} \right\}$$

es un subespacio vectorial de V.

Demostración.

Lo primero que se debe hacer es garantizar que el conjunto F es un subconjunto de la matriz M_{22}, y esto se cumple, ya que el conjunto de las matrices de F es de orden dos.

Sea $A, B \in F$ y α un escalar, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \text{ con } a \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \text{ con } b \in \mathbb{R}$$

a. La matriz cero está en F ,ya que $a \in \mathbb{R}$, si $a = 0$ forma una matriz de ceros de orden dos.

b. Sea $A, B \in F$, veamos sí $A + B \in F$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -a-b & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a+b \\ -(a+b) & 0 \end{pmatrix} \in F$$

c. Sea α un escalar y $A \in F$, entonces $\alpha A \in F$ con $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\alpha A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ \alpha(-a) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha a \\ -\alpha a & 0 \end{pmatrix} \in F$$

Por lo tanto F es un subespacio vectorial de V. □

2.3 Transformaciones Lineales

Definición 2.3

Sean V, W dos espacios vectoriales reales y T una función de V en W. Se dice que T es una transformación lineal si se cumple con las siguientes condiciones:

1. $T(u + v) = T(u) + T(v) \qquad \forall u, v \in V$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u) \qquad \forall u \in V, \forall \alpha \in \mathbb{R}$

En ciertos textos, se puede referir a una transformación lineal como una aplicación lineal o un operador lineal. Esta se describe de la siguiente manera: $T : V \to W$, donde para cada vector v (conocido como el espacio de salida), se asigna un único elemento $T(v)$ en el espacio vectorial W (conocido como el espacio de llegada). Dado que una transformación lineal es una función, su dominio es el espacio vectorial V y su codominio es el espacio vectorial W. Las dos condiciones que caracterizan a una transformación lineal y se consolidan en la siguiente expresión:

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

A continuación, se presentarán algunas propiedades fundamentales relacionadas con la transformación lineal.

Propiedades. Sean V y W dos espacios vectoriales, si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces:

1. La imagen del vector nulo $0_v \in V$, es el vector nulo 0_w de W:

$$T(0_v) = 0_w$$

2. La imagen del vector opuesto $v' \in V$ es igual al opuesto de la imagen de v:

$$T(v') = [T(v)]'$$

Veamos a continuación el siguiente teorema de transformación lineal, la cual está relacionada con los subespacios vectoriales.

Teorema 2.3

Sea V y W dos espacios vectoriales. Si $T : V \to W$ es una transformación lineal, entonces

1. Si S es un subespacio de V, entonces $T(S)$ es un subespacio de W.
2. Si S es un subespacio de W, entonces $T^{-1}(W)$ es un subespacio de V.

Demostración.

1. Consideremos $T(S) = \{w \in W : \exists v \in S, T(v) = w\}$, probemos las tres propiedades del subespacio vectorial.
   a) El $0_w \in T(S)$ puesto que $T(0_v) = 0_w$ y $0_v \in S$.
   b) Sea $w_1, w_2 \in T(S)$, entonces existe $u_1, u_2 \in S$, tales que

   $$T(u_1) = w_1 \qquad \text{y} \qquad T(u_2) = w_2$$

   luego, sumando w_1 y w_2 obtenemos lo siguiente

   $$\begin{aligned} w_1 + w_2 &= T(u_1) + T(u_2) \\ &= T(u_1 + u_2) \in T(S) \text{ esto ya que } u_1 + u_2 \in S \end{aligned}$$

   c) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y $w \in T(S)$, entonces existe $u \in S$ tal que $T(u) = w$. Entonces $\alpha w = \alpha T(u) = T(\alpha u) \in T(S)$ ya que $\alpha u \in S$.

   Por lo tanto, $T(S)$ es un subespacio vectorial de W

2. Sea S un subespacio de W y consideremos

$$T^{-1}(S) = \{u \in V : T(u) \in S\}$$

   a) $0_v \in T^{-1}(S)$ puesto que $T(0_v) = 0_w \in S$
   b) Sean $u_1, u_2 \in T^{-1}(S)$ entonces $T(u_1), T(u_2) \in S$ y por lo tanto $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2) \in S$, luego $u_1 + u_2 \in T^{-1}(S)$.
   c) Sea $\alpha \in \mathbb{R}$, $u \in T^{-1}(S)$ entonces $T(u) \in S$ y en consecuencia $T(\alpha u) = \alpha T(u) \in S$, luego $\alpha u \in T^{-1}(S)$

   Por lo tanto, $T^{-1}(W)$ es un subespacio de V.

$\square$

Las transformaciones lineales son funciones que mantienen las combinaciones lineales. Estas se caracterizan por tener tanto su dominio como su codominio en el espacio de las matrices. La definición que sigue aborda los componentes fundamentales asociados a estas funciones particulares.

Definición 2.4 Matriz asociada a la transformación lineal

Sea $T : V \to W$ una transformación lineal entonces la matriz A de orden $m \times n$ es la matriz asociada a la transformación lineal si y sólo si

$$A \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

El espacio vectorial de origen V posee una dimensión $dim(V) = n$, mientras que el espacio vectorial de destino W tiene una dimensión $dim(W) = m$. Por lo tanto, la matriz A asociada a la transformación lineal tiene un orden de $m \times n$. Esta definición implica que existe una matriz A de $m \times n$, que no necesariamente es cuadrada, tal que la multiplicación de esta matriz por un elemento v de V es equivalente a aplicar la transformación lineal T a dicho elemento v del dominio, es decir, $T(x)$. Además, dos conceptos clave en el contexto de las transformaciones lineales son el rango y el núcleo de una transformación lineal. Estos conceptos juegan un papel crucial en la comprensión de la estructura y las propiedades de las transformaciones lineales.

Definición 2.5 (Rango de una transformación lineal)
Dada la transformación lineal $T : V \to W$ se define rango de T como:

$$Rango(T) = \{w \in W : \exists v \in V \text{ y } T(v) = w\}$$

El rango de una transformación lineal se define como un subconjunto del espacio de destino, que incluye todos los puntos a los que se puede llegar aplicando la transformación a algún elemento del espacio de origen. En términos más sencillos, el rango comprende todas las imágenes resultantes de la transformación lineal.

$$Rango(T) = Img(T)$$

Teorema 2.4
El rango de una transformación lineal es un subespacio de W.

Demostración. Debemos probar las tres propiedades que definen al subespacio vectorial.

1. El vector 0_w está en $Img(T)$, ya que existe $0_v \in V$ tal que $T(0_v) = 0_w$.
2. Si $w_1, w_2 \in Img(T)$ entonces $w_1 + w_2 \in Img(T)$

   Si $w_1 \in Img(T)$ entonces existe $v_1 \in V$ tal que $T(v_1) = w_1$

   Si $w_2 \in Img(T)$ entonces existe $v_2 \in V$ tal que $T(v_2) = w_2$

Si sumamos w_1 y w_2 obtenemos lo siguiente:

$$T(v_1) + T(v_2) = w_1 + w_2$$

y como T es una transformación lineal entonces

$$T(v_1 + v_2) = w_1 + w_2 \in Img(T)$$

3. Si $w \in Img(T)$, entonces $\alpha w \in Img(T)$

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha w \in Img(T)$$

□

Definición 2.6
Sean V y W dos espacios vectoriales sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea T una transformación lineal de $V \to W$, se define núcleo de T como:

$$Nuc(T) = \{v \in V : t(v) = 0_w\}$$

Teorema 2.5
El núcleo de una transformación lineal es un subespacio de V

Demostración. Debemos probar las tres propiedades que definen al subespacio vectorial.

1. El vector $0 \in Nuc(T)$ ya que $T(0_v) = 0_w$.
2. Si $v_1, v_2 \in Nuc(T)$ entonces $v_1, v_2 \in Nuc(T)$

   Si $v_1 \in Nuc(T)$ y $v_2 \in Nuc(T)$ entonces por definición de $Nuc(T)$ tenemos que:

$$T(v_1) = 0_w \qquad \text{y} \qquad T(v_2) = 0_w$$

Entonces, sumando estas verdades obtenemos lo siguiente:

$$T(v_1) + T(v_2) = 0_w$$

como T es una transformación lineal, entonces

$$T(v_1 + v_2) = 0_w$$

3. Si $v \in Nuc(T)$, entonces $\alpha v \in Nuc(T)$ para todo escalar α

$$T(\alpha v) = \alpha T(v) = \alpha 0_w = 0_w$$

$\square$

Por lo tanto, la matriz asociada a la transformación lineal tiene dimensiones $m \times n$. Su rango, que es igual al número de filas y/o columnas linealmente independientes, coincide con la dimensión del espacio de destino..

✓**Ejemplos de transformación lineal**

Ejemplo 4. Sea $T : V \to \mathbb{R}$ definida por $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1 + a_2$, donde:

$$V = \{P(x) : P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2, a_i \in \mathbb{R}, gra(P(x)) \leq 2\}$$

✓**Demostrar que T es una transformación lineal.**

Demostración.

1. Sea $P(x), Q(x) \in V$, entonces: $T(P(X) + Q(x)) = T(P(X)) + T(Q(x))$.

$$\begin{aligned}
T(P(X) + Q(x)) &= T[(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + (b_0 + b_1 x + b_2 x^2)] \\
&= T(a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2) \\
&= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) \\
&= a_0 + b_0 + a_1 + b_1 + a_2 + b_2 \\
&= (a_0 + a_1 + a_2) + (b_0 + b_1 + b_2) \\
&= T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) + T(b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \\
&= T(P(x)) + T(Q(x))
\end{aligned}$$

2. Para todo $P(x) \in V$ y para todo escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces: $T(\alpha P(x)) = \alpha T(P(x))$

$$\begin{aligned}
T(\alpha P(x)) &= T(\alpha(a_0 + a_1 x + a_2 x^2)) \\
&= T(\alpha a_0 + \alpha a_1 x + \alpha a_2 x^2) \\
&= \alpha a_0 + \alpha a_1 + \alpha a_2 \\
&= \alpha(a_0 + a_1 + a_2) = \alpha T(P(x))
\end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal. $\square$

Ejemplo 5. Determinar si la transformación dada de $\mathbb{P}_2$ en $\mathbb{P}_1$ es una transformación lineal.

$$T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_1$$

1. Sea los polinomios:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$$

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

entonces:

$$\begin{aligned} T(P(x)+Q(X)) &= T(a_0+b_0+(a_1+b_1)x+(a_1+b_2)x^2) \\ &= (a_0+b_0)+(a_1x+b_1x) \\ &= a_0+b_0+a_1x+b_1x \\ &= (a_0+a_1x)+(b_0+b_1x) \\ &= T(a_0+a_1x+a_2x^2)+T(b_0+b_1x+b_2x^2) \\ &= T(P(x)+T(Q(X)) \end{aligned}$$

2. $T(xP(x) = \alpha T(P(x))$

$$\begin{aligned} T(\alpha P(x)) &= T(\alpha(a_0+a_1x+a_2x^2)) \\ &= T(\alpha a_0+\alpha a_1x+\alpha a_2x^2)) \\ &= \alpha a_0+\alpha a_1x \\ &= \alpha(a_0+a_1x) = \alpha T(P(x)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

2.4 Dependencia e Independencia Lineal

Definición 2.7 (Combinación lineal)
Un vector $v \in V$ es combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \ldots. + \alpha_n v_n$$

donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son escalares.

A los escalares de la combinación lineal también se le conoce como los coeficientes de la combinación lineal. Esto es uno de los conceptos que está estrechamente relacionada a la dependencia e independencia lineal.

Definición 2.8 (Dependencia e independencia lineal)
Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ...v_n$ de un espacio vectorial V se dice que es linealmente dependiente si existe escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, no todos iguales a cero tales que

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Si el conjunto de vectores no es linealmente dependiente, entonces es linealmente independiente.

En otras palabras se dice que el conjunto de vectores son linealmente dependientes si existe una combinación lineal de ellos que es igual al vector cero, sin que todos los coeficientes de la combinación lineal sean cero, y decir que el conjunto de vectores es linealmente independiente, es cuando los coeficientes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ de esta combinación son todos iguales a cero.

El siguiente teorema me permite verificar la dependencia lineal de dos vectores de un espacio vectorial.

Teorema 2.6
Dos vectores v_1 y v_2 de un espacio vectorial V son linealmente dependiente si y solo si uno de ellos es múltiplo escalar de otro.

Demostración. $\Longrightarrow$ Sí v_1, v_2 son linealmente dependiente, entonces $\alpha v_1 = \alpha v_2$. Como v_1, v_2 son linealmente independiente, entonces existen escalares α_1, α_2 donde alguno de ellos es distinto de cero, tales que se cumple

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0 \tag{2.1}$$

- Si $\alpha_1 \neq 0$ entonces dividiendo entre α_1 se tiene que

$$\begin{aligned}
\frac{\alpha_1}{\alpha_1} v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 &= 0 \\
v_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2 &= 0 \\
v_1 &= -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} v_2
\end{aligned}$$

Esto me indica que el vector v_1 es un múltiplo escalar de v_2.

- Si $\alpha_1 = 0$ entonces $\alpha_2 \neq 0$ esto por dependencia lineal, si reemplazamos en Ecuación: 2.1 obtenemos lo siguiente

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = 0$$
$$0(v_1) + \alpha_2 v_2 = 0$$
$$\alpha_2 v_2 = 0$$

$\Longleftarrow$ Si $\alpha v_1 = v_2$ para $\alpha \neq 0$, entonces $\alpha v_1 + v_2 = 0$, por lo tanto, v_2 es múltiplo escalar de v_1. $\square$

Ejemplos de dependencia e independencia lineal

Ejemplo 6. Sean S un subconjunto del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ definida como:

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Determinar si S es un conjunto de vectores linealmente dependientes o linealmente independientes.

Solución. Determinar si la combinación lineal trivial se satisface para escalares todos iguales a cero, o no.

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos lleva a resolver el siguiente sistema de ecuación homogénea

$$2\alpha_1 + \alpha_2 + 0 = 0$$
$$3\alpha_1 + 0 + 3\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = 0$$

Si escribimos este sistema de ecuación como una matriz aumentada y reduciendo por filas, se obtendrá lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) F_2 = F_2 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) F_2 = F_2 - F_3 \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) F_3 = F_3 - F_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right) F_3 = 2F_3 + F_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Entonces, la matriz reducida presenta la siguiente ecuación:

$$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$$

$$-2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$

Si tomamos como $\alpha_3 = 1$ entonces $\alpha_2 = 2$ y $\alpha_1 = -1$ lo cual verifica que:

$$\textbf{-1}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbf{1}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, S es un conjunto de vectores linealmente dependientes.

2.5 Bases

Una de las definiciones muy importantes del álgebra en general, sobre todo cuando se hable de bases, es el conjunto generador.

Definición 2.9 (Conjunto generador)
Sea S un subconjunto de un espacio vectorial V. Se dice que $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ genera a V, si todo vector de V se puede expresar como combinación lineal de $u_1, u_2, \ldots, u_n$.

Cuando un conjunto de vectores es linealmente independiente y tiene la capacidad de generar todos los vectores dentro de un espacio vectorial, se le denomina una base.

Definición 2.10 (Base de un espacio vectorial)

Un conjunto finito de vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$ es una **base** para un espacio vectorial V si:

1. Los vectores de B son linealmente independientes
2. El subespacio generado por B coincide con V, esto es $V = Gen\{b_1, ..., b_n\}$

Propiedades. 1. Una base de S es un sistema generador minimal de S (lo más pequeño posible).

2. Además es un conjunto independiente maximal dentro de S (lo más grande posible).
3. Una base de S permite expresar todos los vectores de S como combinación lineal de sus vectores, y esta combinación es única.

Ejemplo 7. Mostrar que los vectores $v_1 = (1, -3)$ y $v_2 = (-1, 2)$ forman una base de $\mathbb{R}^2$.

Solución. Se debe probar los siguientes casos:

1. **Los vectores v_1, v_2 generan a $\mathbb{R}^2$:**

   Primero, resolvemos la ecuación vectorial $v = \alpha v_1 + \beta v_2$, con $v = (x, y)$.

   Entonces,

$$(x, y) = \alpha(1, -3) + \beta() - 1, 2 \to (x, y) = (\alpha - \beta, -3\alpha + 2\beta)$$

   obteniendo un sistema de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los escalares:

$$\alpha, \beta : \begin{cases} \alpha - \beta = x \\ -3\alpha + 2\beta = y \end{cases}$$

   La solución del sistema es: $\beta = -3x - y$ y $\alpha = -2x - y$, luego:

$$(x, y) = (-2x, -y)(1, -3) + (-3x, -y)(-1, 2)$$

   Entonces, todo vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ es combinación lineal de los vectores $v_1 = (1, -3)$ y $v_2 = (-1, 2)$.

2. **Los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes:**

   Segundo, Para demostrar la independencia lineal de los vectores v_1 y v_2 se busca las soluciones de α y β de la ecuación vectorial $\alpha v_1 + \beta v_2 = (0,0)$. siguiendo el procedimiento del primer punto y usando $\alpha = -2x - y$, $\beta = -3x - y$ para $x = 0$, $y = 0$ se obtiene la solución única $\alpha = 0$ y $\beta = 0$.

   Así, el conjunto $B = \{v_1, v_2\}$, genera a $\mathbb{R}^2$ y es linealmente independiente.

   Se concluye, $B = \{v_1, v_2\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Estas definiciones y propiedades de base nos llevan a un nuevo concepto importante.

Definición 2.11

Al número de vectores de una base de un espacio vectorial V se conoce como la **dimensión** de V.

Es decir, si $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_{10}\}$ es una base del espacio vectorial V, entonces la dimensión de V es 10 la cual está denotada como $dim(V) = 10$. Ahora, un espacio es de **dimensión infinita** si no existe una base de V formada por un conjunto finito de vectores.

Teorema 2.7

Si $v \in V$ y $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para V entonces existe un único conjunto de escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tales que $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$

Demostración. Como B es una base de V entonces por definición de base $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ genera a V, ahora supongamos que el vector v se puede escribir de dos maneras como una combinación lineal, es decir;

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$$

Si restamos esta expresión obtenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n - \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n &= 0 \\ (\alpha_1 - \beta_1) v_1 + (\alpha_2 - \beta_2) v_2 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n v) v_n &= 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

pero como $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es una base entonces cada v_i son linealmente independientes, esto implica que todos los escalares son iguales a cero, es decir

$$(\alpha_1 - \beta_1) = (\alpha_2 - \beta_2) = \cdots = (\alpha_n - \beta_n) = 0$$

Así $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \ldots \alpha_n = \beta_n$. Por lo tanto, existe un único conjunto de escalares que cumple $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$. □

Un espacio vectorial tiene múltiples bases, las cuales contienen el mismo número de vectores. Por ejemplo, tres vectores cualesquiera linealmente independientes en $\mathbb{R}^3$ forman una base de este espacio. Pero dos vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente independientes no pueden formar una base para este espacio, ya que el espacio generado por estos vectores, es un plano y un plano no es todo $\mathbb{R}^3$. De manera similar, un conjunto de cuatro vectores o más en $\mathbb{R}^3$ no puede ser linealmente independiente, pues si los tres primeros vectores en el conjunto son linealmente independientes, entonces forman una base; por lo tanto, todos los demás vectores en el conjunto se pueden expresar como una combinación lineal de los primeros tres. Entonces, todas las bases en $\mathbb{R}^3$ contienen tres vectores [G08]. Esta idea la podemos generalizar a un espacio vectorial cualquiera. Veamos el siguiente teorema:

Teorema 2.8

Cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en un espacio vectorial V de dimensión n constituyen una base para V.

Demostración. Sea $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ un conjunto de n vectores linealmente independientes de un espacio vectorial V. Si el conjunto B genera a V entonces B es una base de para V. Si pasa lo contrario, es decir; si B no genera a V entonces existe un vector $v_i \in V$ tal que $v_i \neq gen\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

Como los vectores de B son linealmente independientes, entonces se cumple que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

con escalares todos iguales a cero. Si $\alpha_i \neq 0$ entonces al vector v_i la podemos escribir como combinación lineal de los vectores de B, es decir;

$$\alpha_i v_i = (-\alpha_1)v_1 + (-\alpha_2)v_2 + \cdots + (-\alpha_n)v_n$$

$$v_i = (-\frac{\alpha_1}{\alpha_i})v_1 + (-\frac{\alpha_2}{\alpha_i})v_2 + \cdots + (-\frac{\alpha_n}{\alpha_i})v - n$$

todos los coeficientes de la combinación lineal de v_i son iguales a cero, esto muestra que $v_i \in gen\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ la cual es una contradicción. $\square$

Una nota importante de este teorema es que no sólo muestra que v_i se puede escribir como una combinación lineal de los vectores linealmente independientes, $v_1, v_2, \ldots, v_n$, sino también que esto se puede lograr de una sola manera, ya que el conjunto de escalares de cada combinación es único [G08]. El siguiente teorema nos muestra que para todos los espacios vectoriales todas las bases contienen el mismo número de vectores.

Teorema 2.9

Si $A = u_1, u_2, \ldots, u_n$ y $B = v_1, v_2, \ldots, v_m$ son bases en un espacio vectorial V, entonces $n = m$; es decir, dos bases cualesquiera de un espacio vectorial V tienen el mismo número de vectores.

La prueba de este teorema la podemos encontrar en [G08]. Él teorema 2.6, mencionaba que cualquier conjunto de n vectores linealmente independientes en $\mathbb{R}^n$ genera a $\mathbb{R}^n$. El siguiente teorema hace relación entre la independencia lineal y el conjunto generador en $\mathbb{R}^n$ que se mencionó anteriormente.

Ejemplo 8. En $\mathbb{R}^n$ se puede definir los vectores canónicos

$$\begin{aligned}
e_1 &= (1,0,0,\ldots,0)\\
e_2 &= (0,1,0,\ldots,0)\\
e_3 &= (0,0,1,\ldots,0)\\
&\vdots\\
e_n &= (0,0,0,\ldots,1)
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Como se puede observar que los vectores e_i son las filas de una matriz, aunque también se puede considerar como columnas de una matriz identidad, esta matriz tiene determinante no nulo, así el conjunto $\{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ es linealmente independiente y, por lo tanto, constituye una base llamada base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Ejemplo 9. Demuestre que el conjunto de polinomios $B = \{x^2 + 1, x - 2, x^2 + x\}$ es una base para el conjunto de polinomios de grado menor o igual que dos ($\mathbb{P}_2$).

Demostración.
Debemos mostrar las dos condiciones que definen una base de un espacio vectorial.

1. Probar que los vectores de B son linealmente independientes es resolver la siguiente combinación lineal trivial para los escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_1(x^2+2) + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x^2+3x) = 0x^2 + 0x + 0$$

Utilizando la propiedad distributiva y asociativa se tiene que:

$$(\alpha_1+\alpha_3)x^2 + (\alpha_2+3\alpha_3)x + (2\alpha_1-\alpha_2) = 0x^2 + 0x + 0$$

Luego, a esta combinación la podemos ver como un sistema de ecuación.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + 0 + \alpha_3 &= 0x^2\\
0 + \alpha_2 + 3\alpha_3 &= 0x\\
2\alpha_1 - \alpha_2 + 0 &= 0
\end{aligned}$$

Escribiendo este sistema de ecuación en la forma de una matriz aumentada y reduciendo por filas se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) f_3 = f_3 - 2f_1 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) f_3 = f_3 + f_2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Esta matriz reducida se puede expresar como una ecuación de la siguiente forma:

$$\alpha_1 + 0 + \alpha_3 = 0$$
$$0 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0$$
$$0 + 0 + \alpha_3 = 0$$

El sistema es compatible determinado, tiene una única solución: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Por tanto, estos polinomios son linealmente independientes.

2. Mostrar que B es un conjunto que genera al espacio vectorial V es resolver la siguiente combinación lineal para un vector genérico:

$$\alpha_1(x^2+2) + \alpha_2(x-1) + \alpha_3(x^2+3x) = ax^2 + bx + c$$
$$(\alpha_1 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_2 + 3\alpha_3)x + (2\alpha_1 - \alpha_2) = ax^2 + bx + c$$

Luego, a esta combinación la podemos ver como un sistema de ecuación.

$$\alpha_1 + 0 + \alpha_3 = ax^2$$
$$0 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = bx$$
$$2\alpha_1 - \alpha_2 + 0 = c$$

Escribiendo este sistema de ecuación en la forma de una matriz aumentada y reduciendo por filas se obtiene

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & ax^2 \\ 0 & 1 & 3 & bx \\ 2 & -1 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Matriz reducida}} \left(\begin{array}{ccc|r} 1 & 0 & 1 & ax^2 \\ 0 & 1 & 3 & bx \\ 0 & 0 & 1 & -2ax^2 + bx + c \end{array}\right)$$

Mediante la matriz reducida sabemos que $\alpha_3 = -2ax^2 + bx + c$ con ello al calcular los valores de α_1 y α_2 obtenemos los siguientes resultados:

$$\alpha_1 = 3ax^2 - bx - c$$
$$\alpha_2 = 6ax^2 - 2bx - 3c$$
$$\alpha_3 = -2ax^2 + bx + c$$

Como podemos notar que si existen los valores de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tal que si se hace la combinación lineal con los vectores de B me da como resultado un vector genérico de $\mathbb{P}_2$. Por lo tanto B es una base para el conjunto de polinomios de grado menor o igual a dos. $\square$

2.6 Cambio de Base

Definición 2.12
Sea $(V, +, F, .)$ un espacio vectorial de dimensión finita. Una base ordenada de V es una sucesión finita de vectores linealmente independientes que generan a V.

Notas.

- Como conjuntos **B=**$\{v_1, v_2, v_3\}$ y **C=**$\{v_3, v_1, v_2\}$ son una base ordenada del espacio vectorial V, pero como bases ordenadas B *y* C ya no lo son, ya que difieren su orden.
- El conjunto **D=**$\{e_1, e_2 \cdots, e_n\}$ es una base ordenada de $\mathbb{R}^n$.
- En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$, los vectores se pueden representarse en vectores filas o vectores columnas, escribiéndolos de las siguientes maneras:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definición 2.13

Sea $(V, +, F, .)$ un espacio vectorial de dimensión finita y **B=**$\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ una base ordenada de V, entonces cualquier vector v del espacio vectorial queda relaciona con un elemento de otro conjunto, de manera que uno corresponde siempre al otro (escalares: $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$), para los cuales: $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdot + \alpha_n v_n$. Se define el vector de coordenadas de v respecto a la base **B**, denotado por $[v]_B$, como el vector columna en F^n dado por:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 10. Sea $B = \{(1, -3), (1, 2)\}$ una base de $\mathbb{R}^2$. ¿Cuáles son las coordenadas del vector $v = (1, -5)$ respecto a la base ordenada B?

Solución. En el Ejemplo 7, se demostró que **B = (1, -3), (—1,2)** es una base de $\mathbb{R}^2$ y usando las igualdades que se obtuvieron, donde: $\beta = -3x - y$ y $\alpha = -2x - y$ con $x = 1$ y $y = -5$, así obtenemos:

$$\alpha = -2 * 1 - (-5) \rightarrow -2 + 5 \rightarrow \alpha = 3$$

$$\beta = -3 * 1 - (-5) \rightarrow -3 + 5 \rightarrow \beta = 2$$

Por lo tanto, se concluye que las coordenadas del vector $(1, -5)$ respecto a la base B es:

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Módulo 2

Eigenvalores - Eigenvectores

Un endomorfismo es una transformación lineal T que se aplica a un espacio vectorial y que devuelve un resultado dentro del mismo espacio. Es decir, T es de la forma: $T : V \to V$.

Nota. Es como si se tuviera una caja llena de objetos y se aplicara una regla que cambie la posición o el estado de los objetos, pero todos los objetos siguen estando dentro de la caja.

Definición 2.14 Valores propios y vectores propios

Sean el espacio vectorial $(V, +F, \cdot)$ y un endomorfismo $T : V \to V$. El escalar $\lambda \in F$ es un valor propio de T, si y sólo si existe un vector no nulo $x \in V$ tal que:

$$T(x) = \lambda(x) \tag{2.4}$$

Cualquier vector que no sea nulo y cumpla con esta condición se clasifica como un vector propio del endomorfismo T, vinculado al valor propio λ.

Observación.

- A los eigenvalores se los llama: valores propios, valores característicos o autovalores.
- De la misma manera, los eigenvectores se los llama: vectores propios, vectores característicos o autovectores.

Ejemplo 11. Encuentra todos los valores propios reales y los correspondientes vectores propios para los siguientes endomorfismos:

1. En $P_3[\mathbb{R}]$ (espacio de los polinomios de grado menor o igual que 3, con coeficientes reales en la variable x) se define la transformación lineal

$$F : P_3[\mathbb{R}] \to P_3[\mathbb{R}], \text{tal que:}$$

$$F(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3$$

Demostración.
Primero se procede a resolver el Ecuación: 2.1.
Sean $\lambda \in \mathbb{R}$ y $q(x) \in P_3[\mathbb{R}], q(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0$, no nulo tales que

$$F(q(x)) = \lambda q(x), \text{ luego:}$$

$$F(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0) = \lambda(a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0)$$

Aplicando la definición de F:

$$a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x^1 + a_3 = \lambda a_3x^3 + \lambda a_2x^2 + \lambda a_1x^1 + \lambda a_0$$

Aplicando igualdad de polinomios se obtiene:

$$a_0 = \lambda a_3$$

$$a_1 = \lambda a_2$$

$$a_2 = \lambda a_1$$

$$a_3 = \lambda a_0$$

$$a_0 = \lambda a_3 \wedge a_3 = \lambda a_0 \implies a_0 = \lambda \lambda_a 0 \implies (1 - \lambda^2)a_0 = 0$$

$$a_1 = \lambda a_2 \wedge a_2 = \lambda a_1 \implies a_1 = \lambda \lambda_a 1 \implies (1 - \lambda^2)a_1 = 0$$

Sí $1 - \lambda^2 \neq 0$ entonces $a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = a_0$, lo que implica que $q(x)$ sería nulo, pero no puede ser.
Entonces:

$$1 - \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 = 1$$

$$\lambda = 1 \wedge \lambda = -1$$

Para $\lambda = 1$ se obtiene $\alpha_0 = \alpha_3, \alpha_1 = \alpha_2$, haciendo $\alpha_0 = \alpha_3 = \alpha$ y $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta$ se tiene que los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ son de la forma $q(x) = ax^3 + \beta x^2 + \beta x + a$, que se pueden expresar así:

$$q(x) = a(x^3 + 1) + \beta(x + x)$$

Es decir, los vectores propios asociados a $\lambda = 1$ se pueden expresar como combinación lineal de los vectores (polinomios) $(x^3 + 1)$ y $(x^2 + x)$.

Para $\lambda = -1$ se obtiene $a_0 = -a_3, a_1 = -a_2$, haciendo $a_3 = \alpha$ y $a_2 = \beta$ se tiene que $a_0 = -\alpha, a_1 = -\beta$, luego los vectores propios asociados a $\lambda = -1$ son de la forma:

$$q(x) = \alpha(x^3 - 1) + \beta(x^2 - x).$$

Es decir, los vectores propios asociados a $\lambda = -1$ y expresar como combinación lineal de los vectores (polinomios) $(x^3 - 1)$ y $(x^2 - x)$. $\square$

Teorema 2.10

Sean $(V, +F, \cdot)$ un espacio vectorial. T un endomorfismo de V en V, λ un valor propio de T, S'_λ el conjunto de los vectores propios asociados al valor propio λ O el vector nulo de V, entonces el conjunto $S_\lambda = S'_\lambda \bigcup \{O\}$, es un subespacio vectorial de V

Demostración.

Condiciones del teorema de caracterización de subespacios

1. $S_\lambda \subseteq V$ por ser S_λ la unión de dos subconjuntos de V.

2. $S_\lambda \neq \emptyset$, pues en V existe O y $S_\lambda = S'_\lambda \cup \{O\}$, entonces $O \in S_\lambda$.

3. Sean $x, y \in S_\lambda$ se debe probar que: $(x+y) \in S_a$: Como $x, y \in S_\lambda$, entonces puede suceder que:

   - Si $x = O \to x + y = O + y = y \in S_\lambda$
   - Si $y = O \to x + y = x + O = x \in S_\lambda$
   - Sí $x \neq O \wedge y \neq O \to x, y$, son vectores propios de T asociados a λ

$$\begin{aligned}
\to T(x) = \lambda x \wedge T(y) = \lambda y \to T(x) + T(y) &= \lambda x + \lambda y \\
&\to T(x+y) = \lambda(x+y) \\
&\to (x+y) \text{es un vector propio de T o } x+y=0 \\
&\to (x+y) \in S'_\lambda \vee x+y=0 \\
&\to (x+y) \in S_\lambda, \text{pues } S_\lambda = S'_\lambda \cup \{O\}
\end{aligned}$$

   Probando así, que para todo $x, y \in S'_\lambda$ se tiene que $(x+y) \in S_\lambda$

4. Sea un α un escalar, $x \in S'_\lambda$, se debe probar que $ax \in S_\lambda$:

   - Si $a = 0$ entonces $\alpha x = 0x = \{O\} \in S_\lambda$
   - Si $x = O$ entonces $\alpha x = \alpha O = O \in S_\lambda$
   - Si $\alpha \neq 0$ y $x \neq O$ entonces $\alpha \neq 0$ y $c \in S'_\lambda$

$$\begin{aligned}
\alpha \neq 0 \wedge x \in S'_\lambda &\to \alpha \neq 0 \wedge T(x) = \lambda x && \text{por definición de } S'_\lambda \\
&\to \alpha T(x) = \alpha(\lambda x) && \text{multiplicando por } \alpha \\
&\to T(\alpha x) = \lambda(\alpha x) && \text{pues T es endomorfismo} \\
&\to \alpha x \in S'_\lambda && \text{por definición de } S'_\lambda \\
&\to \alpha x \in S_\lambda && \text{pues } S'_\lambda \subseteq S_\lambda
\end{aligned}$$

   Al satisfacerse las condiciones del teorema de caracterización del subespacio, entonces $(S_\lambda, +, F, \cdot)$ es un subespacio vectorial de $(V, +, F, \cdot)$.

Observación.

- Al subespacio $S_\lambda = \{x \in V/T(x) = \lambda x\}$ se le llama espacio propio de T

correspondiente al valor propio λ. Pero si λ no es un valor propio, entonces $\{x \in V/T(x) = \lambda x\}$ es subespacio, pero no recibe el nombre de espacio propio.

- Si $(V, +F, \cdot)$ es un espacio vectorial y $T : V \to V$, un endomorfismo, entonces para cualquier valor propio λ, la igualdad $T(x) = \lambda x$ equivale a $(T - \lambda I)(x) = 0$, donde I es el endomorfismo identidad.
  Por lo tanto: $s_\lambda = \{x \in V/T(x) = \lambda x\} = \{x \in V/(T - \lambda I)(x) = 0\} = N(T - \lambda I)$; donde S_λ es el núcleo de la transformación lineal $(T - \lambda I)$
- En la Ecuación: 2.1 se tiene que α ser un escalar no nulo y x es un vector propio, entonces ax es un vector propio.
- Si λ_1 y λ_2 son valores propios distintos de un endomorfismo, entonces los subespacios propios $S_\lambda 1$ y $S_\lambda 2$ solo tienen en común al vector nulo, es decir, $S\lambda 1 \bigcap S_\lambda 2 = \{O\}$

$\square$

2.7 Valores y vectores propios de una matriz cuadrada

En esta sección, nos centraremos en las matrices cuadradas y las transformaciones lineales correspondientes. Estas transformaciones son de la forma $T : F^n \to F^n$, donde $T(x) = Ax$.

Aquí, A es una matriz $n \times n$ con elementos en el campo F, y x es un elemento de F^n que se considera como una columna para que la multiplicación matricial Ax tenga sentido. Con estas premisas, las matrices pueden ser tratadas de la misma manera que los endomorfismos.

A continuación: $F = \mathbb{R}$ o cuál sea la designación de F.

Definición 2.15
Sea A una matriz cuadrada de orden n cuyos elementos pertenecen a un cuerpo F, la cual se simboliza así: $A \in M_{nxn}(F)$. El escalar $\lambda \in F$ es un valor propio de A si

y sólo si existe un vector no nulo $x \in F^n$ tal que:

$$Ax = \lambda x \tag{2.5}$$

Un vector no nulo $x \in F^n$ que satisface la Ecuación: 2.2 se le llama vector propio de la matriz A asociada al valor propio λ.

Ejemplo 12. Los valores propios de la matriz diagonal

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{son } \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 14, \lambda_3 = -3 \text{ y } \lambda_4 = 5$$

Entonces:

$$\text{Sea } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \text{ un vector no nulo en } \mathbb{R}^4 \text{ tal que } Ax = \lambda x$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \\ -3x_3 \\ 5x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$\text{Entonces: } \rightarrow \begin{cases} 2x_1 & = \lambda x_1 \\ x_2 & = \lambda x_2 \\ -3x_3 & = \lambda x_3 \\ 5x_4 & = \lambda x_4 \end{cases} \tag{2.2}$$

Por lo tanto, cumple sí: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$, pero $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,

así, alguna de sus componentes debe ser distinta de cero.

Observación.

✓Sí $x_1 \neq 0$, de $2x_1 = \lambda x_1$ se tiene que $\lambda = 2$, resultando $x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Luego para cualquier $x_1 \neq 0$ se cumple $Ax = 2x$ con x no nulo, lo que significa que $\lambda = 2$ es un vector propio.

✓Sí $x_2 \neq 0$, de $x_2 = \lambda x_2$ se tiene que $\lambda = 1$, el cual se sustituye en las demás ecuaciones de la Relación: 2.2, encontrando: $x_1 = x_3 = x_4 = 0$.

Luego para cualquier $x_2 \neq 0$ se cumple $Ax = 1x$ con x no nulo, lo que significa que $\lambda = 2$ es un vector propio.

De forma exacta se realiza con $\lambda = -3$ y $\lambda = 5$, dando como resultados los siguientes valores propios:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} y \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

2.7.1 Ecuación característica

Definición 2.16

Sea A una matriz cuadrada de orden n, λ un valor propio de A y x un vector propio de A asociado a λ, entonces se cumple que $Ax = \lambda x$, lo cual equivale a:

$$Ax = \lambda I x,$$

donde I es la matriz identidad de orden n, entonces:

$$Ax = \lambda Ix \rightarrow Ax - \lambda Ix = 0 \rightarrow (A - \lambda I)x = 0 \tag{2.6}$$

La Ecuación: 2.3 y la Ecuación: 2.5 representa un sistema lineal homogéneo con n ecuaciones e n incógnitas, expresado en forma matricial. Al resolver este sistema, obtenemos una solución que satisface todas las ecuaciones simultáneamente. En otras palabras, es un conjunto de ecuaciones lineales donde todas las ecuaciones se cumplen para un mismo conjunto de valores de las incógnitas.

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Este sistema de ecuaciones tienes las siguientes soluciones:

- **Solución única:** Solución trivial, que es $x = O$, o sea, el vector nulo. Esta solución debe descartarse, ya que x debe ser un vector no nulo.
- **Infinitas soluciones:** Se da cuando el determinante de la matriz $(A - \lambda I)$ es cero, siendo la única opción, por lo tanto, la siguiente igualdad es la *ecuación característica*:

$$det(A - \lambda I) = 0 \tag{2.8}$$

Una vez desarrollada la Ecuación: 2.4 se obtendrá un polinomio de grado n en la variable λ, que se llama **polinomio característico** de la matriz A y se denota por $P\lambda$, tal que:

$$P(\lambda) = det(A - \lambda I) \tag{2.9}$$

Observación. Los valores propios de una matriz A son las raíces de su polinomio característico. Por el Teorema Fundamental del Álgebra, se sigue que todo polinomio de grado n con coeficientes complejos tiene exactamente n raíces posiblemente repetidas, y se considera su multiplicidad algebraica. Una matriz A de orden n tiene n valores propios, los cuales pueden ser complejos o reales, y pueden ser distintos o coincidir.

Ejemplo 13. Dada la siguiente matriz A= $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$, encontrar los siguientes ítems:

Demostración.

1. Polinomio característico:

   El polinomio característico es $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

   $$\begin{aligned}
   P(\lambda) &= det\left(\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\
   P(\lambda) &= det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 2-\lambda \end{pmatrix} && \text{efectuando la operación} \\
   P(\lambda) &= (3-\lambda)(2-\lambda) - 12 && \text{calculando el determinante} \\
   P(\lambda) &= 6 - 3\lambda - 2\lambda + \lambda^2 - 12 && \text{efectuando el producto} \\
   P(\lambda) &= \lambda^2 - 5\lambda - 6 && \text{sumando términos semejantes}
   \end{aligned}$$

   Dando como resultado el **polinomio característico siguiente:** $\lambda^2 - 5\lambda - 6$.

2. La **ecuación característica es:**

   $$det(A - \lambda I) = 0$$

   Dando como resultado: $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$

3. Las soluciones de la ecuación característica son las raíces del polinomio característico, a las que también nos referimos como los valores propios. La ecuación característica es:

   $$\det(A - \lambda I) = 0$$

   Lo cual equivale a: $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$

   Para resolver la ecuación cuadrática, usamos la fórmula general:

   $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

Entonces:

$$\lambda = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-6)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{2} = \frac{5+7}{2}, \frac{5-7}{2} = 6, -1$$

Por lo tanto, los valores propios son: $\lambda_1 = 6$ y $\lambda_2 = -1$.

4. Los vectores propios de una matriz A son las soluciones no triviales del sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)x = 0$, donde λ es un valor propio de A:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ -6 & 2-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se resuelve de manera individual con cada valor propio.

Para $\lambda_1 = 6$

$$\begin{pmatrix} 3-6 & -2 \\ -6 & 2-6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

A continuación se resolverá por el método de eliminación gaussiana:

$$\begin{pmatrix} -3 & -2 & |0 \\ -6 & -4 & |0 \end{pmatrix} \xrightarrow{f_2 \to f_2 - 2f_1} \begin{pmatrix} -3 & -2 & |0 \\ 0 & 0 & |0 \end{pmatrix} \to -3x_1 - 2x_2 = 0$$

A continuación se despeja x_1 y se obtiene $x_1 = -\frac{2}{3}x_2$

Luego:

$$x = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}x^2 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, los vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda_1 = 6$ son los múltiplos no nulos de: $\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Para $\lambda_2 = -1$

$$\begin{pmatrix} 3-(-1) & -2 \\ -6 & 2-(-1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo el sistema lineal:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & -2 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[f_2 \to f_2 - \frac{1}{3}f_2]{f_1 \to \frac{1}{2}f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{f_2 \to f_2 + f_1} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\to (2x_1 - x_2 = 0)$$

A continuación se despeja x_2 y se obtiene $x_2 = -2x_1$

Luego:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

por lo tanto, los vectores propios de A asociados al valor propio $\lambda_2 = 1$ son los múltiplos no nulos del vector $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Observe que en este ejemplo, la matriz A tiene dos valores propios diferentes

$$\lambda_1 = 6, \lambda_2 = -1$$

Si se toma cualquier vector propio asociado a $\lambda_1 = 6$; por ejemplo:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Y un vector propio asociado a $\lambda_2 = -1$; por ejemplo:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

con estos vectores se obtiene el conjunto $\{v_1, v_2\}$ que es linealmente independiente, ya que se puede verificar que si una combinación lineal de ellos es nula, entonces los escalares son iguales a cero, es decir

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = 0 \to \alpha = \beta 0$$

□

Este resultado no es fortuito, en general, se verifica el siguiente teorema:

Teorema 2.11

Los vectores propios de una matriz asociados a valores propios distintos son linealmente independientes.

Observación. Es un hecho conocido que cada endomorfismo, definido en un espacio vectorial de dimensión finita, posee una matriz asociada correspondiente a cada base del espacio vectorial. Por ende, surge la cuestión de si los valores propios del endomorfismo coinciden con los de su matriz asociada, independientemente de la base seleccionada.

Proposición. El polinomio característico de un endomorfismo definido en un espacio vectorial de dimensión finita es igual al polinomio característico de la matriz asociada con respecto a cualquier base del espacio vectorial.

2.7.2 Cálculo de valores y vectores propios de una matriz asociada

Para determinar los valores propios y los vectores propios de una matriz cuadrada A de orden n, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Encontrar el polinomio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$
2. Resolver la ecuación característica $P(\lambda) = 0$, es decir, se hallan las raíces del polinomio característico y son:
   a) Todas reales y diferentes
   b) Reales y algunas repetidas
   c) Complejas, diferentes y algunas repetidas
3. Las raíces de $P(\lambda)$ son los valores propios de A
4. Los vectores propios de A asociados a cada valor propio λ se encuentran resolviendo el sistema lineal homogéneo $(A - \lambda I)x = 0$ donde I es la matriz identidad del mismo tamaño que A.

Módulo 3

Descomposición Genética

2.8 Artículo: Scopus_014

Tema: *"Construcciones mentales asociadas a los Eigenvalores y Eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo"*.

El enlace para acceder al pdf del artículo se encuentra disponible en el siguiente link:`https://drive.google.com/file/d/1n9PXYymPUmdn0z4V4adlbbNPTm5eTPma/view?usp=sharing`. Además, en la base de datos que se realizó en el programa informático *Excel* versión 2021, cuyo enlace es `https://docs.google.com/spreadsheets/d/178wHONp0jJ7p_3NeVeAe74UbW2Mra9Tp/edit?usp=sharing&ouid=109900342582328389854&rtpof=true&sd=true`, se proporciona información del artículo de la siguiente manera:

1. Buscador.
2. Título.
3. Autor.
4. País.
5. Idioma.
6. Revista de publicación.
7. Año de publicación.
8. Sub-área de la Área de la matemática.

9. Área de la matemática.
10. Versión libre.
11. Versión pagada.
12. Relacionado con la teoría APOE.

2.9 Adaptación de la descomposición genética

Una vez que se identificó el artículo mencionado en la **Sección 2-8**, se procede adaptar su descomposición genética a las necesidades académicas del colectivo de estudio. Se consideró la unidad II (Diagonalización: Autovalores y autovectores) del sílabo de Álgebra Lineal II, del $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH. La descomposición genética se la adecuó a los conceptos de "Valores propios y Vectores propios de la Matriz Asociada a las Transformaciones Lineales, tema que está relacionado directamente con las Transformaciones Lineales".

Se eligió como marco teórico la teoría APOE, ya que se enfoca precisamente en el estudio de las construcciones involucradas en el aprendizaje e incluye el diseño de una estrategia para la enseñanza, se enfatizó en los conceptos de la Matriz Asociada a las Transformaciones Lineales. Esta sección se adaptó a las necesidades del grupo de estudio y a las indicaciones de la docente de la cátedra de Álgebra Lineal II. A continuación, se desarrollan las acciones, procesos, objetos y esquemas correspondientes:

2.9.1 Descomposición genética refinada

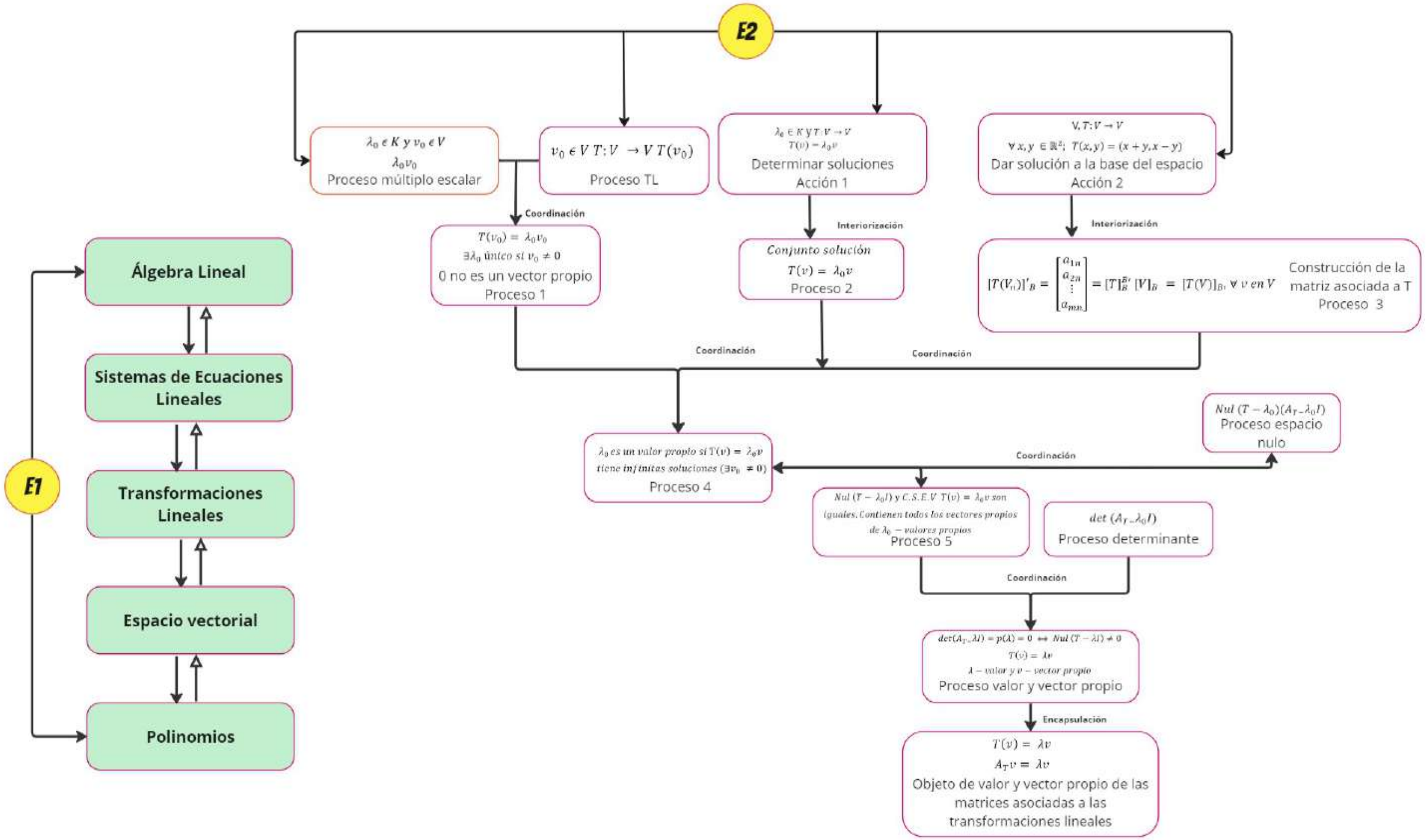


Ilustración 2.1 Descomposición genética refinada "Valores propios y Vectores propios de la Matriz Asociada a las Transformaciones Lineales, tema que está relacionado directamente con las Transformaciones Lineales".

Adaptada de: Betancour, A., 2022.

2.10 Planificación

Además, de una estructura virtual que va de la mano con la metodología PACIE, es importante tener una planificación educativa, ya sea esta dada con lineamientos a los que se debe regir la institución o adecuada por el docente. Es necesario tener una planificación, ya que no solo identificamos tiempo, recursos, destrezas, técnicas e instrumentos de evaluación, sino que también se describen las construcciones mentales que se plantean en la descomposición genética. En este caso se creó la planificación educativa.

<table>
<tr><td>Nombre de la institución:</td><td colspan="7">ESCUELA SUPERIOR POLÍTECNICA DE CHIMBORAZO</td></tr>
<tr><td>Nombre del Docente:
Celular:</td><td colspan="2">María José Mendoza Salazar
09 718 1436</td><td colspan="2">Fecha:</td><td colspan="3">7 enero 2024</td></tr>
<tr><td>Área:</td><td>Matemática</td><td>Grado/Curso:</td><td colspan="2">Cuarto Semestre</td><td colspan="2">Año lectivo:</td><td>Octubre 2023 – Marzo 2024</td></tr>
<tr><td>Asignatura:</td><td colspan="2">Álgebra Lineal I</td><td colspan="3">Tiempo:</td><td colspan="2">2h</td></tr>
<tr><td>Unidad didáctica:</td><td colspan="7">Diagonalización: Valores y vectores propios.</td></tr>
<tr><td>Objetivo de la unidad:</td><td colspan="7">Aplicar las definiciones de autovalores y autovectores de las matrices asociadas a las transformaciones lineales, para su análisis y cálculo correspondiente.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">¿Qué van a aprender?
DESTREZAS CON CRITERIOS DE DESEMPEÑO</td><td colspan="3" rowspan="2">¿Cómo van a aprender?
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE
(Estrategias Metodológicas)</td><td colspan="2" rowspan="2">¿Con que se va a aprender?
RECURSOS</td><td colspan="2">¿Qué y cómo evaluar?
EVALUACIÓN</td></tr>
<tr><td>Indicadores de logro</td><td>Técnicas e instrumentos de Evaluación</td></tr>
<tr><td>Indagar y explorar:
✍ Definiciones de valores propios, vectores propios y sus propiedades.
✍ Definición de matriz asociada en una transformación lineal.
✍ Polinomio característico.
✍ Cálculo de valores y vectores propios.
✍ Interpretación de resultados.</td><td colspan="3">ACTIVIDADES INICIALES
1.1Motivación
✍ Observar el video motivacional sobre las matemáticas. https://www.youtube.com/watch?v=JaM0kjtG-mQ
1.2. Prerrequisitos
✍ Álgebra Lineal: operaciones con matrices, cálculo del determinante, matriz identidad y la inversa de una matriz.
✍ Sistema de ecuaciones lineales: Saber resolver sistemas de ecuaciones lineales.
✍ Transformaciones Lineales: Saber que es una transformación y como se representa con matrices
✍ Polinomios: Saber cómo resolver ecuaciones polinómicas
1.3. Conocimientos previos</td><td colspan="2">✍ Texto
✍ Computador
✍ Celular
✍ Pantalla digital
✍ PDF sobre el tema
✍ Problemas e ejercicios
✍ Discusión en clase</td><td>✍ Determinar la base del espacio vectorial y representar los vectores.
✍ Encontrar la matriz asociada.
✍ Hallar los valores propios de las matrices.
✍ Desarrollar el polinomio característico, encontrar los vectores propios.</td><td>Técnica:
Prueba
Instrumento:
Cuestionario
Tarea asíncrona</td></tr>
</table>

Ilustración 2.2 Planificación 1

Realizado por: Sarango, T., 2024.

	Responder las siguientes preguntas: ✍ ¿Qué entiende por valores y vectores propios en el contexto de las transformaciones lineales? ✍ ¿Cuál es la relación entre los valores y vectores propios? ✍ ¿Qué es la matriz asociada a una transformación lineal? **1.4. Presentación del tema y objetivo de la clase.** ✍ Valores propios – vectores propios ✍ Dar a conocer de qué manera los conceptos de valores propios – vectores propios, parten a través de las Transformaciones Lineales. **ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE O DESARROLLO** **2.1. Etapa concreta** ✍ Reconocer, que un endomorfismo es un monomorfismo (o una transformación) de un objeto matemático así mismo. ✍ Identificar, que cualquier transformación lineal de un espacio vectorial a sí mismo es un endomorfismo. ✍ Determinar la base del espacio vectorial y representar los vectores ✍ Desarrollado el polinomio característico y darle la solución se identificar sus raíces, para proceder a calcular el vector propio de cada raíz y resolver el sistema siguiente $(A - I \curlywedge)x = 0$ ✍ Sea el endomorfismo $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y definido por $T(a, b) = (4a + 3b), (3a - 4b)$, hallar la matriz asociada a $T\ con$ respecto a la base canónica $\mathbb{R}^2$ y determinar los valores y			

Ilustración 2.3 Continuación Planificación 2

Realizado por: Sarango, T., 2024.

	vectores propios. **3. ACTIVIDADES FINALES O DE CIERRE** **3.1. Etapa de consolidación** ✍ Ingresar al siguiente enlace: ✍ https://cided.info/moodle/course/modedit.php?update=4394&return=0&sr=0, donde habrá una tarea asíncrona. **4. BIBLIOGRAFIAS:** ○ Grossman, S. (2012). *Álgebra Lineal (7ma. ed.).* México: McGraw-Hill ○ Núñez, L. A. (2019). Álgebra lineal . Universidad Abierta para Adultos (UAPA).			

Ilustración 2.4 Continuación Planificación 3

Realizado por: Sarango, T., 2024.

2.11 Esquemas mentales (DG)

2.11.1 E1: Conocimientos previos para el concepto de los Valores y Vectores Propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales

1. **Álgebra Lineal:** El estudiante debe comprender las operaciones básicas con matrices, como la suma, resta, multiplicación y cálculo del determinante. También debe estar

familiarizado con la matriz identidad y la inversa de una matriz.

2. **Sistemas de Ecuaciones Lineales:** Para encontrar los vectores propios, debe resolver un sistema de ecuaciones lineales.

3. **Transformaciones Lineales:** Debe comprender qué es una transformación lineal y cómo se representa con matrices.

4. **Espacio vectorial:** Estructura algebraica creada a partir de un conjunto no vacío, una operación interna llamada suma y una operación externa llamada producto por un escalar

5. **Polinomios:** Necesita saber cómo resolver ecuaciones polinómicas, ya que los valores propios resuelven el polinomio característico de la matriz.

2.11.2 E2: Construcción de la descomposición genética del concepto de Valores y Vectores propios de las Matrices Asociadas a las Transformaciones Lineales, mediante la teoría APOE

Observación. A continuación el ejemplo que se tomó en cuenta para el desarrollo de la descomposición genética, al colectivo de estudio del $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, es el siguiente:

Ejemplo 14. Sea el endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y definido por:

$$T(a,b) = (4a + 3b, 3a - 4b).$$

1. **Acciones:** Para encontrar los valores y vectores propios.

   a) **Identificar la base del espacio vectorial y así representar los vectores.** Al aplicar la transformación a los vectores de la base, se podrá visualizar cómo la transformación afecta a los "bloques de construcción" del espacio.

   Sea el endomorfismo $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y definido por:

   $$T(a,b) = (4a + 3b, 3a - 4b).$$

   Ahora para hallar la matriz A asociada a T con respecto a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

Solución.

La matriz A asociada a T con respecto a la base;
$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 = \{(1,0),(0,1)\}$ se obtiene buscando la imagen de cada vector de la base mediante T y expresando como combinaciones lineales de los vectores de la base T de $\mathbb{R}^2$:

- La base canónica de $R^2 = (1,0) \rightarrow (4+0, 3-0) = (4,3)$.
- La base canónica dé $R^2 = (0,1) \rightarrow (0+3, 0-4) = (3,-4)$.

Entonces la matriz asociada es:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

b) **Una vez encontrada la matriz asociada de** A **se procede a buscar la matriz** C**, asociada a** T **con respecto a la base**;
$B = \{(-1,0),(1,-2)\}$

Solución.

La matriz C asociada a T con respecto a la base,
$B = \{(-1,0),(1,-2)\}$, se obtiene buscando la imagen de cada vector de la base mediante T y expresando dichas imágenes como combinación lineal de los vectores de la base B de $\mathbb{R}^2$:

Entonces:

- $T(-1,0) \rightarrow (-4+0, -3-0) = (-4,-3)$.
- $T(1,-2) \rightarrow (4-6, 3+8) = (-2,11)$.

Luego:

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 11 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 3 & -11 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-11}{2} \end{pmatrix}$$

Así C es la matriz asociada a T con respecto a la base B.

c) **Hallar los valores propios de las matrices A y C.**

Solución.

Polinomio característico de A.

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - 25$$

Polinomio característico de C.

$$P(\lambda) = det \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-11}{2} \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = det \begin{pmatrix} \frac{11}{2} - \lambda & \frac{-7}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{-11}{2} - \lambda \end{pmatrix}$$

$$P(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{11}{2} \\ -\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{-11}{2} \\ -\lambda \end{pmatrix} + \frac{21}{4}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 25$$

El polinomio característico es: $P(\lambda) = \lambda^2 - 25$; para solucionarlo, se necesita igualar a cero y resolver para (λ):

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 25 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 25 \Rightarrow \lambda = \pm\sqrt{25} \Rightarrow \lambda = \pm 5$$

d) **Desarrollado el polinomio característico, se procede a encontrar los vectores propios de A.**

Una vez encontrado los valores propios se procede al resolver el sistema $(A - \lambda I)x = 0$, donde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, es decir, se resuelve el sistema:

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & 3 \\ 3 & -4-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Para $\lambda_1 = 5$

  Solución.

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 & +3x_2 & = 0 \\ 3x_1 & -9x_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 3x_2$$

  Por lo tanto, cuando $\lambda_1 = 5$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_2 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{con } x_2 \neq 0$$

- Para $\lambda_1 = -5$

  Solución.

$$\begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 & +3x_2 & = 0 \\ 3x_1 & x_2 & = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2 = 3x_1$$

  Por lo tanto, cuando $\lambda_1 = -5$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 3x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \text{con } x_1 \neq 0$$

2. **Procesos:** Que se representa en los valores y vectores propios.

   a) En la Interiorización de **a** y **b**, es esencial que el estudiante comprenda el concepto de una base en un espacio vectorial. Este entendimiento permitirá que aplique correctamente las transformaciones a los vectores de la base, preservando las operaciones de suma y multiplicación por un escalar, así dando un nuevo conjunto de vectores, por ejemplo como se observa en la acción **a** se está trabajando en los $\mathbb{R}^2$ y la base de sus vectores son: $\{(1,0)y(0,1)\}$.

   Además, es crucial entender que cada columna de la matriz asociada a una transformación lineal representa la imagen de un vector de la base de entrada, pero expresada en términos de la base de salida, siguiendo se debe tomar en cuenta que cada vector transformado puede ser expresado como una combinación lineal de los vectores de la base original. Una vez encontrados, estos coeficientes son los que forman las columnas de esta matriz, siendo esta la matriz asociada a la transformación lineal T con respecto a la base.

   b) En la Interiorización de **c y d**, el estudiante debe identificar que se requiere de una matriz cuadrada y conocer que el determinante de una matriz está relacionada con los valores propios y la traza de la matriz. El determinante de una matriz es el producto de sus valores propios, mientras que la traza de una matriz es la suma de sus valores propios y estas propiedades solo se definen para matrices cuadradas.

El contexto de las transformaciones lineales, el estudiante debe interiorizar que los valores propios representan las "direcciones" que no cambian cuando se aplica la transformación. Esto solo tiene sentido si la matriz que representa la transformación es cuadrada, ya que solo entonces la transformación mapea un espacio a sí mismo, una vez interiorizado estos conceptos el estudiante debe identificar cada uno de sus elementos y encontrar el polinomio característico $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$.

El estudiante como conocimientos previos debe saber sobre la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y así resolver la ecuación característica $P(\lambda) = 0$ y encontrar sus raíces, estas raíces que son los valores propios de la matriz y, por lo tanto, de las transformaciones lineales, además, deben saber identificar si estas raíces son todas reales, diferentes, repetidas o complejas.

Una vez encontrados los valores propios, y haber interiorizado los literales **a**, **b** y **c**, se procede a encontrar los vectores propios. Para cada valor propio, resuelve el sistema de ecuaciones lineales dado por $(A - \lambda I)x = 0)$, donde (v) es el vector propio que se está buscando. Este sistema normalmente tiene infinitas soluciones, y cualquier solución no nula es un vector propio.

3. **Objetos:**

   a) **Encapsulación de la matriz asociada:** Sobre como la transformación lineal actúa sobre los vectores en un espacio vectorial y cada columna de la matriz asociada representa la imagen de un vector de la base de entrada, expresada en términos de la base de salida y además que la multiplicación de la matriz asociada por un vector del espacio de entrada produce el vector transformado en el espacio de salida: $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

b) **Encapsulación de los valores propios** (λ)**:** de una matriz, son escalares que satisfacen el polinomio característico de la matriz. En el contexto de las transformaciones lineales, un valor propio es un escalar que multiplica un vector propio durante la transformación.

c) **Encapsulación de los vectores propios** $\{x_1, x_2 \cdots\}$**:** vectores que, cuando se transforman por una transformación lineal, resultan en un múltiplo escalar de sí mismos. En otras palabras, no cambian de dirección durante la transformación.

d) **Encapsulación:** de que los valores y vectores propios son fundamentales para entender cómo una transformación lineal actúa sobre diferentes vectores en un espacio vectorial.

Observación. En la desen-capsulación, se da cuando el individuo necesita regresar al Proceso que dio origen al Objeto, siempre que sea necesario, en otras palabras de la encap-sulación va a la desen-capsulación y así se repite.

2.12 Forma de evaluar mi descomposición genética

2.12.1 Ciclo de enseñanza (ACE)

1. **Estudiantes:** La investigación se realizó al cursado de la asignatura de Álgebra Lineal II, que corresponde al cuarto semestre de la carrera de Matemática de la ESPOCH, el colectivo de estudio estuvo integrada por 11 estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

2. **Actividades en clase:** Se impartió el tema propuesto por la Docente en una master clase, aplicando la descomposición genética refinada antes diseñada y con ayuda de una presentación. La clase se grabó y está subida en un repositorio de Drive. Además, en el bloque académico del Moodle se implementó:

   a) Video de apoyo.

   b) Material teórico sobre valores y vectores propios de las matrices asociadas a las transformaciones lineales.

   c) Conocimiento del artículo: "Mental Constructs Associated With Eigenvalues And Eigenvectors: Refining A Cognitive Model"; Álgebra Lineal sub área Vectores y Valores Propios, Transformaciones Lineales.

3. **Discusión en clase:** Para la interacción de los estudiantes se implementó:

   a) **Chat grupal:** Dudas de la clase.

   b) **Foro:** ¿Cómo se interpreta geométricamente los valores y vectores propios de las matrices asociadas a las transformaciones lineales?

   c) Glosario.

4. **Ejercicios:** Para finalizar la intervención ante los estudiantes se les propuso un Post Test, adicional, en el bloque de cierre del Moodle una tarea que constó de 3 preguntas y así visualizar si se logró el objetivo de utilizar la teoría APOE para una primera representación de la forma de enseñar los valores y vectores propios de las matrices asociadas a las transformaciones lineales.

   Los resultados se los analizó mediante la prueba de la *U de Mann-Whitney* con el software libre de *R* .

2.12.2 Prueba de diagnóstico (Pre Test)

Contiene cinco preguntas, de las cuales tres son de selección múltiples, una aplicativa y otra de reflexión. El pre test se puede evidenciar en el siguiente anexo que se encuentra en el TIC:

Nota.
ANEXO E: PRUEBA DE DIAGNÓSTICO (PRE TEST), PRUEBA DE CONOCIMIENTOS FINAL (POST TEST), TAREA ASÍNCRONA

2.12.3 Preguntas para la prueba final (Post Test)

Estuvo compuesta por cinco preguntas, de las cuales, la primera es dominio de conceptos sobre base del espacio vectorial y lo que es un endomorfismo, se trató de intuir a los estudiantes a la reflexión del porqué $T(x, y)$ y no $T(a, b)$. Las siguientes dos preguntas son aplicativas, los estudiantes tienen que desarrollar el polinomio característico para encontrar los valores propios y luego la ecuación característica para hallar los vectores propios, por último, las dos preguntas restantes son de reflexión. El post test se puede evidenciar en el siguiente anexo que se encuentra en el TIC:

Nota.
ANEXO E: PRUEBA DE DIAGNÓSTICO (PRE TEST), PRUEBA DE CONOCIMIENTOS FINAL (POST TEST), TAREA ASÍNCRONA

2.12.4 Preguntas para la tarea asíncrona

La tarea asíncrona, fue una actividad individual, mediante el método de ciclo de enseñanza *ACE*, se plantearon tres problemas, donde se evaluó el desarrollo e interpretación de como los estudiantes interiorizaron cada uno de sus procesos al momento de transformar sus acciones. La tarea asíncrona se puede evidenciar en el siguiente anexo que se encuentra en el TIC:

Nota.
ANEXO E: PRUEBA DE DIAGNÓSTICO (PRE TEST), PRUEBA DE CONOCIMIENTOS FINAL (POST TEST), TAREA ASÍNCRONA

2.12.5 Proceso de calificación

El proceso de calificación se desarrolló en una escala de 10/10 para el **Pre Test, Post Test, Tarea Asíncrona** y se encuentra en el siguiente enlace `https://drive.google.com/drive/folders/1zF5SLFkkDV5U88GSu7fCmOaQNWsz9XPk?usp=sharing`, además, están designados con los siguientes nombres:

- Prueba de Diagnóstico en físico (Pre Test).
- Prueba Final en físico (Pre Test).
- Tarea asíncrona en físico.

2.13 Metodología PACIE

Las siguientes capturas son el proceso en la elaboración, para gestionar la plataforma de aprendizaje (*Moodle*). se utilizó la metodología PACIE, surge de la necesidad educativa, para el diseño y adecuación de las Tecnologías de Información y Comunicación *TIC'S*, así como de las herramientas virtuales (aulas virtuales) en el proceso de enseñanza y aprendizaje en sus modalidades presenciales, semipresenciales o a distancia.

En la **Ilustración 2-5**, se observa la página principal del sitio `https://cided.info/moodle/course/view.php?id=111`, donde se evidencia el curso disponible para $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH, con el nombre de "TEORÍA APOE: TRANSFORMACIONES LINEALES" y además, cuenta con una breve descripción del tema.

Ilustración 2.5 Moodle: Curso

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-6**, **Ilustración 2-7** y **Ilustración 2-8**, se empezó a adecuar el *Moodle: 0 PACIE*, de la siguiente manera, a continuación se detalla:

1. **INFORMACIÓN**:
   - Descripción del tema.
   - Datos del moderador.
   - Video motivacional.
2. **COMUNICACIÓN:**
   - Cartelera en línea.
3. **INTERACCIÓN:**
   - Cafetín virtual.
   - Prueba de diagnóstico.
   - Planificación.

Ilustración 2.6 Moodle: Bloque PACIE 0

Realizado por: Sarango, T., 2024.

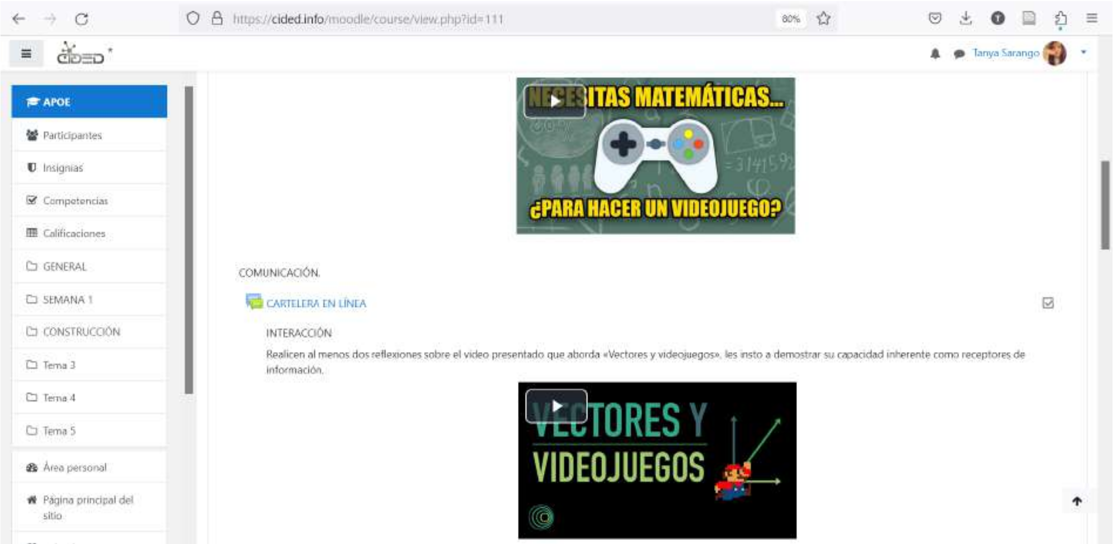


Ilustración 2.7 Moodle: Bloque PACIE 1

Realizado por: Sarango, T., 2024.

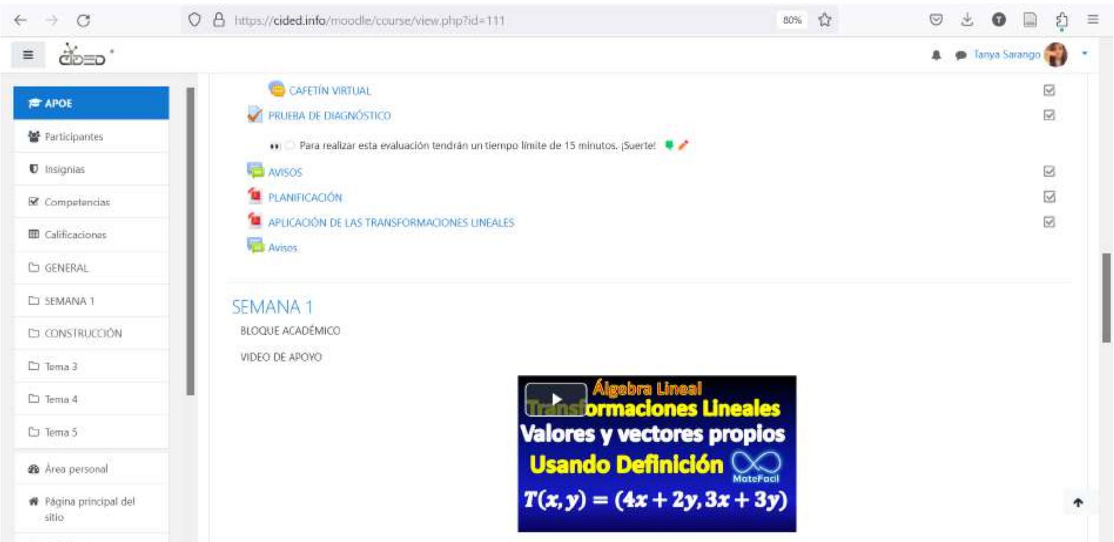


Ilustración 2.8 Moodle: Bloque ACADÉMICO

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-8**, se encuentra una parte del siguiente bloque que es el Académico. Para continuar con la **Ilustración 2-9** e **Ilustración 2-10**, se adecuó el *Moodle: Académico* de la siguiente manera, a continuación se detalla:

1. **Exposición:**
   - Video de apoyo sobre los valores y vectores propios a partir de las transformaciones lineales.
   - PDF, papers.
   - Chat grupal para contestar dudas sobre la clase.
2. **Construcción:**
   - Foro de la clase: ¿Cómo se interpreta geométricamente los Vectores y Valores propios en una transformación lineal?
   - Glosario: Escribir aquellas definiciones sobre los temas más importantes que se habló en clases.
3. **Comprobación:**
   - Prueba final.

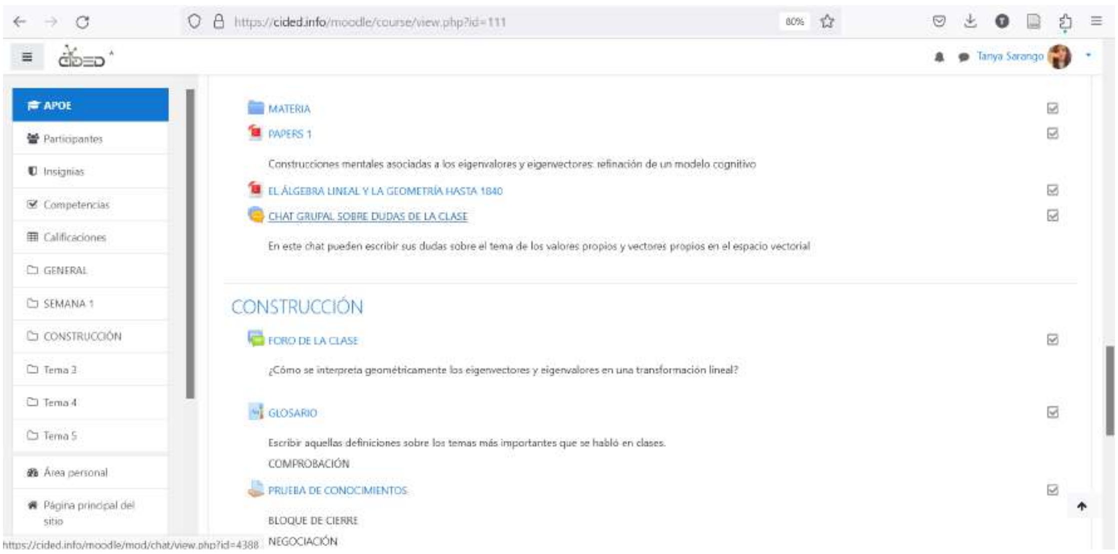


Ilustración 2.9 Moodle: Continuación Bloque Académico

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-9**, se evidencia una parte del siguiente bloque que es el de Cierre. Para continuar con la **Ilustración 2-9** e **Ilustración 2-10**, se adecuó el *Moodle: Cierre*, de la siguiente manera, a continuación se detalla:

1. **Negociación:**
   - WIKI, para recuperación de notas.
2. **Retroalimentación:**
   - **Ayúdame a mejorar:** ¿Cuáles fueron los elementos de la clase que te parecieron más retadores o complicados de entender?, Por favor, ingresa 1 si consideras que el material de estudio fue buena. Si crees que el material de estudio estuvo casi bien, ingresa 2. En caso de que el material de estudio no haya sido buena, ingresa 3.
   - **Tarea Asíncrona:** Una vez explicado las definiciones sobre los valores y vectores propios, se pidió realizar 3 ejercicios.

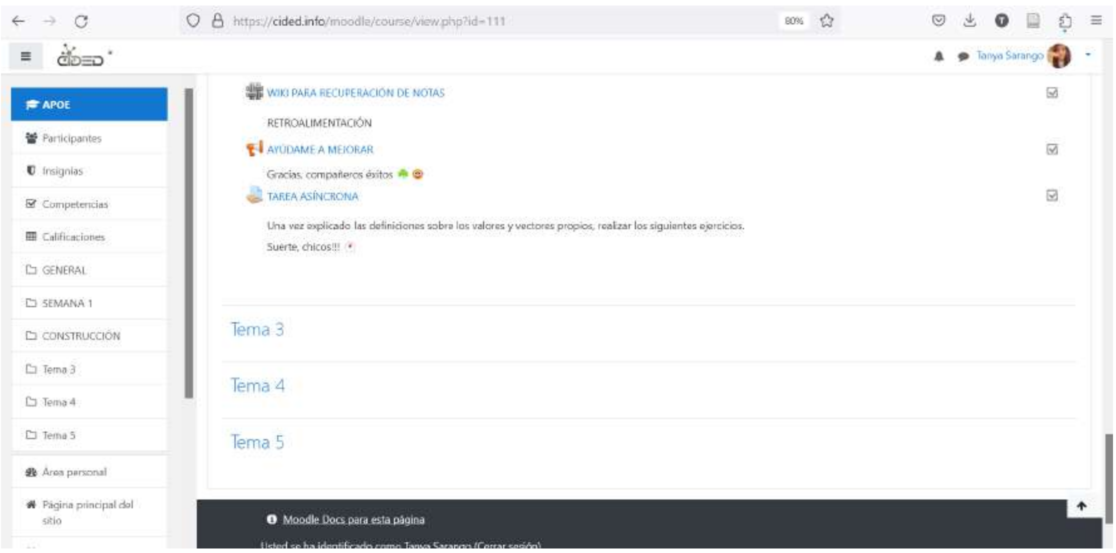
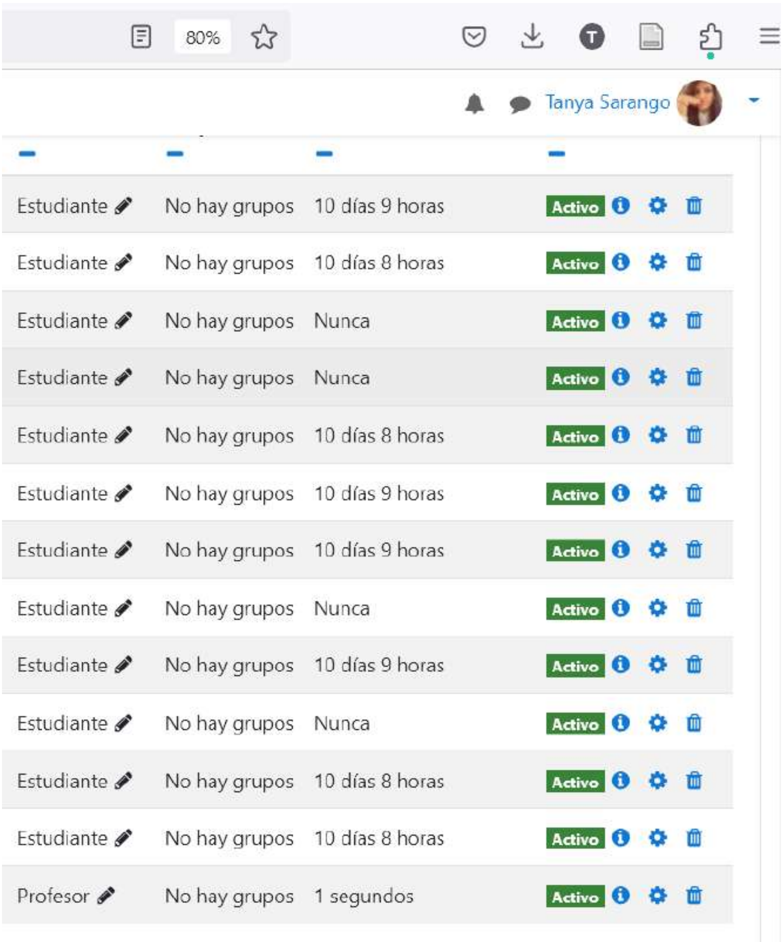


Ilustración 2.10 Moodle: Cierre

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-11** e **Ilustración 2-12** se observa el colectivo de estudio del $4^{\underline{to}}$ semestre de la carrera de matemática de la ESPOCH y con un total de 11 estudiantes matriculados en *Moodle* e identificados por su nombre, apellido y correo institucional respectivo. Además, existen 2 estudiantes que no tuvieron acceso a la plataforma, pero se logró mediar la situación, mediante las participaciones en físico y adecuándonos a la necesidad del estudiante por no contar con el equipo necesario, u otra razón, a continuación se detalla:



Estudiante	No hay grupos	10 días 9 horas	Activo
Estudiante	No hay grupos	10 días 8 horas	Activo
Estudiante	No hay grupos	Nunca	Activo
Estudiante	No hay grupos	Nunca	Activo
Estudiante	No hay grupos	10 días 8 horas	Activo
Estudiante	No hay grupos	10 días 9 horas	Activo
Estudiante	No hay grupos	10 días 9 horas	Activo
Estudiante	No hay grupos	Nunca	Activo
Estudiante	No hay grupos	10 días 9 horas	Activo
Estudiante	No hay grupos	Nunca	Activo
Estudiante	No hay grupos	10 días 8 horas	Activo
Estudiante	No hay grupos	10 días 8 horas	Activo
Profesor	No hay grupos	1 segundos	Activo

Ilustración 2.11 Estudiantes matriculados activos

Realizado por: Sarango, T., 2024.

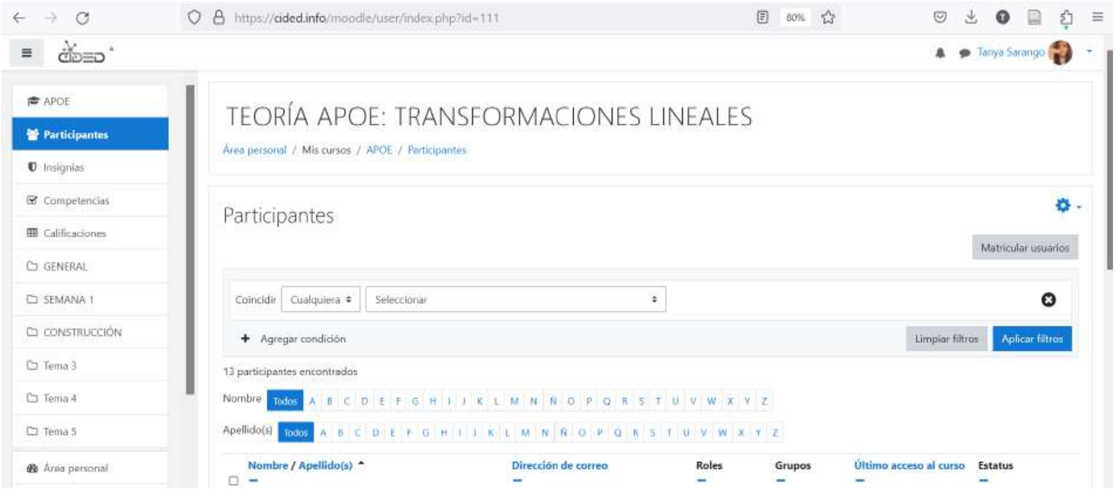


Ilustración 2.12 Estudiantes matriculados con su nombre y apellido

Realizado por: Sarango, T., 2024.

2.14 Datos generados

2.14.1 Lista de estudiantes

Se los denominó a las siguientes siglas **PE1 - PC1**, como: **PE1:** Participante del Grupo Experimental 1, 2, 3, 4, 5, 6 y **PC1:** Participante del Grupo de Control 1, 2, 3, 4, 5.

Tabla 2.1 Colectivo de estudio del 4^{to} semestre

N°	PE1	PE2	PE3	PE4	PE5	PE6
	PC1	PC2	PC3	PC4	PC5	

Realizado por: Sarango, T., 2024.

2.15 Prueba (Pre Test): Grupo Experimental y de Control

A continuación se utilizó el diagrama de cajas (*boxplot*), para representar gráficamente los resultados de la prueba de diagnóstico de ambos grupos, impartidos al 4^{to} semestre.

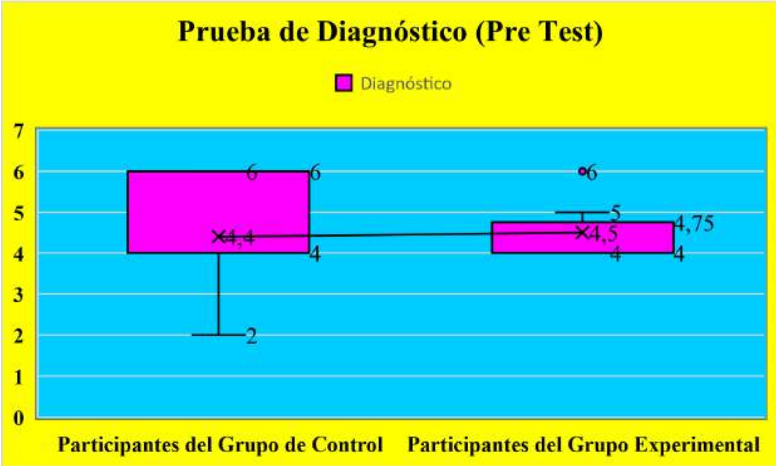


Ilustración 2.13 Boxplot del Pre Test: del grupo de control y del grupo experimental

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-13**, en el **Grupo de Control**, el bigote inferior del gráfico de caja y bigotes se extiende hasta el valor de 2, lo que indica la puntuación más baja registrada. El grupo presenta uno, dos y tres cuartiles, reflejando la distribución de los datos en tres puntos de corte. La varianza dentro del grupo alcanza su punto máximo en 6, mostrando la puntuación más alta obtenida. El promedio de las puntuaciones es de $4,4$, mientras que la mediana representa el valor central de los datos y se sitúa en 4.

Además, en el **Grupo Experimental**, el bigote superior del gráfico de caja y bigotes alcanza una puntuación de 6, lo que indica la puntuación más alta dentro del grupo, se evidenció un valor atípico y se encuentra en el 6. El promedio de este grupo es de $4,5$. Es notable que las medianas en ambos grupos son consistentes, ubicándose en un valor de 4.

2.16 Proceso de la clase según la planificación

La clase se impartió el día miércoles 7 de febrero del 2024, en horario de clases 11 a 2 pm, en el aula $FA - 201$ del edificio de matemática de la ESPOCH.

Ilustración 2.14 Estudiantes realizando el (Pre Test)

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Ilustración 2.15 Docente, iniciando la clase al colectivo de estudio del $4^{\underline{to}}$ semestre

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-16**, se logró el interés de los estudiantes, motivo por el cuál es importante generar la atención por medio de un video motivacional, para empezar la cátedra sobre los temas que se enseñan.

Por lo que se generó la siguiente pregunta a los estudiantes. ¿Es importante saber matemáticas para hacer videojuegos?

En la **Ilustración 2-17**, la docente explicó verbalmente como la belleza y la estructura de una Transformación Lineal, hace referencia a un baile entre dimensiones, donde cada paso es calculado y cada giro es preciso, permitiendo que la música de los vectores se eleve desde el papel pautado de (V) hasta el gran auditorio dé (W).

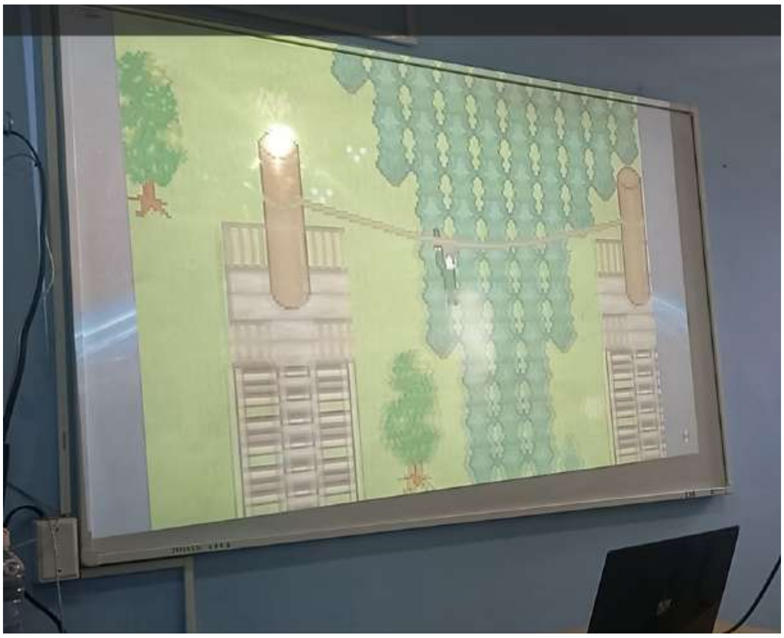


Ilustración 2.16 Impartiendo el video motivacional

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Ilustración 2.17 Explicación de una Transformación Lineal

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Ilustración 2.18 Representación de una Transformación Lineal

Realizado por: Sarango, T., 2024.

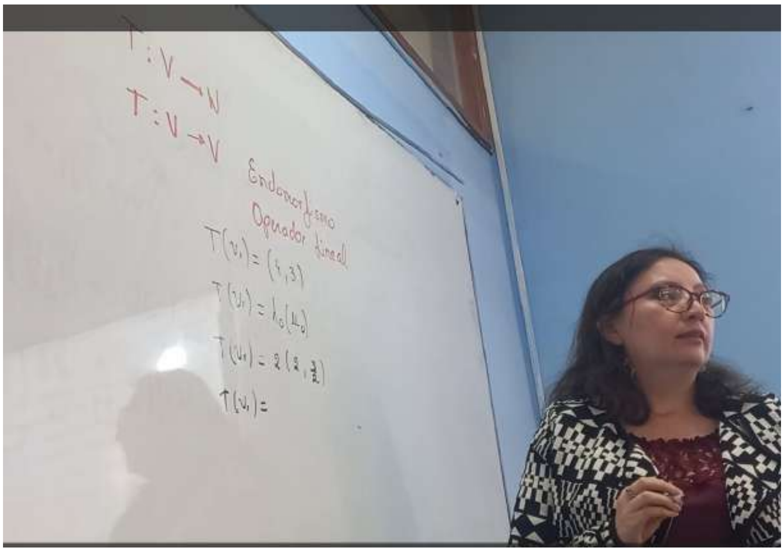


Ilustración 2.19 Matriz asociada a la Transformación Lineal

Realizado por: Sarango, T., 2024.

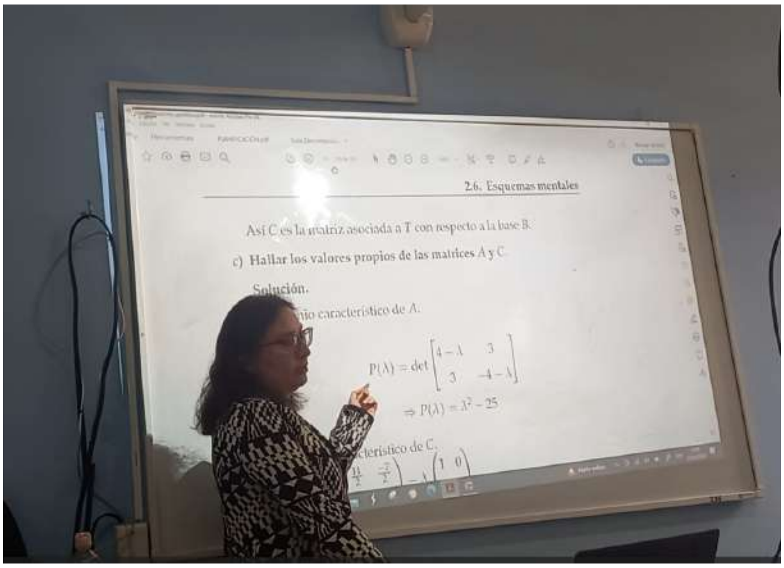


Ilustración 2.20 Explicación del polinomio característico

Realizado por: Sarango, T., 2024.

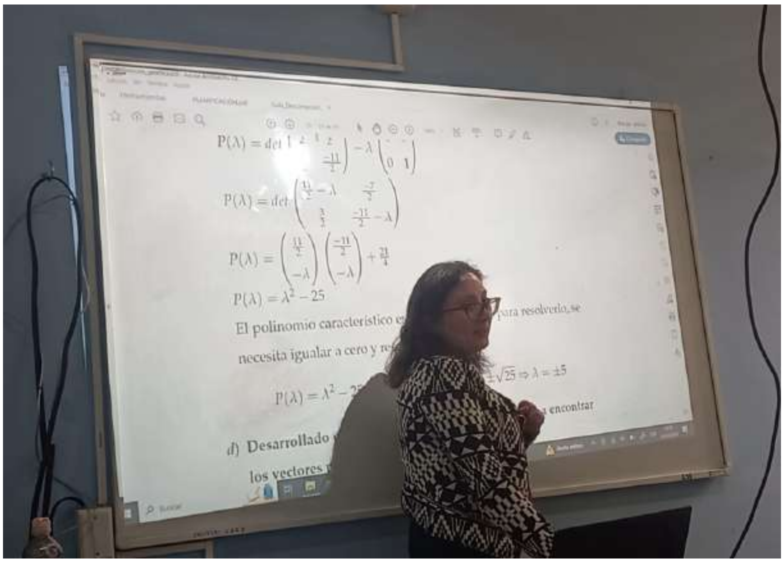


Ilustración 2.21 Obtención de los valores propios con el polinomio característico

Realizado por: Sarango, T., 2024.

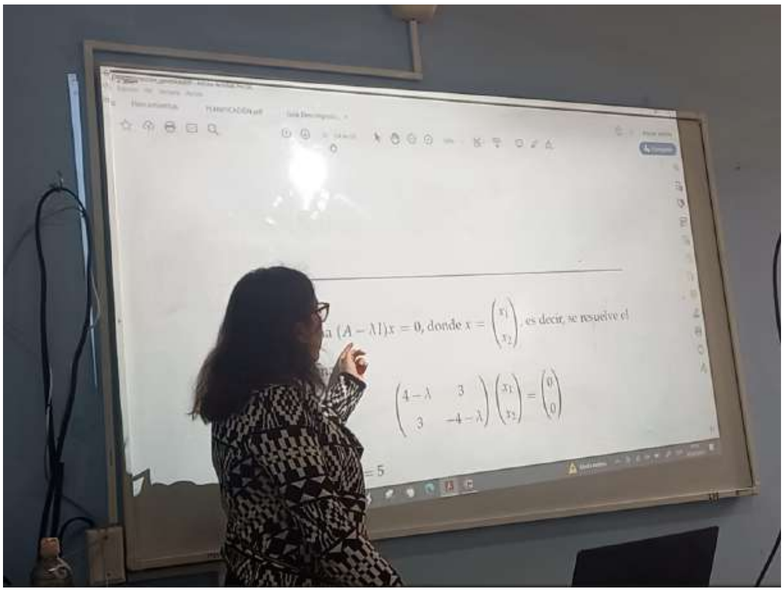


Ilustración 2.22 Explicación de la ecuación característica

Realizado por: Sarango, T., 2024.

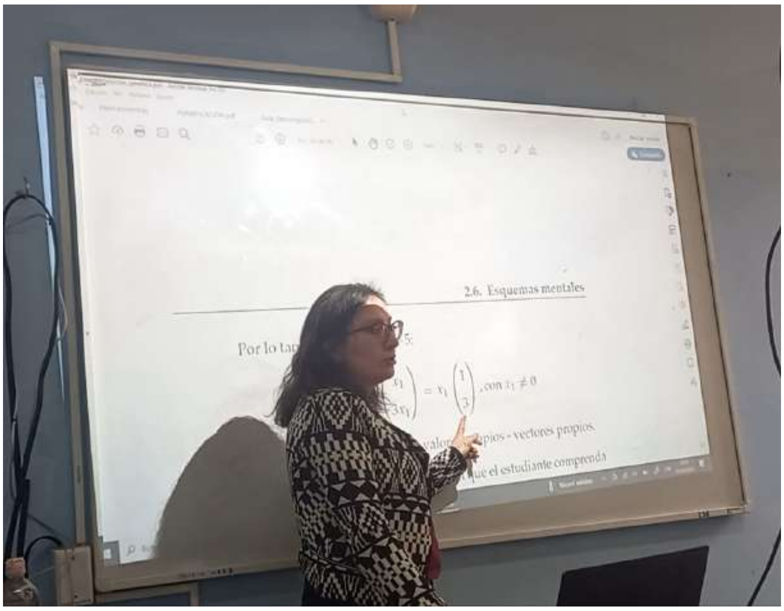


Ilustración 2.23 Exposición de como se obtiene el vector propio

Realizado por: Sarango, T., 2024.

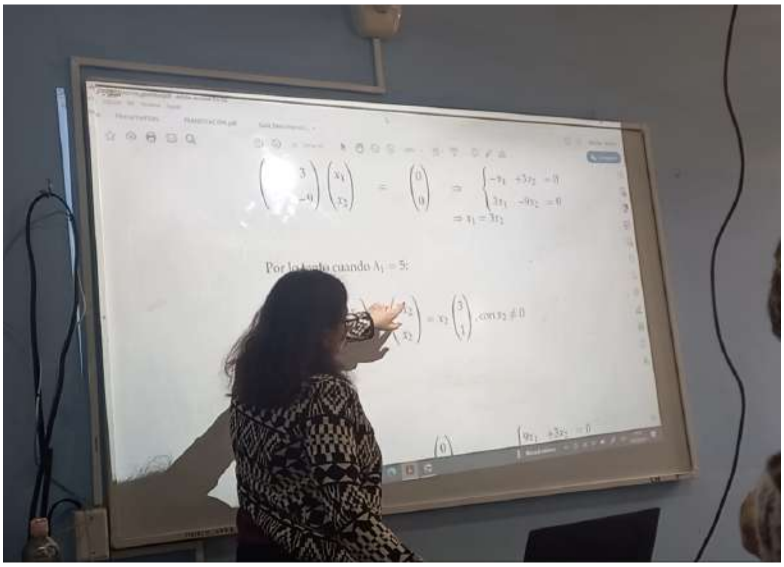


Ilustración 2.24 Explicación de que cada lamba le pertenece un vector

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-25**, la Docente realizó una retroalimentación general del tema. Además, fue muy importante para el proceso y aprendizaje de los estudiantes.

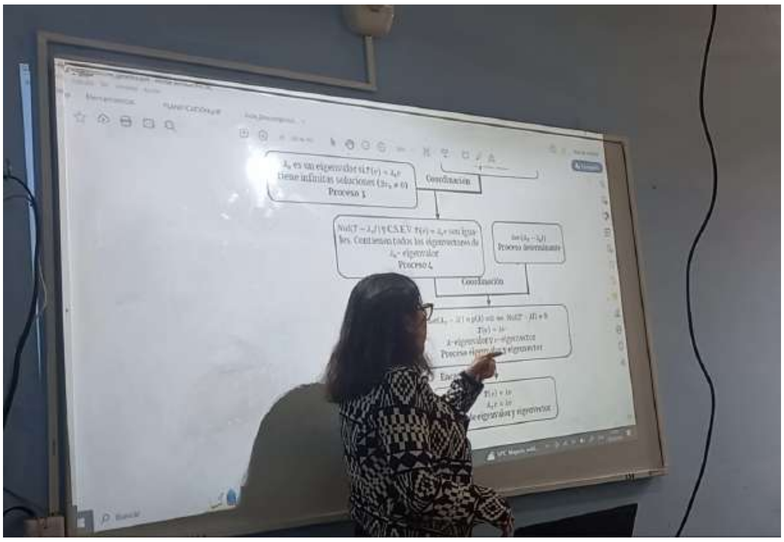


Ilustración 2.25 Retroalimentación de la clase
Realizado por: Sarango, T., 2024.

Ilustración 2.26 Estudiantes realizando la prueba final (Post Test)
Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-27**, se evidencia la creación de un grupo informativo como recurso de mensajería instantánea mediante la aplicación *WhatsApp*, con el objetivo de establecer una comunicación colaborativa con los estudiantes y recepción de participaciones en el cafetín virtual.

Ilustración 2.27 Grupo de *WhatsApp*

Realizado por: Sarango, T., 2024.

2.17 Prueba Final (Post Test): Grupo Experimental y de Control

Calificaciones y diagrama de caja del Post Test correspondientes al 4^{to} semestre de la carrera de Matemática en la ESPOCH.

Tabla 2.2 Resultados cuantitativos del Post Test del Grupo Experimental y Grupo de Control

Post Test: Grupo Experimental	
	Sobre 10
Código	**Nota**
PE1	9,33
PE2	10
PE3	7,33
PE4	9,33
PE5	6,66
PE6	5,33
Total	**48,0**
Promedio	**8,0**
Mediana	**8,3**

Post Test: Grupo de Control	
	Sobre 10
Código	**Nota**
PC1	4,66
PC2	4,66
PC3	4,66
PC4	7,33
PC5	9,33
Total	**30,6**
Promedio	**6,1**
Mediana	**4,7**

Realizado por: Sarango, T., 2024.

Además, se empleó el diagrama de cajas (*boxplot*), para ilustrar visualmente los resultados de la prueba final de ambos grupos, correspondientes al $4^{\overline{to}}$ semestre.

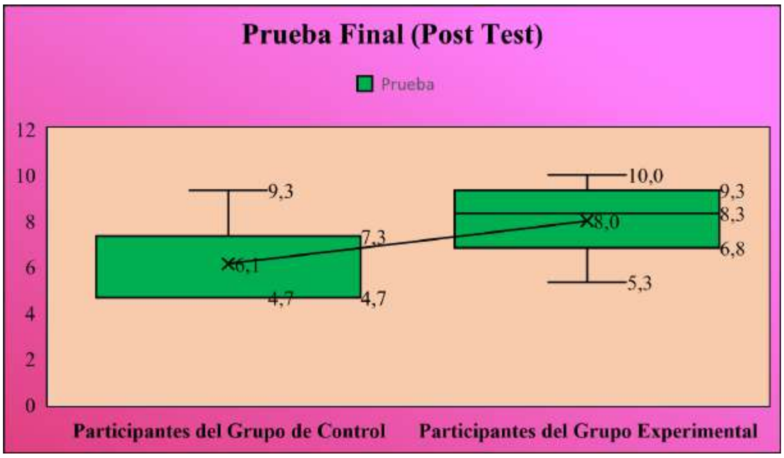


Ilustración 2.28 Boxplot del Post Test: del grupo de control y del grupo experimental

Realizado por: Sarango, T., 2024.

En la **Ilustración 2-28**, los participantes del **Grupo de Control**, cuenta con un bigote superior de $9,33$ y un promedio de $6,13$.

En el **Grupo Experimental**, se evidencia uno, dos y tres cuartiles, reflejando la distribución de las puntuaciones. El promedio del Grupo Experimental es de 8, superando al del Grupo de Control. De manera similar, la mediana del Grupo Experimental, fue de $8,3$, excediendo a la del Grupo de Control, que fue de $4,7$, lo que indica que los estudiantes del Grupo Experimental muestran un rendimiento superior.

Bibliografía

[B22] Betancur Sánchez, A., et al. (2022). *"Construcciones mentales asociadas a los eigenvalores y eigenvectores: refinación de un modelo cognitivo. Avances De Investigación En Educación Matemática"*, (22), 23–46. Disponible: `https://doi.org/10.35763/aiem22.4005`

[G08] Grossman, S. I. (2008). *"Álgebra lineal"*. McGraw Hill Educación. Disponible: `https://www.academia.edu/45666196/%C3%81lgebra_lineal_7_Ed_Stanley_I_Grossman`

[N19] Nuñez, L. (2019).*"Álgebra lineal"*. Universidad Abierta para Adultos (UAPA). Disponible: `https://elibro.net/es/ereader/espoch/176649?page=212`

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO

Fecha de entrega: 02/ 08 / 2024

INFORMACIÓN DEL AUTOR
Nombres – Apellidos: Tanya Johana Sarango Jumbo
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemática
Dr. Rubén Antonio Pazmiño Maji. PhD. Director de Trabajo de Integración Curricular **Ing. María de Lourdes Palacios Robalino. MSc. Asesor de Trabajo de Integración Curricular**