



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**“COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN PARA
DATOS DE TEMPERATURA PROVENIENTES DE LAS
ESTACIONES METEOROLÓGICAS DE LA PROVINCIA DE
CHIMBORAZO”**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTORA:

PAMELA NICOLE ALEGRÍA NARANJO

Riobamba – Ecuador

2024



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**“COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN PARA
DATOS DE TEMPERATURA PROVENIENTES DE LAS
ESTACIONES METEOROLÓGICAS DE LA PROVINCIA DE
CHIMBORAZO”**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTORA: PAMELA NICOLE ALEGRÍA NARANJO

DIRECTORA: ING. CRISTINA ESTEFANÍA RAMOS ARAUJO, MSc.

Riobamba – Ecuador

2024

©2024, Pamela Nicole Alegría Naranjo

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Pamela Nicole Alegría Naranjo, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 10 de junio de 2024



Pamela Nicole Alegría Naranjo

180529764-3

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **COMPARACIÓN DE MÉTODOS DE INTERPOLACIÓN PARA DATOS DE TEMPERATURA PROVENIENTES DE LAS ESTACIONES METEOROLÓGICAS DE LA PROVINCIA DE CHIMBORAZO**, realizado por: **PAMELA NICOLE ALEGRÍA NARANJO**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Ing. María de Lourdes Palacios, MSc. PRESIDENTE DEL TRIBUNAL		2024-06-10
Ing. Cristina Ramos Araujo, MSc. DIRECTORA DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2024-06-10
Ing. Alex Pozo Valdiviezo, MSc. ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2024-06-10

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	vii
ÍNDICE DE TABLAS	ix
ÍNDICE DE ANEXOS	x
RESUMEN	xi
ABSTRACT	xii
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1. Planteamiento del problema	3
1.2. Objetivos	3
1.2.1. <i>Objetivo general</i>	3
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	3
1.3. Justificación	4

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. Antecedentes	5
2.2. Interpolación	6
2.2.1. <i>Método de interpolación polinómica</i>	7
2.2.1.1. <i>Método de interpolación: Splines cúbicos</i>	13
2.2.1.2. <i>Propiedades de los Splines cúbicos</i>	16
2.2.2. <i>Método de interpolación espacial</i>	29
2.2.2.1. <i>Interpolación de puntos</i>	30
2.2.2.2. <i>Método de Barnes</i>	49
2.2.2.3. <i>Propiedades del Método de Barnes</i>	57

CAPÍTULO III

3.	MARCO METODOLÓGICO	62
3.1.	Descripción del diseño, enfoque y alcance	62

CAPÍTULO IV

4.	MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	64
4.1.	Comparación de las propiedades de los métodos de interpolación	64
4.2.	Datos de la variable temperatura	66
4.3.	Procesamiento, análisis e interpretación de resultados	67
4.3.1.	<i>Implementación de los métodos para la variable de temperatura en la provincia de Chimborazo</i>	67
4.3.1.1.	<i>Implementación de Splines cúbicos</i>	67
4.3.1.2.	<i>Implementación de método de Barnes</i>	74
4.3.1.3.	<i>Validación de los métodos</i>	78

CAPÍTULO V

5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	79
5.1.	Conclusiones	79
5.2.	Recomendaciones	80

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1-2: Ejemplo de una función interpolante	7
Ilustración 2-2: Ejemplo de un polinomio interpolador	8
Ilustración 3-2: Método de Lagrange con los datos empleados	12
Ilustración 4-2: Gráfica de un Spline cúbico	14
Ilustración 5-2: Diferencias entre puntos consecutivos (h)	17
Ilustración 6-2: Cota del error para Splines cúbicos	19
Ilustración 7-2: Tipos de interpolación espacial.	30
Ilustración 8-2: Ejemplo de una onda	35
Ilustración 9-2: Ejemplificación de la cuerda vibrante	36
Ilustración 10-2: Ecuación de onda.	36
Ilustración 11-2: Función periódica	39
Ilustración 12-2: Onda armónica en un cierto instante de tiempo	41
Ilustración 13-2: Dato de punto observado	53
Ilustración 14-2: Longitud de la Onda	54
Ilustración 15-2: Cota del error. Método de Barnes	59
Ilustración 1-4: E. Chocavi - Junio,2022	68
Ilustración 2-4: E.Alao - Enero, 2014	68
Ilustración 3-4: E. Atillo - Septiembre, 2014	68
Ilustración 4-4: E. Cumanda - Enero, 2014	69
Ilustración 5-4: E. Matus- Octubre, 2021	69
Ilustración 6-4: E.Multitud - Septiembre, 2018	69
Ilustración 7-4: E.Quimiag - Noviembre 2017.	70
Ilustración 8-4: E.San Juan - junio, 2018.	70
Ilustración 9-4: E.Tixan - Agosto, 2018.	70
Ilustración 10-4: E.Tunshi - Julio, 2018.	71
Ilustración 11-4: E.Cumanda - Enero,2014	71
Ilustración 12-4: E.Cumanda - Noviembre, 2021	72
Ilustración 13-4: E.Cumanda - Diciembre, 2015	73
Ilustración 14-4: E.Atillo - Diciembre, 2017	73
Ilustración 15-4: E.Alao - Enero, 2014 (Método de Barnes)	74
Ilustración 16-4: E.Atillo - Septiembre, 2014 (Método de Barnes)	74
Ilustración 17-4: E.Matus - Diciembre, 2018 (Método de Barnes)	75

Ilustración 18-4: E.Multitud - Septiembre, 2018 (Método de Barnes)	75
Ilustración 19-4: E.Quimiag - Noviembre , 2017 (Método de Barnes)	75
Ilustración 20-4: E.San Juan - junio , 2018 (Método de Barnes)	76
Ilustración 21-4: E.Tixan - Agosto , 2018 (Método de Barnes)	76
Ilustración 22-4: E.Tunshi - Julio , 2018 (Método de Barnes)	76
Ilustración 23-4: E.Urbina - Noviembre, 2017(Método de Barnes)	77
Ilustración 24-4: E.Cumanda- Junio, 2021(Método de Barnes)	77

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1: Conjunto de datos (Ejemplo Lagrange)	11
Tabla 2-2: Tabla de valores	15
Tabla 4-1: Comparación de las propiedades de los métodos de interpolación	65
Tabla 4-2: Estaciones Meteorológicas de la provincia de Chimborazo	66
Tabla 4-3: Porcentaje de datos faltantes por estación	67
Tabla 4-4: Comparación del error por (MSE)	78

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A: IMPLEMENTACIÓN DE SPLINES CUBICOS

ANEXO B: IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE BARNES

RESUMEN

El grupo de investigación de energías alternativas y ambiente GEAA tiene a su cargo 11 estaciones meteorológicas que se encuentran distribuidas en la provincia de Chimborazo, por falta de mantenimiento de estas existe series temporales con grandes porcentajes de datos faltantes impidiendo que se realice estudios más detallados de la variable temperatura de la provincia. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo de investigación fue comparar dos métodos de interpolación con la finalidad de elegir el mejor para proceder a rellenar las series temporales de la variable en cuestión. La metodología que se optó para realizar la presente investigación contiene un diseño documental con un enfoque mixto (cualitativo/cuantitativo) a un alcance descriptivo deductivo, debido a que se necesitó analizar de manera cualitativa las propiedades de los métodos y esto basado en el método descriptivo deductivo, paralelamente se empleó el enfoque cuantitativo ya que los métodos se implementaron en el lenguaje de programación Python, esto con el fin de rellenar los datos. Mediante esta metodología se logró determinar que el método Splines cúbicos es más preciso al momento de rellenar los datos debido a la convergencia de orden superior cuando el espaciado h se reduce, además en la parte práctica se detectó que si bien los métodos realizan un satisfactorio relleno de datos también tienen sus limitaciones cuando se encuentran frente a un intervalo vasto de datos faltantes. En este contexto se concluye que el método de Splines cúbicos ofrece mejores garantías teóricas que el método de Barnes al igual que realiza un relleno de datos más preciso para esta variable atmosférica.

Palabras clave: <INTERPOLACIÓN>, <GEAA>, <PYTHON>, <VARIABLES ATMOSFERICAS>, <IMPLEMENTACIÓN>, <COMPARACIÓN DE MÉTODOS>.

0819-DBRA-UPT-2024

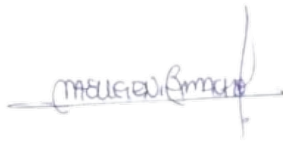


ABSTRACT

The Alternative Energies and Environment Research Group (GEAA) oversees 11 meteorological stations distributed across the province of Chimborazo. Due to the lack of maintenance, there are time series with significant percentages of missing data, preventing detailed studies of the temperature variable in the province. Therefore, the objective of this research was to compare two interpolation methods in order to select the most suitable one to fill in the time series of the temperature variable in question. The chosen methodology for this research includes a documentary design with a mixed approach (qualitative/quantitative) at a descriptive deductive level. This approach was necessary to qualitatively analyze the properties of the methods based on the descriptive deductive method. Simultaneously, a quantitative approach was used as the methods were implemented in the Python programming language to fill in the data. Through this methodology, it was determined that the cubic splines method is more accurate for data imputation due to its higher-order convergence as the spacing h is reduced. Additionally, the practical application revealed that while the methods provide satisfactory data filling, they also have limitations when confronted with a vast interval of missing data. In this context, it is concluded that the cubic splines method offers better theoretical guarantees compared to the Barnes method and achieves more precise data filling for this atmospheric variable.

Keywords: <INTERPOLATION>, <GEAA>, <PYTHON>, <ATMOSPHERIC VARIABLES>, <IMPLEMENTATION>, <METHOD COMPARISON>.

0819-DBRA-UPT-2024



Lcda. María Eugenia Camacho, M.Sc.

0601609597

INTRODUCCIÓN

Los métodos de interpolación juegan un papel fundamental en diversas áreas de investigación. En Ciencias de la Tierra y Geografía se aplica en estudios de calidad del aire, contaminación del agua y distribución de especies. En el ámbito de la ingeniería civil y la topografía generan modelos de superficie que son esenciales en el diseño de carreteras, obras hidráulicas, levantamientos topográficos y planificación urbana. En meteorología y climatología, se utilizan para estimar datos en ubicaciones no muestreadas, generar mapas continuos, identificar patrones espaciales y predecir condiciones meteorológicas (Raymond, 2009, p. 5).

En meteorología, se aplican en series temporales para obtener una función que describa el comportamiento calculando valores desconocidos a partir de valores conocidos. Estos métodos se emplean a variables de temperatura, precipitación, humedad relativa, radiación solar, velocidad de viento, entre otros (Anjomshoaa & Salmanzadeh, 2019). Entre las diversas técnicas de interpolación, se destacan algunas ampliamente reconocidas, como: lineal, segundo grado, Lagrange, espaciado uniforme, iterada, inversa, entre otras.

En particular los métodos de Barnes y Splines trabajan con fundamentos matemáticos. En el caso de Barnes, se basa en la premisa que las distribuciones de variables meteorológicas pueden representarse como una suma infinita de ondas armónicas independientes incorporando una función de ponderación gaussiana (Barnes, 1973). Mientras que el método de Splines Cúbicos, aborda aspectos clave como la construcción de la función cúbica (Vázquez, 2011).

Las estaciones meteorológicas registran información del estado de la atmosfera mediante instrumentos y sensores. Sin embargo, existe pérdida e invalidación de datos debido a la falta de financiamiento para la asistencia técnica y administrativa. En el año 2020 la pandemia por COVID-19 influyó en la planificación del mantenimiento de las estaciones. Por tanto, se realiza este estudio comparativo teórico - práctico de los métodos de interpolación de Barnes y Splines cúbicos con el propósito de encontrar una función que permita completar los valores faltantes de la variable temperatura.

El presente proyecto de investigación se compone de cinco capítulos, los cuales son detallados a continuación:

El capítulo I comprende la exposición y la justificación del problema, junto con los objetivos de la investigación, tanto el objetivo general como los cuatro específicos que se desprenden de él.

En el capítulo II se proporciona el marco teórico necesario para comprender los métodos de interpolación empleados. Este apartado incluye teoremas, demostraciones y ejemplos que abordan aspectos pertinentes de manera detallada y comprensible.

En el capítulo III se detalla la metodología de la investigación, se empleó un diseño documental con un enfoque mixto que combinó elementos cualitativos y cuantitativos, adoptando un alcance descriptivo-deductivo. Debido a que se implementó métodos numéricos para el relleno de datos faltantes de la variable temperatura. Asimismo, se analizó las propiedades de los métodos demostrando la cota del error, la consistencia, la convergencia y la estabilidad.

El enfoque del capítulo IV se centra en los resultados obtenidos y la discusión de los mismos. Se proporciona una descripción detallada de los métodos de interpolación: Splines cúbicos y Barnes, junto con un análisis exhaustivo sobre aspectos como la estimación del error, la estabilidad, consistencia y convergencia de cada uno de los métodos propuestos.

Por último, en el capítulo V se exponen las conclusiones y recomendaciones resultantes del estudio realizado. En este sentido, se resumen los principales hallazgos encontrados y subrayan las implicaciones así como las posibles áreas de mejora detectadas durante la investigación.

Esta investigación se finaliza con la inclusión de las referencias bibliográficas empleadas, que apoyan y justifican los fundamentos teóricos y metodológicos utilizados en el desarrollo del estudio.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

El Grupo de Investigación de Energías Alternativas y Ambiente GEAA de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo tiene a su cargo una red de 11 estaciones meteorológicas distribuidas en toda la provincia de Chimborazo en donde se registra datos de variables climáticas. No obstante, debido a la falta de mantenimiento de las estaciones, se ha producido una pérdida de información. Esta falta de datos disponibles limita realizar estudios completos de la variable temperatura, lo cual requiere encontrar un método confiable para completar los datos faltantes.

Se plantea esta investigación con el propósito de aplicar dos métodos de interpolación: Barnes y Splines Cúbicos, para comparar su desempeño en la completación de datos de la variable temperatura. Además, es importante resaltar que este estudio también tendrá un valor informativo para los estudiantes de la Carrera de Matemáticas, ya que aborda la aplicación de técnicas de interpolación para completar información en datos meteorológicos.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo general*

Realizar una investigación documental de carácter teórico-práctico de los métodos de interpolación: Barnes y Spline Cúbicos, sus fundamentos teóricos, los cuales serán implementados en Python, para hacer una simulación con el conjunto de datos de temperatura. Se generará un documento que sirva de guía para comprender la aplicación de estas interpolaciones.

1.2.2. *Objetivos específicos*

Para alcanzar el objetivo general, se propone lo siguiente:

1. Realizar una revisión bibliográfica sobre el tópico utilizando fuentes confiables, actualizadas para identificar y seleccionar la mejor evidencia disponible que guíe de manera correcta la investigación.

2. Entender la teoría de interpolación de Barnes y Splines Cúbicos con el fin de comparar sus cotas del error.
3. Implementar el método de Barnes y Splines Cúbicos para detallar las condiciones de estabilidad, consistencia y convergencia de ambos métodos.
4. Utilizar el lenguaje de programación Python para completar los datos faltantes de temperatura de las estaciones meteorológicas.

1.3. Justificación

Abordar la pérdida de información en las estaciones meteorológicas que maneja el GEAA es fundamental, debido a la relevancia de estos datos para la recolección de la variable temperatura en la provincia de Chimborazo. Esta información es crucial no solo para realizar investigaciones y análisis científicos en el ámbito de la meteorología y en el cambio climático, sino también en el desarrollo de herramientas que contribuyan a la toma de decisiones para el bienestar de la región.

Se propone realizar una investigación que compare el rendimiento de dos métodos de interpolación: Barnes y Splines Cúbicos en la tarea de rellenar datos faltantes de la variable de temperatura. Los splines cúbicos dividen el intervalo de la función ajustando un polinomio cúbico a cada subintervalo, así aseguran la continuidad de la variable y sus derivadas en los puntos de unión mediante condiciones de frontera natural o sujeta. Por otra parte, el método de Barnes emplea una función de ponderación gaussiana que asigna mayor peso a los datos cercanos al punto de interés. En consecuencia, la función depende del radio de influencia y el parámetro γ , este último controla qué tan rápido disminuye la función de peso de los datos más distantes.

La comparación entre ambos procedimientos permitirá evaluar su eficacia individual y determinar cuál brinda resultados más precisos y consistentes al restaurar valores ausentes de temperatura. Esta información será valiosa tanto para el GEAA como para la provincia de Chimborazo, al posibilitar la mejora en la calidad de los registros sobre las condiciones atmosféricas.

Este estudio representa un valioso aporte informativo para los estudiantes de la Carrera de Matemáticas, ya que detalla los fundamentos teóricos de los métodos Splines cúbicos y Barnes, así como su implementación para el relleno de series temporales de datos meteorológicos. No obstante, estos métodos no se limitan únicamente al ámbito estudiado, pues podrían ser aplicados como insumo en otras áreas académicas.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

La interpolación es el proceso para estimar valores que se encuentran entre datos conocidos mediante la función interpolante. El objetivo fundamental radica en encontrar una función de aproximación que posea una expresión matemática sencilla y al mismo tiempo, mantenga una estrecha relación con la función original o el fenómeno bajo estudio. De esta manera, se logra una representación adecuada de la información disponible, permitiendo un análisis completo y preciso.

Dentro del ámbito de la interpolación se dispone de diversos métodos para rellenar datos faltantes, las principales técnicas son la interpolación polinomial, trigonométrica y espacial. Cada una de ellas presenta sus propias ventajas y limitaciones, por lo que la elección del método adecuado dependerá de las características específicas de los datos y el fenómeno a estudiar. La interpolación polinomial se distingue por su versatilidad, al ajustar polinomios a los puntos conocidos para adaptarse a diversas situaciones, la interpolación trigonométrica resulta una opción apropiada cuando los datos muestran un comportamiento periódico, mientras que la interpolación espacial es empleada en el análisis de datos distribuidos geográficamente permitiendo estimar valores en ubicaciones no muestreadas.

El desarrollo de este capítulo se basa en las siguientes fuentes científicas: (Barnes, 1964, Barnes, 1973, Burden y Fairis, 2002, Riess y Johnson, 1982, Vázquez, 2011).

2.1. Antecedentes

Los métodos numéricos son herramientas matemáticas utilizadas en diversas disciplinas, como la ingeniería, la informática y la física, para realizar cálculos aproximados y abordar problemas complejos (García & Maza, 2009, p. 11). Entre estos métodos, la interpolación destaca como una técnica esencial en meteorología y climatología, permitiendo obtener estimaciones precisas de variables críticas como la temperatura y la precipitación, fundamentales para el estudio de otros fenómenos meteorológicos y ambientales relevantes.

Existen diversos métodos de interpolación para calcular valores de temperatura en áreas donde la información es limitada, algunos de los métodos más comunes incluyen el método de Barnes, las series de Fourier, Splines cúbicos, entre otros. Cada uno de estos métodos posee ventajas y

desventajas particulares que deben ser consideradas en función de la naturaleza del conjunto de datos y del objetivo de la interpolación.

En estudios de implementación y comparación de métodos de interpolación para completar datos faltantes en variables atmosféricas, la interpolación de Barnes logró reconstruir con precisión los campos de viento troposféricos a partir de observaciones dispersas espacialmente (Koch et al., 1983). De forma similar, este método interpoló datos de temperatura lo que permitió comprender patrones de cambio climático regional y global (Serreze et al., 1995). Por otra parte, durante una investigación comparativa de Splines cúbicos y métodos lineales utilizados para interpolar datos de temperatura y precipitación, el método de Splines cúbicos resultó eficiente debido a su desempeño en los criterios de Error Absoluto Medio (MAE), Raíz del Error Cuadrático Medio (RMSE) y Error Relativo (RV) (Anjomshoa y Salmanzadeh, 2018). De igual manera, el método de Splines cúbicos rellena datos de temperatura y precipitación en grandes conjuntos de datos climáticos dispersos y revela robustas tendencias regionales y globales, haciendo frente a la topografía irregular (Boer et al., 1992).

En Ecuador se aplicó la interpolación de Barnes en la cuenca del Guayllabamba, utilizando datos de estaciones meteorológicas para generar mapas detallados de temperatura y precipitación que revelaron patrones espaciales considerando la influencia de la altitud (Ochoa et al., 2014). Por otra parte, se utilizaron splines cúbicos para interpolar datos de precipitación de estaciones meteorológicas distribuidas en la cuenca del río Paute, permitiendo analizar la variabilidad espacial y temporal de la lluvia e identificar zonas con diferentes regímenes de precipitación (Correa et al., 2018). Los mapas climáticos creados en ambos casos son valiosos no solo para la planificación de actividades agrícolas en las regiones respectivas, sino también para la gestión de recursos hídricos y estudios ambientales, ya que brindan información relevante para evaluar la disponibilidad de dichos recursos, monitorear eventos extremos y apoyar la toma de decisiones en la gestión integrada de cuencas hidrográficas.

2.2. Interpolación

La interpolación se basa en construir una función que aproxime de manera confiable valores faltantes basándose en el comportamiento definido por los datos existentes, completando así la información necesaria para realizar análisis más detallados. (Gutiérrez et al., 2010, p. 85).

Definición 2.1. Dado un conjunto de $n + 1$ puntos $\{(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)\}$ donde, $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, la interpolación busca encontrar una función f que pase a través de estos puntos. Esta función interpolante f debe satisfacer dos condiciones:

1. La función f debe pasar exactamente por los puntos dados, es decir, $f(x_i) = y_i$ para $i = 0, 1, \dots, n$.
2. La función f debe ser *suave* en el intervalo x_n .

Para utilizar los métodos de interpolación, se considera que la ventaja principal es la capacidad de aproximar datos con una función continua y estable. Sin embargo, existe la desventaja de que los resultados introduzcan errores si no se selecciona adecuadamente el método y sus parámetros, por esta razón es fundamental elegir correctamente el tipo de función de interpolación según las características de los datos y los requisitos del problema a resolver. Estos métodos se pueden clasificar según los distintos tipos de funciones de interpolación como la polinomial, trigonométrica y espacial.

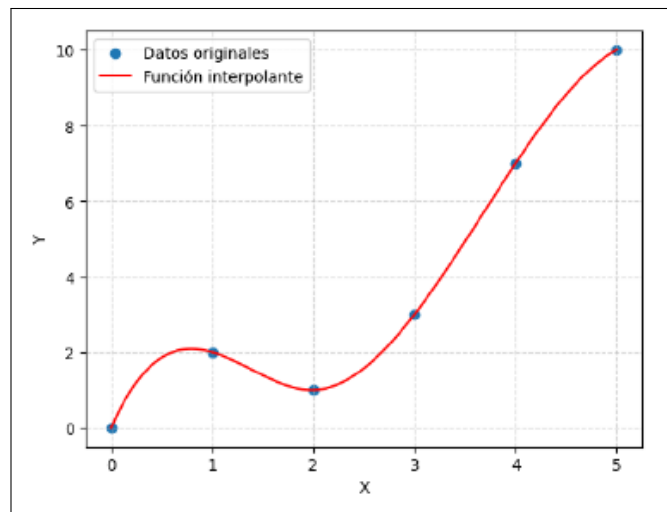


Ilustración 1-2: Ejemplo de una función interpolante

Realizado por: Alegría, P., 2023.

A continuación se describe los métodos de interpolación que serán utilizados en esta investigación.

2.2.1. Método de interpolación polinómica

La interpolación polinomial es uno de los métodos más empleados gracias a su versatilidad en múltiples aplicaciones. Se utiliza para generar curvas y superficies suaves, interpolar información de exploración, reconstruir señales e imágenes mediante procesamiento, así como para trazar trayectorias suavizadas y generar señales de control. No obstante, uno de los desafíos radica en desarrollar polinomios que se ajusten adecuadamente a los valores de una función f en puntos

específicos. Para lograrlo, se seleccionan $(n + 1)$ puntos distintos $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ en un intervalo $[a, b]$ y se construye un polinomio de grado $p(x) \leq n$ que pasa exactamente por ellos, de modo que $p(x_j) = f(x_j)$ para cada punto x_j , donde j varía de 0 a n . Así, el polinomio interpolador $p(x)$ interpola a la función $f(x)$ en los puntos dados dentro del intervalo $[a, b]$.

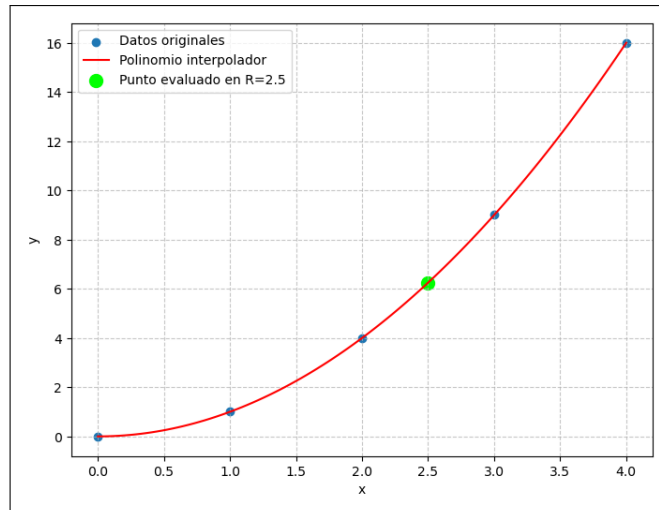


Ilustración 2-2: Ejemplo de un polinomio interpolador
Realizado por: Alegría, P., 2023.

En la interpolación polinómica el teorema de existencia y unicidad garantiza que existe un único polinomio que interpole los datos observados.

Teorema 2.1. Si $[x_0, x_1, x_2, \dots, x_n]$ son $(n + 1)$ puntos distintos, entonces dados $(n + 1)$ valores arbitrarios $\{y_0, y_1, \dots, y_n\}$ existe un único polinomio de grado menor o igual que n , $p_n(\mathbb{R})$, que interpola los valores $\{y_i\}$ en los nodos $\{x_i\}$, es decir, que verifica $y_i = p_n(x_i)$ donde $(i = 0, 1, \dots, n)$.

Demostración.

Existencia:

Se define polinomios $t_k(x)$, el cual se construye multiplicando polinomios de grado 1:

$$t_k(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n),$$

x_0, x_1 representa los valores que se tiene de la variable x , es decir son constante.

Sin embargo, debido a la excepción de un término faltante, se clasifican como polinomios de grado n , basado en lo expuesto, se puede afirmar que:

$$t_k(x_i) = 0; \quad \text{para} \quad i \neq k \quad \wedge \quad t_k(x_k) \neq 0 \quad \wedge \quad \text{gr}[t_k(x)] = n.$$

A continuación, se introduce un nuevo polinomio al que se denomina $L_k(x)$, el cual se construye siguiendo el siguiente procedimiento:

$$L_k(x) = \frac{t_k(x)}{t_k(x_k)}; \quad \text{tal que} \quad t_k(x_k) \neq 0.$$

Ahora se estudia el valor de estos nuevos polinomios L_k en función del conjunto de puntos.

$$L_k(x_j) = 0 \quad \forall \quad j \neq k$$

$$L_k(x_k) = 1$$

$$\text{gr}[L_k(x)] = n,$$

utilizando estos parámetros, se generan los polinomios L_k , los cuales serán empleados para construir el polinomio interpolador.

El polinomio interpolador p_n se puede expresar como la suma de términos individuales, donde cada término está formado por el producto entre el polinomio $L_i(x)$ y el valor de $f(x_i)$.

$$p_n = \sum_{i=0}^n f(x_i) L_i(x),$$

lo que se puede expresar como:

$$p_n = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + \dots + L_n(x)f(x_n).$$

Esta expresión muestra cómo cada polinomio $L_i(x)$ se multiplica por su correspondiente valor $f(x_i)$ y se suman todos los términos para obtener el polinomio interpolador completo.

A continuación, se analiza si este polinomio realmente logra la interpolación de los puntos.

$$p_n = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + \dots + L_n(x)f(x_n).$$

Tomando en cuenta que:

$$L_k(x_j) = 0 \quad \forall \quad j \neq k; \quad L_k(x_k) = 1; \quad \text{gr}[L_k(x)] = n.$$

Entonces se puede decir lo siguiente:

$$p_n(x_0) = \underbrace{L_0(x_0)}_1 f(x_0) + \underbrace{L_1(x_0)}_0 f(x_1) + \dots + \underbrace{L_n(x_0)}_0 f(x_n)$$

$$p_n(x_0) = f(x_0)$$

$$p_n(x_1) = \underbrace{L_0(x_1)}_0 f(x_0) + \underbrace{L_1(x_1)}_1 f(x_1) + \dots + \underbrace{L_n(x_1)}_0 f(x_n)$$

$$p(x_1) = f(x_1).$$

Este comportamiento se puede generalizar para todos los puntos del conjunto de datos, por lo tanto, al evaluar el polinomio en cada valor de x_i , que corresponde a los puntos en el conjunto de datos, se obtiene los mismos valores que figuran en la imagen (segunda componente) de dichos puntos.

$$p(x_j) = f(x_i) \quad \forall \quad i = \{0, \dots, n\}.$$

Con este análisis, se ha demostrado que el polinomio construido de esta manera logra la interpolación, es decir, pasa por todos los puntos. Su **existencia** ha sido probada.

Unicidad: Esta parte será abordada utilizando el método del absurdo.

Para ello se supone que p_1 y p_2 son polinomios interpolantes de grado $\leq n$. Se afirma que en cada uno de los puntos del conjunto de datos, coinciden exactamente con los valores dados por la función $f(x_i)$, entonces:

$$\begin{array}{lll} p_1(x_i) = f(x_i) & p_2(x_i) = f(x_i) & \text{para } i = 0, \dots, n \\ p_2(x_i) - p_1(x_i) = 0 & \text{para } i = 0, \dots, n & \\ \underbrace{(p_1 - p_2)}_{\text{es de grado } \leq n}(x_i) = 0 & \text{para } i = 0, \dots, n & \end{array}$$

En el mejor de los casos un polinomio tendría un grado máximo de n ya que cualquier grado mayor implicaría la existencia de $(n + 1)$ raíces. Sin embargo, esta situación contradice el Teorema Fundamental del Álgebra por lo tanto al considerar la existencia de dos polinomios interpoladores con grados menores o iguales a n se llega a una contradicción. En consecuencia, se puede concluir que ambos polinomios son idénticos. Se ha probado su **unicidad**.

Si se analiza esta situación, se observa que la contradicción se origina al asumir que ambos polinomios poseen grados menores o iguales a n . Si tuvieran grados mayores, no existiría incongruencia. Esto asegura la unicidad del polinomio de grado menor o igual a n , es decir, uno menos que la cantidad de puntos. \square

Para llevar a cabo la demostración del teorema de existencia y unicidad, se utiliza el método de interpolación de Lagrange, puesto que proporciona una construcción explícita de dicho polinomio.

Interpolación polinómica de Lagrange

La interpolación polinómica de Lagrange consiste en determinar un polinomio $p_n(x)$, de $gr(p_n) \leq n$ y que verifique $y_i = p_n(x_i) \quad i = 0, 1, \dots, n$. Es decir, la gráfica del polinomio debe pasar por los puntos (x_i, y_i) (Vázquez, 2011, p. 263).

Esto establece que la interpolación polinómica de Lagrange consiste en encontrar un polinomio $p_n(x)$ que pase por una serie de puntos dados (x_i, y_i) . Este polinomio tiene un grado máximo de n , donde este es el número de puntos dados. En decir, la interpolación polinómica de Lagrange busca ajustar un polinomio a los datos conocidos de manera que pase exactamente por esos puntos. El polinomio interpolador de Lagrange esta dado por:

$$p(x) = \sum_{i=0}^n L_i f(x_i), \quad (2.1)$$

donde L_i se define como:

$$L_i(x) = \frac{\prod_{j \neq i} (x - x_j)}{\prod_{j \neq i} (x_i - x_j)}.$$

Despues de haber establecido las ecuaciones para realizar la interpolación por el método de Lagrange, se realizará un ejemplo para entender como funciona.

Ejemplo 2.1. Dado el siguiente conjunto de datos, utilizando la ecuación de interpolación polinomial de Lagrange (x) , calcular el valor de dicho polinomio para $x = 2$.

Tabla 2-1: Conjunto de datos
(Ejemplo Lagrange)

x	0	1	4	6
$f(x)$	2	3	18	38

Realizado por: Alegría, P., 2023.

Solución:

Aplicando la ecuación de Lagrange (2.3) :

$$p(2) = \sum_{i=0}^3 L_i(x) f(x_i).$$

Sustituyendo los valores de la tabla, se tiene:

$$L_0(2) = \frac{(2-1)(2-4)(2-6)}{(0-1)(0-4)(0-6)}(2) = -\frac{2}{3}$$

$$L_1(2) = \frac{(2-0)(2-4)(2-6)}{(1-0)(1-4)(1-6)}(3) = \frac{16}{5}$$

$$L_2(2) = \frac{(2-0)(2-1)(2-6)}{(4-0)(4-1)(4-6)}(18) = 6$$

$$L_3(2) = \frac{(2-0)(2-1)(2-4)}{(6-0)(6-1)(6-4)}(38) = -\frac{38}{15}$$

Sumando todos los términos L_i para calcular el valor del polinomio interpolador en $p(2)$

$$p(2) = -\frac{2}{3} + \frac{16}{5} + 6 - \frac{38}{15} = 6$$

El resultado de $p(2)$ es igual a 6.

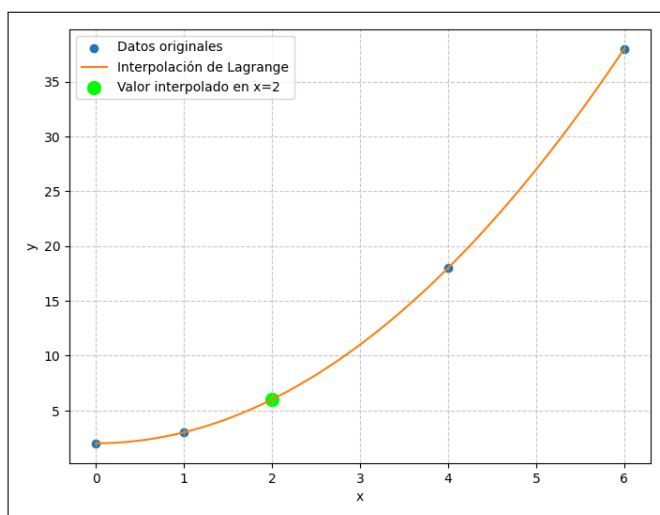


Ilustración 3-2: Método de Lagrange con los datos empleados
Realizado por: Alegría, P., 2023.

El método de interpolación de Lagrange destaca por su facilidad de implementación, ya que solo requiere conocer un conjunto de puntos dados para construir el polinomio interpolante. Una de sus principales ventajas radica en que el polinomio obtenido pasa exactamente por los puntos proporcionados, lo cual lo hace útil en situaciones donde se necesita una aproximación precisa en ciertos valores específicos. No obstante, a medida que aumenta el grado del polinomio se presentan oscilaciones desmedidas en las regiones en donde existe mayor cantidad de datos faltantes. Por consiguiente, el método de Lagrange es adecuado cuando se trabaja con un número moderado de puntos y se requiere una interpolación local.

A diferencia de Lagrange, que emplea un único polinomio para todo el dominio, los Splines cúbicos dividen el intervalo en subintervalos pequeños y utilizan polinomios cúbicos para asegurar

la precisión en los nodos.

Un contraejemplo clásico que ilustra las deficiencias del método de interpolación polinómica es la función de Runge, esta función aparentemente sencilla y *suave* en el intervalo $[-1, 1]$, reveló un comportamiento inesperado al intentar aproximarla mediante interpolación polinómica con un número creciente de puntos equidistantes. A medida que aumentaba el grado del polinomio interpolante, en lugar de obtener una mejor aproximación, el polinomio comenzaba a oscilar de manera significativa cerca de los extremos del intervalo, un fenómeno conocido como oscilaciones de Runge. Esto demostró que la interpolación polinómica puede ser inestable para funciones simples, cuando se trabaja con intervalos amplios y se requieren polinomios de grado elevado. La función de Runge fue fundamental para motivar el desarrollo de métodos alternativos de interpolación, como los Splines cúbicos, que ofrecen aproximaciones más *suaves* y estables en situaciones donde la interpolación polinómica directa no es efectiva.

2.2.1.1. Método de interpolación: Splines cúbicos

Los Splines cúbicos emergen como un método de interpolación polinómico por tramos que ofrece una alternativa mejorada, a diferencia de los métodos clásicos que generan interpolantes polinómicos únicos y continuos, los Splines cúbicos construyen funciones interpolantes a trozos con un alto grado de suavidad y regularidad dividiendo el intervalo de interpolación en subintervalos y utiliza polinomios cúbicos en cada uno de ellos, asegurando no solo la precisión en los nodos dados, sino también la continuidad de las derivadas primera y segunda en los puntos de unión entre segmentos (Vázquez, 2011, p. 371).

Considerando una función f definida en el intervalo $[a, b]$, un Spline cúbico S es una función que interpola los valores y_0, y_1, \dots, y_n de la función f en $(n + 1)$ puntos llamados nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

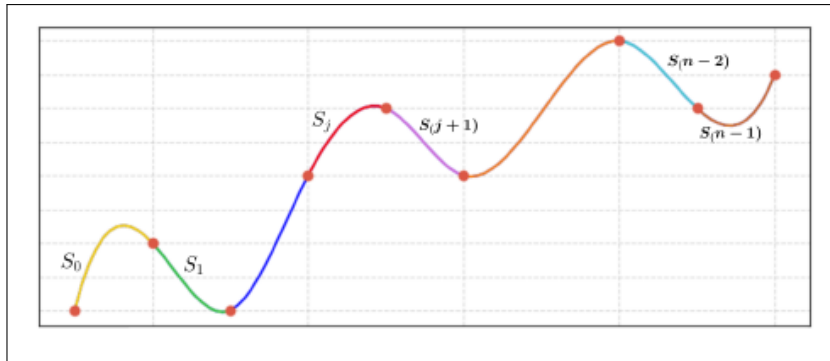


Ilustración 4-2: Gráfica de un Spline cúbico

Realizado por: Alegría P., 2023

Definición 2.2. Dada una función f definida en $[a, b]$ y un conjunto de nodos $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ un interpolante de trazador cúbico S para f es una función que cumple con las siguientes condiciones:

1. $S(x)$ es un polinomio cúbico, denotado $S_j(x)$, en el subintervalo $[x_j, x_{j+1}]$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$;
2. $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$; **(Condición básico de interpolación)**
3. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$; **(Condición de continuidad)**
4. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$; **(Condición de primera derivada)**
5. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n-2$; **(Condición de la segunda derivada)**
6. Una de las siguientes condiciones de frontera se satisface:
 - $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ **(frontera libre o natural);**
 - $S'(x_0) = f'(x_0)$ y $S'(x_n) = f'(x_n)$ **(frontera sujeta).**

El comportamiento de los Splines cúbicos radica en: cuando no se restringen sus extremos, adoptan una forma natural a este tipo de trazador se le denomina "trazador natural". Por otro lado, imponer condiciones en los bordes permite realizar aproximación mas precisas de funciones, siempre y cuando se disponga de información adicional sobre sus derivadas, las cuales están vinculadas a fronteras específicas (Burden & Faires, 2002, p. 143).

Un spline cúbico con frontera natural ajusta una curva suave a un conjunto de puntos de datos. La característica principal se encuentra en la imposición de una condición en los extremos, la cual establece que la segunda derivada de la curva Spline debe ser cero en los puntos inicial y final. Esta restricción evita curvaturas excesivas cerca de los bordes, proporcionando un aspecto de *suavizado*

a la gráfica resultante. Al fijar la segunda derivada a cero en los extremos, se garantiza que la curva será continua y sin cambios bruscos en la pendiente, controlando así su curvatura en dichos puntos.

Teorema 2.2. *Se define f en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ entonces f tendrá un interpolante único de trazador natural en los nodos x_0, x_1, \dots, x_n ; es decir, un interpolante de trazador que cumple con las condiciones de frontera $S''(a) = 0$ y $S''(b) = 0$.*

Demostración. La demostración de este teorema se puede encontrar en (Burden & Faires, 2002, p. 145). □

Por otro lado, los splines cúbicos con frontera sujeta son una variante en la que en lugar de imponer condiciones de suavidad en los extremos, se especifican valores conocidos para la primera derivada (pendiente) en dichos puntos. Esta característica permite un control directo sobre la inclinación de la curva en los extremos, ajustándose a las pendientes predefinidas. Consecuentemente, el comportamiento de la gráfica cerca de los bordes será más predecible y controlado, evitando irregularidades inesperadas. Si bien esta técnica sacrifica cierta suavidad en comparación con la frontera natural, brinda un control estricto sobre la forma de la curva Spline cuando se conocen las pendientes iniciales y finales o se requiere un comportamiento específico en los extremos.

Teorema 2.3. *Si f está definida en $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, y es diferenciable en a y b , entonces f tiene un único trazador sujeto que interpola los nodos x_0, x_1, \dots, x_n , es decir, un interpolante de trazador que cumple las condiciones de frontera $S'(a) = f'(a)$ y $S'(b) = f'(b)$*

Demostración. La demostración de este teorema se puede encontrar en (Burden & Faires, 2002, p. 147). □

A continuación, se presenta la generalización de los polinomios interpoladores utilizados en Splines cúbicos para interpolar los puntos. Para ello, se recurre a la siguiente tabla de valores que contiene coordenadas (x, y) de n conjunto de datos:

Tabla 2-2: Tabla de valores

x	x_0	x_1	x_2	\dots	x_n
y	y_0	y_1	y_2	\dots	y_n

Realizado por: Alegría, P., 2023.

El objetivo es generar un Spline cúbico S definido en el intervalo $[x_0, x_n]$ que interpole de manera efectiva esta tabla. En cada subintervalo $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, la función S se expresa como un polinomio cúbico único:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x), & x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x), & x \in [x_1, x_2], \\ \vdots & \vdots \\ S_{n-1}(x), & x \in [x_{n-1}, x_n]. \end{cases}$$

Sin embargo, cada segmento i , donde i va desde 0 hasta $n - 1$, se define un polinomio cúbico:

$$p_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad (2.2)$$

donde, a_i, b_i, c_i , y d_i son coeficientes que deben determinarse los cuales se calculan mediante un sistema de ecuaciones, la misma que se construye tomando en cuenta las condiciones ya mencionadas.

2.2.1.2. Propiedades de los Splines cúbicos

Cota del error

Se logró demostrar la cota del error considerando los siguientes aspectos:

Teorema 2.4. (Teorema de Rolle) Suponiendo que $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en el intervalo abierto (a, b) . Si $f(a) = f(b)$, entonces existe al menos un número c en el intervalo abierto (a, b) tal que $f'(c) = 0$.

Desigualdad de Cauchy - Schwart (Para funciones)

$$\left| \int_a^b f(t) \cdot g(t) \right|^2 \leq \int_a^b |f(t)|^2 dt \cdot \int_a^b |g(t)|^2 dt.$$

Teorema 2.5. Teorema del Valor Medio para Integrales Si $f(x)$ es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe al menos un punto c en el intervalo abierto (a, b) tal que la integral definida de $f(x)$ en $[a, b]$ es igual al producto de la longitud del intervalo y el valor medio de $f(x)$ en ese intervalo:

$$\int_a^b f(x) dx = (b - a) \cdot f(c)$$

donde c pertenece al intervalo (a, b) .

Demostración.

Se define el error de interpolación de Splines como $e(x) = f(x) - S(x)$ para todo x en el intervalo $[a, b]$, donde $f(x)$ es la función real y $S(x)$ es el Spline interpolador. Además, $f(x)$ es una función dos veces continuamente diferenciable en el intervalo $[a, b]$ (es decir, $f \in C^2[a, b]$). Considerando una

partición del intervalo $[a, b]$ dada por los puntos $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, donde $\{a = x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}$.

Se define h :

$$h = \max_{0 \leq j \leq n-1} \{x_{j+1} - x_j\}.$$

En la ilustración 5-2 se presenta de manera abstracta la definición de h .

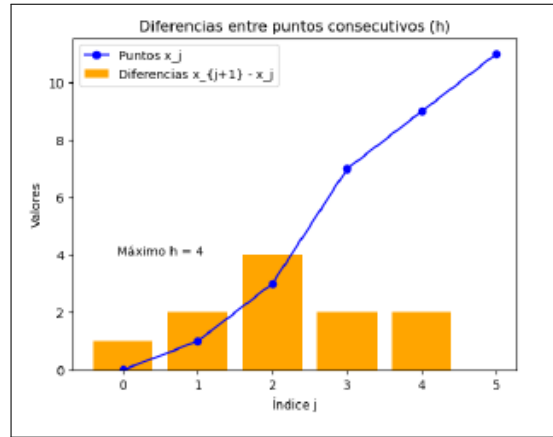


Ilustración 5-2: Diferencias entre puntos consecutivos (h)

Realizado por: Alegría P., 2023

El Spline debe interpolar la función $f(x)$ en cada nodo. Por lo tanto, se verifica que:

$$e(x) = f(x) - S(x);$$

$$f(x_1) = S(x_1);$$

$$f(x_2) = S(x_2);$$

$$e(x_1) = f(x_1) - s(x_1) = 0,$$

$$e(x_1) = 0 \longrightarrow e(x_j) = e(x_{j+1}) = 0. \quad (2.3)$$

Se puede decir que el spline coincide con f .

Por el Teorema (2.4) se afirma que $e(x)$ es continua en $[x_2, x_3]$ y diferenciable en (x_2, x_3) . Por lo tanto:

$$e(x_2) = e(x_3) = 0 \Rightarrow \exists c \text{ tal que } e'(c) = 0,$$

Entonces, se toma una cierta distancia, y se obtiene:

$$\int_c^x e'(t) dt,$$

Resolviendo esta integral mediante el primer y segundo teorema del cálculo, se logró el siguiente resultado:

$$\int_c^x e''(t)dt = e'(x).$$

En consecuencia,

$$e(x) = f(x) - s(x)$$

$$e'(x) = f'(x) - s'(x)$$

$$e'(x) = \int_c^x e''(t)dt,$$

Se aplica la desigualdad de Cauchy - Schwartz:

$$e'(x) = \int_c^x e''(t)dt = \int_c^x e''(t) \cdot 1 dt$$

entonces

$$\begin{aligned} \left| \int_c^x e''(t) \cdot 1 dt \right|^2 &\leq \int_c^x |e''(t)|^2 dt \cdot \int_c^x 1^2 dt \\ |e'(x)|^2 &\leq \left(\int_c^x e''(t)^2 dt \right) \left(\int_c^x 1^2 dt \right) \\ |e'(x)|^2 &\leq \left(\int_c^x e''(t)^2 dt \right) (x-c) \\ |e'(x)|^2 &\leq h \int_c^x e''(t)^2 dt. \end{aligned}$$

Es importante considerar:

$$\int_c^x e''(t)^2 dt \leq \int_a^b e''(t)^2 dt,$$

al reemplazar $e''(t)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b e''(t)^2 dt &\leq \int_a^b (f''(t) - s''(t))^2 dt \\ \int_c^x e''(t)^2 dt &\leq \int_a^b (f''(t))^2 dt - \int_a^b (s''(t))^2 dt, \end{aligned}$$

dado que $a - b \leq a$, entonces,

$$\int_c^x e''(t)^2 dt \leq \int_a^b (f''(t))^2 dt.$$

Al sustituir, se obtiene sus raíces:

$$|e'(x)| \equiv |f'(x) - s'(x)| \leq h^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b (f''(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall x \in [a, b]$$

Con esta expresión, se dice que para todo $x \in [a, b]$, $|f'(x) - s'(x)|$ está acotado por $h^{\frac{1}{2}}$.

Ahora bien, se afirma que $x \in [a, b]$, por lo tanto, $x \in [x - x_j]$, entonces:

$$\int_{x_j}^x e'(t) dt = e(x) - e(x_j) = e(x) - 0 = e(x).$$

Por lo tanto:

$$|e(x)| = \left| \int_{x_j}^x e'(t) dt \right|,$$

Entonces, al aplicar el Teorema (2.5), y al tomar el valor absoluto de la derivada del error en algún punto c dentro del intervalo $[x_j, x]$ y acotándolo por la cota superior de la derivada del error en todo el intervalo, se tiene:

$$\left| \int_{x_j}^x E'(t) dt \right| \leq \int_{x_j}^x \left(\max_{a \leq z \leq b} |E'(z)| \right) dt$$

Finalmente, se utiliza la longitud del intervalo h (donde $h = x - x_j$) y la máxima derivada del error en el intervalo, entonces:

$$\int_{x_j}^x \left(\max_{a \leq z \leq b} |e'(z)| \right) dt \leq h \max_{a \leq z \leq b} |e'(z)|$$

Por lo tanto, una cota del error de interpolación Spline cúbico es:

$$|f(x) - s(x)| \leq h^{\frac{3}{2}} \left(\int_a^b f''^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Así, el error está acotado por una expresión proporcional a $h^{\frac{3}{2}}$.

Como se puede apreciar en la ilustración 6-2, a medida que se aumenta el número de subintervalos en los que se divide la función f , el error de aproximación utilizando $h^{\frac{3}{2}}$ se aproxima a cero.

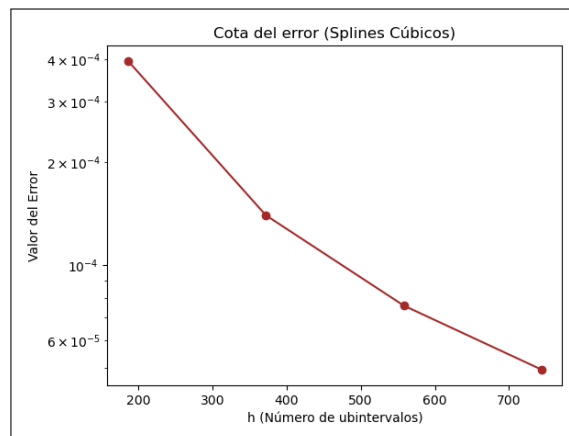


Ilustración 6-2: Cota del error para Splines cúbicos

Realizado por: Alegría P., 2023

□

Consistencia

Particularmente, en el contexto de métodos de interpolación la consistencia garantiza que al tomar una mayor cantidad de intervalos se reduce la cota del error absoluto resultante entre la función interpolada y la función real (Arrieta et al, 2020, p. 98). De manera similar, la consistencia asegura un comportamiento analítico del método.

Para evaluar la consistencia del método, se fundamenta en la siguiente definición.

Definición 2.3. Se dice que un método es **consistente** si

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = 0.$$

Se dice que es **consistente de orden p** si

$$\mathcal{T}(h) = \mathcal{O}(h^p),$$

donde, $\mathcal{T}(h)$ es la cota para del error de truncamiento del método.

En el caso del método de Spline cúbicos, se obtuvo previamente la cota del error demostrada, la cual es proporcional a $h^{3/2}$ la misma que se basa en el concepto que establece un límite superior absoluto para el error de truncamiento en toda la curva denotado como $|e(x)| \leq \mathcal{T}(h)$ para todos los puntos. Teniendo en cuenta esta premisa, se confirma la consistencia del método en el siguiente sentido:

Partiendo de la definición $|f(x) - S(x)| \leq \mathcal{T}(h)$, y como ya se demostró previamente que $\mathcal{T}(h) = \mathcal{O}(h^{3/2})$.

Determinada la cota del error $\mathcal{T}(h)$ con una dependencia conocida respecto a h en lugar de simplemente utilizar $\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{T}(h) = 0$ se utiliza lo siguiente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathcal{T}(h)}{h^{3/2}} = 0.$$

Se introdujo la fracción para considerar explícitamente la relación funcional entre $\mathcal{T}(h)$ y h , asegurando que el límite converja a 0.

Asimismo, se ha comprobado el comportamiento:

$$\mathcal{T}(h) = \mathcal{O}(h^{3/2}).$$

La consistencia del método de interpolación mediante Splines cúbicos, verifica que el método es consistente de orden $\frac{3}{2}$. Esto implica que el error de truncamiento $\mathcal{T}(h)$ disminuye

proporcionalmente a $h^{\frac{3}{2}}$ a medida que el tamaño del intervalo h se reduce.

Por consiguiente, los Splines cúbicos convergen rápidamente hacia la función real al utilizar intervalos más pequeños, lo que confirma analíticamente su rendimiento en términos de precisión. La consistencia de $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$ obtenida para este método resultó tener una precisión notablemente superior.

Estabilidad

La estabilidad de un método numérico está relacionado con la capacidad para producir resultados precisos, incluso en presencia de pequeñas perturbaciones o errores en los datos de entrada. A diferencia de la consistencia, que examina la convergencia teórica del error de truncamiento, la estabilidad analiza cómo se propagan las imprecisiones a través de los cálculos que aproximan iterativamente la solución.

En esencia, un método es estable si cualquier error de redondeo o truncamiento inicial no se amplifica excesivamente al avanzar en las operaciones matemáticas que generan la solución final (Arrieta et al, 2020, p. 99). La estabilidad busca garantizar que los errores iniciales no sean grandes, en otros términos, disminuyéndolos en lugar de expandirlos a medida que el algoritmo se acerca a la solución buscada. Un procedimiento estable evita la explosión y propagación incontrolada de las imprecisiones iniciales presentes al comenzar los cálculos.

Burden y Faires (1998) en su discusión sobre convergencia y estabilidad de métodos numéricos exponen que un procedimiento estable es aquel que no amplifica los errores conforme se refina la solución. Es decir, el método no exagera las imprecisiones conforme iterativamente aproxima la solución deseada. En base a esto, se realiza una definición de estabilidad:

Definición 2.4. Se dice que un método numérico es estable si al aplicarlo reiteradamente para refinar la solución (al disminuir el tamaño del intervalo h), el error absoluto resultante $E(h)$ tiende a cero, es decir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0,$$

donde $E(h)$ representa una cota o límite superior para el error absoluto del método.

Tomando en cuenta la definición (2.4) y habiendo demostrado previamente una cota del error donde $|e(x)| \leq h^{\frac{3}{2}}$, sin embargo, aquí se identifica esta cota del error como $E(h)$ en la definición de (4.5)

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(h) = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} E(0^{\frac{3}{2}}) = 0.$$

Se demostró que la cota de error de Splines cúbicos converge a cero cuando se disminuye el tamaño del intervalo h se aproxima a cero, verificando que cualquier error inicial se disminuye en lugar de amplificarse indefinidamente. Esta prueba de la propiedad de estabilidad implica que el método de Splines cúbicos produce soluciones confiables y precisas incluso en presencia de pequeñas perturbaciones o errores de redondeo en los datos iniciales. La estabilidad otorga confianza ante variaciones en los datos de entrada.

Convergencia

La convergencia es fundamental para evaluar la precisión y confiabilidad de la aproximación generada por un método de interpolación. Este proceso determina la capacidad del método para aproximarse a la función original al incrementar la precisión de la interpolación. En esencia, la convergencia asegura que al disminuir el tamaño de los intervalos la aproximación obtenida se acerca progresivamente a la función real. Dado el análisis previo que demostró la consistencia y estabilidad de los Splines cúbicos, se puede aplicar el Teorema de Convergencia por Consistencia y Estabilidad (Arrieta et al, 2020, p. 130). El Teorema establece que un método numérico convergente debe ser consistente y estable, lo cual garantiza que a medida que el tamaño del paso tiende a cero, la solución numérica se aproxima a la solución exacta.

Teorema 2.6. *Sea ϕ_n una sucesión de aproximaciones numéricas generadas por un método consistente y estable para resolver el problema p . Entonces, si (ϕ_n) converge a ϕ cuando n tiende a infinito (es decir, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n = \phi$, entonces ϕ es la solución de p .*

Esto significa que las aproximaciones numéricas generadas por el método se acercan progresivamente a una única solución ϕ a medida que se aumenta el número de iteraciones (cuando n tiende a infinito), entonces ϕ representa la solución correcta al problema p .

En las secciones anteriores, se evaluó la consistencia ($\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$) como la estabilidad del método de interpolación. Ahora, es posible aplicar el Teorema 2.6.

Sea $S_n(x)$ la sucesión de curvas Splines interpolantes obtenidas al aplicar el método sobre un conjunto de datos, donde n indica la cantidad de puntos utilizados. Se verifica que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |S_n(x) - f(x)| = 0$$

Esto indica que la diferencia entre la curva Spline $S_n(x)$ y la función real $f(x)$ tiende a 0 a medida que la distancia h entre los puntos de colocación se aproxima a 0.

El estudio detallado de las propiedades de los Splines Cúbicos ha demostrado su solidez teórica, en donde la cota del error garantiza el control efectivo sobre la precisión de la aproximación, adicionalmente las propiedades de consistencia y estabilidad avalan la fiabilidad del método, asegurando que los errores no se propaguen de manera descontrolada. Finalmente, el cumplimiento del Teorema de Convergencia por Consistencia y Estabilidad valida que, a medida que se mejora la aproximación la solución numérica se acerca **a la solución exacta**. Esta robusta fundamentación matemática los posiciona como una herramienta confiable para la interpolación de funciones en diversos campos de aplicación. Para concluir, a continuación se presentan dos ejemplos prácticos en donde se emplean el método de los Splines cúbicos.

Ejemplo aplicando Splines cúbicos

Ejemplo 2.2. Para realizar el siguiente ejemplo hay que tomar en cuenta la siguiente ecuación:

$$(x_i - x_{i-1}) f''(x_{i-1}) + 2(x_{i+1} - x_{i-1}) f''(x_i) + (x_{i+1} - x_i) f''(x_{i+1}) = \frac{6}{x_{i+1} - x_i} [f(x_{i+1}) - f(x_i)] + \frac{6}{x_i - x_{i-1}} [f(x_{i-1}) - f(x_i)] \quad (2.4)$$

Construir un polinomio interpolador utilizando el método de los Splines cúbicos considerando el siguiente conjunto de puntos:

x_i	$f(x_i)$
0.2	0.2
0.6	0.55
1.2	0.211
1.4	0.2
1.8	0.44
2.23	0.83

Se emplean tres datos del conjunto, $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$, $[x_i, f(x_i)]$, y $[x_{i+1}, f(x_{i+1})]$, ya que en la ecuación (2.5) implica términos como $(x_i - x_{i-1})$ y $(x_{i+1} - x_i)$. Cabe mencionar que las incógnitas serán las segundas derivadas f'' , pero el primer y último valor de f'' valen cero por la condición de frontera utilizada.

x_i	$f(x_i)$	$f''(x_i)$
0.2	0.2	0
0.6	0.55	k_1
1.2	0.211	k_2
1.4	0.2	k_3
1.8	0.44	k_4
2.23	0.83	0

En las siguientes tablas se presentan los datos que serán utilizados para realizar las ecuaciones.

x_i	$f(x_i)$	$f''(x_i)$	
0.2	0.2	0	$\rightarrow x_{i-1}$
0.6	0.55	k_1	$\rightarrow x_i$
1.2	0.211	k_2	$\rightarrow x_{i+1}$

$$(0.6 - 0.2) \cdot 0 + 2(1.2 - 0.2)k_1 + (1.2 - 0.6)k_2 = \frac{6}{1.2 - 0.6}(0.211 - 0.55) + \frac{6}{0.6 - 0.2}(0.2 - 0.55)$$

$$2k_1 + 0.6k_2 = -8.35$$

x_i	$f(x_i)$	$f''(x_i)$	
0.6	0.55	k_1	$\rightarrow x_{i-1}$
1.2	0.211	k_2	$\rightarrow x_i$
1.4	0.2	k_3	$\rightarrow x_{i+1}$

$$(1.2 - 0.6)k_1 + 2(1.4 - 0.6)k_2 + (1.4 - 1.2)k_3 = \frac{6}{1.4 - 1.2}[0.2 - 0.211] + \frac{6}{1.2 - 0.6}[0.55 - 0.211]$$

$$0.6k_1 + 1.6k_2 + 0.2k_3 = 1.9$$

x_i	$f(x_i)$	$f''(x_i)$	
1.2	0.211	k_2	$\rightarrow x_{i-1}$
1.4	0.2	k_3	$\rightarrow x_i$
1.8	0.44	k_4	$\rightarrow x_{i+1}$

$$(1.4 - 1.2)k_2 + 2(0.44 - 0.21)k_3 + (1.8 - 1.4)k_4 = \frac{6}{1.8 - 1.4}[0.44 - 0.2] + \frac{6}{1.4 - 1.2}[0.211 - 0.2]$$

$$0.2k_2 + 1.2k_3 + 0.4k_4 = 4.8$$

x_i	$f_1(x_i)$	$f''(x_i)$	
1.4	0.2	k_3	$\rightarrow x_{i-1}$
1.8	0.44	k_4	$\rightarrow x_i$
2.23	0.83	0	$\rightarrow x_{i+1}$

$$(1.8 - 1.4)k_3 + 2(2.23 - 1.4)k_4 + (2.23 - 1.3)0 = \frac{6}{2.23 - 1.8}[0.83 - 0.44] + \frac{6}{1.8 - 1.4}[0.2 - 0.44]$$

$$0.4k_3 + 1.66k_4 = 1.84$$

Entonces se tiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\left. \begin{aligned} 2k_1 + 0.6k_2 &= -8.35 \\ 0.6k_1 + 1.6k_2 + 0.2k_3 &= 1.9 \\ 0.2k_2 + 1.2k_3 + 0.4k_4 &= 4.8 \\ 0.4k_3 + 1.66k_4 &= 1.84 \end{aligned} \right\}$$

$$(100) \cdot (2k_1 + 0.6k_2 = -8.35)$$

$$(10) \cdot (0.6k_1 + 1.6k_2 + 0.2k_3 = 1.9)$$

$$(10) \cdot (0.2k_2 + 1.2k_3 + 0.4k_4 = 4.8)$$

$$(100) \cdot (0.4k_3 + 1.66k_4 = 1.84)$$

por lo tanto

$$\left\{ \begin{aligned} 200k_1 + 60k_2 &= -835 \\ 6k_1 + 16k_2 + 2k_3 &= 19 \\ 2k_2 + 12k_3 + 4k_4 &= 48 \\ 40k_3 + 166k_4 &= 184. \end{aligned} \right.$$

Al aplicar la regla de Cramer para obtener la solución del sistema de ecuaciones, se determinan los valores de las variables k_1, k_2, k_3 y k_4 .

$$k_1 = -\frac{628543}{126752}, \quad k_2 = \frac{165589}{63376}, \quad k_3 = \frac{440349}{126752}, \quad k_4 = \frac{8597}{31688}.$$

En consecuencia

x_i	$f(x_i)$	$f''(x_i)$
0.2	0.2	0
0.6	0.55	- 4.958
1.2	0.211	2.612
1.4	0.2	3.474
1.8	0.44	0.271
2.23	0.83	0

Un polinomio de interpolación por Splines cúbicos va a ser igual:

$$\begin{aligned}
 p_i(x) = & \frac{f''(x_{i-1})}{6(x_i - x_{i-1})} (x_i - x)^3 + \frac{f''(x_i)}{6(x_i - x_{i-1})} (x - x_i)^3 + \\
 & \left[\frac{f(x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_{i-1})(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x_i - x) + \\
 & \left[\frac{f(x_i)}{(x_i - x_{i-1})} - \frac{f''(x_i)(x_i - x_{i-1})}{6} \right] (x - x_{i-1})
 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Se seleccionan dos puntos (x_i y x_{i-1}) para sustituirlos en la ecuación (2.6).

x_i	$f(x_i)$	$f''(x_i)$	
0.2	0.2	0	$\rightarrow x_{i-1}$
0.6	0.55	- 4.95	$\rightarrow x_i$

Al tomar estos puntos y sustituirlos en la ecuación (2.6), se obtendrá el primer polinomio interpolador.

$$\begin{aligned}
 p_1(x) = & \left[\frac{0}{6(0.6 - 0.2)} \right] (0.6 - x)^3 + \left[\frac{-4.95}{6(0.6 - 0.2)} \right] (x - 0.6)^3 \\
 & + \left[\frac{0.2}{0.6 - 0.2} - \frac{0(0.6 - 0.2)}{6} \right] (0.6 - x) + \left[\frac{0.55}{0.6 - 0.2} - \frac{-4.25(0.6 - 0.2)}{6} \right] (x - 0.2)
 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 p_1(x) &= \left[-\frac{12397}{6000} \right] (x - 0.6)^3 + \frac{1}{2}(0.6 - x) + 1.70(x - 0.2) \\
 p_1(x) &= \left[-\frac{12397}{6000} \right] \left[x^3 - \frac{9}{5}x^2 + \frac{27}{25}x - \frac{27}{125} \right] + \frac{3}{10} - \frac{1}{2}x + 1.7x - 0.34 \\
 P_1(x) &= -\frac{12397}{6000}x^3 + \frac{37191}{10000}x^2 - \frac{51573}{50000}x + \frac{101573}{250000}
 \end{aligned}$$

Siguiendo este procedimiento se calculo el primer polinomio interpolador realizado por el método de Splines cúbicos.

Ejemplo 2.3. Se desea construir un polinomio interpolador para calcular el valor en $x = 2$ utilizando Splines cúbicos. Para ello, se cuenta con los siguientes datos:

x	-2	-1	1	3
y	3	1	2	-1

Apoyándose en la definición de Spline cúbico, se puede observar lo siguiente:

$$S(x) = \begin{cases} a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 & -2 \leq x < -1 \\ a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 & -1 \leq x < 1 \\ a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Para realizar el sistema de ecuaciones, se comienza de la siguiente manera,

$$\begin{aligned} s_1(-2) &= 3 & (-2)^3a_1 + (-2)^2b_1 + (-2)c_1 + d_1 &= 3 \\ s_1(-1) &= 1 & (-1)^3a_1 + (-1)^2b_1 + (-1)c_1 + d_1 &= 1 \\ s_2(-1) &= 1 & (-1)^3a_2 + (-1)^2b_2 + (-1)c_2 + d_2 &= 1 \\ s_2(1) &= 2 & (1)^3a_2 + (1)^2b_2 + (1)c_2 + d_2 &= 2 \\ s_3(1) &= 2 & (1)^3a_3 + (1)^2b_3 + (1)c_3 + d_3 &= 2 \\ s_3(3) &= -1 & (3)^3a_3 + (3)^2b_3 + (3)c_3 + d_3 &= -1, \end{aligned}$$

resolviendo se obtiene que

$$\begin{aligned} -8a_1 + 4b_1 - 2c_1 + d_1 &= 3 \\ -a_1 + b_1 - c_1 + d_1 &= 1 \\ -a_2 + b_2 - c_2 + d_2 &= 1 \\ a_2 + b_2 + c_2 + d_2 &= 2 \\ a_3 + b_3 + c_3 + d_3 &= 2 \\ 27a_3 + 9b_3 + 3c_3 + d_3 &= -1. \end{aligned}$$

Al llevar a cabo la primera derivada, se tiene:

$$\begin{aligned} s'_k(x) &= 3a_k(x^2) + 2b_k(x) + c_k \\ 3(-1)^2a_1 + 2(-1)b_1 + c_1 &= 3(-1)^2a_2 + 2(-1)b_2 + c_2 \\ 3(1)^2a_2 + 2(1)b_2 + c_2 &= 3(1)^2a_3 + 2(1)b_3 + c_3 \\ 3a_1 - 2b_1 + c_1 - 3a_2 + 2b_2 - c_2 &= 0 \\ 3a_2 + 2b_2 + c_2 - 3a_3 - 2b_3 - c_3 &= 0, \end{aligned}$$

En este momento, se determina la segunda derivada.

$$s'_k(x) = 6a_k(x) + 2b_k$$

$$6(-1)a_1 + 2b_1 = 6(-1)a_2 + 2b_2$$

$$6(1)a_2 + 2b_2 = 6(1)a_3 + 2b_3$$

$$-6a_1 + 2b_1 + 6a_2 - 2b_2 = 0$$

$$6a_2 + 2b_2 - 6a_3 - 2b_3 = 0.$$

Para la realización de este ejemplo, se emplea la condición de frontera natural, resultando en la expresión $s'_k(x) = 6a_k(x) + 2b_k$, entonces:

$$6(-2)a_1 + 2b_1 = 0$$

$$6(3)a_2 + 2b_2 = 0$$

$$-12a_1 + 2b_1 = 0$$

$$18a_3 + 2b_3 = 0.$$

En este punto se cuenta con todos los elementos necesarios para proceder con la formulación del sistema de ecuaciones

$$-8a_1 + 4b_1 - 2c_1 + d_1 = 3$$

$$-a_1 + b_1 - c_1 + d_1 = 1$$

$$-a_2 + b_2 - c_2 + d_2 = 1$$

$$a_2 + b_2 + c_2 + d_2 = 2$$

$$a_3 + b_3 + c_3 + d_3 = 2$$

$$27a_3 + 9b_3 + 3c_3 + d_3 = -1$$

$$3a_1 - 2b_1 + c_1 - 3a_2 + 2b_2 - c_2 = 0$$

$$3a_2 + 2b_2 + c_2 - 3a_3 - 2b_3 - c_3 = 0$$

$$-6a_1 + 2b_1 + 6a_2 - 2b_2 = 0$$

$$6a_2 + 2b_2 - 6a_3 - 2b_3 = 0$$

$$-12a_1 + 2b_1 = 0$$

$$18a_3 + 2b_3 = 0$$

Para resolver este sistema de ecuaciones, se empleará el lenguaje de programación Python, el cual proporcionará la solución deseada. Sin embargo, el interés se centra en el valor interpolado en

$x = 2$. Para obtener este valor, se evalúa la última parte de la función para $x = 2$, lo que implica la construcción del siguiente polinomio.

$$\begin{aligned}
 p(x) &= \frac{14}{88}x^3 - \frac{153}{88}x^2 + \frac{259}{88}x + \frac{53}{88} \\
 p(2) &= \frac{14}{88}(2)^3 - \frac{153}{88}(2)^2 + \frac{259}{88}(2) + \frac{53}{88} \\
 p(2) &= \frac{95}{88}.
 \end{aligned}$$

Después de aplicar el método de Splines cúbicos a los puntos de datos, se obtiene que para $x = 2$, el valor interpolado que le corresponde es $\frac{95}{88}$.

Con los ejemplos presentados en esta sección se cubrió los conceptos fundamentales del método de interpolación mediante Splines cúbicos, incluyendo su formulación, la determinación de los coeficientes por medio de sistemas lineales y algunas aplicaciones ilustrativas. También se estudió la precisión del método a través de la cota del error, así como sus propiedades de convergencia, consistencia y estabilidad. No obstante, es importante considerar que el uso de Splines cúbicos para interpolar funciones presenta ciertas ventajas y desventajas. Entre sus principales beneficios destaca la suavidad de las curvas generadas, al garantizar la continuidad de las primeras y segundas derivadas en los puntos de unión. Esto resulta especialmente útil en aplicaciones donde se requiere un trazado continuo sin cambios repentinos de dirección. Sin embargo, también exhiben algunas desventajas ya que al tratarse de una interpolación por tramos pueden surgir oscilaciones indeseadas entre los intervalos, especialmente en regiones donde la función original presenta un comportamiento irregular, asimismo, el cálculo de los coeficientes puede volverse complejo a medida que aumenta el número de puntos dados.

Tras analizar el método de interpolación mediante Splines cúbicos, es oportuno dirigir la atención hacia los métodos de interpolación espacial empleados específicamente en el ámbito meteorológico. Si bien los Splines cúbicos han encontrado algunas aplicaciones en este campo, se han desarrollado métodos específicos para manejar las complejidades que presentan los datos atmosféricos. Entre estos métodos especializados, destaca el Método de Barnes, cuyo enfoque de interpolación óptima ha demostrado efectividad en la generación de mapas meteorológicos precisos, la predicción confiable de fenómenos climáticos y el monitoreo de variables ambientales.

2.2.2. Método de interpolación espacial

Los métodos de interpolación espacial buscan generar una superficie continua a partir de datos irregularmente distribuidos, permitiendo estimar valores en ubicaciones no muestreadas y

revelar patrones espaciales para visualizar datos geográficos de manera continua. Es una técnica indispensable en disciplinas como geografía y cartografía que se emplea para crear mapas con curvas de nivel que representen fenómenos naturales o variables de interés (Dobesch et al., 2013), facilitando así la toma de decisiones en áreas como meteorología, geología, ecología, minería y agricultura. La interpolación espacial gana importancia al momento de transformar conjuntos de datos en información valiosa para comprender la variabilidad espacial de los fenómenos estudiados.

Los métodos de interpolación espacial pueden clasificarse en dos amplias categorías: interpolación puntual e interpolación de áreas, como se indica en la ilustración 8-1. La interpolación puntual se utiliza para calcular el valor de una variable en ubicaciones específicas como la temperatura o altitud en un punto determinado. Por su parte, la interpolación de áreas tiene como objetivo estimar datos agregados en regiones completas, por ejemplo, el recuento poblacional en diferentes zonas censales. Esta distinción es fundamental ya que cada categoría aborda requisitos distintos garantizando la obtención de resultados precisos y confiables acordes al contexto de aplicación (Raymond, 2009, p. 7).

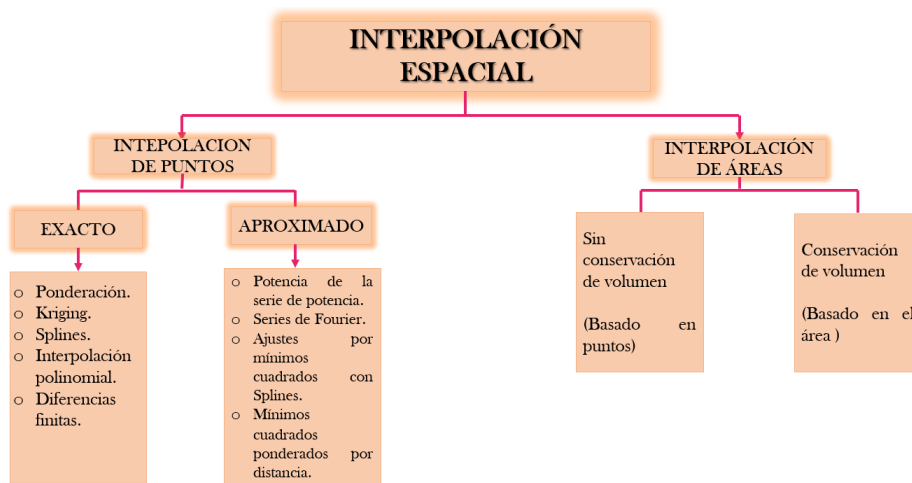


Ilustración 7-2: Tipos de interpolación espacial.
Realizado por: Alegría P., 2023

2.2.2.1. Interpolación de puntos

Los métodos de interpolación por puntos son utilizados para analizar datos continuos que han sido registrados en ubicaciones específicas, con el fin de determinar valores desconocidos en sitios donde no se tienen mediciones directas (Li & Heap, 2008, p. 137). Estos métodos parten de la premisa de que los valores de la variable de interés, como temperatura, precipitación, concentración de

contaminantes, etc., varían de manera continua en el espacio. Estas estimaciones se obtienen al establecer relaciones matemáticas entre los valores conocidos y sus posiciones geográficas, permitiendo así calcular los valores faltantes en nuevas ubicaciones. Por ejemplo, si se tienen datos de temperatura en determinadas estaciones meteorológicas, es posible interpolar los valores en áreas previamente no exploradas ni monitoreadas, a partir de los datos existentes en las estaciones cercanas.

Esta interpolación se pueden clasificar en exactos y aproximados. Los métodos exactos, tales como polinomios de interpolación, técnicas de ponderación por distancia, kriging, splines y métodos de diferencias finitas, garantizan que la función o superficie interpolada pase exactamente por los valores originales medidos. Por otro lado, los métodos aproximados basados en tendencias de series de potencia, modelos de Fourier, mínimos cuadrados ponderados por distancia, no necesariamente reproducen con exactitud los valores originales en los puntos de medición, estos ajustan una función suavizada que se aproxima a los datos, pero puede haber pequeñas desviaciones entre los valores interpolados y los valores realmente medidos, con el fin de lograr una superficie suave (Lam, 1983, pp. 130- 136).

Métodos exactos

La interpolación por puntos, mediante métodos exactos, busca lograr una coincidencia precisa entre los valores interpolados y los datos observados en los puntos de medición. Sin embargo, esta búsqueda de precisión se ve desafiada por la complejidad de los patrones espaciales o la distribución irregular de los datos. Un ejemplo destacado de estos métodos exactos es la técnica de ponderación por distancia, también conocida como inversa ponderada por distancia (IDW) (Lam, 1983, p.137).

Según Apaydın et al. (2004), el método IDW emplea una función de ponderación que otorga pesos decrecientes a los puntos con datos conocidos, conforme aumenta su distancia al punto de interés. Este objetivo se logra mediante el uso frecuente de la siguiente expresión:

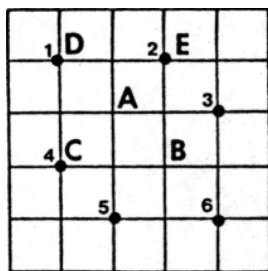
$$f(x,y) = \frac{\left[\sum_{i=1}^N (d_i)z_i \right]}{\left[\sum_{i=1}^N (d_i) \right]}, \quad (2.6)$$

donde, $w(d)$ representa la función de ponderación, z_i es el valor de los datos en el punto i , y d_i es la distancia desde el punto i hasta las coordenadas (x,y) del punto de interpolación. Los métodos

de ponderación se emplean como aproximaciones precisas en muchos casos (Sampson, 1978), aunque su grado de precisión puede variar dependiendo de la función utilizada para calcular las ponderaciones.

Se pueden emplear varias funciones de ponderación por ejemplo, como $w(d) = d^{-p}$, donde d representa la distancia al punto que se desea interpolar y p es un parámetro de ponderación positivo, tienden a infinito cuando $d \rightarrow 0$, proporcionando así el valor preciso de los puntos originales muestreados. Sin embargo, otras funciones como la gaussiana o exponencial negativa $w(d) = e^{-d^2/r^2}$, donde r es un parámetro de suavizado, solo se aproximarán a los valores originales en las ubicaciones de muestra, pero no los reproducirán con exactitud. A continuación se expone un ejemplo que ilustra el funcionamiento del método de ponderación por distancia .

Ejemplo 2.4. Considerando una superficie sencilla como se muestra en la ilustración 7-2, interpolar el valor que le pertenece al punto **A** utilizando el método de ponderación por distancia.



	x	y	z
1		4	40
2	3	4	24
3	4	3	30
4	1	2	24
5	2		32
6	4		25

Ilustración 7-2:
Ejemplo (IDW).
Realizado por: Alegría P.,
2023

Como se observa en la ilustración 7-2 se tienen los datos en seis puntos, donde el objetivo es interpolar los valores para los puntos restantes de la cuadrícula, cuyos valores son desconocidos. Para ello, se emplea el método de ponderación por distancia inversa que utiliza la función de ponderación $w = d^{-p}$, donde d representa la distancia al punto a interpolar y p es un parámetro de ponderación positivo. En este ejemplo, se utilizará $p = 1$, correspondiente al inverso de la distancia. Posteriormente, se aplica la ecuación (2.7) con los pesos obtenidos mediante esta función, lo cual permite calcular el valor interpolado en el punto de interés **A**, cuyas coordenadas son (2,3).

$$z(2,3) = \frac{(1.4)^{-1}40 + (1.4)^{-1}24 + \dots + (2.8)^{-1}25}{(1.4)^{-1} + (1.4)^{-1} + \dots + (2.8)^{-1}}$$

$$z(2,3) = 29.4.$$

Es importante destacar que este método demuestra eficiencia cuando los puntos de datos se distribuyen de manera uniforme y se observa una transición suave en los valores a lo largo del espacio.

Métodos aproximados:

Los métodos aproximados en la interpolación espacial tienen como objetivo capturar el comportamiento general de los datos conocidos sin necesidad de ajustarse a cada punto individual. A diferencia de las técnicas exactas que fuerzan que la función interpolada pase precisamente por todos los puntos de datos, los métodos aproximados permiten cierta desviación para representar patrones espaciales complejos de una manera suavizada (Lam, 1983, p. 136).

Una de las técnicas más comunes de los métodos de aproximación utilizados en la interpolación espacial son las series de Fourier, ampliamente empleadas para representar funciones periódicas y continuas en un dominio específico. Si existen indicios que sugieren la presencia de un patrón cíclico en una superficie, una forma efectiva de abordarlo es mediante el uso de un polinomio trigonométrico o una serie de Fourier (Lam, 1983, p. 137). La ecuación de series de Fourier representa la variación temporal de un fenómeno mediante la expresión:

$$f(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \text{sen}(n\omega_0 t)), \quad (2.7)$$

donde $f(t)$ denota los valores de la variable en estudio a lo largo del tiempo t . C_0 es el coeficiente que determina el valor promedio. Los coeficientes a_n y b_n representan las amplitudes de las componentes armónicas de frecuencia n correspondientes a las funciones coseno y seno respectivamente. La frecuencia angular ω_0 está relacionada con la periodicidad. Esta representación descompone la variable en una suma infinita de funciones armónicas de diferentes frecuencias, capturando los patrones cíclicos presentes. A continuación, se ilustra un caso práctico de aplicación de este método de interpolación aproximado.

Ejemplo 2.5. Dada la función periódica $f(t) = 2 + \cos(2\pi t)$, con un período de $T = 1$, se requiere representarla utilizando la serie de Fourier (2.8).

Se determina C_0 :

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$$C_0 = \frac{1}{1} \int_0^1 (2 + \cos(2\pi t)) dt$$

$$C_0 = 2.$$

Calcular los coeficientes a_n y b_n correspondientes a las componentes coseno y seno para $n = 1$ y $\omega_0 = 2\pi/T$.

$$a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \qquad b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \sen(n\omega_0 t) dt$$

$$a_1 = \frac{1}{1} \int_0^1 (2 + \cos(2\pi t)) \cos(2\pi t) dt \qquad b_1 = \frac{1}{1} \int_0^1 (2 + \cos(2\pi t)) \sen(2\pi t) dt$$

$$a_1 = \frac{1}{2} \qquad b_1 = 0.$$

Considerando la simetría par de la función $f(t)$, se concluye que todos los coeficientes b_n son igual a cero para cualquier valor de n . Asimismo, se determina que los coeficientes a_n son nulos para $n > 1$.

Sustituyendo los valores previamente determinados en la serie de Fourier (2.8), se tiene:

$$f(t) = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sen(n\omega_0 t))$$

$$f(t) = 2 + \left(\frac{1}{2} \cos(\omega_0 t) + 0 \sen(\omega_0 t) \right) + \sum_{n=2}^{\infty} (0 \cos(n\omega_0 t) + 0 \sen(n\omega_0 t))$$

$$f(t) = 2 + \frac{1}{2} \cos(\omega_0 t).$$

Dado que todos los términos de la sumatoria a partir de $n = 2$ son cero, la sumatoria se anula y solo queda el término correspondiente a $n = 1$.

Por lo tanto, la representación mediante la serie de Fourier de $f(t) = 2 + \cos(2\pi t)$ es:

$$f(t) = 2 + \frac{1}{2} \cos(2\pi t),$$

donde el término $\frac{1}{2} \cos(2\pi t)$ es el único término no nulo de la sumatoria de la serie de Fourier para esta función.

Si bien las series de Fourier son un método comúnmente utilizado en aproximaciones al tratar con

funciones periódicas, cuando se trata de fenómenos que implican la propagación de perturbaciones en el espacio, se requiere un enfoque más general. En este contexto, emerge la ecuación de la onda como una descripción fundamental que modela el movimiento ondulatorio y la propagación de perturbaciones en un medio. Esta ecuación, independiente de la naturaleza específica de la variable física involucrada, proporciona un marco unificado para estudiar y modelar diversos fenómenos ondulatorios más allá de los patrones periódicos abordados por los métodos aproximados

Ecuación de la onda

Cuando una cantidad física medible, como la presión, temperatura o campo electromagnético, experimenta una alteración en un espacio específico, esta perturbación puede propagarse a otros puntos de manera similar a su origen, manifestando un desplazamiento. Este fenómeno está regido por una ecuación fundamental, independiente de la naturaleza específica de la variable física involucrada, conocida como la ecuación del movimiento ondulatorio. Las soluciones de esta ecuación permiten determinar el valor de la magnitud en cualquier punto del espacio, ofreciendo información detallada sobre la propagación de la alteración (Rodríguez & Virgós, 1999, p. 6).

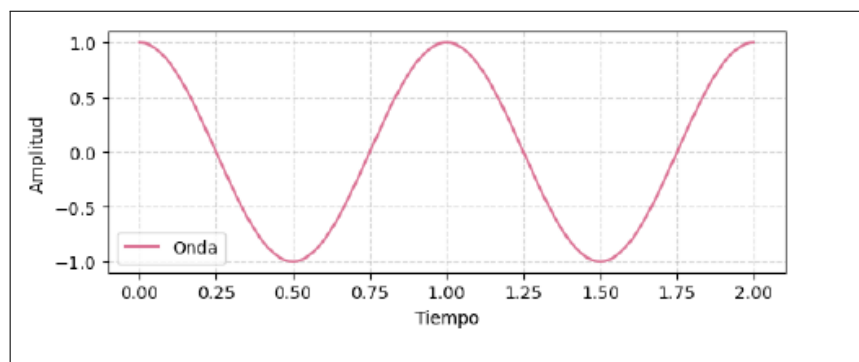


Ilustración 8-2: Ejemplo de una onda
Realizado por: Alegría P., 2023

Durante el siglo XVIII, surgió la necesidad de representar funciones de la variable x mediante series trigonométricas que involucran senos y cosenos de múltiplos enteros de dicha variable, es decir, términos de la forma $\sin(nx)$ y $\cos(nx)$ donde n toma valores enteros. En consecuencia, se analizará cómo se desarrolló la ecuación de la onda.

Representación matemática de la ecuación de la onda

Se tiene una cuerda flexible tensionada entre dos puntos fijos ubicados en $x = 0$ y $x = \pi$. El movimiento de vibración es completamente transversal, lo que implica que y depende únicamente de x en el instante t . El desplazamiento de la cuerda está representado por $y = y(x, t)$, donde las derivadas $\frac{\partial y}{\partial t}$ y $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ representan la velocidad y la aceleración de la vibración, respectivamente.

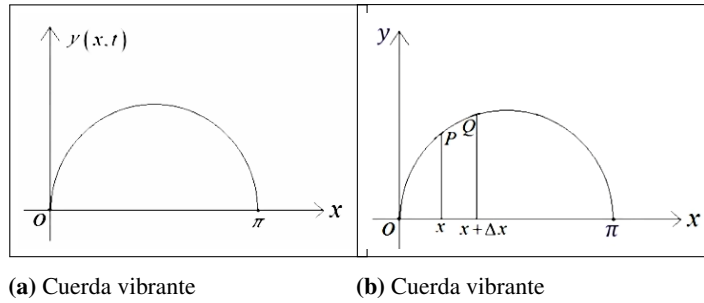


Ilustración 9-2: Ejemplificación de la cuerda vibrante.
Realizado por: Alegría P., 2023

Se analiza un segmento pequeño de la cuerda con una longitud Δx y una masa por unidad de longitud constante ρ . Por lo tanto, su masa es $\rho\Delta x$. Se asume que sobre ambos puntos de longitud Δx existen tensiones T_1 y T_2 que actúan en dirección de la cuerda. Estas fuerzas se definirán mediante los ángulos α y β .

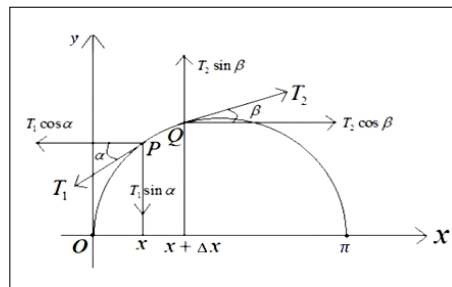


Ilustración 10-2: Ecuación de onda.
Realizado por: Alegría P., 2023

Dado que el movimiento de vibración es de arriba para abajo, se establece la relación $T_2 \cos \beta = T_1 \cos \alpha = T$ entre las tensiones T_1 y T_2 . Para las segundas componentes, de acuerdo con la segunda ley de Newton, se tiene $\sum F = ma$, lo que resulta en $T_2 \sin \beta - T_1 \sin \alpha = ma = (\rho\Delta x) \left(\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \right)$. Dividiendo por T , se obtiene:

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T} = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

luego, simplificando:

$$\frac{T_2 \sin \beta}{T_2 \cos \beta} - \frac{T_1 \sin \alpha}{T_1 \cos \alpha} = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Entonces:

$$\tan \beta - \tan \alpha = \frac{\rho\Delta x}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Dado que la derivada es la pendiente de la recta tangente, se tiene:

$$\tan \beta = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{\Delta x+x}, \quad \tan \alpha = \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{\Delta x}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{\Delta x} \left(\frac{\partial y(x+\Delta x, t)}{\partial x} - \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right) = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Cuando $\Delta x \rightarrow 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\rho}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Y si $a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, entonces se tiene la ecuación de onda unidimensional:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

La solución debe cumplir con las condiciones iniciales $y(0, t) = 0$, $y(\pi, t) = 0$ y $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$, $y(x, 0) = f(x)$. Estas condiciones iniciales varían considerablemente, pero D'Alembert limitó la categoría de las formas iniciales admitidas para la cuerda; la forma inicial debe ser continua.

Para solucionar este problema, se procedió a realizar la separación de variables, expresando $y(x, t)$ como el producto de dos funciones $u(x)$ y $v(t)$:

$$y(x, t) = u(x)v(t)$$

Esto conduce a la siguiente igualdad:

$$u''(x)v(t) = \frac{1}{a^2} u(x)v''(t)$$

Esta igualdad se cumple si:

$$u''(x)v(t) = -\lambda = \frac{1}{a^2} u(x)v''(t)$$

Lo que genera las siguientes ecuaciones:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad u(0) = u(\pi) = 0$$

$$v''(t) + \lambda a^2 v(t) = 0, \quad v'(0) = 0$$

Para la primera ecuación, si $\lambda = 0$, se tiene $u(x) = c_1 x + c_2$, lo que conduce a $u(x) = 0$ (lo mismo

ocurre si $\lambda < 0$).

Si $\lambda > 0$, se tiene $u(x) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}x + c_2 \operatorname{cos} \sqrt{\lambda}x$, lo que lleva a $u(x) = c_1 \operatorname{sen} n\pi x$ con $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{2}$, y por lo tanto, $\lambda = \frac{n^2\pi^2}{4}$, donde $n = 1, 2, 3, \dots$

Para la segunda ecuación, de manera similar se obtiene:

$$v(t) = c_1 \operatorname{sen} \sqrt{\lambda}at + c_2 \operatorname{cos} \sqrt{\lambda}at$$

Si se impone la condición de que $v'(0) = 0$, entonces:

$$v'(0) = a\sqrt{\lambda}c_1 \operatorname{cos} 0 - a\sqrt{\lambda}c_2 \operatorname{sen} 0$$

$$\Rightarrow a\sqrt{\lambda}c_1 = 0 \Rightarrow c_1 = 0$$

Entonces, se tiene que:

$$v(t) = c_2 \operatorname{cos} \sqrt{\lambda}at$$

Y por las consideraciones anteriores:

$$v_n(t) = \operatorname{cos}(nat)$$

Por lo tanto, la solución del problema de la cuerda vibrante es:

$$y_n = \operatorname{sen}(nx) \operatorname{cos}(nat).$$

El proceso para resolver la ecuación de onda implica un análisis detallado de la función inicial de la cuerda, tal como se detalla en (Cantoral & Farfán, 2004, pp. 124 - 128). Esta ecuación describe la propagación de perturbaciones ondulatorias y está vinculada con funciones periódicas. Al estudiar el movimiento vibratorio de una cuerda tensionada, la técnica de separación de variables descompone la expresión en un producto de dos funciones: una dependiente únicamente de la posición x (denotada como $u(x)$) y otra dependiente exclusivamente del tiempo t (representada por $v(t)$). Al sustituir la expresión $y(x,t) = u(x) \cdot v(t)$ en la ecuación de onda y aplicar las condiciones de contorno

e inicial correspondientes, se obtienen dos ecuaciones diferenciales ordinarias independientes:

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad \text{con condiciones de contorno } u(0) = u(\pi) = 0$$

$$v''(t) + \lambda a^2 v(t) = 0, \quad \text{con condición inicial } v'(0) = 0,$$

donde λ es una constante de separación y a es una constante relacionada con las propiedades de la cuerda. Estas ecuaciones diferenciales pueden resolverse de manera independiente. La función temporal $v(t)$ adquiere la forma de funciones trigonométricas, mostrando un comportamiento periódico característico de los fenómenos ondulatorios. Esta relación entre la ecuación de onda y las funciones periódicas establece las bases para un análisis profundo de los patrones oscilatorios presentes en diversos sistemas físicos.

Funciones periódicas

Una función $f(x)$ se considera periódica si cumple con la condición $f(x) = f(x + p)$, para cualquier valor de x y una constante positiva p . Esto implica que el valor de la función en un punto x se repite en los puntos $x + p$, $x + 2p$, y generalmente expresado como $x + np$. Las funciones periódicas son fundamentales en los fenómenos vibratorios y oscilatorios, y son comunes en todas las ciencias.

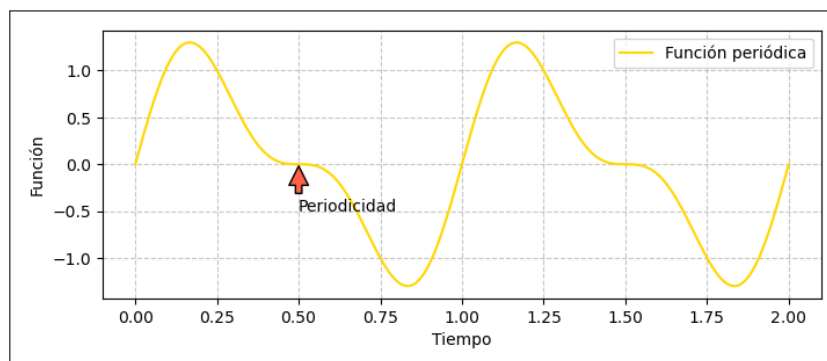


Ilustración 11-2: Función periódica

Realizado por: Alegría P., 2023

Las funciones periódicas se expresan como una suma de polinomios trigonométricos, es decir, una combinación de funciones seno y coseno y sus potencias y se las puede expresar matemáticamente de la siguiente forma:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

Esta expresión matemática facilita descomponer una función periódica en sus componentes básicos y analizar su comportamiento de manera más detallada.

Existen condiciones para que una función sea la integral de Fourier de otra función. Estas

condiciones se describen de la siguiente manera:

- **Condición de periodicidad:** para cualquier valor de t , la función debe satisfacer la igualdad $f(t + T) = f(t)$, donde la variable t representa el tiempo en el que se evalúa la función $f(t)$, y T representa un período .
- **Acotada:** Existe un número finito M tal que el valor absoluto de la función $|f(t)|$ sea menor o igual que M para todos los valores de t en el intervalo considerado.
- **Integrable:** La integral de $|f(t)|$ sobre dicho intervalo debe ser un valor finito.

Al ser expresadas como una combinación de polinomios trigonométricos mediante la serie de Fourier, las funciones periódicas permiten un análisis detallado de su comportamiento. Esta expresión facilita la descomposición de estas funciones en sus componentes básicos, como senos y cosenos, lo que brinda a los investigadores una comprensión más profunda de su naturaleza oscilatoria. Además, esta representación proporciona herramientas para comprender cómo diferentes frecuencias contribuyen al comportamiento de una función, lo que resulta crucial en diversas aplicaciones científicas y técnicas, desde la ingeniería de señales hasta la física de ondas.

Ondas armónicas

Cuando la magnitud de una onda alcanza los mismos valores a intervalos regulares a lo largo del tiempo, se considera una onda periódica. Si además, esta variación sigue una forma de onda sinusoidal, ya sea senoidal o cosenoidal, se denomina onda armónica. En decir, en una onda armónica la variación de la magnitud en cada punto sigue un movimiento vibratorio senoidal simple (Figueras, 2013, p. 135).

Las ondas armónicas trascienden su aplicación en la descripción de fenómenos físicos reales, ya que estos rara vez exhiben comportamientos totalmente armónicos. Su importancia radica en el hecho de que cualquier tipo de onda puede descomponerse en una combinación de varias ondas armónicas. Este principio, conocido como el teorema de Fourier, constituye una herramienta excepcionalmente poderosa para el análisis del fenómeno ondulatorio (Figueras, 2013, p. 136).

Características de las ondas armónicas:

- **Periodicidad:** Las ondas armónicas son periódicas, lo que significa que repiten su patrón a lo largo del tiempo.
- **Forma sinusoidal:** Las ondas armónicas tienen una forma sinusoidal, que se asemeja a una

función seno o coseno. La forma de onda se puede describir mediante ecuaciones matemáticas que implican funciones trigonométricas.

- **Frecuencia:** Las ondas armónicas tienen una frecuencia específica, que representa el número de ciclos completos que experimenta la onda por unidad de tiempo.
- **Amplitud:** La amplitud de una onda armónica representa el desplazamiento o magnitud máxima de la onda desde su posición de equilibrio. Indica la fuerza o intensidad de la onda.
- **Longitud de onda:** La longitud de una onda armónica es la distancia entre dos puntos correspondientes en ciclos adyacentes de la onda.
- **Fase:** La fase de una onda armónica indica dónde se encuentra en su ciclo en un momento dado.
- **Propagación:** Las ondas armónicas se mueven a través de un espacio, transmitiendo energía sin mover el material en sí mismo.
- **Superposición:** Las ondas armónicas pueden interferir entre ellas si varias están presentes en el mismo espacio.

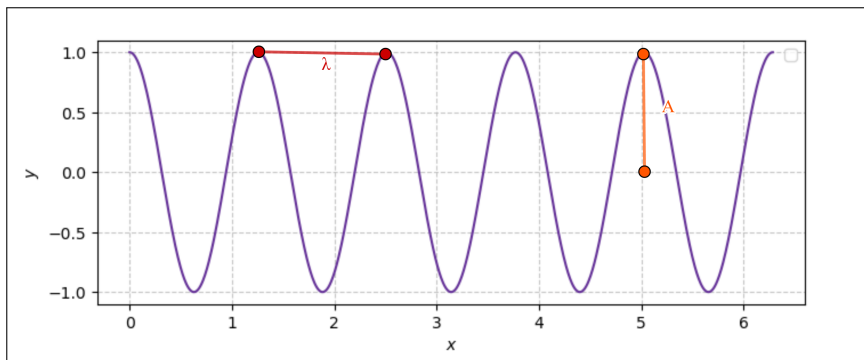


Ilustración 12-2: Onda armónica en un cierto instante de tiempo

Realizado por: Alegria, P., 2023

En una dimensión, la ecuación general que describe una onda armónica se denota por:

$$y(x) = A \operatorname{sen} \left(2\pi \frac{x}{\lambda} + \delta \right),$$

donde:

- A representa la amplitud.
- λ representa la longitud de onda.
- δ es una constante de fase que depende de la elección del origen $x = 0$.

Esta ecuación describe los desplazamientos que se pueden visualizar en la ilustración 13-2. Una forma más sencilla de expresar esta ecuación es de la siguiente manera:

$$y(x) = A \text{sen}(kx + \delta), \quad (2.8)$$

en donde k es el número de onda que esta dado por:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}.$$

Esta ecuación implica el uso de derivadas parciales, lo cual añade un nivel adicional de complejidad matemática a la ecuación de la onda. Las derivadas parciales capturan cómo varía el desplazamiento de la onda en función del tiempo y el espacio.

Las características de las ondas armónicas son los aspectos fundamentales que determinan el comportamiento y las propiedades asociadas a este tipo de ondas. Tienen un papel esencial en la investigación de los fenómenos ondulatorios en el ámbito de la física.

Ondas armónicas independientes.

El concepto de “ondas armónicas independientes” no es un término ampliamente utilizado en física, pero hace referencia a la situación donde múltiples ondas armónicas se propagan simultáneamente en un medio o sistema, sin influenciarse ni interactuar entre sí. Cada onda mantiene sus propiedades individuales de forma distintiva, sin afectar a las demás.

En la práctica, es poco común encontrar ondas armónicas independientes, ya que la mayoría de los sistemas de ondas exhiben algún nivel de interacción o interferencia. No obstante, en ciertos escenarios particulares, como cuando las longitudes de las ondas difieren significativamente o cuando se encuentran confinadas en regiones distintas de un medio, es posible minimizar sus interacciones, permitiendo considerarlas como ondas armónicas independientes en términos prácticos.

Características de las ondas armónicas independientes:

Podemos explorar las propiedades de múltiples ondas armónicas que se consideran independientes en situaciones prácticas. A continuación, se presentan algunas características fundamentales de estas ondas:

- **Propiedades individuales:** Cada onda armónica independiente tiene su propio conjunto

de propiedades, que incluyen frecuencia, amplitud y fase. Estas propiedades definen las características específicas de cada onda y permanecen constantes a lo largo de su propagación.

- **Presencia simultánea:** Ondas armónicas independientes coexisten en el mismo medio sin influir o alterar significativamente el comportamiento de las demás.
- **Interferencia mínima:** Las ondas armónicas independientes exhiben interferencia o interacción mínimas entre sí. En el caso de ondas independientes, cualquier efecto de interferencia potencial es insignificante debido a factores tales como diferentes longitudes de onda o separación espacial.
- **Superposición aditiva:** Las ondas armónicas independientes, a pesar de no interactuar significativamente entre sí, pueden presentar superposición aditiva, lo que quiere decir que dos o más ondas se propagan por el mismo medio al mismo tiempo. En este fenómeno, las formas de onda individuales se suman algebraicamente en cada punto del espacio, originando una onda resultante compuesta por la combinación lineal de los desplazamientos de las ondas individuales.
- **Propagación no afectada:** Cada onda armónica que forma parte del conjunto de ondas independientes se propaga a través del medio sin verse afectada ni sufrir alteraciones por la presencia simultánea de las otras ondas que se encuentran en el mismo lugar.

Observación 2.1. Las ondas armónicas independientes, aunque mantienen propiedades individuales, comparten una representación matemática común con todas las ondas armónicas en general, ya sean independientes o no. Esta función matemática común es lo que las define y las agrupa bajo la misma categoría, independientemente de sus particularidades.

En meteorología, algunos fenómenos relacionados con las ondas atmosféricas pueden ser tratados como ondas armónicas independientes empleadas para describir su propagación en la atmósfera. Es crucial destacar que las ondas atmosféricas son fenómenos complejos y su comportamiento puede ser influenciado por diversos factores, como la presencia de otras ondas, las condiciones atmosféricas y las interacciones con otros procesos atmosféricos.

Tras estudiar las ondas armónicas simples como las senoidales, es natural proceder al análisis de patrones oscilatorios complejos que no pueden ser descritos por una sola componente armónica. Estos patrones están formados por una combinación de múltiples ondas armónicas de diferentes frecuencias y amplitudes. Para analizarlos, utilizamos la serie de Fourier, una herramienta matemática que descompone cualquier oscilación periódica en una suma infinita de armónicos más simples. Esta descomposición facilita el análisis de las propiedades del patrón original, revelando sus frecuencias constituyentes y amplitudes relativas.

Series de Fourier

Las series de Fourier, desarrolladas por el matemático francés Jean-Baptiste Joseph Fourier en el siglo XIX, son fundamentales para representar funciones periódicas mediante una combinación infinita de senos y cosenos. Este método revolucionario no solo permitió analizar y describir fenómenos físicos periódicos, sino que también encontró aplicaciones significativas en diversas áreas como el procesamiento de señales, meteorología, análisis de vibraciones, mecánica cuántica, entre otros (Goñi, 2021, p. 1). Su principal aporte radica en la capacidad de descomponer funciones complejas en componentes más simples, facilitando la comprensión y el análisis de una variedad de fenómenos físicos y matemáticos. Las series de Fourier se caracterizan por ser representaciones matemáticas que toman la forma general de:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)\phi_n(x),$$

donde $\hat{f}(n)$ son los coeficientes de Fourier y $\phi_n(x)$ son las funciones básicas de Fourier. Estas series se descomponen en sumas de funciones periódicas de senos y cosenos con el mismo periodo que la función original. Esta descomposición en componentes armónicos básicos simplifica su estudio y comprensión en diversos campos matemáticos y físicos, revelando las frecuencias y amplitudes relativas presentes en la función periódica compleja. Esta perspectiva analítica es fundamental para entender fenómenos oscilatorios en distintas disciplinas.

Para desarrollar su método, Fourier utilizó las series de potencias de la función original y las funciones trigonométricas correspondientes. Luego, reorganizó estas series igualando los términos con las mismas potencias, lo que resultó en un sistema lineal con una cantidad infinita de ecuaciones e incógnitas. A partir de este sistema infinito, consideró uno finito tomando solo las primeras m ecuaciones y m incógnitas (las m primeras filas y columnas). Resolvió entonces este sistema finito truncado y posteriormente tomó el límite cuando m tiende a infinito. Mediante este análisis exhaustivo, Fourier logró derivar su famosa fórmula para calcular los coeficientes de la serie (Cañada, 2006, p. 125). Con el fin de profundizar en la comprensión de las series de Fourier y apreciar su utilidad de manera integral, es conveniente examinar su definición formal.

Definición 2.5. Sea $f(x)$ una función Riemann integrable en el intervalo $[-L, L]$, se define la serie de Fourier en ese intervalo como:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

donde los coeficientes a_0, a_n, b_n se definen como:

$$\begin{aligned}a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \\a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \\b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.\end{aligned}$$

Estos coeficientes son esenciales para lograr una representación precisa de la función original: a mayor número de términos en la serie, mayor precisión en la aproximación. Los coeficientes a_n y b_n determinan la amplitud y el peso relativo de cada componente armónica en la serie de Fourier, brindando los elementos esenciales para una representación matemática precisa.

Para comprender completamente las series de Fourier, es esencial explorar su definición y fundamentos teóricos. Estas series son un caso especial de las transformadas de Fourier, donde las integrales se convierten en sumas infinitas al tratar con funciones periódicas. Las integrales de Fourier permiten calcular los coeficientes necesarios para representar una función periódica como una suma de senos y cosenos (Cañada, 2006).

Integrales de Fourier

El concepto de las series de Fourier propuesto por el matemático francés tiene un impacto de gran relevancia en el ámbito de las geociencias. La flexibilidad y adaptabilidad que brinda esta teoría la convierten en una herramienta idónea para distintas aplicaciones, como el estudio de los patrones climáticos a lo largo del tiempo, la simulación numérica de fenómenos atmosféricos y oceánicos, así como la obtención precisa de información climática a partir del análisis riguroso de datos recolectados (Zhang & Moore, 2015, pp. 5-6).

Si bien las series de Fourier son fundamentales para el análisis de funciones periódicas, la integral de Fourier extiende notablemente su aplicabilidad al contemplar patrones no periódicos. Esta generalización adquiere relevancia trascendental, ya que, en el mundo real, muchos fenómenos geofísicos exhiben un carácter no repetitivo o involucran eventos de corta duración. La integral de Fourier permite descomponer estos patrones arbitrarios en sus componentes de frecuencia, revelando su composición espectral de manera continua y con alta resolución. A diferencia de las series de Fourier, que solo admiten un conjunto de frecuencias armónicas, la integral de Fourier proporciona una representación mejor detallada y precisa del espectro de frecuencias presentes. Además, establece una relación dual entre el dominio del tiempo y el de la frecuencia, lo que facilita

el análisis y procesamiento de patrones en ambos dominios, un aspecto esencial en áreas como el procesamiento de señales geofísicas, las comunicaciones y el filtrado de datos (Zhang & Moore, 2015, p.5).

Integral de Fourier

A continuación, se presenta la definición de la integral de Fourier.

Definición 2.6. Dada una función periódica $f(x)$ con período T , se busca expresar dicha función no solo en un intervalo limitado $[-L, L]$, sino en toda la recta de los números reales $(-\infty, \infty)$. Esto se logra al representar $f(t)$ como una combinación de senos y cosenos, lo cual puede expresarse mediante la integral de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A_{\omega} \cos(\omega t) + B_{\omega} \sen(\omega t)] d\omega,$$

donde, A_{ω} y B_{ω} son las amplitudes correspondientes para las componentes de frecuencia ω en la función $f(t)$.

Demostración.

La función $f(t)$ puede ser representada mediante una serie de Fourier, que es una suma infinita de senos y cosenos.

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \sen\left(\frac{n\pi t}{L}\right) \right], \quad (2.9)$$

donde a_n y b_n son constantes que dependen de n . Se definirá ω_n de la siguiente manera:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{L} \quad (2.10)$$

Se reemplazará (2.10) en (2.9)

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sen(\omega_n t)] \quad (2.11)$$

Los coeficientes a_n, b_n y a_0 están definidos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(\omega_n t) dt \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen(\omega_n t) dt \\ a_0 &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos(0) dt \quad \Rightarrow \quad a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) dt \end{aligned}$$

Por consiguiente, se sustituirán los coeficientes en (2.8) y se reemplazará la variable t por x .

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(\omega_n x) dx \right) \cos(\omega_n t) + \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}(\omega_n x) dx \right) \text{sen}(\omega_n t) \right] \quad (2.12)$$

La subdivisión del intervalo $[a, b]$ en n subintervalos permite aproximar el valor de la integral mediante la suma de áreas

$$P = \{\omega_n : n = 0, 1, 2, \dots\} \text{ es la partición de } [0, \infty),$$

donde ω_n representa valores que abarcan toda la parte positiva de la recta numérica $[0, \infty)$. Estos puntos dividen el intervalo en una infinidad de subintervalos más pequeños.

Cada subintervalo tiene una longitud, representada con Δ_ω , la cual se puede calcular.

$$\Delta_\omega = \omega_n - \omega_{n-1} = \frac{n\pi}{L} - \frac{(n-1)\pi}{L} = \frac{n\pi - n\pi + \pi}{L} = \frac{\pi}{L}$$

Por lo tanto

$$\omega_n = n\Delta_\omega \quad (2.13)$$

Reemplazados (2.13) en (2.12), se obtiene

$$f(t) = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\Delta_\omega x) dx \right) \cos(n\Delta_\omega t) + \left(\frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}(n\Delta_\omega x) dx \right) \text{sen}(n\Delta_\omega t) \right] \quad (2.14)$$

Se convierte $1/L$ en Δ_ω mediante el siguiente procedimiento:

$$\frac{1}{L} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \frac{\pi}{\pi L}$$

Posteriormente, se sustituye en (2.14).

$$f(t) = \frac{\pi}{2\pi L} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{\pi}{\pi L} \int_{-L}^L f(x) \cos(n\Delta_\omega x) dx \right) \cos(n\Delta_\omega t) + \left(\frac{\pi}{\pi L} \int_{-L}^L f(x) \text{sen}(n\Delta_\omega x) dx \right) \text{sen}(n\Delta_\omega t) \right] \quad (2.15)$$

Factorizando la expresión (2.15) y reemplazando π/L por Δ_ω se tiene:

$$f(t) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Delta\omega}{\pi} \left[\left(\int_{-L}^L f(x) \cos(n\Delta\omega x) dx \right) \cos(n\Delta\omega t) + \left(\int_{-L}^L f(x) \sin(n\Delta\omega x) dx \right) \sin(n\Delta\omega t) \right] \quad (2.16)$$

Se observa, la ecuación comienza a depender de $\Delta\omega$ lo cual recuerda a una suma de Riemann que está dada de la siguiente manera:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(k\Delta x) \Delta x, \quad \Delta x = x_k - x_{k-1}.$$

Se procede a reemplazar n por k , y se coloca $\Delta\omega$ para resaltar la forma de la suma de Riemann en la expresión.

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L f(x) dx \right) \Delta\omega + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \left[\left(\int_{-L}^L f(x) \cos(k\Delta\omega x) dx \right) \cos(k\Delta\omega t) + \left(\int_{-L}^L f(x) \sin(k\Delta\omega x) dx \right) \sin(k\Delta\omega t) \right] \Delta\omega \quad (2.17)$$

Cuando $L \rightarrow \infty$ y $\Delta\omega \rightarrow 0$, lo que resulta en la eliminación del primer término de la integral debido a su convergencia y la multiplicación por $\Delta\omega$, hace que todo el término se anule.

Para el segundo término, se realiza la integral en el intervalo de partición que va desde 0 hasta el infinito. Al permitir que tanto L como $k\Delta x$ tiendan al infinito, $k\Delta\omega$ se convierte en ω en la integral y se tiene:

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \right) \cos(\omega t) + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx \right) \sin(\omega t) \right] d\omega,$$

de lo cual se tiene:

$$A\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(\omega x) dx \quad B\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(\omega x) dx$$

Se llega a la función de respuesta.

$$f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [A\omega \cos(\omega t) + B\omega \sin(\omega t)] d\omega$$

□

Después de comprender la demostración de la integral de Fourier, se evidencia su importancia y versatilidad en el análisis de fenómenos diversos. Desde geociencias hasta física cuántica, su aplicación abarca una amplia gama de campos. En geociencias, se aplica para analizar patrones climáticos irregulares y datos sísmicos. En ingeniería de comunicaciones y procesamiento de

señales, su utilidad para la transmisión eficiente de datos es innegable. Esta herramienta, capaz de descomponer fenómenos en las componentes fundamentales, se posiciona como un pilar esencial en el tratamiento matemático de sistemas dinámicos y oscilatorios

Después de establecer las bases con conceptos fundamentales como la ecuación de onda, series de Fourier, ondas armónicas independientes, es pertinente explorar una técnica que se apoya en estos principios: el método de interpolación de Barnes. Esta técnica utiliza los fundamentos teóricos previamente explorados para ofrecer una solución a problemas que implican el tratamiento de datos y la reconstrucción de patrones.

2.2.2.2. Método de Barnes

El método de interpolación de Barnes, también conocido como el esquema de análisis objetivo, es una técnica propuesta por Barnes en 1964. Este método se ha convertido en una herramienta esencial para entender y predecir fenómenos atmosféricos gracias a su capacidad para aproximar valores intermedios con precisión en un entorno de datos dispersos. Utiliza un esquema de promediado ponderado para estimar un fenómeno continuo a partir de valores dados en una distribución irregular, determinando la ponderación mediante una función de influencia que disminuye exponencialmente a medida que aumenta la distancia desde el punto de malla donde se realiza la interpolación (Koch et al., 1983, p. 1492). Este método, ha demostrado su eficacia en diversas aplicaciones meteorológicas, como el análisis de presión, temperatura, humedad y viento, siendo particularmente útil en aplicaciones en tiempo casi real para áreas con terrenos complejos (Lam, 1983, p. 971).

Esta técnica de interpolación requiere de un radio de influencia R cuando se tiene N observaciones de una variable meteorológica y n datos faltantes. R definirá un entorno alrededor de cada punto de la malla donde se realizará la interpolación, mediante un promedio ponderado de los valores observados de la función f que modela la variable atmosférica. Sólo las observaciones que estén dentro del intervalo $(i - R, i + R)$ alrededor del punto i serán consideradas en este promedio. Los valores observados se ponderarán mediante una función de peso w_m , la cual asigna un valor mayor a las ubicaciones más cercanas al punto i y un valor menor a las más lejanas dentro del radio R .

En este método, se utiliza una función exponencial como función de peso gracias a su comportamiento *suave* y continuidad y a que su imagen se encuentra en el intervalo adecuado $[0, 1]$.

El peso asignado a cada una de las M observaciones dentro del radio de influencia R se calcula como:

$$w_m = \exp\left(-\frac{r_m^2}{\kappa}\right),$$

donde r_m es la distancia entre el punto observado x_m y el punto de red i , por su parte, κ determina la rapidez con la que disminuye la influencia de las observaciones más alejadas. El valor del parámetro κ depende de la distribución espacial de los datos observados y se calcula mediante la expresión:

$$\kappa = 5.052 \left(\frac{2\Delta n}{\pi}\right)^2,$$

donde Δn está relacionado con la densidad de observaciones disponibles.

En la primera iteración del método de Barnes, los valores conocidos $f(x_m)$ de la función a interpolar se combinan mediante un promedio ponderado utilizando los pesos w_m . Este promedio ponderado proporciona una estimación inicial $g_0(i)$ del valor de la función en cada punto i de la malla, dada por:

$$g_0(i) = \frac{\sum_{m=1}^M w_m f(x_m)}{\sum_{m=1}^M w_m}, \quad (2.18)$$

donde M es el número de observaciones dentro del radio de influencia R alrededor del punto i . De esta manera, se obtiene una primera aproximación a la interpolación, considerando las observaciones cercanas con un mayor peso y las más alejadas con un peso menor, determinado por la función exponencial de pesos.

(Barnes, 1973), realizó una modificación importante a su esquema iterativo original, cuyo objetivo primordial era agilizar drásticamente el proceso de convergencia, logrando alcanzar un alto grado de esta en solo 2 iteraciones. El componente clave que impulsó esta optimización fue la incorporación de un parámetro, denominado γ , cuyo valor numérico se establecía convencionalmente entre 0.2 y 0.3. Esto permite que, durante el transcurso de la segunda iteración, se aprovecharan las diferencias entre los valores observados y los interpolados en los puntos de la malla para perfeccionar el resultado final obtenido.

$$g_1(i) = g_0(i) + \frac{\sum_{m=1}^M w'_m [f(x_m) - g_0(x_m)]}{\sum_{m=1}^M w'_m}, \quad (2.19)$$

donde w'_m es una nueva función de ponderación: $w'_m = \exp\left(-\frac{r_m^2}{\gamma\kappa}\right)$

Si bien el método se presenta como un enfoque objetivo, existe una amplia gama de variables y parámetros que ejercen un control significativo sobre el campo interpolado resultante. Factores tales como el incremento de nodos Δn , el espaciado entre los datos de entrada Δx , y el valor asignado al parámetro γ , inciden notablemente en el producto final obtenido.

Existen dos enfoques principales para determinar el espaciado Δn utilizado en el análisis. Por un lado, es posible calcular el espaciado real existente entre los puntos de datos experimentales disponibles. Por otro lado, se puede asumir una distribución espacial completamente aleatoria de las observaciones, lo cual resulta adecuado cuando los datos presentan un alto grado de dispersión. La elección del enfoque dependerá del nivel de agrupamiento o clustering que exhiban los datos observados.

En cuanto al parámetro de suavizado γ , su valor debe ubicarse dentro del rango comprendido entre 0.2 y 1. Esta restricción se establece con el fin de preservar la integridad y confiabilidad del proceso de interpolación. Asimismo, existe una recomendación para que el parámetro Δx , relacionado con el espaciado, se encuentre entre 0.3 y 0.5. Estos límites han sido determinados empíricamente para garantizar un desempeño óptimo del método y evitar la introducción de artefactos o distorsiones indeseadas en los resultados de la interpolación.

Índice de precisión de Barnes

Un aspecto clave de este método es el índice de precisión D , ya que juega un papel fundamental en el equilibrio entre el suavizado y la preservación de detalles en los campos interpolados. La demostración de este componente se detalla a continuación.

- Ecuación 9.1.18, (Abramowitz & Stegun, 1948, p. 360) también conocida como la función de Bessel de orden 0:

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) d\theta \quad (2.20)$$

- Ecuación 9.1.45, (Abramowitz & Stegun, 1948, p. 361):

$$\sin(z \cos \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(z) \cos \{(2k+1)\theta\} \quad (2.21)$$

- Ecuación 11.4.29, (Abramowitz & Stegun, 1948, p. 486):

$$\int_0^\infty e^{-a^2 t^2} t^{v+1} J_v(bt) dt = \frac{b^v}{(2a^2)^{v+1}} \cdot e^{-\frac{b^2}{4a^2}} \quad (2.22)$$

Para demostrar esta función, se basó en una premisa fundamental: la distribución bidimensional de una variable atmosférica. En el artículo de Barnes (1964), se expuso que se utilizaría un factor de ponderación desarrollado a partir de dicha distribución bidimensional (Barnes, 1964, p. 396). Además, se mencionó que esta distribución se puede representar matemáticamente mediante la suma de un número infinito de ondas armónicas independientes (Barnes, 1964, p. 396). La representación integral de Fourier, según el enfoque de Barnes, descompone una función periódica en una serie de componentes armónicas, basadas en la teoría de funciones trigonométricas y exponenciales complejas. Barnes afirmó que esta representación integral ofrece una forma eficiente de estudiar las propiedades espaciales y temporales de la variable atmosférica en cuestión (Barnes, 1964, p. 397).

Para simplificar el análisis, se asumirá que una variable atmosférica se distribuye uniformemente en la dirección Y . Con esta suposición, el enfoque se centra en el comportamiento de la variable en relación con la coordenada x . Por lo tanto, se utilizará la función $f(x,y) = A \text{sen}(ax)$ para representar la distribución. En esta expresión, A representa la amplitud de la variable atmosférica, y a determina su frecuencia espacial. La función seno modela los patrones espaciales de la variable atmosférica a lo largo de la dirección x , donde el parámetro a controla la frecuencia y la amplitud de las oscilaciones. Además, esta aproximación simplificada facilitará el estudio y análisis de las propiedades y variaciones de la variable atmosférica.

Dado un conjunto continuo de observaciones que se extiende en todas las direcciones desde un punto arbitrario (x,y) , se busca asignar un peso a cada dato en función de su distancia desde ese punto. Al realizar la transición a coordenadas polares, la posición de cada dato puede expresarse utilizando una distancia radial r y un ángulo θ .

$$g(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} f(x + r \cos \theta, y + r \text{sen} \theta) w(r,k) r dr d\theta, \quad (2.23)$$

donde r = representa la distancia y w = el peso.

La función $g(x,y)$, mostrada en la ecuación, es una integral doble que combina la función $f(x + r \cos \theta, y + r \text{sen} \theta)$ con un factor de peso $w(r,k)$, representando r la distancia desde un punto de referencia hacia cada dato, mientras que θ el ángulo. El parámetro k influyendo en el peso asignado a cada dato.

Al realizar la transición a coordenadas polares, se simplifica la expresión y se facilita la comprensión y manipulación de los datos en términos de su posición radial y angular. La integral se extiende a lo

largo de un intervalo de ángulo que abarca de 0 a 2π y a lo largo de un intervalo seminfinito de distancia radial desde 0 hasta el infinito. Este cambio resulta beneficioso, ya que ciertos fenómenos o patrones pueden ser analizados y descritos de manera más sencilla utilizando coordenadas polares. Por lo tanto, se justifica la elección de esta representación para el cálculo y estudio de las observaciones relacionadas con la función $f(x,y)$.

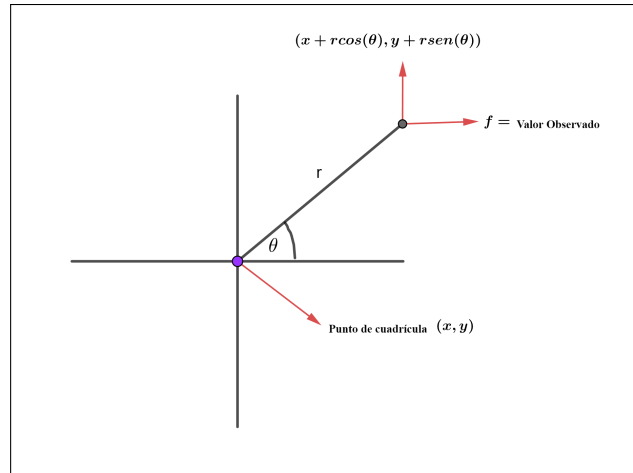


Ilustración 13-2: Dato de punto observado
Realizado por: Alegría, P., 2023

Función de ponderación: esta función de ponderación gaussiana asigna menos peso a los datos que están más alejados del punto de interpolación, es decir, les otorga pesos más bajos a medida que aumenta la distancia r desde dicho punto.

$$w(r,k) = \left[\frac{1}{4\pi k} \right] \cdot \exp\left(-\frac{r^2}{4k}\right), \quad (2.24)$$

k es un parámetro arbitrario.

Se establece la relación entre el valor observado f y el valor promedio ponderado g en el punto (x,y) específico.

$$g(x,y) = D(a,k)f(x,y).$$

Se define $D(a,k)$ como la función respuesta que depende de la longitud de onda, donde $a = \frac{\pi}{L}$, tal que L es la mitad de la longitud de onda.

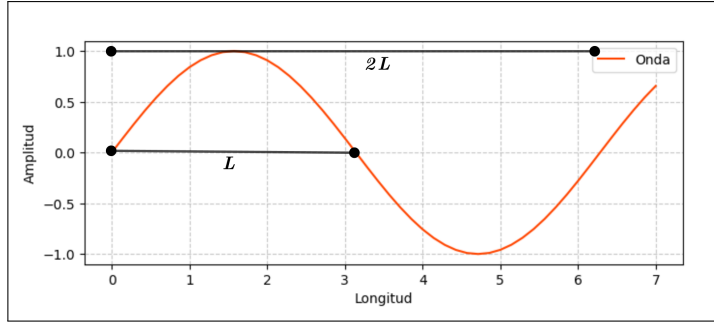


Ilustración 14-2: Longitud de la Onda

Realizado por: Alegría, P., 2023

Dado que,

$$f(x,y) = A \operatorname{sen}(ax),$$

$$f(x + r \cos \theta, y + r \operatorname{sen} \theta) = A \operatorname{sen}[a(x + r \cos \theta)],$$

$$f(x + r \cos \theta, y + r \operatorname{sen} \theta) = A \operatorname{sen}(ax + ar \cos \theta).$$

Considerando que y es constante

$$\operatorname{sen}(A + B) = \operatorname{sen}(A) \cdot \cos(B) + \cos(A) \cdot \operatorname{sen}(B),$$

donde:

$$A = ax, \quad B = ar \cos \theta,$$

entonces,

$$f(x + r \cos \theta, y + r \operatorname{sen} \theta) = A \operatorname{sen}(ax) \cos[ar \cos \theta] + A \cos(ax) \operatorname{sen}[ar \cos \theta]. \quad (2.25)$$

Considerando (2.24) y (2.25) sustituidos en (2.23), se observa lo siguiente

$$g(x,y) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} [A \operatorname{sen}(ax) \cos[ar \cos \theta] + A \cos(ax) \operatorname{sen}[ar \cos \theta] \cdot \left(\frac{1}{4\pi k}\right) \exp\left(\frac{-r^2}{4k}\right) r \operatorname{drd}\theta.$$

Observación 2.2. A partir de este momento, $w(r,k)$ se referirá a $\left[\left(\frac{1}{4\pi k}\right) \exp\left(\frac{-r^2}{4k}\right)\right]$.

Al distribuir la doble integral, se obtiene que

$$\begin{aligned} g(x,y) &= A \operatorname{sen}(ax) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \cos[ar \cos \theta] w(r,k) r \operatorname{drd}\theta \\ &+ A \cos(ax) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen}[ar \cos \theta] w(r,k) r \operatorname{drd}\theta. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Se pone atención en el primer término de la ecuación (2.26)

$$A \operatorname{sen}(ax) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \cos[\arccos \theta] w(r, k) r \, dr d\theta$$

$$A \operatorname{sen}(ax) \int_0^{\infty} w(r, k) r \, dr \int_0^{2\pi} \cos[\arccos \theta] \, d\theta.$$

Al analizar la integral con respecto a θ , se reconoce que representa una forma integral de la función de Bessel de orden cero. Por lo tanto, al reemplazar $z = ar$ en (2.20), se deduce:

$$J_0(ar) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[\arccos \theta] d\theta,$$

$$\pi J_0(ar) = \int_0^{\pi} \cos[\arccos \theta] d\theta,$$

Al modificar el intervalo de integración de la integral con respecto a θ , se obtiene lo siguiente:

$$\int_0^{2\pi} \cos[\arccos \theta] d\theta = 2 \int_0^{\pi} \cos[\arccos \theta] d\theta.$$

Luego de considerar detenidamente, se constata que

$$\int_0^{2\pi} \cos[\arccos \theta] d\theta$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[\arccos \theta] d\theta = J_0(ar)$$

$$2\pi \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos[\arccos \theta] d\theta \right] = [J_0(ar)] (2\pi)$$

$$2 \int_0^{\pi} \cos[\arccos \theta] d\theta = 2\pi J_0(ar). \quad (2.27)$$

Ahora, si se toma el segundo término de la ecuación (2.26)

$$A \cos(ax) \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{sen}[\arccos \theta] w(r, k) r \, dr d\theta,$$

$$A \cos(ax) \int_0^{\infty} w(r, k) r \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}[\arccos \theta] \, d\theta dr.$$

El segundo término de la ecuación (2.26) desaparece dado que, al considerar $z = ar$ en la ecuación (2.21)

$$\operatorname{sen}(ar \cdot \cos \theta) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot J_{2k+1}(ar) \cdot \cos \{(2k+1)\theta\},$$

y de esta igualdad integramos desde 0 a 2π sobre la variable θ

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \text{sen}[ar \cos \theta] d\theta &= \int_0^{2\pi} 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(ar) [\cos(2k+1)\theta] d\theta, \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(ar) \int_0^{2\pi} \cos[(2k+1)\theta] d\theta, \\ &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(ar) \left(\frac{\text{sen}[2\pi(2k+1)]}{2k+1} \right).\end{aligned}$$

Debido a que solo los múltiplos enteros de n aparecen como argumentos de las funciones senoidales, existe una propiedad fundamental de estas funciones. Al considerar una función senoidal de la forma $\text{sen}(nx)$, donde n es un número entero, se observa que los argumentos de la función seno toman valores que son múltiplos enteros de n

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \text{sen}[a(r \cos \theta)] d\theta &= 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k J_{2k+1}(ar) (0), \\ \int_0^{2\pi} \text{sen}[a(r \cos \theta)] d\theta &= 0.\end{aligned}\tag{2.28}$$

Reemplazando las ecuaciones (2.27), (2.28) en (2.26) y recordando que $[(1/(4\pi k)) \exp(-r^2/(4k))] = w(r, k)$ se obtiene

$$\begin{aligned}g(x, y) &= A \text{sen}(ax) \int_0^{\infty} w(r, k) (2\pi J_0(ar)) r dr, \\ &= A \text{sen}(ax) \int_0^{\infty} \left[\left(\frac{1}{4\pi k} \right) \exp\left(-\frac{r^2}{4k}\right) \right] [2\pi J_0(ar)] r dr, \\ &= A \text{sen}(ax) \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2k} \exp\left(-\frac{r^2}{4k}\right) \right] J_0(ar) r dr, \\ &= A \text{sen}(ar) \frac{1}{2k} \int_0^{\infty} \left(\exp\left(-\frac{r^2}{4k}\right) \right) J_0(ar) r dr, \\ g(x, y) &= \frac{A}{2k} \text{sen}(ar) \int_0^{\infty} J_0(ar) \exp\left(-\frac{r^2}{4k}\right) r dr.\end{aligned}\tag{2.29}$$

Observando la ecuación (2.29) con la forma de la ecuación (2.22), y considerando $b = a$, $t = r$, $a^2 = 1/4k$ y $v = 0$, se obtiene:

$$\int_0^{\infty} e^{\left(\frac{r^2}{4k}\right)} r (J_0(ar)) dr = \frac{a^0}{2 \left(\frac{1}{4k}\right)^{0+1}} \cdot e^{\left(\frac{a^2}{4 \left(\frac{1}{4k}\right)}\right)}.$$

Por consiguiente:

$$\frac{a^0}{2\left(\frac{1}{4k}\right)} \cdot \exp\left(\frac{a^2}{4\left(\frac{1}{4k}\right)}\right) \Rightarrow \frac{a^0}{\frac{1}{2k}} \cdot \exp\left(\frac{a^2}{\frac{1}{k}}\right) = a^0 2k \cdot \exp(-a^2 k), \quad (2.30)$$

entonces,

$$1(2k) \cdot \exp(ak) \quad \therefore \quad 2k \cdot \exp(a^2 k).$$

Al reemplazar en

$$g(x,y) = \frac{A}{2k} \text{sen}(ax) \left[-2K \cdot e^{(a^2 k)}\right]$$

$$g(x,y) = e^{(-a^2 k)} [A \text{Sen}(ax)]$$

Función de Respuesta

$$D(a,k) = \exp(-a^2 k),$$

donde, el número de onda a se define como $\frac{2\pi}{L}$, con $L = \lambda$.

$$-a^2 = -\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = -\frac{\pi^2 4k}{\lambda^2}$$

$$D(a,k) = \exp\left(-\frac{\pi^2 4k}{\lambda^2}\right)$$

2.2.2.3. Propiedades del Método de Barnes

Cota del error de Barnes

Considerando las funciones $f(x)$ y $g(x)$:

$$D = e^{-ka^2} \quad (2.31)$$

Se inicia acotando la función $f(x)$.

$$f(x) = A \sin(ax)$$

$$f(x) = |A| \cdot |\sin(ax)|$$

Al observar que $|\text{sen}(ax)| \leq 1$ para cualquier valor de x , se deduce que:

$$|f(x)| = |A| \cdot |\text{sen}(ax)| \leq |A| \cdot 1 = |A|$$

ya que $|A|$ es un valor constante (el módulo de la amplitud A), se llega a la conclusión que:

$$|f(x)| \leq |A|$$

La función $f(x)$ **está acotada superiormente por el valor $|A|$** .

Ahora se acota la función interpolante $g_N(x)$.

$$g_N(x) = f(x) \left(D \sum_{n=1}^N (1-D)^n \right)$$

Reemplazando $f(x)$ y D :

$$g_N(x) = A \operatorname{sen}(ax) e^{-ka^2} \sum_{n=1}^N (1 - e^{-ka^2})^n$$

Si ka^2 es muy grande, entonces e^{-ka^2} tiende a 0, por lo que:

$$\sum_{n=1}^N (1 - e^{-ka^2})^n \rightarrow N$$

Luego:

$$e^{-ka^2} \sum_{n=1}^N (1 - e^{-ka^2})^n \rightarrow 0$$

Además, se toma en cuenta que $D \in [0, 1]$ y $D = e^{-ka^2}$, entonces:

$$g_N(x) \leq A \operatorname{sen}(ax) e^{-ka^2} \sum_{n=1}^N 1 = A \operatorname{sen}(ax) e^{-ka^2} N$$

Como $e^{-x} \in [0, 1]$ para $x \in [0, \infty]$, se afirma que:

$$0 \leq e^{-ka^2} N \leq 1$$

Entonces, $|g_N(x)| \leq |A|$ y también $|f(x)| \leq |A|$, por lo que se concluye que la cota del error es la siguiente:

$$|E(x)| = |f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g_N(x)| \leq 2|A|$$

.

En la siguiente ilustración se observa como $|A|$ acota a la función $E(x)$.

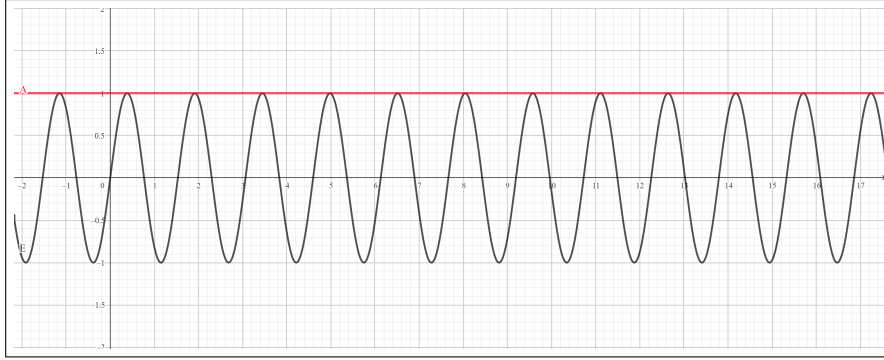


Ilustración 15-2: Cota del error. Método de Barnes .
Fuente: Cota del error. Método de Barnes

Consistencia

Considerando la función de interpolación $f(x)$ y su aproximación mediante el método de Barnes con N iteraciones, denotada como $g_N(x)$, se ha definido el error de interpolación como:

$$E(x) = f(x) - g_N(x).$$

Cuando el número de iteraciones $\lim_{N \rightarrow \infty} E = 0$, entonces se inicia el desarrollo de $E(x)$.

$$\begin{aligned} E_N(x) &= f(x) - g_N(x) \\ &= f(x) - f(x) \sum_{n=0}^N (1-D)^n \\ &= f(x) \left(1 - \sum_{n=0}^N (1-D)^n \right). \end{aligned}$$

Luego, se considera el límite conforme N tiende a infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} E_N(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f(x) \left(1 - \sum_{n=0}^{N-1} (1-D)^n \right) \\ &= f(x) \left(1 - \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} (1-D)^n \right). \end{aligned}$$

La serie $\sum_{n=0}^{N-1} (1-D)^n$ es una serie geométrica con $|1-D| < 1$. Por definición de convergencia de series geométricas:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{N-1} (1-D)^n = \frac{1}{1-(1-D)} = \frac{1}{D}.$$

Ahora se reemplaza este resultado en el límite del error

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E_N(x) = f(x) \left(1 - \frac{1}{D} \right) = 0.$$

Con esto se puede apreciar que la interpolación del método de Barnes converge a 0 cuando N tiende a infinito, cumpliendo así con el criterio de consistencia.

Estabilidad

El error de interpolación esta expresado como:

$$E(x) = f(x) - g_N(x)$$

La función original $f(x)$ y su aproximación $g_N(x)$ están limitadas superiormente por una constante $M = |A|$. Esta afirmación se deriva directamente de las cotas previamente establecidas y demostradas en el contexto del problema.

Se define el error sin modificar como:

$$E(x) = f(x) - g_N(x)$$

Y el error con datos alterados como:

$$\hat{E}(x) = \hat{f}(x) - \hat{g}_N(x)$$

El objetivo es determinar si el método de Barnes es estable, lo que implicó que el error en la aproximación $\hat{E}(x)$ este acotado superiormente por una función lineal de ϵ_n , el error en los datos, es decir:

$$|\hat{E}(x)| \leq M_1 + M_2|\epsilon_n|$$

donde M_1 y M_2 son constantes positivas.

Aplicando la desigualdad triangular y conciderando las cotas previamente demostradas, se tiene:

$$|\hat{E}(x)| \leq |\hat{f}(x)| + |\hat{g}_N(x)| \leq M + M'|\epsilon_n|$$

donde M y M' son las constantes que acotan respectivamente la función original y la aproximación del método de Barnes, y $|\epsilon_n|$ representa el error en los datos.

Habiendo tomado esto en cuenta $M_1 = M$ y $M_2 = M'$, se cumple la desigualdad requerida. La demostración de la estabilidad del método de interpolación de Barnes se completó, lo que significa que el error en la solución interpolada está limitado por una constante multiplicada por el error en los datos.

Convergencia

Para la convergencia del método de interpolación de Barnes, se observa que $f(x) - g_N(x) \rightarrow 0$ cuando $N \rightarrow \infty$ por lo que se define $E(x) = f(x) - g_n(x)$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (f(x) - g_N(x)) &= \lim_{N \rightarrow \infty} f(x) - \lim_{N \rightarrow \infty} g_N(x) \\ &= f(x) - \lim_{N \rightarrow \infty} \left(f(x) D \sum_{n=1}^N (1-D)^n \right) \end{aligned}$$

Dado que $g_N(x) = f(x) D \sum_{n=1}^N (1-D)^n$ con $D = e^{(-Ka^2)}$ donde $a = \frac{\pi}{L}$, entonces:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - g_N(x)) &= f(x) - f(x) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(D \sum_{n=1}^N (1-D)^n \right) \\ &= f(x) \left(1 - D \sum_{n=1}^{\infty} (1-D)^n \right) \end{aligned}$$

Entonces, $f(x) - g(x) \rightarrow 0$, es equivalente a observar que $1 - D \sum_{n=1}^N (1-D)^n$ para $N \rightarrow \infty$ esto sucede porque $f(x) \neq 0$, por lo tanto $(f(x) = A \sin(ax))$.

Es decir

$$1 - D \sum_{n=1}^{\infty} (1-D)^n = 0 \rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (1-D)^n = \frac{1}{D}$$

Se verifica que la serie converge a $\frac{1}{D}$.

Tomando en cuenta $D = e^{(-\frac{\pi^2}{4E} (\frac{R}{b} - \frac{1}{b})^2)}$ por lo tanto $0 \leq D \leq 1$, entonces:

$$-1 \leq D - 1 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq 1 - D \leq 1$$

Eliminando los casos para $D = 0$ y $D = 1$ (el criterio no es aplicable), entonces $0 < 1 - D < 1$. Por lo tanto, la serie converge a

$$\frac{1}{1 - (1 - 0)} = \frac{1}{D}$$

Así, como $\sum_{n=1}^{\infty} (1-D)^n = \frac{1}{D}$, esto garantiza que

$$f(x) - g_N(x) \rightarrow 0 \Rightarrow E(x) \Rightarrow 0$$

La convergencia del método de Barnes es evidente, lo que lleva a la conclusión de que cumple con las propiedades requeridas, estableciéndolo como un método confiable para realizar interpolaciones.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

En este capítulo, se ahonda en los principios metodológicos adoptados en la investigación. El estudio empleó un enfoque mixto (cualitativo y cuantitativo) con un alcance descriptivo deductivo, ya que se analizan las propiedades de los métodos de interpolación, y se implementan para completar datos faltantes de la variable de temperatura de las estaciones meteorológicas GEAA - ESPOCH.

3.1. Descripción del diseño, enfoque y alcance

En esta investigación se optó por un diseño documental, el cual implica la consulta y recopilación de fuentes primarias y secundarias que abordan los fundamentos teóricos y las aplicaciones de los métodos de interpolación (Splines cúbicos y Barnes). Por otro lado, para una mejor comprensión de los métodos, se realizó un estudio cualitativo basado en el método descriptivo deductivo. Este análisis se centró en indagar las propiedades de convergencia, consistencia, estabilidad y las cotas del error asociadas a estos métodos. Paralelamente, se empleo un enfoque cuantitativo debido a que fueron implementados en Python, con el objetivo de rellenar datos faltantes.

Actividades que fueron desarrolladas para la ejecución de la Investigación:

1. Se realizó la revisión de documentos y se seleccionó el material bibliográfico relevante relacionado con el tema.
2. Se estudiaron en profundidad los métodos de interpolación de Barnes y Splines Cúbicos.
3. Se analizaron las cotas del error de los dos métodos de interpolación.
4. Se investigaron y evaluaron las condiciones de convergencia, consistencia y estabilidad de ambos métodos.
5. Se utilizó el lenguaje de programación Python para implementar el relleno de datos mediante ambos métodos de interpolación, con el objetivo de obtener resultados más precisos.
6. Se detallaron y analizaron minuciosamente los resultados obtenidos en el estudio comparativo de los métodos de interpolación.
7. Se completaron las bases de datos de la variable temperatura utilizando el método seleccionado.

8. Se consolidó el documento de titulación con el propósito de servir como una herramienta informativa para los estudiantes de la Carrera de Matemática.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En este capítulo, se presenta un análisis comparativo de los resultados obtenidos al evaluar el desempeño de los métodos de interpolación: Barnes y Splines cúbicos para el relleno de datos de temperatura en la provincia de Chimborazo. Se compararon las propiedades fundamentales de estos métodos, tales como la cota del error, la convergencia, la estabilidad y la consistencia. Los Splines cúbicos ajustaron polinomios de tercer grado (cúbicos) en cada segmento. Por otro lado, se utilizó la función de ponderación Gaussiana el método de Barnes. Además, se llevó a cabo la implementación de los métodos para rellenar datos de temperatura de 11 estaciones meteorológicas.

4.1. Comparación de las propiedades de los métodos de interpolación

En la Tabla 4-3, se muestran los resultados de la comparación entre los métodos de interpolación de Barnes y Splines cúbicos. Esta comparación se basa en propiedades como las cotas del error, la convergencia, la consistencia y la estabilidad. Es importante destacar que las demostraciones se presentaron en el Capítulo II.

Tabla 4-3: Comparación de las propiedades de los métodos de interpolación

	Splines Cúbicos	Método de Barnes	Resultados
Cota del error	Se ha demostrado que la cota de error para Splines cúbicos es $ f(x) - S(x) \leq h^{\frac{3}{2}}$ lo que implica que el error es de orden $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$.	La cota establece que el error está limitado por una constante determinada por el valor absoluto de la amplitud $ A $ de la función $f(x)$ que está siendo interpolada. Esta limitación no está directamente relacionada con el espaciado h entre los puntos de datos, a diferencia de lo que ocurre en el caso de los splines. Además, esta limitación se aplica a cualquier valor de x , no solo a los puntos de datos específicos.	Se puede observar que los Splines cúbicos ofrecen garantías teóricas más sólidas en cuanto al error, con un orden de $(\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}}))$. Aunque en la práctica ambos métodos pueden alcanzar precisiones similares, desde una perspectiva de análisis teórico, los splines parecen superiores en términos de control del error.
Consistencia	Los splines son consistentes: al incrementar los puntos de datos, la interpolación converge a la función real.	Se demostró la consistencia de Barnes, el error tiende a 0 con más iteraciones.	Los dos son consistentes.
Estabilidad	Splines cúbicos son esencialmente estables, porque pequeñas variaciones en los datos no causan grandes cambios en los coeficientes del Spline cúbico.	El método de Barnes se considera estable, ya que se ha demostrado que el error está limitado ante variaciones externas.	Los dos métodos son estables.
Convergencia	Splines cúbicos tienen mejor convergencia $(\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}}))$.	La convergencia depende de parámetros escogidos por Barnes.	Splines tiene mejor garantía de convergencia.

Realizado por: Alegría, P., 2024.

Los Splines cúbicos presentaron ventajas significativas en comparación con el método de Barnes debido a la convergencia de orden superior, $\mathcal{O}(h^{3/2})$, cuando el espaciado h se reduce, en comparación al método de Barnes que está acotado por una constante A . Además, los Splines cúbicos brindan continuidad C^2 entre tramos asegurando una interpolación suave, a diferencia del método de Barnes que puede generar oscilaciones si los parámetros como el radio de influencia no se ajustan adecuadamente.

En cuanto a la solución de sistemas lineales, los Splines cúbicos ofrecen la capacidad de depender únicamente del grado del polinomio (cúbico), lo que simplifica su implementación computacional. Por otro lado, el método de Barnes requiere un ajuste delicado de parámetros como el radio, el

índice de precisión $D = \exp(-ka^2)$ o la función de peso (ω), lo cual puede dificultar su uso en ciertas aplicaciones. Finalmente, las sólidas garantías teóricas de error y la suavidad propia de los Splines cúbicos los posicionan como la mejor opción para rellenar de datos más precisos en comparación con el método de Barnes.

4.2. Datos de la variable temperatura

El GEAA proporcionó la base de datos de temperatura promedio por hora de 11 estaciones meteorológicas ubicadas en la provincia de Chimborazo en el período 2014 - 2022 (Tabla 4-4). Además, el grupo de investigación realizó un estudio previo que determinó el porcentaje de datos faltantes, como se indica en la Tabla 4-5.

Tabla 4-4: Estaciones Meteorológicas de la provincia de Chimborazo

Estación Meteorológica	Parroquia	Cantón	Latitud	Longitud	Altura (m)
ESPOCH	Lizarzaburu	Riobamba	9816965	78.75398	2754
Chocavi	San Isidro de Patulú	Guano	9830457	78.756526	3486
Tunshi	Licto	Riobamba	9806678	78.764087	2840
Quimiag	Quimiag	Riobamba	9816392	78.77008361	2709
Tixan	Tixan	Alausí	9761332	78.749103	3546
San Juan	San Juan	Riobamba	9818849	78.746596	3232
Alao	Pungala	Riobamba	9793173	78.773499	3064
Multitud	Multitud	Alausí	9711374	78.722699	1483
Matus	Matus	Penipe	9827878	78.777759	2704
Atillo	Cebadas	Guamote	9758048	78.772610	3467
Cumanda	Cumanda	Cumanda	9755579	78.7062624	330.95

Realizado por: Alegría, P., 2024.

En la tabla 4-5 se muestra el porcentaje de datos faltantes para cada estación, donde Cumanda presentó el 96,36% , seguido de Matus con 90,62% y Quimiag con 81,63% en los años 2020, 2014 y 2018 respectivamente. Mientras que Alao fue la estación con menor porcentaje de faltantes en todos los años. En el caso de Chocaví solo se registro datos desde el año 2021.

Tabla 4-5: Porcentaje de datos faltantes por estación

ESTACIONES	AÑOS								
	2014 (%)	2015 (%)	2016 (%)	2017 (%)	2018 (%)	2019 (%)	2020 (%)	2021 (%)	2022 (%)
ALAO	0,76	0,00	0,00	0,27	4,20	0,00	0,00	0,00	20,48
ATILLO	6,27	0,00	0,00	4,58	26	62,07	0,00	1,89	0,00
CHOCAVI	Null	Null	Null	Null	Null	Null	Null	80,61	4,02
CUMANDA	1,74	0,84	39,85	29,74	19,22	23,05	96,36	10,90	8,44
ESPOCH	6,22	1,92	0,03	4,65	19,19	0,01	0,00	1,60	9,42
MATUS	90,62	1,22	0,00	0,00	4,51	26,28	0,00	0,27	0,27
MULTITUD	5,40	6,29	0,00	18,28	0,55	0,18	61,07	0,00	0,58
QUIMIAG	0,15	0,00	0,00	0,18	81,63	3,01	0,00	2,19	4,93
SAN JUAN	0,27	0,00	0,00	0,26	1,80	0,00	0,00	0,00	13,42
TIXAN	3,28	0,00	0,00	0,19	11,05	0,22	0,00	6,43	0,00
TUNSHI	2,60	0,00	7,16	20,42	28,15	38,82	0,00	0,00	39,05
URBINA	0,35	0,00	0,00	0,18	47,68	13,14	4,35	Null	Null

Realizado por: Alegría, P., 2024.

4.3. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados

Con el fin de completar con mejor precisión los datos faltantes de la variable temperatura de las 11 estaciones meteorológicas, se realizó una interpolación por cada mes durante los 9 años de datos proporcionados. Esto significa que cada año se generaron 12 ilustraciones, lo que resultó en la creación de más de 500 gráficas de interpolación en total.

4.3.1. Implementación de los métodos para la variable de temperatura en la provincia de Chimborazo

Mediante el empleo del lenguaje de programación Python, se logró completar la mayoría de los datos faltantes de temperatura de las 11 estaciones meteorológicas de la provincia de Chimborazo. Sin embargo, durante el proceso se identificaron limitaciones en ambos métodos de interpolación, evidenciadas por anomalías en las gráficas y la falta de coherencia en los puntos aproximados. Estos métodos proporcionan una solución práctica y eficiente para mejorar la calidad de los datos, lo que facilita su posterior análisis y uso en diversas aplicaciones en el campo meteorológico.

4.3.1.1. Implementación de Splines cúbicos

Para la realización de esta simulación, se empleó el paquete *scipy.interpolate* y la función *CubicSpline* con el parámetro *clamped* (frontera sujeta), y se impuso la condición e emplear 744 intervalos, de modo que el trazador cúbico paso por cada dato proporcionado. A continuación se exhiben 11 gráficos representativos de la interpolación llevada a cabo mediante el método de

Splines cúbicos para la variable de temperatura, con una gráfica correspondiente a cada una de las estaciones meteorológicas.

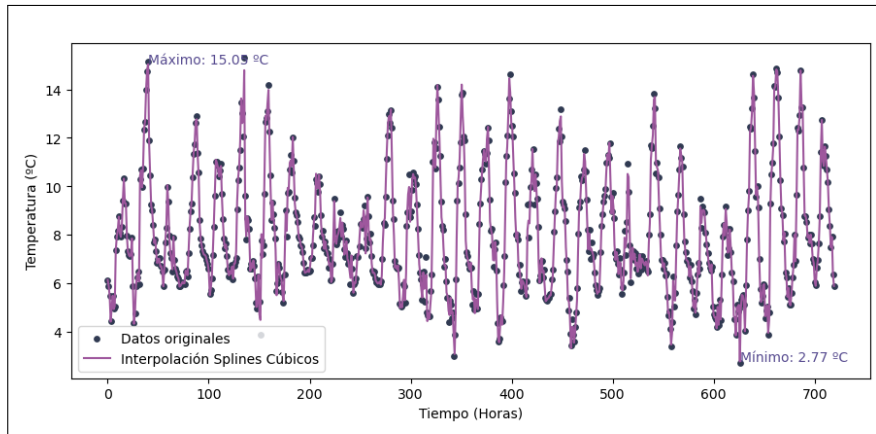


Ilustración 1-4: E. Chocavi - Junio, 2022
Realizado por: Alegría P., 2023

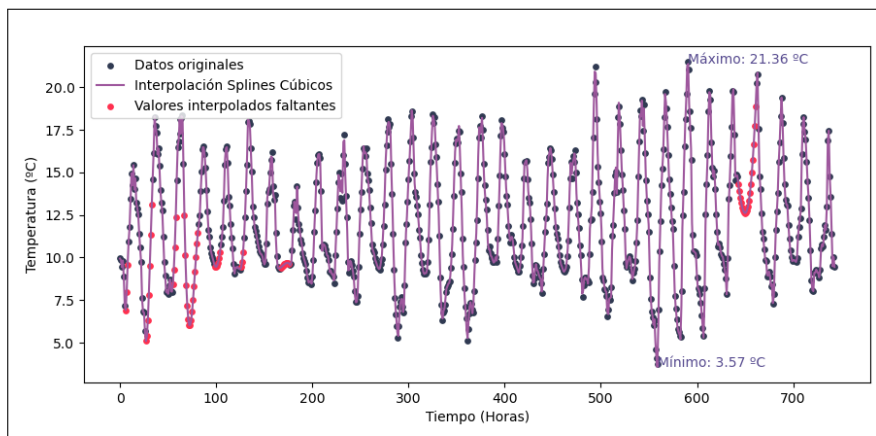


Ilustración 2-4: E. Alao - Enero, 2014
Realizado por: Alegría P., 2023

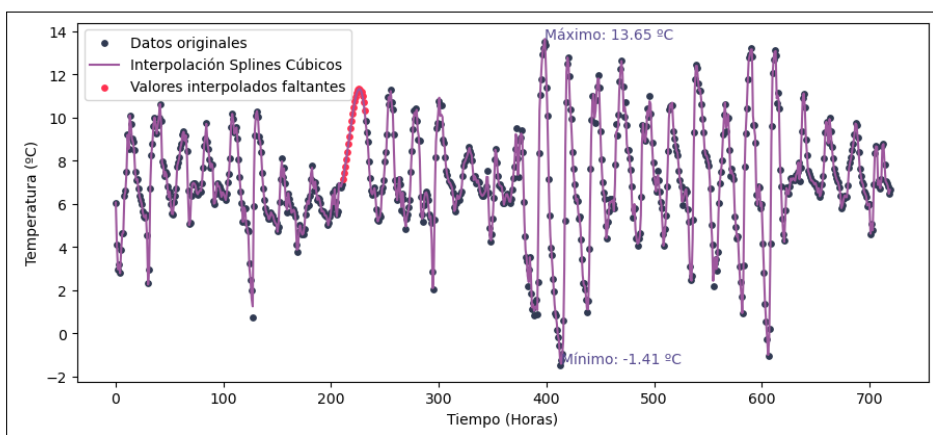


Ilustración 3-4: E. Atillo - Septiembre, 2014
Realizado por: Alegría P., 2023

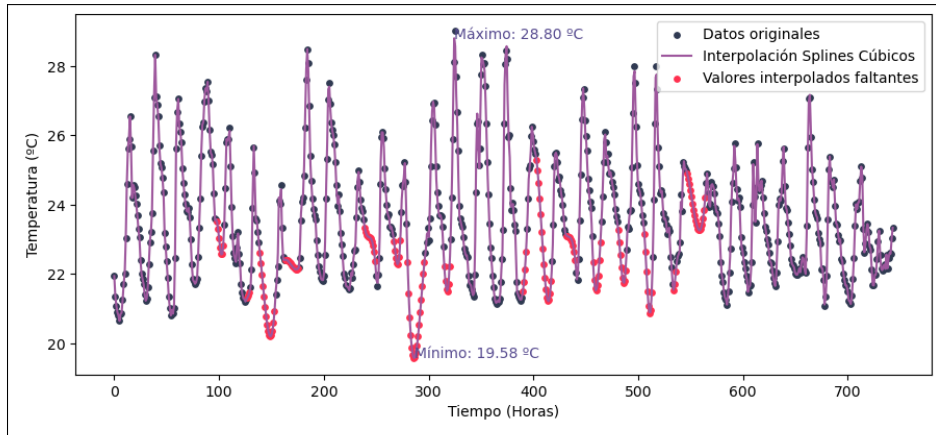


Ilustración 4-4: E. Cumanda - Enero, 2014

Realizado por: Alegría P., 2023

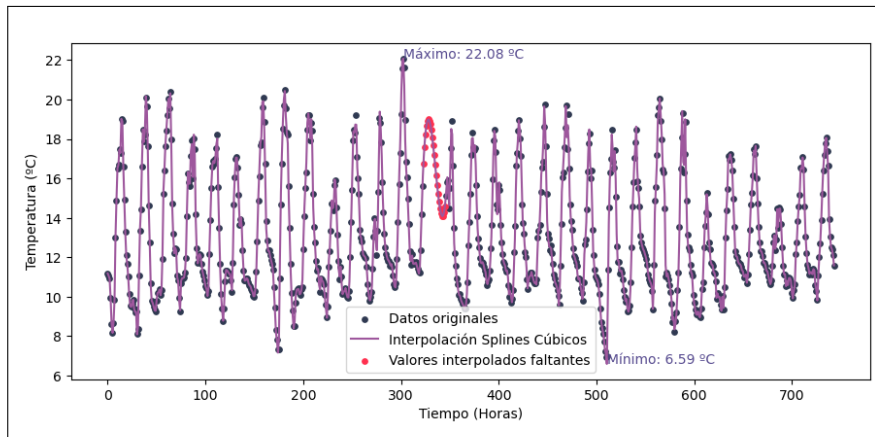


Ilustración 5-4: E. Matus- Octubre, 2021

Realizado por: Alegría P., 2023

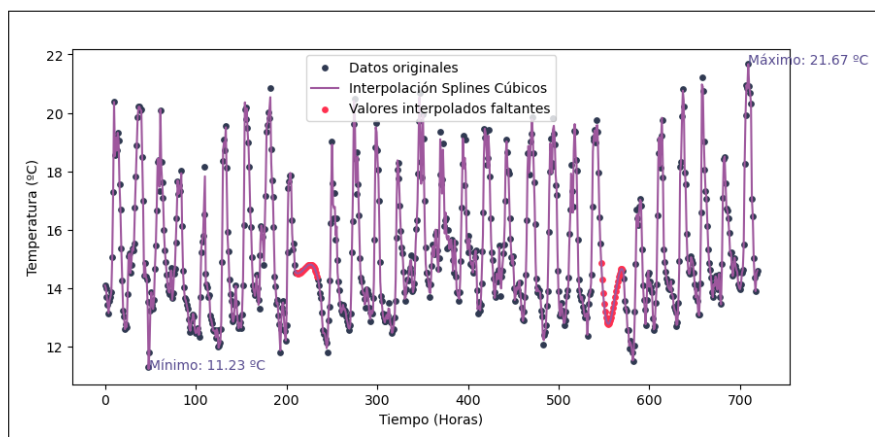


Ilustración 6-4: E. Multitud - Septiembre, 2018

Realizado por: Alegría P., 2023

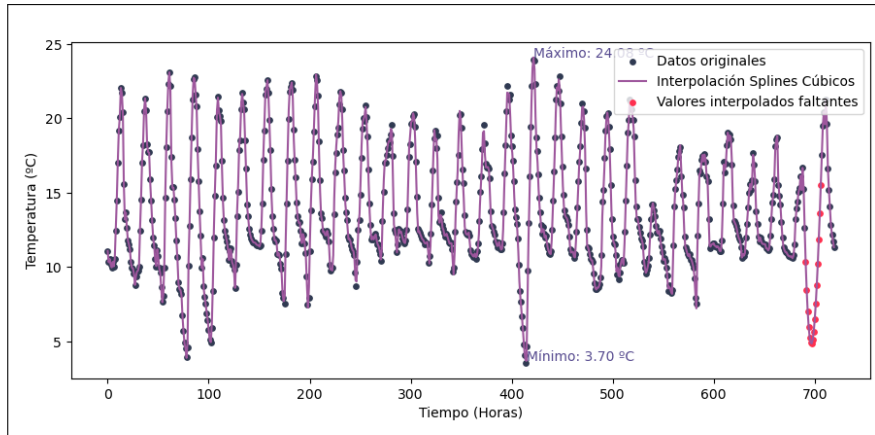


Ilustración 7-4: E.Quimiag - Noviembre 2017.

Realizado por: Alegría P., 2023

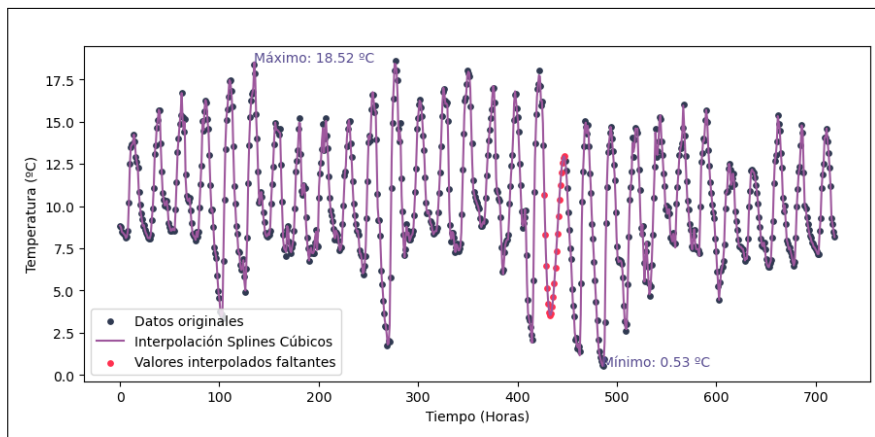


Ilustración 8-4: E.San Juan - junio, 2018.

Realizado por: Alegría P., 2023

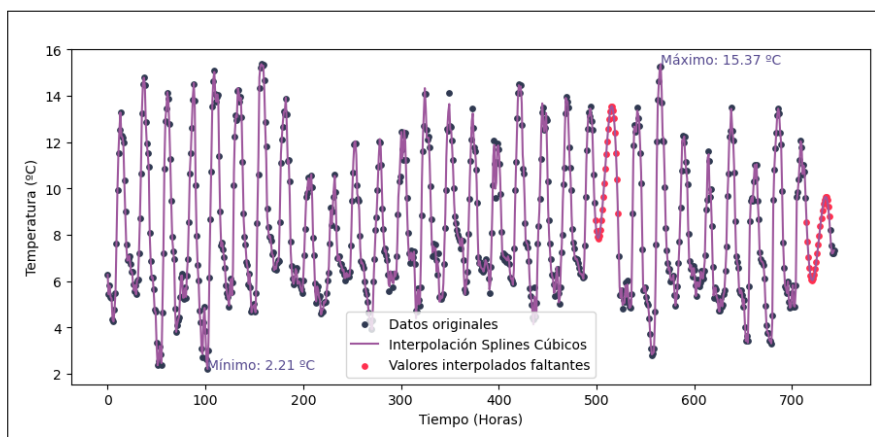


Ilustración 9-4: E.Tixan - Agosto, 2018.

Realizado por: Alegría P., 2023

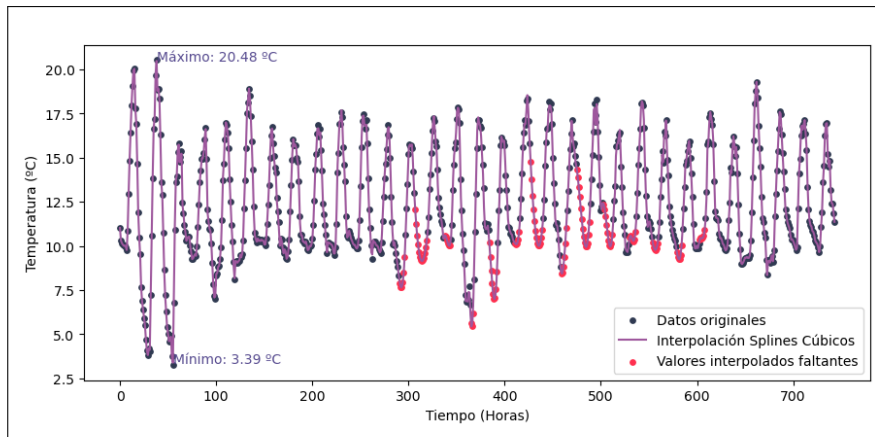


Ilustración 10-4: E. Tunshi - Julio, 2018.

Realizado por: Alegría P., 2023

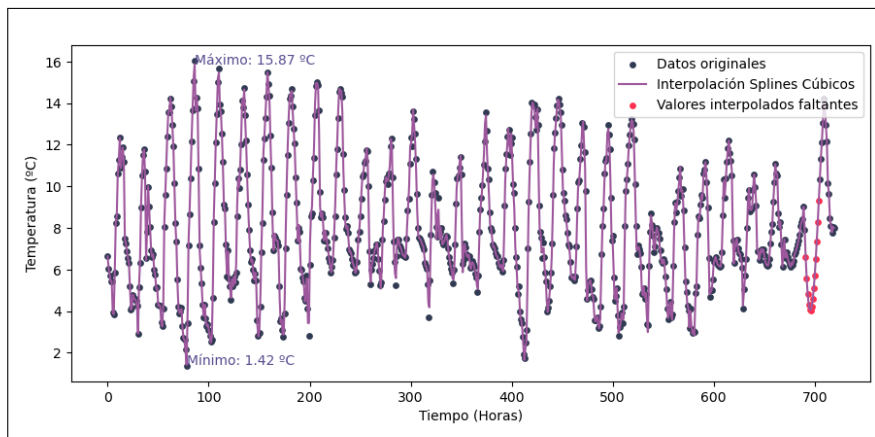


Ilustración 11-4: E. Cumanda - Enero, 2014

Realizado por: Alegría P., 2023

Splines cúbicos con frontera sujeta demostró un rendimiento satisfactorio al rellenar datos faltantes, como se evidencia desde la ilustración 1-4 hasta la 11-4, al construir las funciones a partir de los puntos obtenidos de las bases de datos disponibles. Esta técnica implementó una ecuación cúbica polinómica diferente en cada subintervalo, asegurando así la interpolación a trozos y la continuidad de las funciones cúbicas junto con sus primeras y segundas derivadas en los nodos. Para garantizar esta continuidad de manera óptima, se aplicó la condición de frontera sujeta, la cual fijaba los valores de la función Spline cúbica en los extremos del intervalo de interpolación para que coincidieran exactamente con los datos iniciales y finales medidos.

Este método interpola adecuadamente los datos, capturando las oscilaciones y variaciones repentinas de la temperatura. Además, se corroboró que a mayor cantidad de intervalos, mayor era la precisión alcanzada, debido a que la función interpolante pase por todo el conjunto de puntos dados.

Frente a la presencia de una gran cantidad de datos faltantes distribuidos en diferentes tiempos, los Splines cúbicos lograron completar estas lagunas con valores aproximados, manteniendo la

continuidad gráfica.

No obstante, es importante señalar que el método de interpolación de Splines cúbicos presentó limitaciones en determinados escenarios, como se evidencia en las siguientes gráficas. En ellas, se puede observar cómo la técnica no logró converger de manera adecuada, dando lugar a interpolaciones con discontinuidades en las derivadas.

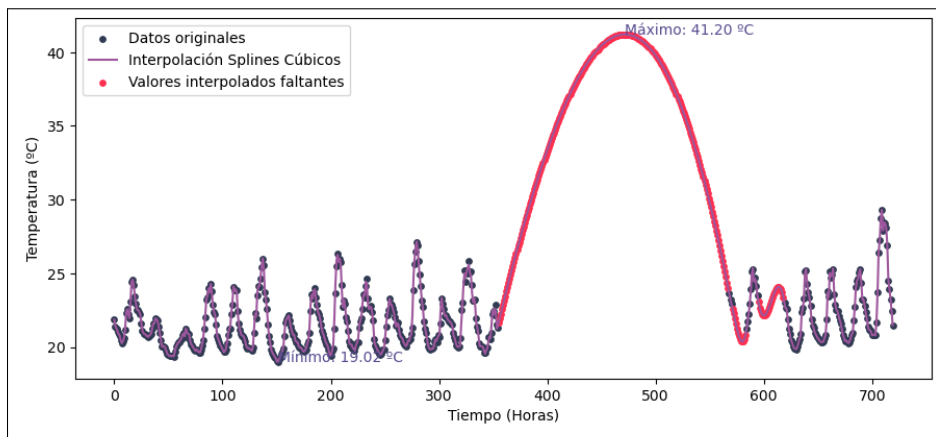


Ilustración 12-4: E.Cumanda - Noviembre, 2021

Realizado por: Alegría P., 2023

En la ilustración 12-4 se puede visualizar la interpolación realizada por los Splines cúbicos de los datos de temperatura, mostrando un ajuste suave en la mayoría de las regiones. No obstante, debido a la ausencia de datos desde el día 15 hasta el 24, se produjo un pico máximo inaceptable de 41.2°C en el día 20, como resultado de un intervalo de 250 datos faltantes consecutivos. Si bien los splines cúbicos generan curvas suaves al garantizar la continuidad de la función y sus primeras dos derivadas en los nodos, pueden dar lugar a comportamientos anómalos cuando existen amplias discontinuidades de datos. Por lo tanto, en presencia de intervalos significativos de datos faltantes, se requiere aplicar técnicas adicionales, como la imposición de restricciones físicas, para obtener resultados realistas y coherentes con las limitaciones del problema.

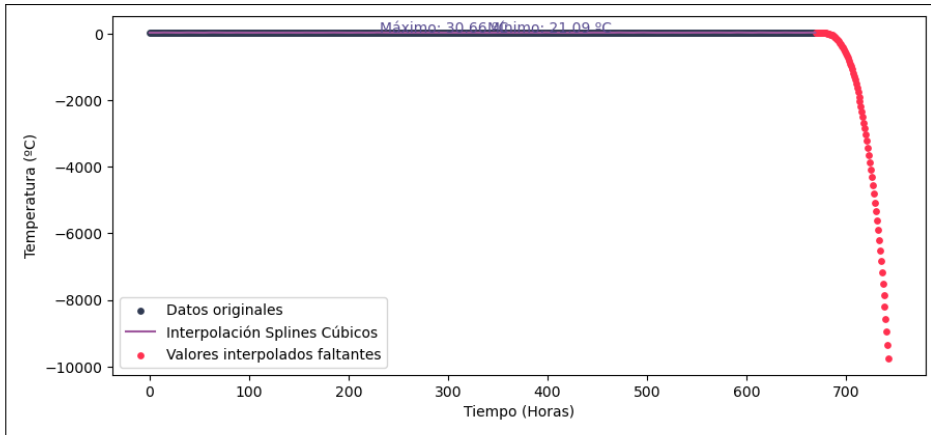


Ilustración 13-4: E.Cumanda - Diciembre, 2015

Realizado por: Alegría P., 2023

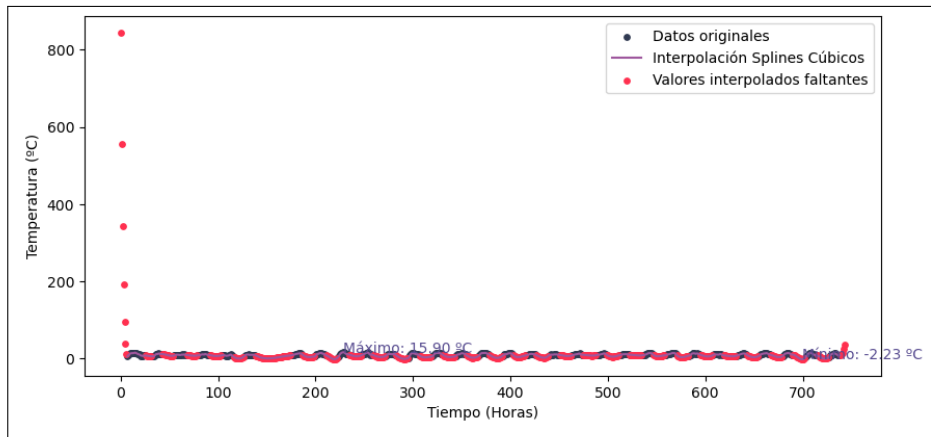


Ilustración 14-4: E.Atillo - Diciembre, 2017

Realizado por: Alegría P., 2023

En las ilustraciones 13-4 y 14-4 se evidencian intervalos de datos faltantes que interrumpen la continuidad de las series temporales. En la primera ilustración, se registra un intervalo de 74 datos ausentes desde el día 28 hasta el 31, aunque hasta las 5:00 horas del día 29 se obtuvieron resultados razonables, posteriormente se observan valores mínimos como -3.59°C lo que resulta inconsistente ya que la estación está ubicada en una región cálida. En la segunda ilustración, se observan 7 valores faltantes a partir de la medianoche del primer día. El método empleado asignó un valor de 844.65°C para las 0:00 horas. Más adelante, se encuentra un intervalo de 5 datos faltantes al final del mes, donde se registró un valor máximo interpolado de 23.46°C a las 22:00 horas del día 31, lo cual resulta incoherente para una estación que se encuentra en una región fría. A pesar de que los Splines cúbicos generan curvas suaves, la presencia de datos faltantes especialmente en los extremos, puede llevar a comportamientos no realistas. Por lo tanto, es crucial explorar métodos alternativos de extrapolación para obtener resultados coherentes y realistas en estas situaciones.

4.3.1.2. Implementación de método de Barnes

Seguidamente, se presentan diez gráficas que ilustran la eficacia de la interpolación realizada mediante el Método de Barnes. Para su implementación, se empleó el paquete *barnes_point* de la biblioteca *metpy.interpolate.points*. En esta técnica se utilizó un radio de influencia de 48 horas y un valor de gamma de 0.2.

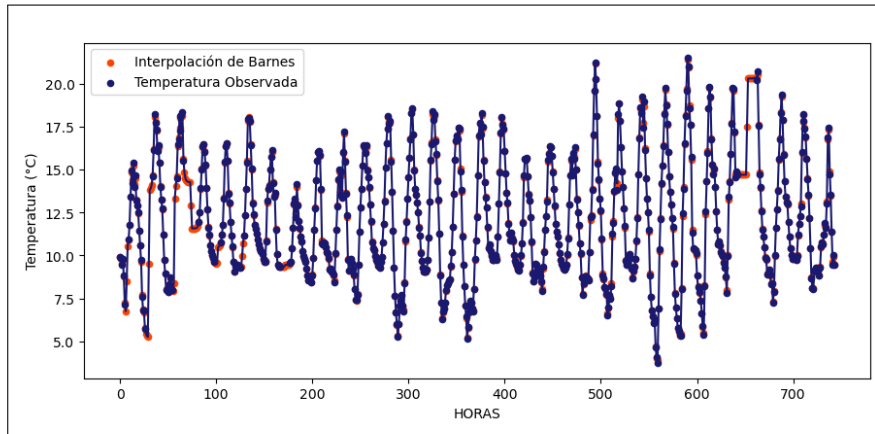


Ilustración 15-4: E.Alao - Enero, 2014 (Método de Barnes)

Realizado por: Alegría P., 2023

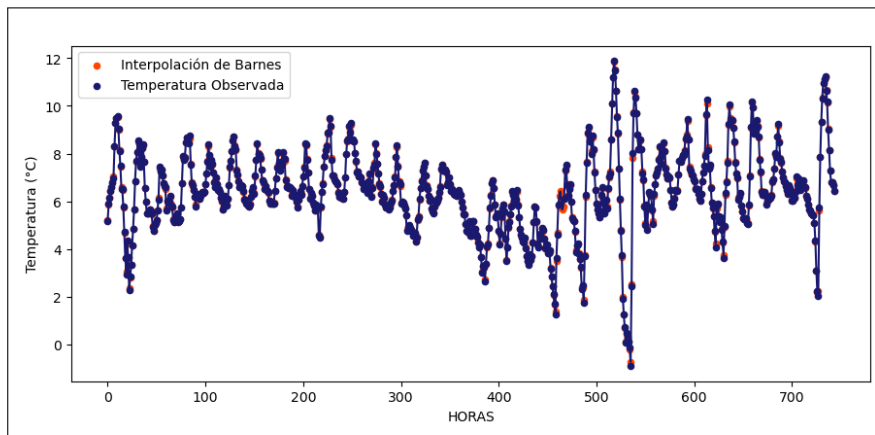


Ilustración 16-4: E.Alao - Septiembre, 2014 (Método de Barnes)

Realizado por: Alegría P., 2023

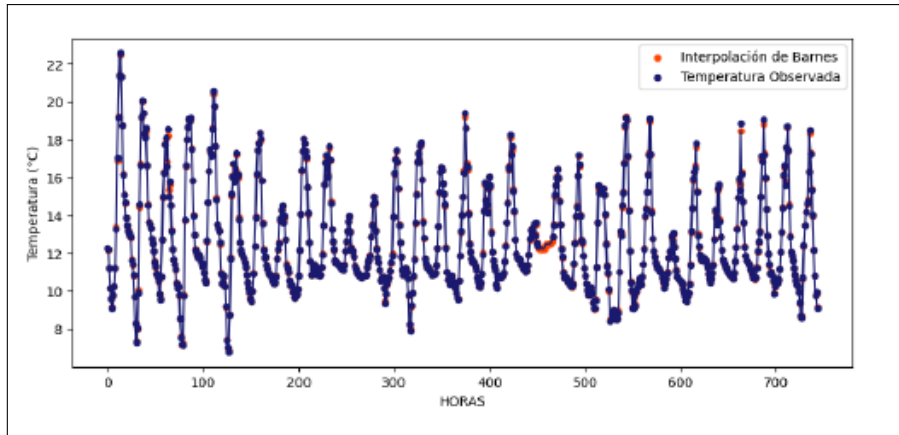


Ilustración 17-4: E.Matus - Diciembre, 2018 (Método de Barnes)

Realizado por: Alegría P., 2023

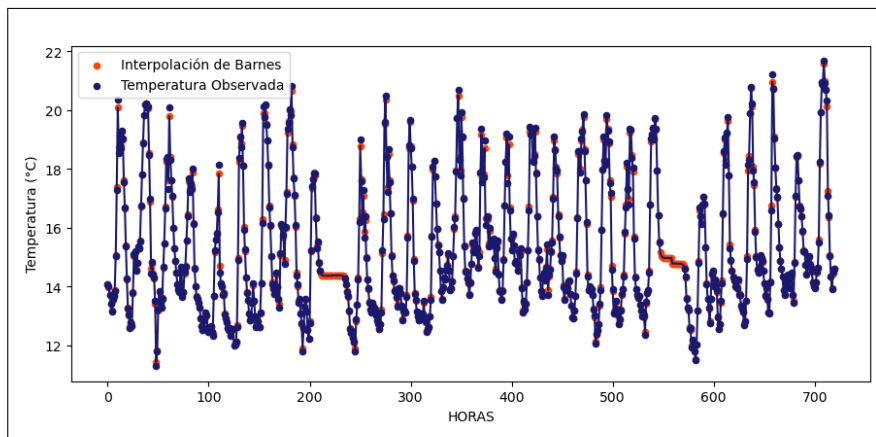


Ilustración 18-4: E.Multitud - Septiembre, 2018 (Método de Barnes)

Realizado por: Alegría P., 2023

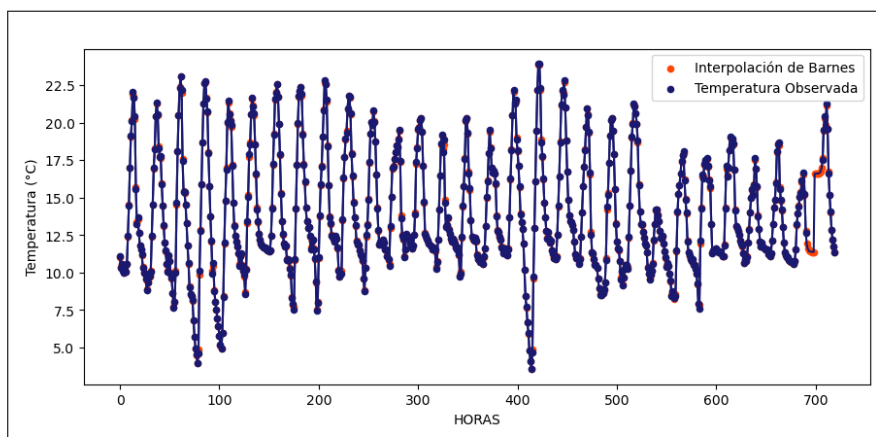


Ilustración 19-4: E.Quimiag - Noviembre, 2017 (Método de Barnes)

Realizado por: Alegría P., 2023

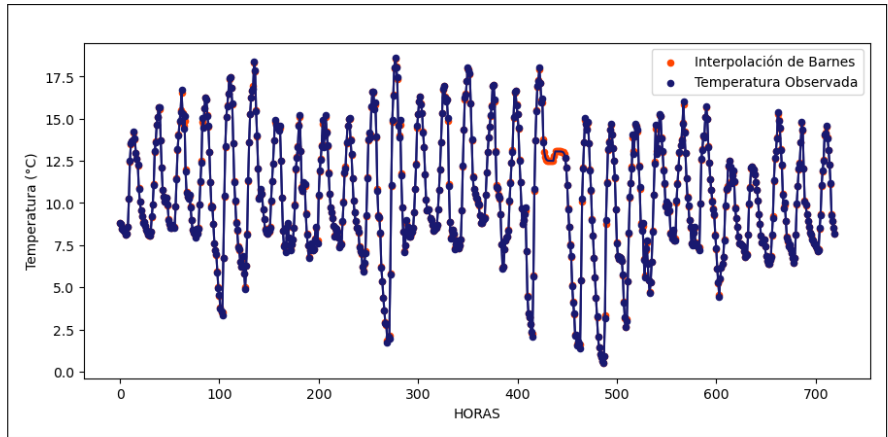


Ilustración 20-4: E.San Juan - junio , 2018 (Método de Barnes)

Realizado por: Alegría P., 2023

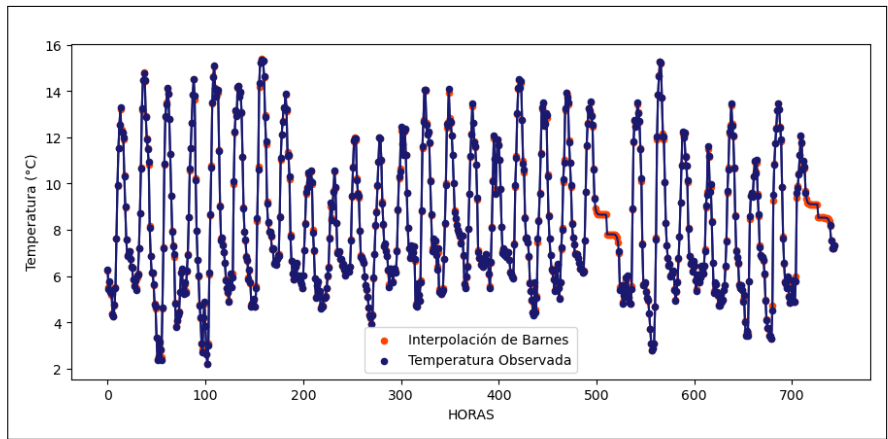


Ilustración 21-4: E.Tixan - Agosto , 2018 (Método de Barnes)

Realizado por: Alegría P., 2023

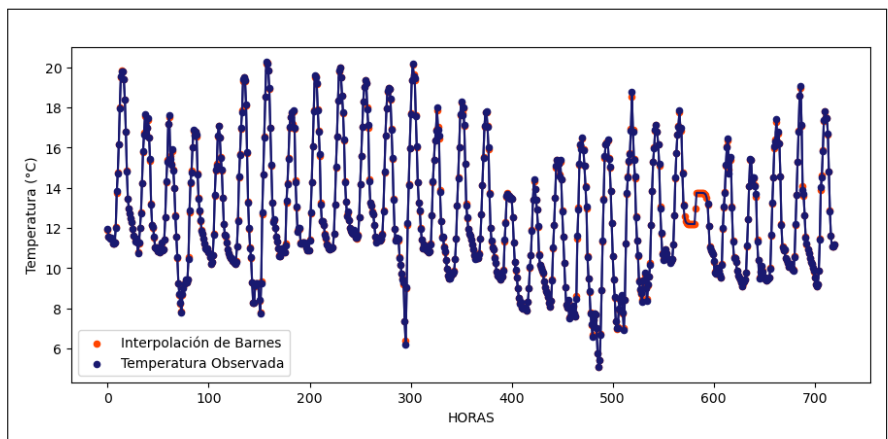


Ilustración 22-4: E.Tunshi - Julio , 2018 (Método de Barnes)

Realizado por: Alegría P., 2023

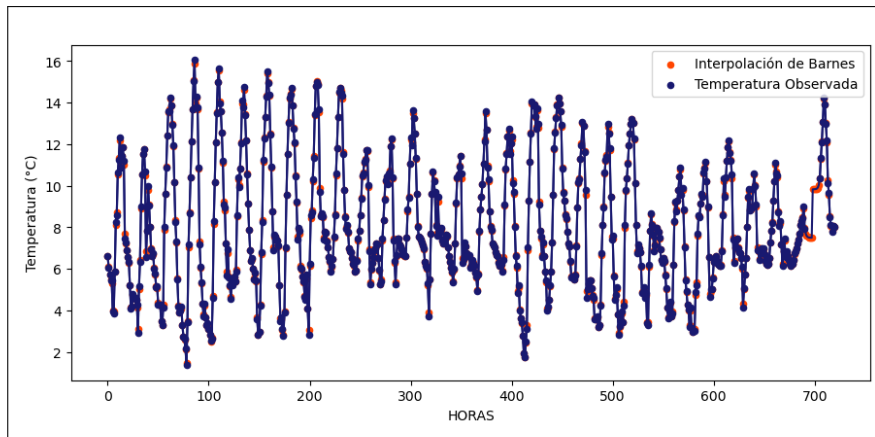


Ilustración 23-4: E.Urbina - Noviembre, 2017 (Método de Barnes)
Realizado por: Alegría P., 2023

En las ilustraciones del 15-4 al 23-4, se muestra que el método de Barnes ha sido efectivo para suavizar los cambios de temperatura y generar una curva continua que representa adecuadamente la tendencia general observada. La interpolación de Barnes captura la dinámica de los cambios de temperatura a lo largo del tiempo, siguiendo de cerca la curva de los datos observados. Desde el punto de vista matemático, el método utiliza una función de ponderación exponencial decreciente para asignar un mayor peso a los datos más cercanos, lo que permite promediar los valores cercanos y obtener una estimación continua de la variable.

Se identificaron limitaciones con respecto al método de Barnes. Con el propósito de ilustrar estas restricciones, se incluye la siguiente gráfica:

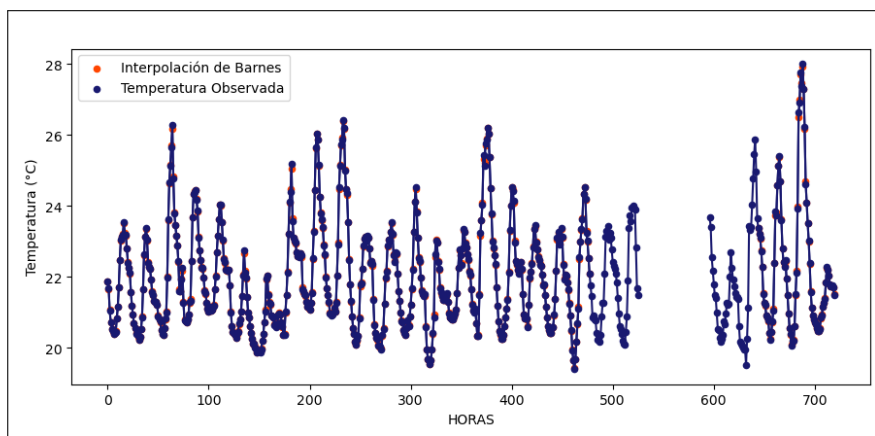


Ilustración 24-4: E.Cumanda- Junio, 2021 (Método de Barnes)
Realizado por: Alegría P., 2023

En la ilustración 24 - 4 se observa la existencia de un intervalo de 70 datos faltantes en el conjunto de información original. Ante la ausencia de estos valores, el método de interpolación de Barnes se vio limitado en su capacidad para suavizar adecuadamente la transición entre los puntos, provocando una interrupción repentina en la continuidad de la curva interpolada. Esta situación pone de

manifiesto una limitación del método de Barnes, que depende de la disponibilidad de datos en las cercanías de cada punto para poder realizar una estimación apropiada. La falta de información en un segmento determinado afecta significativamente la capacidad del método para mantener la continuidad de la curva.

4.3.1.3. Validación de los métodos

Los métodos fueron evaluados mediante la métrica del error cuadrático medio (MSE), que proporcionó una medida cuantitativa para evaluar la precisión de las técnicas de interpolación. Esta métrica se define como el promedio de las diferencias al cuadrado entre los valores estimados y reales.

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad (4.1)$$

donde, n es el número total de observaciones en el conjunto de datos. y_i es el valor real de la variable en cuestión i . \hat{y}_i es el valor aproximado por el modelo i .

Los resultados obtenidos por esta métrica fueron los siguientes:

Tabla 4-6: Comparación del error por (MSE)

Estaciones	Datos faltantes	MSE (Splines Cúbicos)	MSE (Método de Barnes)
Alao (2014)	0.76 %	0.91	1.17
Cumanda (2016)	39.85 %	0.18	0.65
Alao (2022)	20.48 %	1.85	3.31

Realizado por: Alegría, P., 2024.

En el caso de la estación de Alao en 2014 con solo el 0.76 % de datos faltantes, ambos métodos produjeron errores relativamente bajos, no obstante, el método de Barnes mostró un error ligeramente superior al de los Splines cúbicos, tal como se indica en la Tabla 4-6. Por otro lado, para la estación de Alao en 2022 con un 20.48 % de datos faltantes, el error del método de Barnes aumentó 1.47 en comparación con el de los Splines cúbicos. Incluso en el escenario con casi el 40 % de datos faltantes, el error fue bajo para ambos métodos, sin embargo, el error obtenido con los Splines cúbicos resultó ligeramente más bajo que el del método de Barnes.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

1. Se realizó una investigación documental teórico-práctico de los métodos de interpolación. Los Splines cúbicos utilizan un polinomio cubico diferente en cada subintervalo asegurando la suavidad y continuidad de la función, además considera las condiciones de frontera determinando el comportamiento de la curva en los extremos de cada subintervalo. En cambio el método de Barnes depende de la función de ponderación de peso gaussiana decreciente y de parámetros como el radio de influencia y el factor gamma. Los métodos fueron implementados en el lenguaje de programación Python con el fin de rellenar datos de temperatura de 11 estaciones meteorológicas.
2. El análisis comparativo de los métodos de interpolación reveló que la cota del error de Splines cúbicos presenta un orden de convergencia $\mathcal{O}(h^{\frac{3}{2}})$, esto implica que a medida que se reduce la distancia de separación h entre los puntos de datos, la precisión en la estimación de valores faltantes mejora notablemente, en comparación al método de Barnes que está limitado solo por la constante de amplitud $|A|$. Si bien ambos métodos son consistentes y estables, Splines cúbicos ofrecen una mejor garantía teórica gracias a su orden de convergencia, mientras que la convergencia del método de Barnes depende de la elección adecuada de parámetros como la distancia, la cantidad de puntos considerados y los pesos asignados.
3. Se implementaron los métodos de interpolación de Splines cúbicos y Barnes utilizando Python para rellenar datos faltantes de temperatura en series temporales. Ambos métodos demostraron ser herramientas efectivas, con sus respectivas ventajas y limitaciones. Los Splines cúbicos capturaron mejor las oscilaciones y variaciones repentinas, mientras que el método de Barnes modeló suavemente las transiciones. Sin embargo, ambos métodos se vieron limitados por la presencia de intervalos significativos de datos ausentes, lo que provocó interrupciones repentinas en la continuidad de las curvas interpoladas. En cuanto a precisión, el análisis del Error Cuadrático Medio mostró que los Splines cúbicos superaron al método de Barnes en este conjunto de datos. Cuando se presentaba un faltante del 0,76 %, los Splines cúbicos exhibieron un error de 0.91, mientras que el método de Barnes registró un error de 1.17. Esta diferencia de 0.26 indica que los Splines cúbicos ofrecen una mayor precisión en comparación con Barnes.

5.2. Recomendaciones

1. Antes de elegir entre los métodos de interpolación de Barnes y Splines Cúbicos, se debe considerar el contexto específico de aplicación. Los Splines Cúbicos son ideales para un control riguroso del error teórico, ya que ofrecen una mejor garantía matemática.
2. En aplicaciones donde la precisión es crítica, es crucial evaluar la convergencia y consistencia de cada método. Los Splines Cúbicos pueden ofrecer una convergencia superior en ciertos casos.
3. Ambos métodos demostraron estabilidad en la interpolación, pero es fundamental considerar su capacidad para adaptarse a variaciones en los datos.
4. Se recomienda priorizar el uso de Splines cúbicos para la interpolación de datos faltantes en series temporales de temperatura debido a su mayor precisión en comparación con el Método de Barnes.

BIBLIOGRAFÍA

- 1. ABRAMOWITZ, Milton & STEGUN, Irene.** *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. [en línea]. USA: U.S. Government Printing Office, 1948. [Consulta: 20 abril 2023]. Disponible en: <https://books.google.es/books?id=oT19wunfepIC>
- 2. ANJOMSHOAA, Ali & SALMANZADEH, Mazyar.** "Filling missing meteorological data in heating and cooling seasons separately". *International Journal of Climatology* [en línea], 2019, (United State of America), vol. 39(2), págs. 701-710. [Consulta: 22 abril 2023]. Disponible en: <https://rmets.onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/joc.5836>
- 3. APAYDIN, Halit; et al.** "Spatial interpolation techniques for climate data in the GAP region in Turkey". *Climate Research* [en línea], 2004, (Ankara), vol. 28(1), págs. 31 - 40. [Consulta: 20 de agosto 2023]. Disponible en: <https://www.int-res.com/abstracts/cr/v28/n1/p31-40/>
- 4. ARRIETA, José; et al.** *Análisis numérico de ecuaciones diferenciales ordinarias* [en línea]. Madrid-España: Ediciones Paraninfo, S.A. 2020. [Consulta: 05 enero 2024]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=Y13jDwAAQBAJ&printsec=frontcover#v=onepage&q&f=false>
- 5. BARNES, Stanley.** " A technique for maximizing details in numerical weather map analysis". *Journal of Applied Meteorology and Climatology* [en línea], 1964, (United State of America), vol. 3(4), págs. 396 - 409. [Consulta: 22 abril 2023]. Disponible en: https://journals.ametsoc.org/view/journals/apme/3/4/1520-0450_1964_003_0396_atfmdi_2_0_co
- 6. BARNES, Stanley.** "Mesoscale objective map analysis using weighted time-series observations". *National Severe Storms Laboratory* [en línea], 1973, (United State of America) vol. 62(1), págs. 1 - 66. [Consulta: 22 abril 2023]. Disponible en: https://repository.library.noaa.gov/view/noaa/17647/noaa_17647_DS1.pdf
- 7. BARNES, Stanley. & SIMPSON, J.** *The Downdraft Volume Breath Technique (DVBT) Theory Derived from Observational Data* [en línea]. USA: National Severe Storms Laboratory , 1984. [Consulta: 30 abril 2023]. Disponible en: https://repository.library.noaa.gov/view/noaa/15653/noaa_15653_DS1.pdf
- 8. BHATTACHARJEE, Shrutilipi; et al.** *Semantic Kriging for Spatio-temporal Prediction* [en línea]. Berlín-Alemania: Springer, 2019. [Consulta: 12 julio 2023]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=ixegDwAAQBAJ>

9. BURDEN, Richard & FAIRES, Douglas. *Análisis numérico*. 7ª ed. D.F. - México: Thomson Editors, 2002, págs. 141 – 152.

10. CALUS, I. M. & FAIRLEY, J. A. *Series de Fourier y ecuaciones en derivadas parciales: texto programado*. Madrid-España: Paraninfo, 1973. págs. 13 - 69.

11. CANTORAL, Ricardo & FARFÁN, Rosa. *Desarrollo conceptual del cálculo* [en línea]. Ciudad de México-México: Thomson, 2004. [Consulta: 21 septiembre 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=M5b5wAEACAAJ&source=gbs_slider_cls_metadata_2_mylibrary&redir_esc=y

12. CAÑADA, Antonio. "Fourier y sus coeficientes". *Sociedad Española de Matemática Aplicada* [en línea], 2006, (España) vol. 36(1), págs. 125 - 148. [Consulta: 25 de septiembre 2023]. Disponible en: <https://digibug.ugr.es/handle/10481/75768>

13. DOBESCH, Hartwig; et al. *Spatial Interpolation for Climate Data: The Use of GIS in Climatology and Meteorology* [en línea]. Berlín-Alemania: John Wiley & Sons, 2013. [Consulta: 5 agosto 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=rcgoj_aFbbsC

14. FIGUERAS, Marc. *Ondas Introducción a los fenómenos ondulatorios*. [en línea]. Barcelona-España: Universitat Oberta de Catalunya, 2013. [Consulta: 15 octubre 2023]. Disponible en: <https://centroculturalbiblioteca.ccsa.edu.sv/cgi-bin/koha/opac-detail.pl?biblionumber=14454>

15. FRENCH, Anthony. *Vibrations and waves* [en línea]. 1ª ed. Florida-USA: CRC Press, 2017. [Consulta: 5 junio 2023]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=JDsPEAAAQBAJ>

16. GARCÍA, Isaac & MAZA, Susanna. *Métodos numéricos. Problemas resueltos y prácticas* [en línea]. Catalonia-España: Edicions de la Universitat de Lleida, 2009. [Consulta: 1 junio 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=_IpnsWEACAAJ

17. GREWAL, B.S. *Numerical Methods in Engineering and Science: (C, C++, and MATLAB)* [en línea]. Virginia-USA: Mercury Learning and Information. 2019. [Consulta: 3 junio 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=_IpnsWEACAAJ

18. GGRIFFITHS, David. *Introduction to Electrodynamics* [en línea]. 2ª ed. Universidad de Michigan-USA: Prentice Hall, 1989. [Consulta: 6 junio 2023]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=osTvAAAAMAAJ>

19. GOÑI IBACETA, Irene. *Series de Fourier y sus aplicaciones*. [En línea].(Trabajo de titulación)(Pregrado). Universidad de Cantabria, Facultad de Ciencias, Departamento de

Matemáticas, Estadística y Computación. Cantabria - España. 2021. págs.1-4[Consulta: 23 septiembre 2023]. Disponible en:<http://hdl.handle.net/10902/23810>

20. GUTIÉRREZ, José; et al. *Análisis numérico*. Ciudad de México-México: McGRAW - HILL/INTERAMERICANA EDITORES, 2010. págs. 85 - 92.

21. HWEI, Hsu. *Análisis de Fourier*. Fondo Educativo Interamericano S.A., 1973. págs. 24 - 32.

22. JAFFAR, Azhar; et al. "Spatial interpolation method comparison for physico-chemical parameters of river water in Klang River using MATLAB". *Bulletin of Electrical Engineering and Informatics*, [en línea], 2022, (Indonesia), vol 11(4), Article 4. [Consulta: 01 Marzo 2024]. ISSN 2089-3191. Disponible en: <https://beei.org/index.php/EEI/article/view/3615>

23. KREYSZING, Erwin. *Advanced Engineering Mathematics* [en línea]. 10^a ed. New Jersey - USA: John Wiley & Sons Inc. 2011. [Consulta: 9 junio 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=wHB3xQEACAAJ&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

24. KOCH, Steven; et al. " An interactive Barnes objective map analysis scheme for use with satellite and conventional data". *Journal of Applied Meteorology and Climatology* [en línea], 1983, (United State of America), vol. 22 (9), págs. 1487-1503. [Consulta: 18 mayo 2023]. ISSN: 1558-8424. Disponible en: [https://doi.org/10.1175/1520-0450\(1983\)022<1487:AIBOMA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0450(1983)022<1487:AIBOMA>2.0.CO;2)

25. LAZARUS, Steven; et al. "Near-real-time applications of a mesoscale analysis system to complex terrain". *Weather and Forecasting* [en línea], 2002, (United State of America), vol. 17 (5), págs. 971-1000. [Consulta: 23 mayo 2023]. ISSN: 0882-8156. Disponible en: [https://doi.org/10.1175/1520-0434\(2002\)017<0971:NRTAOA>2.0.CO;2](https://doi.org/10.1175/1520-0434(2002)017<0971:NRTAOA>2.0.CO;2)

26. LAM, Nina. "Spatial interpolation methods: a review". *The American Cartographer* [en línea], 1983, (United State of America,) vol. 10(2) págs.129 - 150. [Consulta: 12 julio 2023]. Disponible en: <https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1559/152304083783914958>

27. LI, Jin & HEAP, Andrew. A review of spatial interpolation methods for environmental scientists.. *Geoscience Australia, Record* [en línea], 2008, (Australia) vol. 23(1), págs.137 - 145. [Consulta: 5 agosto 2023]. Disponible en: <https://pid.geoscience.gov.au/dataset/ga/68229>

28. PHILIP, Davis. *Interpolation and Approximation* [en línea]. Michigan-USA: Dover Publications. 1963. [Consulta: 6 junio 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books/about/Interpolation_and_Approximation.html?id=228PAQAAMAAJ

29. PROMECAFE *Memorias XVIII simposio latinoamericano de caficultura* [en línea]. San Jose-Costa Rica: Icafe. 1997. [Consulta: 5 agosto 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=L8wOAQAIAAJ&source=gbs_slider_cls_metadata_2_my_library&redir_esc=y

30. RAYMOND, Sluiter. "Interpolation methods for climate data: literature review". *KNMI intern rapport, Royal Netherlands Meteorological Institute* [en línea], 2009, (Países Bajos), vol. 1(0), págs. 5 - 12. [Consulta: 22 abril 2023]. Disponible en: https://www.researchgate.net/publication/242783501_Interpolation_methods_for_climate_data

31. RIESS, Dean & JOHNSON, Lee. *Numerical Analysis*. 2^a ed. Massachusetts - United States of America: Addison-Wesley, 1982. ISBN (0-201-10392-3), págs. 237 – 247.

32. RODRÍGUEZ, José & VIRGÓS, José *Fundamentos de óptica ondulatoria* [en línea]. Asturias-España: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Oviedo. 1999. [Consulta: 16 Agosto 2023]. Disponible en: https://books.google.com.ec/books?id=C3MICEpvxLAC&printsec=frontcover&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false

33. SANUNGA GUANANGA, Lizbeth. Ajuste de modelos a gran escala de la precipitación hídrica en la provincia de Chimborazo utilizando datos ráster y vectoriales. [En línea].(Trabajo de titulación)(Pregrado). Escuela Superior Politécnica de Chimborazo,Facultad de Ciencias, Escuela de Física y Matemática. Riobamba - Ecuador. 2021. págs.1-5 [Consulta: 6 junio 2023]. Disponible en: <http://dspace.espoch.edu.ec/handle/123456789/15046>

34. TIPLER, Paul. & MOSCA, Gene. *Física para la ciencia y la tecnología. I Volumen 1 de Mecánica. Oscilaciones y ondas. Termodinámica* [en línea]. 5^a ed. Barcelona-España: Reverté. 2004. [Consulta: 4 junio 2023]. Disponible en: <https://books.google.com.ec/books?id=9MFLer5mAtMC>

35. VÁZQUEZ, Carlos. *Análisis y Métodos Numéricos: Definiciones, teoremas y resultados*. Madrid-España: García-Maroto, 2011. ISBN (978-84-15214-67-0), págs.263 - 374 .

36. ZHANG, Zixuan & MOORE, John. *Mathematical and Physical Fundamentals of Climate Change*. Amsterdam - Netherlands: Elsevier, 2015. ISBN (978-0-12-800066-3), págs.52 - 55 .



ANEXOS

ANEXO A: IMPLEMENTACIÓN DE SPLINES CUBICOS

```
1 import numpy as np
2 import pandas as pd
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 from scipy.interpolate import CubicSpline
5
6 # TEMPERATURA MAXIMA Y MINIMA
7 temperatura_dat = pd.read_excel('Base de datos ALAO 2014.xlsx',
8                                 dtype = {"Hora": str,
9                                           "TEM_PROM":float})
10 print(temperatura_dat)
11
12 # Encontrar la temperatura promedio maxima
13 temperatura_maxima = temperatura_dat['TEM_PROM'].max()
14 fila_temperatura_maxima = temperatura_dat.loc[temperatura_dat['TEM_PROM']
15                                                == temperatura_maxima]
16
17 # Encontrar la temperatura promedio minima
18 temperatura_minima = temperatura_dat['TEM_PROM'].min()
19 fila_temperatura_minima = temperatura_dat.loc[temperatura_dat['TEM_PROM']
20                                                == temperatura_minima]
21
22 # Obtener los datos completos de la temperatura promedio maxima
23 fecha_hora_maxima = fila_temperatura_maxima[['DIA', 'HORA', 'MES']].values[0]
24
25 # Obtener los datos completos de la temperatura promedio minima
26 fecha_hora_minima = fila_temperatura_minima[['DIA', 'HORA', 'MES']].values[0]
27
28 # Imprimir los resultados
29 print("Temperatura promedio maxima:")
30 print("DIA: ", fecha_hora_maxima[0])
31 print("Hora: ", fecha_hora_maxima[1])
32 print("Mes: ", fecha_hora_maxima[2])
33 print("Temperatura: ", temperatura_maxima)
34
35 print("\nTemperatura promedio minima:")
36 print("DIA: ", fecha_hora_minima[0])
37 print("Hora: ", fecha_hora_minima[1])
38 print("Mes: ", fecha_hora_minima[2])
```

```

39 print("Temperatura: ", temperatura_minima)
40
41 ### Numero de datos faltantes
42
43 # Convierte la columna "MES" a numerico
44 temperatura_dat['MES'] = pd.to_numeric(temperatura_dat['MES'], errors='coerce')
45
46 # Cuenta los valores faltantes de TEM.PROM en cada mes
47 valores_faltantes_por_mes = temperatura_dat.groupby('MES')['TEM_PROM'].
48                                     apply(lambda x: x.isnull().sum())
49
50 # Imprimir los resultados
51 for mes, valores_faltantes in valores_faltantes_por_mes.iteritems():
52     print(f"Mes {mes}: {valores_faltantes} valores faltantes de TEM.PROM")
53
54 # INTERPOLACION
55
56 def extraer_datos_por_mes(ruta_archivo, mes_deseado):
57     try:
58         # Leer el archivo de Excel en un DataFrame
59         temperatura_dat = pd.read_excel(ruta_archivo,
60                                         dtype = {"Hora": str,
61                                                  "TEM_PROM": float})
62
63         # Filtrar los datos del mes deseado
64         datos_mes = temperatura_dat[temperatura_dat['MES'] == mes_deseado]
65
66         # Mantener solo las columnas requeridas
67         columnas_requeridas = ['DIA', 'MES', 'ANO', 'HORA', 'TEM_PROM']
68         datos_mes = datos_mes[columnas_requeridas]
69
70         return datos_mes
71     except Exception as e:
72         print("Error al procesar el archivo:", e)
73         return None
74
75 # Ruta del archivo Excel
76 ruta_archivo_excel = 'Base de datos ALAO 2014.xlsx'
77
78 # ENERO
79
80 # Mes deseado (por ejemplo, 1 para enero, 2 para febrero, etc.)

```

```

81 mes_deseadoENE = 1
82
83 # Llamar a la funcion para extraer los datos del mes deseado
84 datos_mesENE = extraer_datos_por_mes(ruta_archivo_excel, mes_deseadoENE)
85
86 # Ver los datos extraidos del mes deseado
87 print(datos_mesENE)
88
89 #Extrae la columna HORA Y TEM.PROM del documento subido
90 Tiempo = np.array(datos_mesENE['HORA']) # Corregido para usar datos_mesENE
91 Temperatura = np.array(datos_mesENE['TEM_PROM']) # Corregido para datos_mesENE
92
93 #indica True para las filas con valores faltantes en 'TEM_PROM'
94 valores_faltantes = pd.isnull(datos_mesENE['TEM_PROM'])
95
96 Temperatura = [np.nan if np.isnan(temp) else temp for temp in Temperatura]
97
98 # Encuentra los indices de los valores no nulos
99 indices_no_nulos = np.where(~np.isnan(Temperatura))[0]
100
101 # Obtiene los valores no nulos
102 Tiempo_no_nulos = Tiempo[indices_no_nulos] #Corregido para usar Tiempo
103 Temperatura_no_nulos = Temperatura[indices_no_nulos] #Corregido para Tem
104
105 # Realiza la interpolacion con Splines cubicos
106 cs = CubicSpline(Tiempo_no_nulos, Temperatura_no_nulos, bc_type='clamped')
107
108 # Crea un nuevo conjunto de tiempos para la interpolacion
109 tiempo_in = np.linspace(min(Tiempo_no_nulos), max(Tiempo_no_nulos), 744)
110
111 # Realiza la interpolacion
112 temperatura_in = cs(tiempo_in)
113 print(temperatura_in)
114
115 # Imprime los primeros n intervalos interpolados
116 n = min(len(Tiempo)-1, 1) # Corregido el rango del bucle
117 for i in range(n):
118     print(f"Spline {i+1}:")
119     print(f" Intervalo: ({Tiempo[i]}, {Tiempo[i+1]})")
120     print(f" Funcion: f(x) = {cs.c.item(i, 3)} * (x - {Tiempo[i]})^3 +
121           {cs.c.item(i, 2)} * (x - {Tiempo[i]})^2 + {cs.c.item(i, 1)} *
122           (x - {Tiempo[i]}) + {cs.c.item(i, 0)}\n")

```

```

123
124 #Grafica
125 # Ajusta el tamaño de la figura
126 plt.figure(figsize=(9, 8)) # Ancho x Alto en pulgadas
127 plt.subplot(2, 1, 1)
128 plt.scatter(Tiempo, Temperatura, color='#303a52', label='Datos originales',
129                                                     marker='o', s=15)
130 plt.plot(tiempo_in, temperatura_in, color='#9e579d', label='Interpolacion
131                                                     Splines Cubicos')
132 plt.xlabel('Tiempo (Horas)')
133 plt.ylabel('Temperatura (C)')
134 plt.legend()
135 plt.title('Datos de temperatura de la estacion meteorologica (ENERO 2014) ')
136 # Encuentra los valores minimo y maximo
137 valor_minimo = np.min(temperatura_in)
138 valor_maximo = np.max(temperatura_in)
139 # Agrega etiquetas para el valor minimo y maximo en la grafica
140 plt.text(tiempo_in[np.argmin(temperatura_in)], valor_minimo, f'Minimo:
141                                                     {valor_minimo:.2f} C', fontsize=10, color='#574b90')
142 plt.text(tiempo_in[np.argmax(temperatura_in)], valor_maximo, f'Maximo:
143                                                     {valor_maximo:.2f} C', fontsize=10, color='#574b90')
144 plt.tight_layout()
145 plt.show()
146
147 #Filtra las horas donde se encuentran los valores faltantes en 'TEM_PROM'
148 horas_con_faltantes = Tiempo[valores_faltantes] # Corregido para usar Tiempo
149
150 print("Horas con valores faltantes en TEM_PROM:")
151 print(horas_con_faltantes)
152
153 # Funcion para obtener la interpolacion en un valor especifico
154 def obtener_interpolacion(x):
155     return cs(x)
156 # Valor de interes
157 valor_interes = 661
158 # Obtenemos la interpolacion para el valor de interes
159 interpolacion = obtener_interpolacion(valor_interes)
160 # Imprimir la interpolacion
161 print(f"Interpolacion para x = {valor_interes}: f({valor_interes}) =
162                                                     {interpolacion}")
163
164 # Evaluar los valores de temperatura en los tiempos faltantes

```

```

165
166 temperatura_faltante = cs(horas_con_faltantes)
167
168 print("Valores interpolados:")
169 for x, y in zip(horas_con_faltantes, temperatura_faltante):
170     print(f"X: {x}, Y: {y}")
171
172
173 #Grafica con los valores faltantes
174 # Ajusta el tamaño de la figura
175 plt.figure(figsize=(9, 8)) # Ancho x Alto en pulgadas
176 plt.subplot(2, 1, 1)
177 plt.scatter(Tiempo, Temperatura, color='#303a52', label='Datos originales',
178                                                     marker='o', s=15)
179 plt.plot(tiempo_in, temperatura_in, color='#9e579d',
180          label='Interpolacion Splines Cubicos')
181 plt.scatter(horas_con_faltantes, temperatura_faltante, color='#ff304f',
182            label='Valores interpolados faltantes', marker='o', s=15)
183 plt.xlabel('Tiempo (Horas)')
184 plt.ylabel('Temperatura (C)')
185 plt.legend()
186 plt.title('Grafica con los valores faltantes del mes de enero 2014 ')
187 # Encuentra los valores minimo y maximo
188 valor_minimo = np.min(temperatura_in)
189 valor_maximo = np.max(temperatura_in)
190 # Agrega etiquetas para el valor minimo y maximo en la grafica
191 plt.text(tiempo_in[np.argmin(temperatura_in)], valor_minimo, f'Minimo:
192           {valor_minimo:.2f} C', fontsize=10, color='#574b90')
193 plt.text(tiempo_in[np.argmax(temperatura_in)], valor_maximo,
194           f'Maximo: {valor_maximo:.2f} C', fontsize=10, color='#574b90')
195 plt.tight_layout()
196 plt.show()

```

ANEXO B: IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO DE BARNES

```

1
2 import numpy as np
3 import pandas as pd
4 import math
5 import matplotlib.pyplot as plt
6 from scipy.spatial import cKDTree
7 from metpy.interpolate.geometry import dist_2
8 from metpy.interpolate.points import barnes_point

```

```

9 from metpy.interpolate.tools import average_spacing, calc_kappa
10
11 INGRESO DE DATOS
12 temperatura_dat = pd.read_excel('Base de datos ALAO 2014.xlsx',
13                                 dtype = {"Hora": str,
14                                           "TEM.PROM":float})
15 print(temperatura_dat)
16
17 def extraer_datos_por_mes(ruta_archivo, mes_deseado):
18     try:
19         # Leer el archivo de Excel en un DataFrame
20         temperatura_dat = pd.read_excel(ruta_archivo,
21                                         dtype = {"Hora": str,
22                                                   "TEM.PROM": float})
23
24         # Filtrar los datos del mes deseado
25         datos_mes = temperatura_dat[temperatura_dat['MES'] == mes_deseado]
26
27         # Mantener solo las columnas requeridas
28         columnas_requeridas = ['DIA', 'MES', 'ANO', 'HORA', 'TEM.PROM']
29         datos_mes = datos_mes[columnas_requeridas]
30
31         return datos_mes
32     except Exception as e:
33         print("Error al procesar el archivo:", e)
34         return None
35
36 # Ruta del archivo Excel
37 ruta_archivo_excel = 'Base de datos ALAO 2014.xlsx'
38 # Mes deseado (por ejemplo, 1 para enero, 2 para febrero, etc.)
39 mes_deseado = 1
40 # Llamar a la funcion para extraer los datos del mes deseado
41 datos_mesENE = extraer_datos_por_mes(ruta_archivo_excel, mes_deseado)
42 print(datos_mesENE)
43
44 #Extrae la columna HORA Y TEM.PROM del documento subido
45 Tiempo = datos_mesENE ['HORA']
46 Temperatura= datos_mesENE ['TEM.PROM']
47 Tiempo = np.arange(0,744,1)#np.array(temperatura_dat['HORA'])
48 Temperatura = np.array(datos_mesENE ['TEM.PROM'])
49 len(Tiempo)
50

```

```

51 xp=np.arange(0,len(Temperatura)) #Genera una secuencia de numeros (Hora)
52 zeros = np.zeros(len(Temperatura))
53 xp2=list(zip(xp,zeros))
54 #Cambiar a punto flotante las temperaturas
55 zp=Temperatura
56
57 #Primer paso de la interpolacion
58 #Creacion de la cuadrícula
59 #Esta línea toma los valores del array xp y los asigna a una nueva variable
60 sim_gridx=Tiempo
61 #creamos un nuevo array q' tiene la misma longitud q' sim_gridx,
62 #pero con todos sus elementos inicializados a cero.
63 sim_gridy = np.zeros(len(sim_gridx))
64 #combinamos dos arrays, sim_gridx y sim_gridy, horizontalmente
65 #para formar una nueva matriz bidimensional llamada grid_points.
66 grid_points = np.column_stack((sim_gridx,sim_gridy))
67 Distancia de influencia (Opcional)
68 radius = 48#Horas
69 obs_tree = cKDTree(xp2) #Buscamos los vecinos mas cercanos utilizando "KD-Tree"
70 indices = obs_tree.query_ball_point(grid_points, r=radius)
71
72 #Interpolacion de Barnes
73
74 x=[]
75 y=[]
76
77 #Iniciamos un bucle que recorre los elementos de la lista de indices.
78 for item in indices:
79     u,v = obs_tree.data[item].T
80     x.append(u)
81     y.append(v)
82 Distancia al cuadrado para cada uno de los puntos
83 barnes_dist0 = []
84
85 for index,item in enumerate(indices):
86     u=dist_2(sim_gridx[index], sim_gridy[index], x[index], y[index])
87     #u=np.array(list(filter(lambda t: t!=0,u)))
88     barnes_dist0.append(u)
89
90 Observaciones para cada punto
91 #Creamos una lista que contenga los valores de la variable zp
92 barnes_obs0_wn = []

```



```

93
94 for item in indices:
95     barnes_obs0_wn.append(zp[item])
96 #Filtrar los valores validos
97 for index, (dist, values) in enumerate(zip(barnes_dist0,barnes_obs0_wn)):
98     distsAndValues = list(zip(dist,values))
99     distsAndValues = [(d,v) for (d,v) in distsAndValues if not(pd.isna(v))]
100     res=list(zip(*distsAndValues))
101     ndist=res[0]
102     nobs=res[1]
103     barnes_dist0[index]=np.array(list(ndist))
104     barnes_obs0_wn[index]=np.array(list(nobs))
105
106 barnes_obs0=barnes_obs0_wn
107 #Calcular el coeficiente kappa
108
109 kappa = calc_kappa(average_spacing(xp2))
110 #Calculo de los aproximaciones de Barnes para todos los puntos
111
112 barnes_val0=[]
113
114 for dist, obs in zip(barnes_dist0,barnes_obs0):
115     barnes_val0.append(barnes_point(dist, obs, kappa, gamma=1))
116 #indica True para las filas con valores faltantes en 'TEM.PROM'
117 valores_faltantes = pd.isnull(datos_mesENE['TEM.PROM'])
118 #Filtra las horas donde se encuentran los valores faltantes en 'TEM.PROM'
119 horas_con_faltantes = np.extract(valores_faltantes, xp)
120 print("Horas con valores faltantes en TEM.PROM:")
121 print(horas_con_faltantes)
122
123 print("Valores interpolados:")
124 for x, y in zip(horas_con_faltantes, barnes_val0):
125     print(f"X: {x}, Y: {y}")
126
127 #Segundo paso de la interpolacion
128
129 # Busqueda de puntos sin observacion
130 sim_gridx1=sim_gridx
131 sim_gridy1 = np.zeros(len(sim_gridx1))
132 grid_points1 = np.column_stack((sim_gridx1,sim_gridy1))
133 Radio de influencia (Opcional)
134 indices1 = obs_tree.query_ball_point(grid_points1, r=radius)

```

```

135
136 x1=[]
137 y1=[]
138
139 for item in indices1:
140     u,v = obs_tree.data[item].T
141     x1.append(u)
142     y1.append(v)
143 Distancia al cuadrado para cada uno de los puntos
144 barnes_dist1 = []
145
146 for index,item in enumerate(indices1):
147     u=dist_2(sim_gridx1[index], sim_gridy1[index], x1[index], y1[index])
148     barnes_dist1.append(u)
149 Valores observados
150 barnes_obs1_wn = []
151 for item in indices1:
152     barnes_obs1_wn.append(zp[item]-np.array(barnes_val0)[item])
153
154 # Filtrar los valores sin nan
155
156 for index, (dist, values) in enumerate(zip(barnes_dist1,barnes_obs1_wn)):
157     distsAndValues = list(zip(dist,values))
158     distsAndValues = [(d,v) for (d,v) in distsAndValues if not(pd.isna(v))]
159     res=list(zip(*distsAndValues))
160     ndist=res[0]
161     nobs=res[1]
162     barnes_dist1[index]=np.array(list(ndist))
163     barnes_obs1_wn[index]=np.array(list(nobs))
164
165 barnes_obs1=barnes_obs1_wn
166
167 #Los valores de barnes con el peso modificado (Barnes 1973)
168
169 barnes_vall_temp=[]
170
171 for dist, obs in zip(barnes_dist1,barnes_obs1):
172     barnes_vall_temp.append(barnes_point(dist, obs, kappa,gamma=0.2))
173 #Calcular los valores de barnes para la segunda iteracion
174 # g_1(i,j)=g_0(i,j)+[f(x,y)-g_0(x,y)]D_1
175
176 barnes_vall=[x + y for x, y in zip(barnes_vall_temp, barnes_val0)]

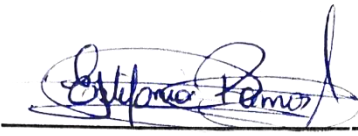
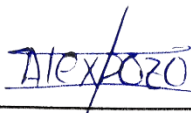
```

```
177 print("Valores interpolados:")
178 for x, y in zip(horas_con_faltantes, barnes_vall):
179     print(f"X: {x}, Y: {y}")
180
181 #Grafica con los valores faltantes
182 # Ajusta el tamaño de la figura
183 plt.figure(figsize=(9, 8)) # Ajusta el tamaño de la figura
184 plt.subplot(2, 1, 1)
185 plt.scatter(xp, barnes_vall, label='Interpolacion de Barnes', color='#FF4500',
186             marker='o', s=20)
187 plt.plot(xp, barnes_vall, color='#191970')
188 plt.scatter(xp, Temperatura, label='Temperatura Observada', color='#191970',
189             marker='o', s=20)
190 plt.xlabel('HORAS') # Cambia la etiqueta del eje x
191 plt.ylabel('Temperatura (C)') # Cambia la etiqueta del eje y
192 plt.legend()
193 plt.title('Datos de Temperatura de la Estacion Meteorologica (ENERO 2014)')
194 plt.tight_layout()
195 plt.show()
```



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA
NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO

Fecha de entrega: 02/08/2024

INFORMACIÓN DEL AUTOR
Nombres – Apellidos: Pamela Nicole Alegría Naranjo
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemática
 Ing. Cristina Estefanía Ramos Araujo, MSc. Director del Trabajo de Titulación
 Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo, MSc. Asesor del Trabajo de Titulación