



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**COMPARAR EL MÉTODO MONTE CARLO Y LAS FÓRMULAS DE
NEWTON COTES PARA EL CÁLCULO DE INTEGRALES
MÚLTIPLES**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICO

AUTOR: ALDRIN HUILLKA SARANSIG DE LA TORRE

DIRECTOR: MAT. LUIS MARCELO CORTEZ BONILLA

Riobamba – Ecuador

2024

©2024, Aldrin Huillka Saransig De La Torre

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Aldrin Huillka Saransig De La Torre, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 13 de mayo de 2024



Aldrin Huillka Saransig De La Torre

1050227303

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; tipo: Proyecto de Investigación, **COMPARAR EL MÉTODO MONTE CARLO Y LAS FÓRMULAS DE NEWTON COTES PARA EL CÁLCULO DE INTEGRALES MÚLTIPLES**, realizado por el señor: **ALDRIN HUILLKA SARANSIG DE LA TORRE**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

FIRMA

FECHA

Lic. Carlos Eduardo Cova Salaya
PRESIDENTE DEL TRIBUNAL



2024-05-13

Mat. Luis Marcelo Cortez Bonilla
DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR



2024-05-13

Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo
ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR



2024-05-13

DEDICATORIA

Para mis amados padres. Este trabajo es un reflejo de su dedicación y cariño, y me enorgullece profundamente poder rendirles homenaje de esta forma. Gracias por ser las luces que han guiado mi camino hacia el saber, enseñándome el valor del esfuerzo y la educación.

Aldrin

AGRADECIMIENTO

Mi más sincero agradecimiento a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo por brindarme una formación de excelencia y dotarme de conocimientos sólidos que han sido fundamentales en mi desarrollo académico y profesional. Asimismo, extendiendo mi gratitud a mi tutor y asesor, cuyo apoyo y guía han sido esenciales para la culminación de este trabajo, llenándome de sabiduría y motivación a lo largo de este proceso.

Aldrin

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS	ix
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	x
ÍNDICE DE ANEXOS	xi
RESUMEN	xii
ABSTRACT	xiii
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	3
1.1. Planteamiento del problema (identificación del problema que permita plantear la pregunta o hipótesis para el proceso de investigación)	3
1.2. Objetivos	3
1.2.1. <i>Objetivo general</i>	3
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	3
1.3. Justificación	4

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO	5
2.1. Antecedentes de la investigación	5
2.2. Fundamentación teórica	6
2.2.1. <i>Integración numérica.</i>	6
2.2.2. <i>Fórmulas de Newton-Cotes.</i>	12
2.2.3. <i>Variables aleatorias.</i>	32
2.2.4. <i>Método de Monte Carlo.</i>	39

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO	48
3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación empleadas	48

CAPÍTULO IV

4.	MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	50
4.1.	Procesamiento, análisis e interpretación de resultados.	50
4.2.	Discusión	62
	CONCLUSIONES	66
	RECOMENDACIONES	67
	BIBLIOGRAFÍA	

ANEXOS

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 2-1: Fórmulas abiertas de Newton-Cotes	31
Tabla 4-2: Resultados obtenidos para el Caso 1.	50
Tabla 4-3: Resultados obtenidos para el Caso 2.	52
Tabla 4-4: Resultados obtenidos para el Caso 3.	53
Tabla 4-5: Resultados obtenidos para el Caso 4.	55
Tabla 4-6: Resultados obtenidos para el Caso 5.	56
Tabla 4-7: Resultados obtenidos para el Caso 6.	58
Tabla 4-8: Resultados obtenidos para el Caso 7.	59
Tabla 4-9: Resultados obtenidos para el Caso 8.	61

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 2-1: Área de una función obtenida mediante Sumas de Riemann e integrales	9
Ilustración 2-2: Aproximación de una integral con un polinomio de a) Grado 1 b) Grado 2	13
Ilustración 2-3: Aproximación de una integral empleando polinomios por secciones	14
Ilustración 2-4: Aproximación de una integral empleando la regla del trapecio.	15
Ilustración 2-5: Aproximación de una integral empleando la Regla compuesta del Trapecio.	17
Ilustración 2-6: Área aproximada mediante la regla del trapecio simple	18
Ilustración 2-7: Área bajo la curva de la función $f(x)$	19
Ilustración 2-8: Área aproximada mediante la regla compuesta del trapecio utilizando dos segmentos	20
Ilustración 2-9: Aproximación de una integral empleando la Regla de Simpson 1/3	22
Ilustración 2-10: Aproximación de una integral empleando la Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple	23
Ilustración 2-11: Área aproximada mediante la regla de Simpson 1/3.	24
Ilustración 2-12: Área aproximada mediante regla compuesta de Simpson 1/3 utilizando cuatro segmentos	26
Ilustración 2-13: Aproximación de una integral empleando la Regla de Simpson 3/8	28
Ilustración 2-14: Área aproximada mediante regla de Simpson 3/8	29
Ilustración 2-15: Esquema para el cambio de variable de x en función de t	30
Ilustración 4-16: Aproximaciones obtenidas para el Caso 1.	51
Ilustración 4-17: Aproximaciones obtenidas para el Caso 2.	52
Ilustración 4-18: Aproximaciones obtenidas para el Caso 3.	54
Ilustración 4-19: Aproximaciones obtenidas para el Caso 4.	55
Ilustración 4-20: Aproximación de una integral empleando la regla del trapecio.	57
Ilustración 4-21: Aproximaciones obtenidas para el Caso 6.	58
Ilustración 4-22: Aproximaciones obtenidas para el Caso 7.	60
Ilustración 4-23: Aproximaciones obtenidas para el Caso 8.	62
Ilustración 4-24: Errores obtenidos en casos de integrales dobles.	63
Ilustración 4-25: Errores obtenidos en casos de integrales triples.	63

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A: PROGRAMAS DESARROLLADOS EN EL SOFTWARE OCTAVE

RESUMEN

Los estudiantes y docentes de la carrera de Matemáticas de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo no cuentan con una herramienta de apoyo para el estudio y resolución de integrales múltiples definidas que facilite la comprensión y aplicación de las fórmulas de Newton-Cotes y el método de Monte Carlo a través de aplicaciones ilustradas de procesos simulados para aquellos casos donde no es posible encontrar una solución analítica, por lo tanto, el objetivo de la presente investigación es comparar los métodos Monte Carlo y las fórmulas de Newton-Cotes a través de una investigación teórica para aproximar integrales múltiples definidas, así como, simulaciones utilizando el software Octave, lo que permitirá generar un documento que sirva de guía para comprender la aplicación de estos métodos. La metodología implementada consiste en desarrollar una investigación teórica de todos los aspectos relacionados con la aplicación de las fórmulas de Newton-Cotes y el método de Monte Carlo para la resolución de integrales múltiples definidas y el desarrollo de aplicativos simulados en el programa matemático Octave que proporcionen resultados numéricos para realizar una comparación entre los métodos aplicados y establecer semejanzas y diferencias. Como resultado de aplicar este marco metodológico fue posible establecer que las fórmulas de Newton-Cotes son efectivas para la resolución de integrales múltiples definidas que consideran hasta cinco variables presentando un margen de error del 5% respecto del resultado real, por otro lado, el método de Monte Carlo brinda mayores beneficios para casos que presentan hasta 8 variables con un margen de error del 10%. Considerando estos resultados se concluye que la herramienta de software desarrollada en este trabajo de integración curricular brinda un apoyo educativo para el nivel de pregrado para el estudio de las técnicas de resolución de integrales múltiples definidas tanto para docentes como para estudiantes.

Palabras clave: <MATEMÁTICA>, <INTEGRALES MÚLTIPLES>, <MÉTODO MONTE CARLO>, <FÓRMULAS DE NEWTON COTES>.

0562-DBRA-UPT-2024



ABSTRACT

Students and professors of Mathematics at the Escuela Superior Politécnica de Chimborazo do not have a support tool for the study and solving of multiple definite integrals that facilitates the understanding and application of the Newton-Cotes formulas as well as the Monte Carlo method through illustrated applications of simulated processes for those cases in which it is not possible to find an analytical solution, Therefore, the aim of this research is to compare the Monte Carlo method with the Newton-Cotes formulas through a theoretical research to estimate multiple definite integrals, as well as simulations using Octave software, which will allow generating a document as a guide to understand the application of these methods. The implemented methodology consists of developing a theoretical research of all the aspects related to the application of the Newton-Cotes formulas and the Monte Carlo method for the resolution of multiple definite integrals and the development of simulated applications in the mathematical program Octave that provide numerical results to make a comparison between the applied methods and establish similarities and differences. As a result of applying this methodological framework, it was possible to establish that the Newton-Cotes formulas are effective for the resolution of multiple definite integrals that consider up to five variables, presenting a margin of error of 5% with respect to the real result. On the other hand, the Monte Carlo method provides greater benefits for cases that present up to 8 variables with a margin of error of 10%. With these results it is concluded that the software tool developed in this curricular integration work provides an educational support for the undergraduate level for the study of multiple definite integral solving techniques for both professors and students.

Keywords: <MATEMATICAS>, <MULTIPLE INTEGRALS>, <MONTE CARLO METHOD>, <NEWTON-COTES FORMULAS>.



Lic. Paul Rolando Armas Pesantez Ms.C.

060328987-7

INTRODUCCIÓN

Ante la diversidad de problemas científicos y tecnológicos que requieren el cálculo preciso de integrales definidas, resulta crucial identificar cuál de estos métodos ofrece la mejor combinación de precisión, eficiencia computacional y versatilidad en diferentes contextos. Esta investigación busca no solo profundizar en la comprensión de estos métodos, sino también proporcionar una guía práctica para investigadores y profesionales que enfrentan el desafío de seleccionar la estrategia de integración numérica más adecuada para sus aplicaciones específicas.

En la selección del método de integración numérica podemos resolver las integrales múltiples de manera eficiente y para esto se comparan los dos enfoques propuestos con el objetivo de indentificar su ventajas y limitaciones.

Ya anteriormente se ha perfeccionado e investigado lo referente a las aproximaciones con polinomios y con las tecnicas de simulacion aleatoria, para el calculo de las integrales múltiples eficas y precisa. El presente trabajo se estructura de la siguiente manera:

- **Capítulo 1: Problema de investigación** En este capítulo se da a conocer el problema al momento de resolver una integral múltiple definida al no tener una función primitiva o sea complicada su resolución analítica, se menciona los objetivos de la investigación y su justificación.
- **Capítulo 2: Marco teórico** : En este capítulo se examina y compara la integración numérica en el cálculo de integrales múltiples definidas, resaltando el uso de las fórmulas de Newton-Cotes y el método Monte Carlo. Estos enfoques se dan en situaciones donde las soluciones analíticas son difíciles, ofreciendo herramientas para estimar valores del error en integrales mediante interpolación polinómica y muestreo aleatorio. Esta investigación compara ambos métodos y su aplicación en el cálculo de integrales múltiples definidas en diversos campos científicos y tecnológicos.
- **Capítulo 3: Marco metodológico** En este capítulo de habla acerca del enfoque comparativo entre las fórmulas y métodos, se establece los diseños experimentales que incluye la implementación de ambos métodos en un entorno computacional, se define criterios de evaluación que permitirá analizar la precisión, eficiencia computacional y la aplicación de cada método y lo que contribuirá a la generación de resultados para la selección adecuada de la estrategia de integración numérica en distintos contextos científicos y tecnológicos.

- **Capítulo 4: Marco de resultados y discusión de los resultados** Se da a conocer la comparación de las cotas del error y los resultados para ver cual de los métodos es más eficiente segun las variables aplicadas.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema (identificación del problema que permita plantear la pregunta o hipótesis para el proceso de investigación)

Comparar el método Monte Carlo y las fórmulas de Newton Cotes en la resolución de integrales múltiples definidas para desarrollar una técnica que pueda ser utilizada con fines educativos a nivel de pregrado permitiendo ilustrar aplicaciones específicas de los procesos de simulación de integración numérica de funciones en las que no se posible encontrar soluciones analíticas, brindando una herramienta de apoyo y motivación a docentes y estudiantes de Matemática.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo general*

Comparar los métodos Monte Carlo y las fórmulas de Newton Cotes a través de una investigación teórica para aproximar integrales múltiples definidas, así como, simulaciones utilizando el software Octave, lo que permitirá generar un documento que sirva de guía para comprender la aplicación de estos métodos.

1.2.2. *Objetivos específicos*

- Realizar una revisión bibliográfica sobre el método de Monte Carlo y las fórmulas de Newton-Cotes, utilizando fuentes bibliográficas que sirvan para identificar y seleccionar la mejor evidencia que guíe de una manera correcta la investigación.
- Comparar teóricamente las cotas del error del método Monte Carlo y las fórmulas de Newton-Cotes al aproximar integrales múltiples definidas. Se analizará utilizando de una a cinco variables para Newton-Cotes y hasta 8 variables para Monte Carlo, con la finalidad de determinar cuál método es más apto.
- Evaluar el comportamiento de las cotas del error utilizando el lenguaje Octave para ambos métodos a medida que se incrementa el número de puntos de evaluación o iteraciones.

1.3. Justificación

En la carrera de matemática en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), se estudian las fórmulas de Newton Cotes de una sola variable, sin embargo, existen casos de estudio donde se requiere el uso de métodos como Monte Carlo. En la asignatura de teoría de la probabilidad no se considera la implementación de modelos de simulación como tema de estudio, considerando que el uso de métodos aleatorios basados en modelos matemáticos y lógicos permiten la emulación y aproximación de soluciones. Por esta razón se propone realizar una investigación para determinar el valor de una integral múltiple definida y poder comparar el método Monte Carlo y las fórmulas de Newton Cotes permitiendo corroborar los valores complejos de una manera aproximada al resultado principal de cada uno de los modelos planteados.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes de la investigación

El método Monte Carlo fue ideado por Ulam a inicio de los años 40 durante un partido de cartas y nombrado así por Metropolis en 1947 haciendo referencia al Casino del mismo nombre en Mónaco y debido al uso de valores al azar. El primer indicio de la aplicación de este método fue para desarrollar armas nucleares en Los Alamos, aprovechando la aparición moderna de los ordenadores digitales. A pesar de no alcanzar tanta popularidad en el análisis matemático, en la actualidad este se basa en obtener una solución aproximada a las integrales múltiples con una cota de error muy reducida, convirtiéndolo en un procedimiento factible y eficiente. (Illana, 2013).

Por otro lado, las fórmulas de Newton-Cotes, denominadas así por Isaac Newton y Roger Cotes, comprenden los métodos de integración numérica más conocidos para el cálculo de integrales y se fundamentan en la interpolación y evaluación de funciones en puntos equidistantes. Aplican como estrategia la simplificación de la función inicial hacia una más sencilla para facilitar los procedimientos al hallar una solución aproximada. Cuando se evalúa la función en todo el intervalo incluyendo las fronteras de integración se emplean fórmulas cerradas, mientras que, si no se establecen límites de la integral se recomienda el uso de las formas abiertas. (Madrid, 2013).

A continuación, se resumen varios trabajos de investigación desarrollados por otros autores que marcan un antecedente y una guía para el desarrollo del presente trabajo para alcanzar los objetivos planteados.

El trabajo de investigación desarrollado por Smyth (1997, págs. 3088-3095), plantea una solución al problema estadístico del cálculo de funciones de densidad marginal donde se requiere un procedimiento para aproximar una integral definida que no permite un método de resolución exacto. En su metodología emplea las fórmulas de Newton-Cotes como una de las técnicas clásicas de cuadratura que ofrecen una solución muy cercana a la real cuando las dimensiones son pocas y recomienda el método Monte Carlo como una alternativa posible cuando se excede aproximadamente las 20 dimensiones.

Weinzierl (2020) en su escrito dedicado al estudio del método Monte Carlo y sus aplicaciones en problemas físicos y matemáticos, realiza una breve comparativa entre este método y las técnicas de integración numérica clásica basadas en las fórmulas de Newton-Cotes, señalando para este último método que cuando se incrementa el número de puntos, los coeficientes utilizados se vuelven

muy grandes y de valor complejo. Destacando que el método Monte Carlo brinda una solución para aquellos problemas donde se requiere grandes cantidades de valores para resolver integrales definidas. (Weinzierl, 2020).

Por otro lado, el artículo dedicado al enfoque adaptativo de elementos finitos estocásticos plantea que el método Monte Carlo no presenta la robustez necesaria para solucionar problemas con discontinuidad de parámetros, bifurcaciones o puntos críticos donde los resultados obtenidos corresponden a fenómenos estocásticos o errores de aliasing. Indicando que en estos casos la opción más viable son las fórmulas de cuadratura de Newton-Cotes donde se propicia una aproximación polinomial y el espacio probabilístico se subdivide en elementos más simples y se puede refinar mejor los procesos adaptativos. (Witteveen, et al., 2009).

Las fórmulas de Newton-Cotes han sido utilizadas para la resolución de muchos problemas en variados ámbitos, como es el caso del Flujo en los sistemas de potencia, donde se requiere encontrar la solución de un conjunto de ecuaciones no lineales que no se pueden resolver de manera directa, sino que requieren de una técnica numérica iterativa. El uso de las fórmulas de Newton-Cotes ha permitido desarrollar un método para el cálculo de flujo que presenta una superioridad comparada con otras técnicas con base en los resultados obtenidos en experimentos de diversos escenarios.(Tostado, et al., 2020).

2.2. Fundamentación teórica

2.2.1. Integración numérica.

El término integración se define como la acción de juntar fragmentos de un todo o revelar la cantidad total, en matemática, el cálculo de integrales se considera el proceso inverso de diferenciar y se representa por:

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (2.1)$$

Donde I es el resultado de integrar una función $f(x)$, siendo x la variable independiente, en un intervalo $[a, b]$, tal que $a \leq x \leq b$. Al término $f(x)$ se lo denomina integrando.

La expresión (2.1) representa una sumatoria de los valores de $f(x)dx$ obtenidos entre los puntos $x = a$ y $x = b$ y se concibe como el área que se genera entre el eje de abscisas y la función, conocida comúnmente como el Área bajo la Curva. (Stewart, 2012)

Las aplicaciones de este concepto permiten comprender fenómenos físicos, mecánicos, eléctricos, entre otros más, ya que sus investigaciones estas fundamentan con ecuaciones para

representar el cambio experimental de un proceso o sistema durante un tiempo o período. El ejemplo más conocido es la relación que existe entre la posición, velocidad y aceleración de un objeto en función del tiempo.

El área matemática dedicada al estudio de integrales se denomina “Cálculo Diferencial e Integral” a través del cual, se experimentan las técnicas y reglas básicas que rigen la resolución de expresiones de integración sea esta exacta o analítica.

Para aquellos casos donde el cálculo integral no permite determinar una solución exacta, se emplea el cálculo aproximado, conocido como Integración numérica. (Moreno, 2005)

Teorema fundamental del cálculo.

Este teorema pretende relacionar los procesos de diferenciación e integración, dado que cada uno de ellos surgió de forma independiente, es decir, el cálculo diferencial nació del problema de una recta tangente y el cálculo integral se desarrolló en torno al área de la curva. Fue Isaac Barrow (profesor de Newton) quien distinguió en el año 1670 la relación inversa que mantenían estos dos procesos estableciendo la Regla de Barrow que permitió el desarrollo del Teorema fundamental del cálculo (TFC) mediante contribuciones de Newton y Leibniz. (Smyth, 1997, págs. 3088-3095).

Definición 1: Teorema fundamental del cálculo.

Si f es una función continua sobre $[a, b]$, se define la función g como:

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt \quad a \leq x \leq b \quad (2.2)$$

continua sobre $[a, b]$ cuya derivada sobre (a, b) está dada por $g'(x) = f(x)$. (Smyth, 1997, págs. 3088-3095).

Definición 2: Regla de Barrow.

Si f es una función continua sobre $[a, b]$, se define la función g como

$$g(x) = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2.3)$$

donde F es la función primitiva o antiderivada de f dada por $F' = f$. (Smyth, 1997, págs. 3088-3095).

Las integrales cumplen ciertas propiedades de carácter elemental dentro de un dominio o subconjunto acotado A de \mathbb{R}^n . Si se consideran las funciones integrables $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y la constante

$c \in \mathbb{R}$, se establecen las propiedades:

- $\int_A (f + g) = \int_A f + \int_A g$ siendo $(f + g)$ una función integrable.
- $\int_A cf = \int_A f$
- $|\int_A f| = \int_A |f|$
- $\int_A (f \leq g) = \int_A g$ si la relación $(f \leq g)$ es integrable.
- $|\int_A f| \leq M * volumen(A)$ siempre que A tenga volumen y $|f| \leq M$.

Las primeras dos propiedades denotan que el conjunto de funciones que pueden ser integradas sobre un conjunto se considera un espacio vectorial, y un operador lineal sobre este espacio de dimensión infinita es la integral. (Benalcázar, 2007).

Tipos de Integrales

El concepto de la Integral de Riemann distingue dos tipos, como son: la integral definida y la integral indefinida.

Definición 3: Integral definida.

Si f es una función continua definida para $a \leq x \leq b$, se dice que f es integrable en $[a, b]$ si en

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (2.4)$$

el límite existe y proporciona el mismo valor para todos los puntos de muestra posibles de elegir $x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*$ en los subintervalos $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ generados al dividir el intervalo $[a, b]$ en n subintervalos con un ancho igual a $\Delta x = \frac{b-a}{n}$. (Stewart, 2012).

Esta definición se deriva del proceso de sumas de Riemann para funciones positivas $f(x) \geq 0$ cuando el ancho Δx tiende a ser muy reducido, como se observa en la **Ilustración 2-1**. La suma de las áreas rectangulares se convierte en el área bajo la curva al aplicar el concepto de integración.

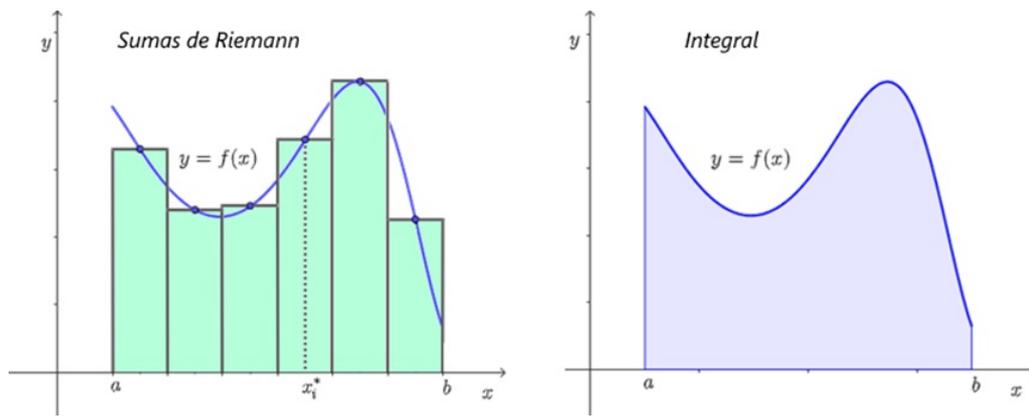


Ilustración 2-1: Área de una función obtenida mediante Sumas de Riemann e integrales

Realizado por: Saransig A., 2024.

Las integrales definidas poseen algunas propiedades que facilitan su evaluación. Al suponer que f y g son funciones continuas se establece que:

- $\int_a^b c dx = c(b - a)$, para valores constantes de c .
- $\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$.
- $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$, para valores constantes de c .
- $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$

El concepto de Integral indefinida se apoya en el Teorema Fundamental del Cálculo, dado que, la integral definida de una determinada función se obtiene al evaluar la primitiva de esta en los puntos extremos del intervalo establecido. Si se aplican las definiciones de integral definida y el teorema se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b \quad (2.5)$$

donde se establece que, el conjunto de las funciones F se consideran primitivas o antiderivadas de f dentro del intervalo, con la excepción de una constante.

Se dice entonces que la integral indefinida de f se expresa como

$$\int f(x) dx = F(x) + c \quad (2.6)$$

donde $F'(x) = f(x)$. (Nieves y Dominguez, 2006).

La diferencia de las integrales definidas e indefinidas radica en el resultado que arroja cada caso, un número y una función o familia de funciones respectivamente.

Otro tipo de clasificación de las integrales se relaciona con el número de variables que involucra una función. Al extender el concepto de integral definida a integrales dobles, triples y múltiples respecto con el estudio de dos, tres o varias variables. Estos se emplean para el estudio de áreas, volúmenes, masas, centroides de regiones y otros aspectos asociados a fenómenos físicos o problemas matemáticos. El uso de integrales para el cálculo de probabilidades se relaciona con el uso de variables aleatorias. (Stewart, 2012).

A continuación se enlista la representación de una integral de línea, de superficie, de volumen y múltiple:

- Integral de línea o unidimensional: $\int f(x)dx$.
- Integral de superficie o doble: $\int \int f(x_1, x_2)dx_1dx_2$.
- Integral de volumen o triple: $\int \int \int f(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3$.
- Integral múltiple: $\int \dots \int \int f(x_1, x_2, \dots, x_n)dx_1dx_2\dots dx_n$

Una integral múltiple puede desarrollarse de forma que su grado se reduzca hasta obtener una integral de línea. Sin embargo, hay casos donde no existe una primitiva de la función y el grado de complejidad aumenta ya que el cálculo tradicional no puede ser aplicado para obtener una solución exacta. Estas circunstancias se marcan por dos situaciones:

- Cuando al evaluar $\int_a^b f(x)dx$ mediante el TFC se requiera de la función antiderivada que no existe o es imposible de determinar. (Por ejemplo las funciones $\int_0^1 e^{x^2}$ o $\int_{-1}^1 \sqrt{1+x^3}$).
- Si la función resulta del estudio de un experimento científico mediante lecturas de un instrumento o conjunto de datos, donde no existe una determinada fórmula para expresar la función.

Para estos casos se requiere la aplicación de métodos de integración numérica que permiten obtener un valor aproximado a la solución real.

Integración Numérica.

La integración numérica, también conocida como integración aproximada, se basa en procedimientos matemáticos que brindan una solución cercana al valor de la integral definida. Un claro ejemplo son las Sumas de Riemann, donde se aproxima el valor del área bajo la curva al

mediante la suma de las áreas de rectángulos. Cabe mencionar que, la integración numérica es útil para la resolución de integrales definidas, donde se obtiene un valor constante y, por tanto, no se recomienda su aplicación en integrales indefinidas.

Algunos métodos conocidos para llevar a cabo la integración numérica unidimensional son:

- Aproximación por extremo izquierdo.
- Aproximación por extremo derecho.
- Regla del punto medio.
- Regla del trapecio.

Cada uno de estos posee como característica un error de aproximación expresado como

$$\int_a^b f(x)dx = Aproximacin + error \quad (2.7)$$

La mayoría de los métodos emplean algoritmos de característica iterativa que establece un valor numérico o cantidad de puntos de muestreo, en los que se evalúa la función, por tanto, el error obtenido está relacionado directamente con este parámetro para su reducción.

El estudio de las alternativas que permiten la resolución de integrales múltiples, mediante el concepto de integración numérica o aproximada, se desarrolla en el Capítulo 2.2.2 con las Fórmulas de Newton-Cotes y en el Capítulo 2.2.4 dedicado al Método de Monte Carlo.

Los procesos de integración numérica se resumen entonces, como aquellos algoritmos donde se pretende aproximar la integral definida en un intervalo $[a,b]$ de una función $f(x)$, evaluando una cantidad finita de puntos. Si se supone $a = x_0 < x_1 < \dots < x_M = b$ en la expresión:

$$Q[f] = \sum_{i=0}^M \omega_i f(x_i) + \omega_1 f(x_1) + \dots + \omega_M f(x_M) \quad (2.8)$$

de modo que

$$\int_a^b f(x)dx = Q[f] + E[f] \quad (2.9)$$

Esta última fórmula se denomina de cuadratura o de integración numérica, donde el término $E[f]$ se denomina error de truncamiento. Los términos $x_{k(k=0)}^M$ se conocen como nodos de integración o de cuadratura y los valores $\omega_{k(k=0)}^M$ constituyen los pesos de la fórmula.

La selección de los nodos se basa en un criterio concreto, por ejemplo, las reglas del trapecio, Simpson y Boole establecen la condición de nodos equiespaciados, mientras que, Gauss-Legendre indica que estos deben ser raíces de polinomios de Legendre. Cada método de aplicación considera

un grado de precisión distinto, y que viene dado por un valor de tipo natural n para verificar la condición $E[P_i] = 0$ en todos los polinomios $P_i(x)$ de grado $i \leq n$. (Mathews y Fink, 2000).

El término del error $E[P_i]$ es de un modelo que es predecible cuando se analiza el caso de expresar $f(x)$ como polinomio. Si se considera la forma polinomial de grado i :

$$P_i(x) = a_i x^i + a_{i-1} x^{i-1} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.10)$$

Cuando $i \leq n$ se tiene que $P_i^{(n+1)}(x) = 0$ para todo valor de x , pero, si $i = n + 1$, entonces $P_{n+1}^{(n+1)}(x) = (n + 1)! a_{n+1}$ para todo x . Por lo tanto, los errores de truncamiento se establecen de forma general como

$$E|f| = K f^{n+1}(c) \quad (2.11)$$

donde K es un valor constante y n representa el grado de precisión. (Mathews y Fink, 2000).

La integración numérica pretende solucionar aquellos casos donde el intervalo considerado es infinito, o la función f presenta discontinuidades de carácter infinito en el intervalo $[a, b]$. Estas condiciones responden al concepto de integrales impropias que son muy comunes en el estudio de la probabilidad. (Stewart, 2012).

Una función f posee una integral impropia en el intervalo $[a, b]$ si existe el límite definido por

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x) dx \quad \text{para todo } t \geq a \quad (2.12)$$

$$\int_\infty^b f(x) dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^b f(x) dx \quad \text{para todo } t \leq a \quad (2.13)$$

Aquellas integrales impropias $\int_a^\infty f(x) dx$ y $\int_\infty^b f(x) dx$ se denominan convergentes cuando el valor del límite existe y divergentes cuando no existe. La expresión dada por

$$\int_{-\infty}^\infty = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^\infty f(x) dx \quad (2.14)$$

es útil si las integrales impropias $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ y \int_a^∞ son convergentes. (Stewart, 2012).

2.2.2. Fórmulas de Newton-Cotes.

Las fórmulas de Newton-Cotes son consideradas como los procedimientos más comunes para desarrollar la integración numérica, dado que toda función continua puede aproximarse mediante polinomios. De este modo se determina una solución aproximada y se reduce el nivel de dificultad

de la integral. (Chapra y Canale, 2006).

La estrategia que consideran estos procesos es la sustitución de la función original $f(x)$ por otra función polinomial $f_n(x)$ de la forma

$$f_n(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_{n-1}x^{n-1} + a_nx^n \quad (2.15)$$

donde n corresponde al grado del polinomio. Mediante la **Ilustración 2-2a** se puede observar un ejemplo del proceso de aproximación mediante una recta ($n = 1$), mientras que, en la **Ilustración 2-2b** se emplea una parábola ($n = 2$) para reducir el error de aproximación.

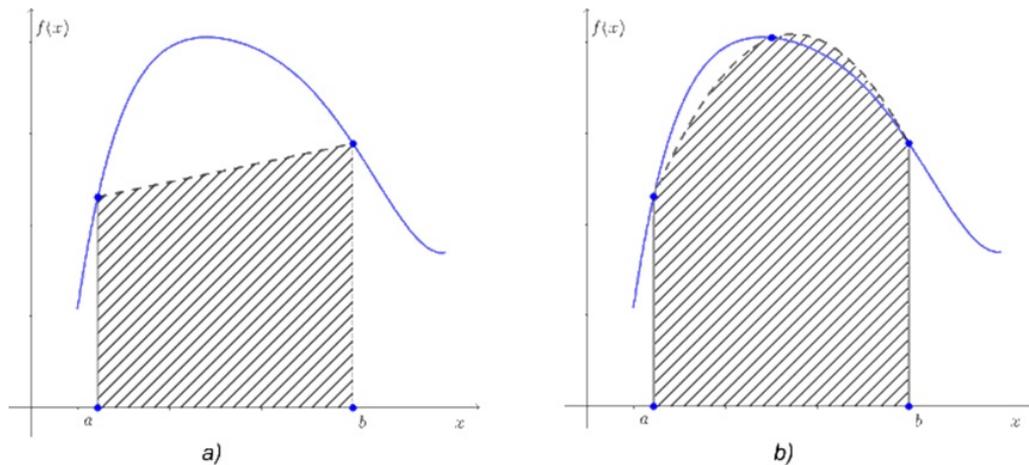


Ilustración 2-2: Aproximación de una integral con un polinomio de a) Grado 1 b) Grado

2

Realizado por: Saransig A., 2024.

Otra opción viable es el uso de un conjunto de polinomios distintos o por partes como se observa en la **Ilustración 2-3**, donde, la función se divide en tres secciones para aplicar a cada sección un polinomio de primer grado.

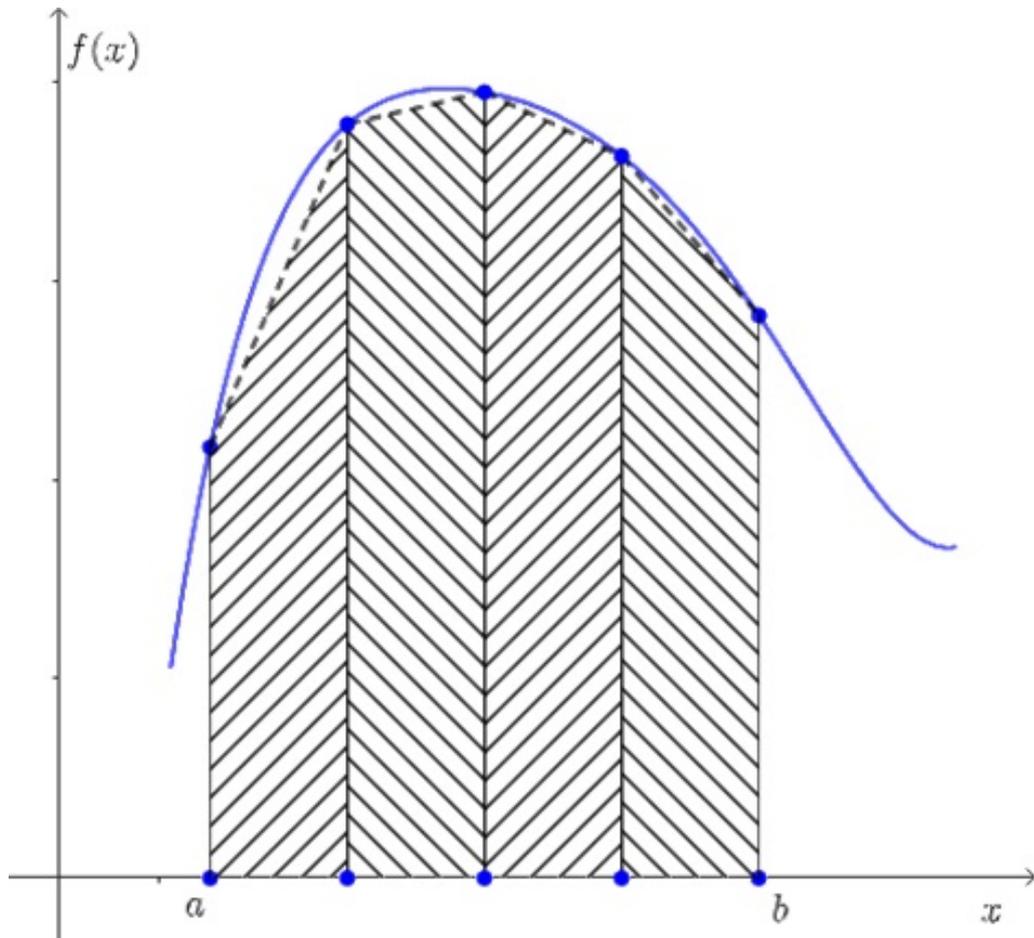


Ilustración 2-3: Aproximación de una integral empleando polinomios por secciones

Realizado por: Saransig A., 2024.

Existen dos grupos de fórmulas de Newton-Cotes, abiertas y cerradas. Las de tipo abiertas son más útiles para la resolución de integrales impropias ya que estas fórmulas pueden extenderse más allá de los límites de una integral simulando un proceso de extrapolación. Las fórmulas cerradas, por otro lado, permiten resolver integrales definidas donde se conocen los datos iniciales y finales de la función. (Chapra y Canale, 2006).

En las fórmulas cerradas se pretende estimar el valor de $I = \int_a^b f(x)dx$ y, generalmente, se procede con dos pasos:

1. El intervalo $[a, b]$ es dividido en m subintervalos equiespaciados donde sus extremos están dados por

$$x_i = x_0 + i \left(\frac{b-a}{m} \right), \quad i = 0, 1, 2, \dots, m \quad (2.16)$$

Siendo $x_0 = a$ y $x_m = b$

2. La función $f(x)$ se aproxima mediante un polinomio $p(x)$ con grado n para desarrollar la

integración y obtener un valor muy cercano de I .

De acuerdo con el valor de la variable n se obtendrán resultados diferentes. En este capítulo se estudian con mayor profundidad La Regla del Trapecio y las Reglas de Simpson (1/3 y 3/8), así como su aplicación para la resolución de integrales múltiples.

La Regla del Trapecio.

Es una fórmula cerrada donde se considera un polinomio de primer grado ($n = 1$) que aproxima el área bajo la curva mediante el área de un trapecio formado por un par de ordenadas y abscisas, como se observa en la **Ilustración 2-4**.

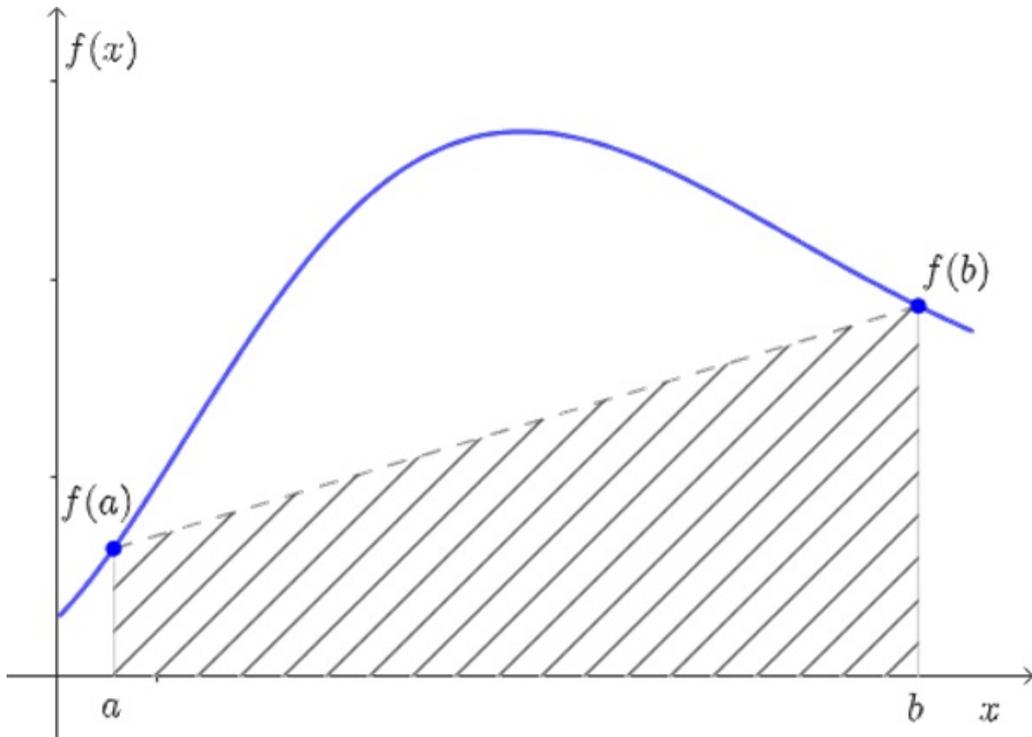


Ilustración 2-4: Aproximación de una integral empleando la regla del trapecio.

Realizado por: Saransig A., 2024.

$$I_T = \int_a^b \left[f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a) \right] dx \quad (2.17)$$

Al integrar este polinomio se obtiene como resultado

$$I_T = (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.18)$$

Si se establece h como el ancho del trapecio dado por $(b - a)$, se establece la regla del trapecio como

$$I_T = \frac{h}{2}[f(a) + f(b)] \quad (2.19)$$

Al utilizar esta regla es notable que existe un error de aproximación al valor real, siendo este un factor de vital importancia para conocer la confiabilidad del método. El error de truncamiento para esta fórmula cerrada está en función de un valor ξ dentro del intervalo $[a, b]$:

$$E_T = -\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3 \quad (2.20)$$

Al aplicar estos conceptos para subintervalos, comprendidos en el intervalo $[a, b]$, se hace referencia a la denominada Regla Compuesta del Trapecio. (Mathews y Fink, 2000).

Definición 4: Regla compuesta del trapecio.

Si se divide el intervalo $[a, b]$ en m subintervalos $[x_i, x_{i+1}]$ de igual amplitud $h_m = \frac{b-a}{m}$ considerando que los puntos muestreados dados por $x_i = a + ih_m$, para $i = 0, 1, \dots, m$, están equiespaciados, el área bajo la curva de una función se puede aproximar mediante:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h_m}{2} \sum_{i=1}^m [f(x_{i-1}) + f(x_i)] \quad (2.21)$$

Fuente: (Stewart, 2012).

El uso de estas sumatorias sucesivas se puede apreciar de manera gráfica en la **Ilustración 2-5**, donde, el área bajo la curva se aproxima mediante la suma de todas las áreas de los trapecios trazados en los subintervalos.

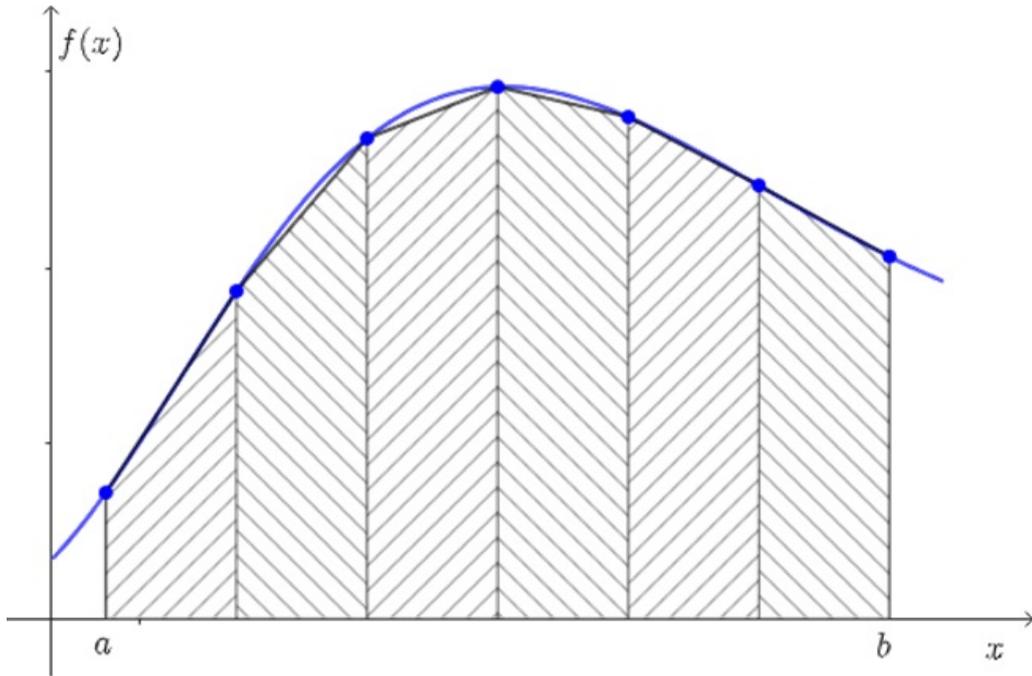


Ilustración 2-5: Aproximación de una integral empleando la Regla compuesta del Trapecio.

Realizado por: Saransig A., 2024.

Si se trabaja la ecuación dada en la Definición 4 se puede expresar la regla del trapecio como

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{b-a}{2m} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right] \quad (2.22)$$

El error de truncamiento se determina mediante la fórmula

$$E_T = -\frac{(b-a)^3}{12m^3} \sum_{i=1}^m f''(\xi_i) \quad (2.23)$$

Para la implementación de este método se requiere de un alto trabajo computacional, sin embargo, para funciones que no representan mayor grado de dificultad puede ser muy útil. Se recomienda para casos más complejos otros métodos como las Reglas de Simpson. (Chapra y Canale, 2006).

Ejemplo de aplicación: Obtener el valor de la integral mediante el uso de la regla del trapecio en el intervalo $[a = 0, b = 0.8]$ con la función $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$.

Solución: Para emplear la fórmula general de la regla del trapecio se requiere conocer los valores de $f(0)$ y $f(0.8)$:

$$f(0.8) = 0.2 + 25(0.8) - 200(0.8)^2 + 675(0.8)^3 - 900(0.8)^4 + 400(0.8)^5$$

$$f(0.8) = 0.232$$

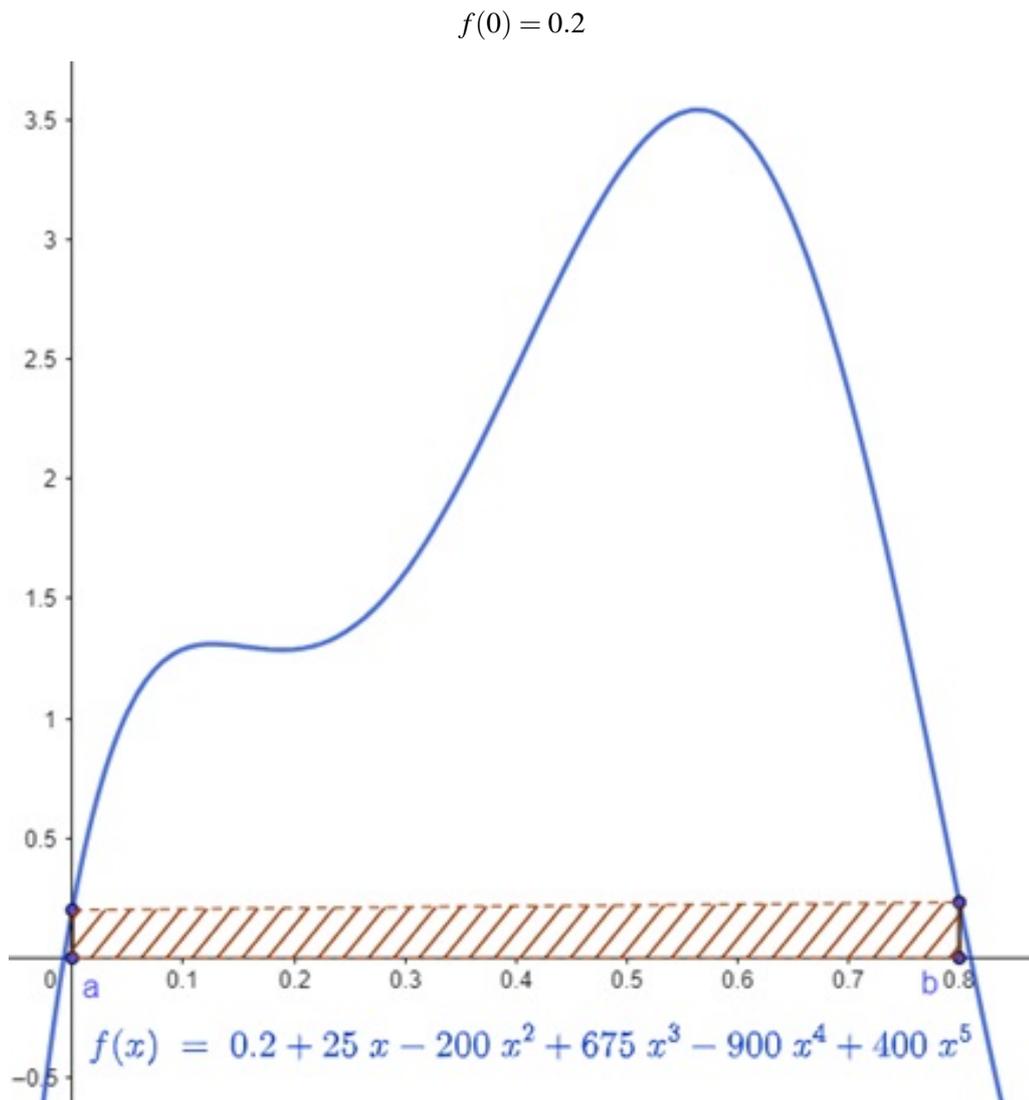


Ilustración 2-6: Área aproximada mediante la regla del trapecio simple

Realizado por: Saransig A., 2024.

Al sustituir los valores en la expresión:

$$I_1 \cong (b - a) \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

$$I_1 \cong (0.8 - 0) \frac{0.2 + 0.232}{2}$$

$$I_1 \cong 0.1728$$

Para este caso si se puede determinar el valor real aplicando las fórmulas de integración convencionales:

$$I = \int_0^{0.8} [0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5] dx$$

$$I = \left[0.2x + 25\frac{x^2}{2} - 200\frac{x^3}{3} + 675\frac{x^4}{4} - 900\frac{x^5}{5} + 400\frac{x^6}{6} \right]_0^{0.8}$$

$$I = 1.640533$$

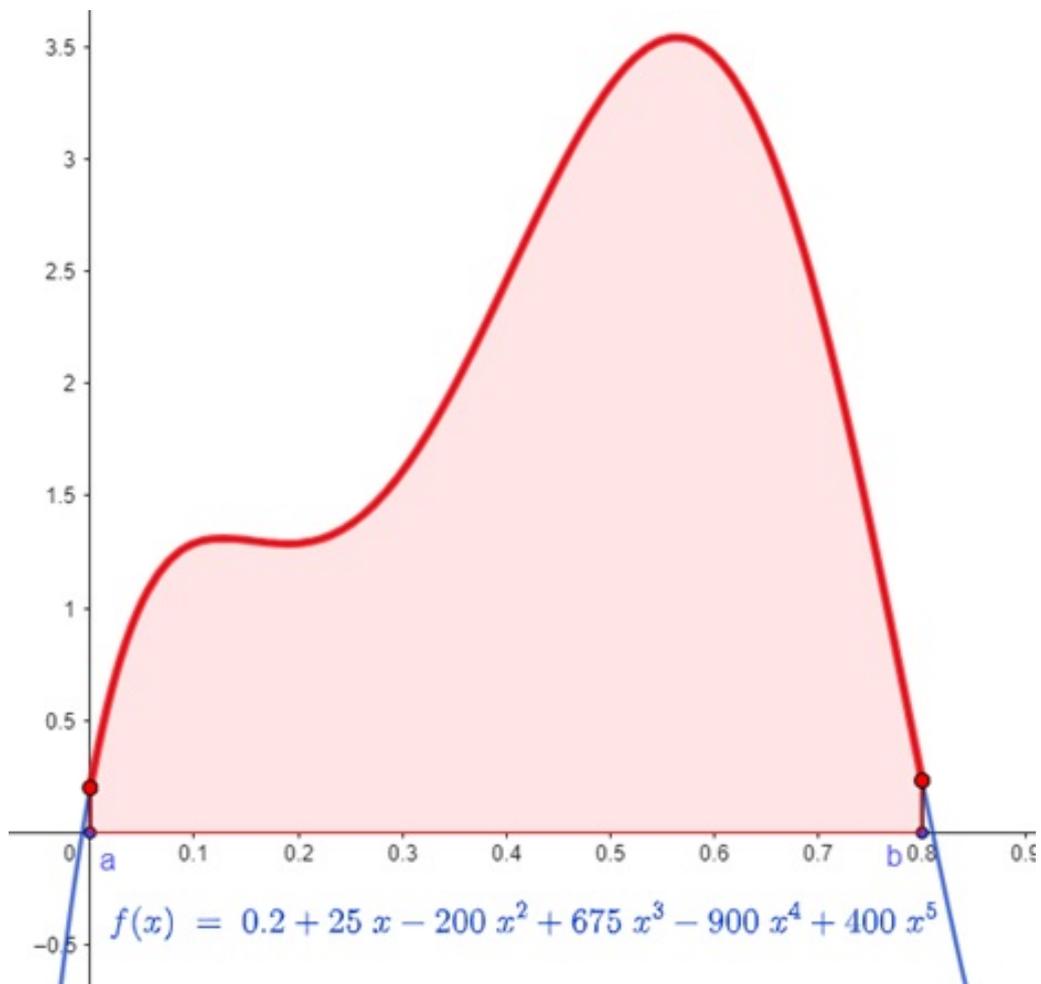


Ilustración 2-7: Área bajo la curva de la función $f(x)$

Realizado por: Saransig A., 2024.

Por lo tanto, el error en este caso tiene un valor de 1.467733 que corresponde a la diferencia entre I_1 e I , que es apreciable al comparar las áreas mostradas en **Ilustración 2-6** y **Ilustración 2-7**. Sin embargo, en aquellos casos donde no es posible conocer el valor real, se aplica la fórmula que involucra la segunda derivada de la función original:

$$f''(x) = -400 + 6 * 675x - 12 * 900x^2 + 20 * 400x^3$$

Para obtener el valor medio se procede mediante:

$$\overline{f''} = \frac{\int_0^{0.8} [-400 + 6 * 675x - 12 * 900x^2 + 20 * 400x^3] dx}{(0.8 - 0)}$$

$$\overline{f''} = \frac{(-48)}{0.8} = -60$$

El error de aproximación está dado por:

$$E_a = -\frac{1}{12}(-60)(0.8-0)^3$$

$$E_a = 2.56$$

Demostrando que posee el mismo orden y signo que el error verdadero. Si se aplica la regla compuesta del trapecio considerando dos segmentos, por lo tanto:

$$h_m = \frac{(0.8-0)}{2} = 0.4$$

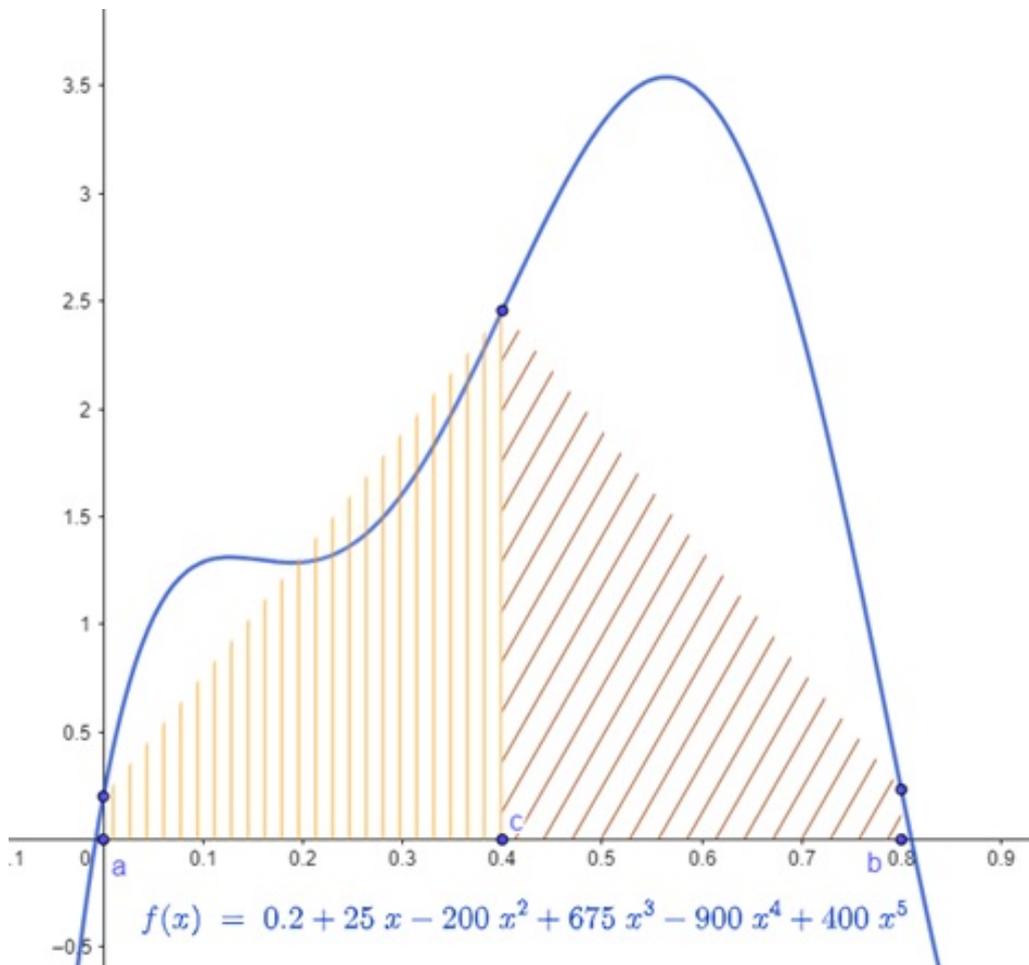


Ilustración 2-8: Área aproximada mediante la regla compuesta del trapecio utilizando dos segmentos

Realizado por: Saransig A., 2024.

Y el valor de la función en el punto intermedio se expresa como $f(0.4) = 2.456$. Con estos valores se expresa la integral aproximada como:

$$I_2 = \frac{(b-a)}{2m} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} f(x_i) + f(x_m) \right]$$

$$I_2 = \frac{(0.8-0)}{2*2} [f(0) + 2f(0.4) + f(0.8)]$$

$$I_2 = \frac{0.8}{4} [0.2 + 2*2.456 + 0.232]$$

$$I_2 = 1.0688$$

Obteniendo un error de 0.57173 y un error de aproximación:

$$E_a = -\frac{(b-a)^3}{12m^2} \sum_{i=1}^m \frac{f''(\xi)}{m} = \frac{(b-a)^3}{12m^2} f''$$

$$E_a = -\frac{(0,8)^3}{(12(2)^2)}(-60)$$

$$E_a = 0.64$$

Por lo tanto, se observa, de acuerdo con la **Ilustración 2-8** y el error aproximado en este caso, que el uso de la regla compuesta del trapecio genera resultados con un error más reducido que la regla simple.

Reglas de Simpson.

Las reglas de Simpson, establecidas por el matemático Thomas Simpson, son muy similares a la regla del trapecio con la diferencia que el polinomio de aproximación es de grado superior. De esta manera se distinguen dos fórmulas de acuerdo con el número de puntos de muestra que se emplea. Si se considera un tercer punto en la mitad del intervalo $[a, b]$ y se emplea una parábola $f_2(x)$ para unirlos, la integral se reescribe como

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b f_2(x)dx \tag{2.24}$$

donde $f_2(x)$ representa un polinomio de segundo grado como indica la **Ilustración 2-9**, donde se traza una parábola en color negro para aproximar el área bajo la curva de la función original $f(x)$ en color azul.

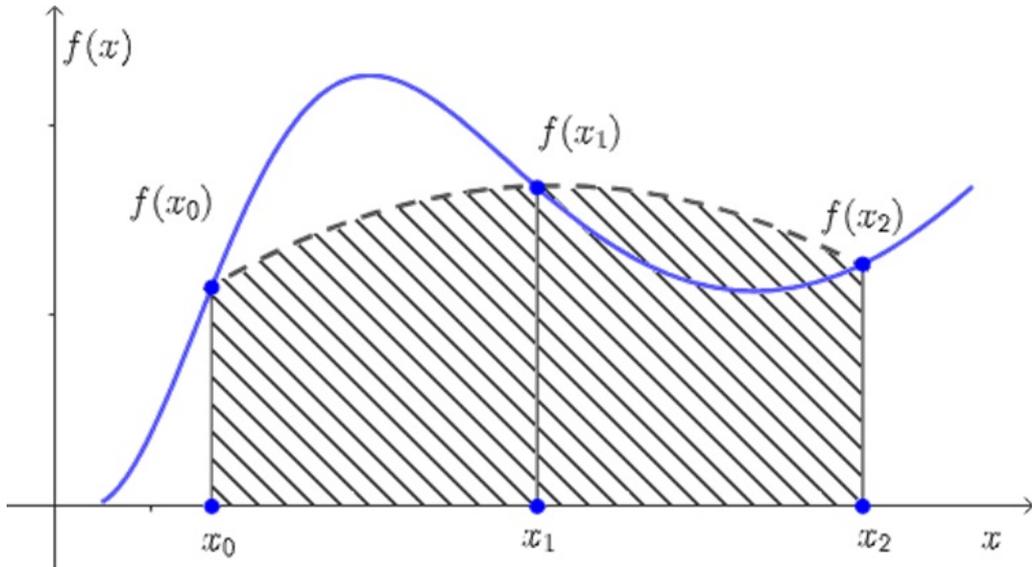


Ilustración 2-9: Aproximación de una integral empleando la Regla de Simpson 1/3

Realizado por: Saransig A., 2024.

El polinomio $f_2(x)$ considera tres puntos: $x_0 = a, x_2 = b$ y x_1 como el punto intermedio.

$$f_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2) \quad (2.25)$$

Al realizar la integración de este polinomio y simplificando la expresión final se obtiene como resultado:

$$I \cong [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] \quad (2.26)$$

donde $h = (b-a)/2$. La expresión 2.26 se denomina Regla de Simpson 1/3 ya que la variable h está dividida entre 3, y corresponde a la segunda fórmula de integración cerrada. Si se considera un solo segmento de esta regla, el error de truncamiento es

$$E_T = -\frac{1}{90}h^5 f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad (2.27)$$

donde ξ se encuentra dentro del intervalo $[a, b]$. Ya que el error es proporcional a la cuarta derivada, hace que esta fórmula sea más exacta que la regla del trapecio.

Si se aplican estos conceptos para subintervalos comprendidos entre $[a, b]$ se hace referencia a la Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple. (Chapra y Canale, 2006).

Definición 5: Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple.

Si se divide el intervalo de integración $[a, b]$ en m subintervalos de igual amplitud $h_m = \frac{(b-a)}{m}$, siendo $x_0 = a$ y $x_m = b$, el área bajo la curva de una función se puede aproximar mediante:

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{h_m}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{m-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{m-2} f(x_j) + f(x_m) \right] gh \quad (2.28)$$

La aplicación de esta regla se ilustra en la Figura **Ilustración 2-10**, donde se observa que los polinomios de segundo grado trazados son muy próximos a la función original.

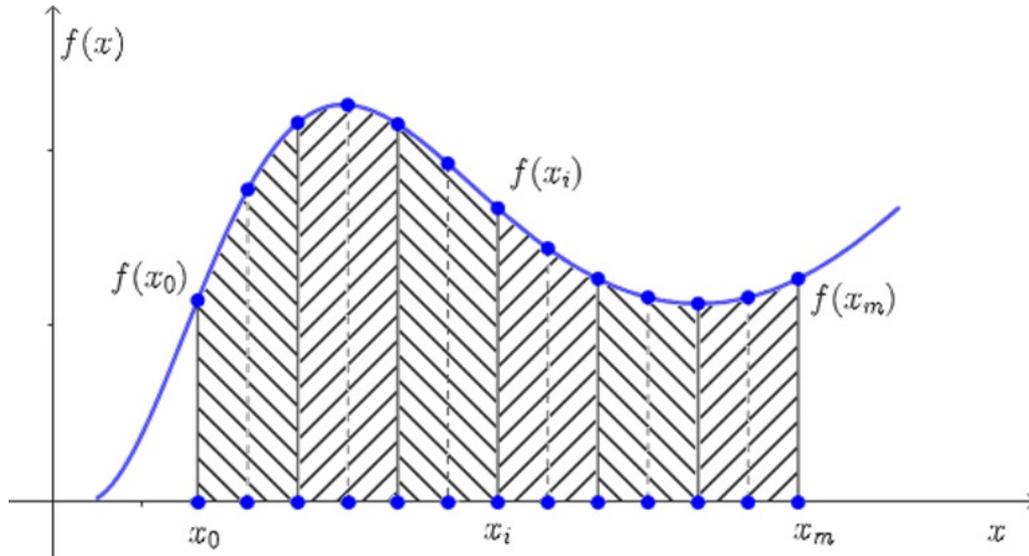


Ilustración 2-10: Aproximación de una integral empleando la Regla de Simpson 1/3 de aplicación múltiple

Realizado por: Saransig A., 2024.

El error que se estima para la aplicación múltiple está dado por la expresión

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180m^5} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\xi) \quad (2.29)$$

A pesar de que el error sea menor en comparación a la regla del trapecio, el uso de esta se limita a casos donde los valores están equiespaciados y se emplean cantidades impares tanto en segmentos como en puntos de muestra. Para aquellos problemas donde el número de puntos es par se emplea la regla de Simpson 3/8.

Ejemplo de aplicación: Obtener el valor de la integral mediante el uso de la regla de Simpson 1/3 en el intervalo $[a = 0, b = 0.8]$ con la función $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$.

Solución: Se considera entonces que el valor real de esta integral es 1.640533. Para emplear la

fórmula general de la regla de Simpson se requiere conocer tres valores de $f(0)$, $f(0.8)$ y el valor intermedio $f(0.4)$:

$$f(0.8) = 0.232 \qquad f(0.4) = 2.456 \qquad f(0) = 0.2$$

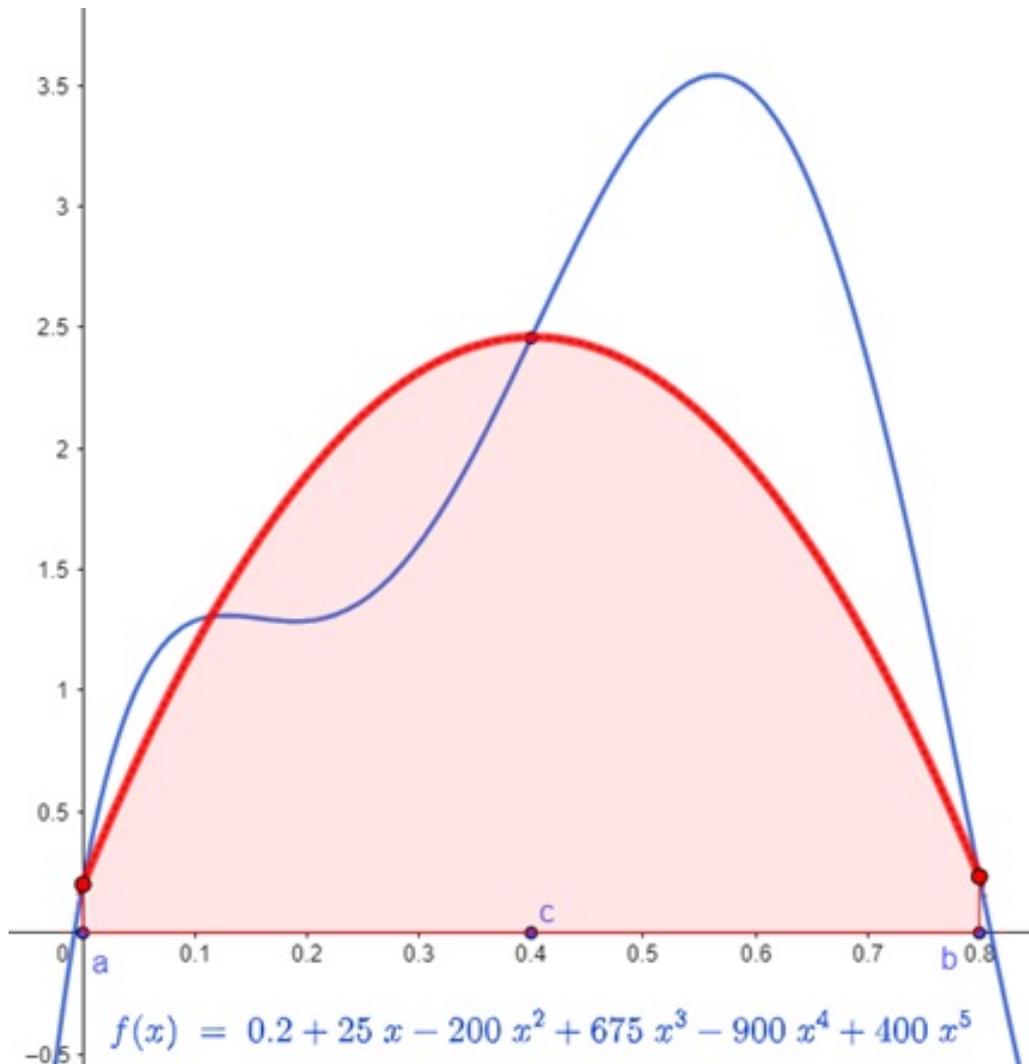


Ilustración 2-11: Área aproximada mediante la regla de Simpson 1/3.

Realizado por: Saransig A., 2024.

Al sustituir los valores en la expresión:

$$I_1 \cong \frac{(b-a)}{2} * \frac{1}{3} [f(0) + 4f(0.4) + f(0.8)]$$

$$I_1 \cong \frac{0.8}{6} [0.2 + 4(2.456) + 0.232]$$

$$I_1 \cong 1.367467$$

El error total es 0.2730667, mientras que el error aproximado corresponde al valor medio de la cuarta derivada de la función:

$$f^{(4)}(x) = -24 * 900 + 120 * 400x$$

$$\overline{f^{(4)}} = \frac{\int_0^{0.8} [-21600 + 48000x] dx}{(0.8 - 0)}$$

$$\overline{f^{(4)}} = \frac{(-1920)}{0.8} = -2400$$

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{2880} \overline{f^{(4)}}$$

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{2880} (-2400)$$

$$E_a = 0.2730667$$

En este caso el error real coincide con el aproximado, pero no significa que siempre se cumpla. Si se aplica la regla compuesta de Simpson 1/3 considerando dos segmentos, se obtiene que:

$$I_2 = \frac{h_m}{3} \left[f(x_0) + 4 \sum_{i=1,3,5}^{m-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6}^{m-2} f(x_j) + f(x_m) \right]$$

Con:

$$h_m = \frac{0.8 - 0}{4} = 0.2$$

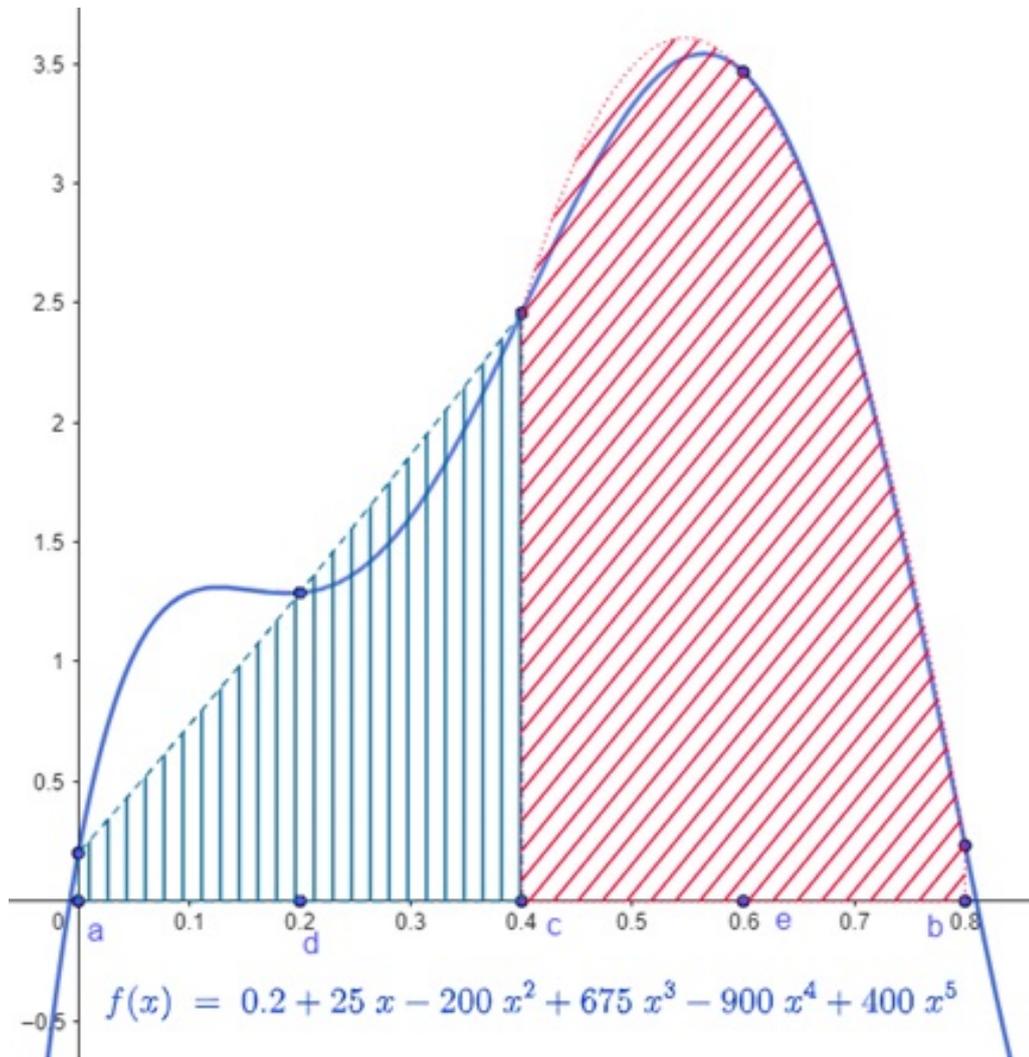


Ilustración 2-12: Área aproximada mediante regla compuesta de Simpson 1/3 utilizando cuatro segmentos

Realizado por: Saransig A., 2024.

Se requiere por tanto conocer los valores de $f(0.2)$ y $f(0.6)$ que están dados por 1.288 y 3.464 respectivamente.

$$I_2 = \frac{0.2}{3 \cdot 4} [f(0) + 4(f(0.2) + f(0.6)) + 2(f(0.4)) + f(0.8)]$$

$$I_2 = \frac{0.2}{12} [0.2 + 4(1.288 + 3.464) + 2(2.456) + 0.232]$$

$$I_2 = 1.62347$$

Obteniendo un error de 0.017067 y un error de aproximación:

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{180m^5} \sum_{i=1}^m f^{(4)}(\xi_i) = -\frac{(b-a)^5}{180m^4} f^{(4)}(x)$$

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{180(4)^4} (-2400)$$

$$E_a = 0.017067$$

Por lo tanto, se observa que el uso de esta regla proporciona soluciones con menor error que los proporcionados con la regla del trapecio, y que, al igual que en el caso anterior, el uso de la regla compuesta proporciona mejores resultados que la simple.

La Regla de Simpson 3/8 permite la formulación de un polinomio de Lagrange de tercer grado mediante cuatro puntos en el intervalo $[a, b]$ y se expresa como

$$\int_a^b f(x)dx \cong \frac{3h}{8}[f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)] \quad (2.30)$$

Siendo $h = (b - a)/3$. La expresión 2.30 corresponde a la tercera fórmula de integración cerrada de Newton-Cotes, y el error de truncamiento se calcula a partir de la expresión

$$E_T = -\frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi) = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}(\xi) \quad (2.31)$$

En algunos problemas matemáticos, se pueden combinar estas dos reglas de Simpson, como se aprecia en la **Ilustración 2-13**.

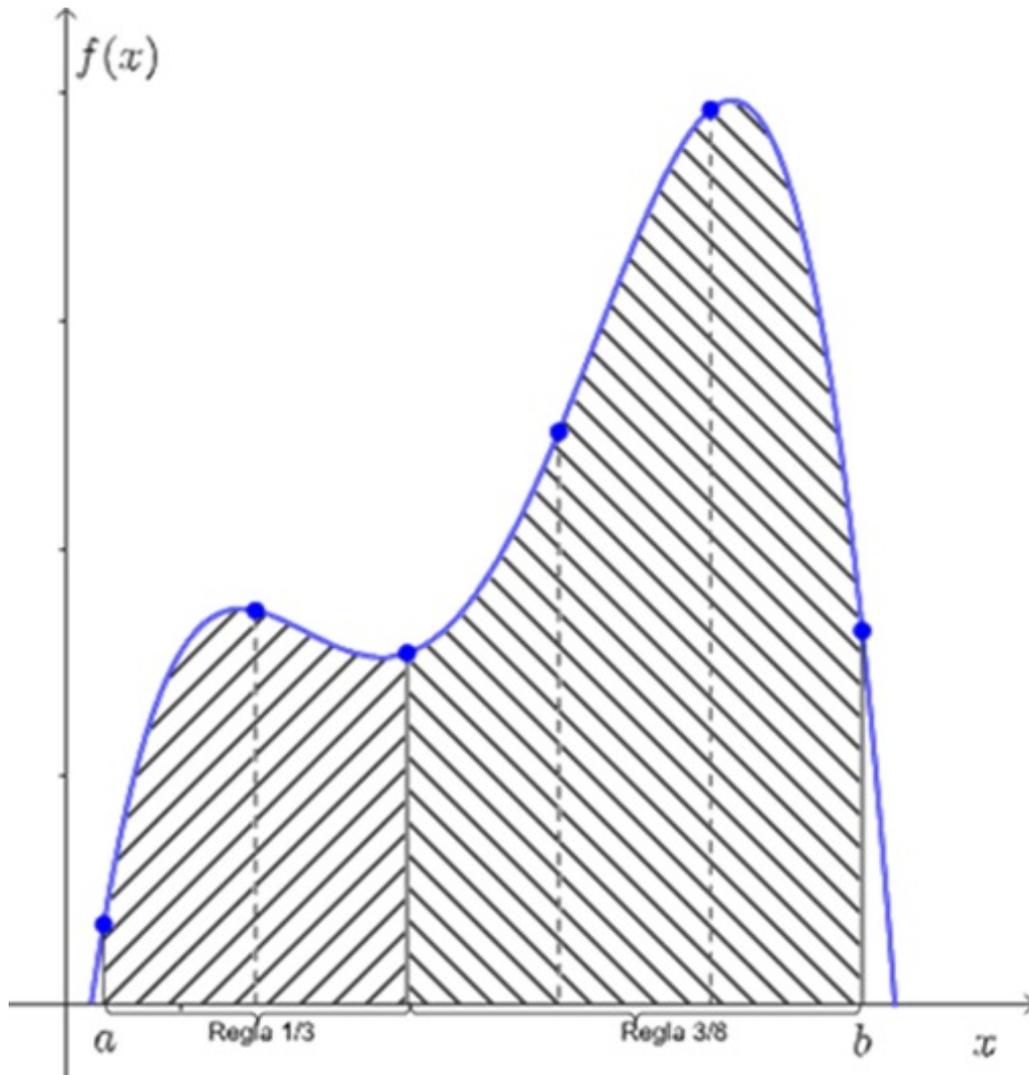


Ilustración 2-13: Aproximación de una integral empleando la Regla de Simpson 3/8

Realizado por: Saransig A., 2024.

Ejemplo de aplicación: Obtener el valor de la integral mediante el uso de la regla de Simpson 3/8 en el intervalo $[a = 0, b = 0.8]$ con la función $f(x) = 0.2 + 25x - 200x^2 + 675x^3 - 900x^4 + 400x^5$.

Solución: Para emplear la fórmula de Simpson 3/8 se requiere cuatro puntos, por lo tanto:

$$h_m = \frac{(0.8 - 0)}{3} = 0.266667$$

De acuerdo con ello, se tienen los puntos muestreados:

$$(f(0) = 0.2 \quad f(0.26667) = 1.432724 \quad f(0.53333) = 3.487177 \quad f(0.8) = 0.232)$$

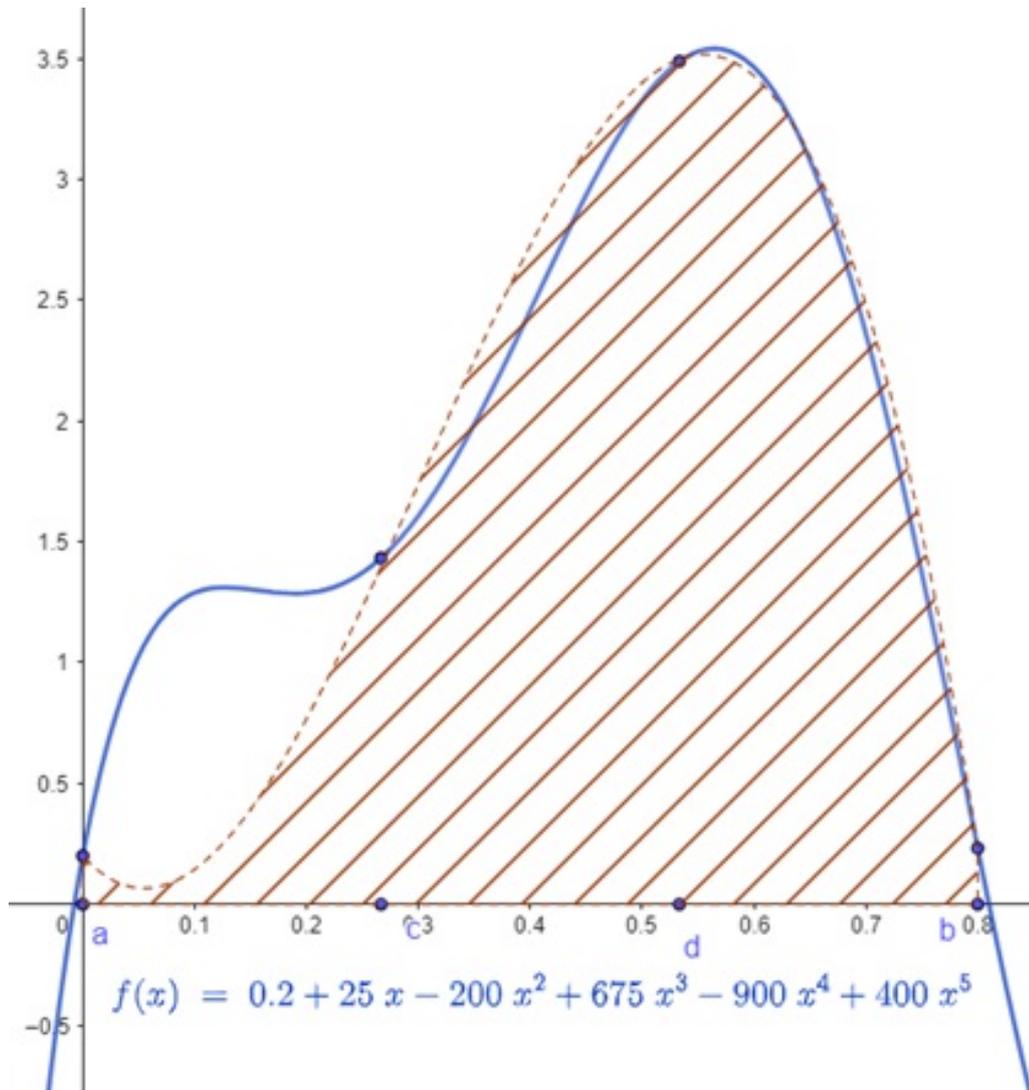


Ilustración 2-14: Área aproximada mediante regla de Simpson 3/8

Realizado por: Saransig A., 2024.

Utilizando la regla de Simpson 3/8:

$$I \cong \frac{3h}{8} [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)]$$

$$I \cong \frac{3 * 0.266667}{8} [0.2 + 3(1.432724) + 3(3.487177) + 0.232]$$

$$I \cong 1.519170$$

El error total está dado en función de:

$$E = 1.640533 - 1.519170 = 0.1213630$$

Mientras que, el error aproximado es proporcional al valor medio de la cuarta derivada de la función:

$$E_a = -\frac{(b-a)^5}{6480} f^{(4)}$$

$$E_a = -\frac{(0.8)^5}{6480}(-2400)$$

$$E_a = 0.1213630$$

A pesar de que este error es mucho más pequeño que el de las reglas anteriormente revisadas, se debe tomar en cuenta que su implementación requiere de más tiempo de cómputo, esto debido a la cantidad de puntos de muestreo necesarios para evaluar la función.

Fórmulas de Integración Abierta.

Las fórmulas de Newton-Cotes abiertas se aplican para aquellos casos donde no se consideran o incluyen los extremos del intervalo de integración. Estas fórmulas aplican el mismo principio de las cerradas ya que la función es reemplazada por un polinomio de grado n para aproximar el cálculo del área bajo la curva.

Existen dos variaciones o características que distan de las fórmulas cerradas:

- Permiten aplicar la aproximación con una fórmula que considera un único nodo o punto de muestra, ya que no se toman en cuenta los extremos del intervalo.
- Al momento de realizar el proceso de cambio de variable de integración, en el nuevo polinomio no se consideran x_0 y x_m .

De acuerdo con esto, las fórmulas abiertas plantean un cambio de variable de integración (de x en función de t). Los puntos de muestra o subintervalos tendrán una misma amplitud h , dada por $\frac{b-a}{n+2}$, y los extremos a y b no forman parte de la fórmula, es decir, $x_0 = a + h$ y $x_m = b - h$. Por tanto, la variable t tiene su recorrido desde -1 hasta $n + 1$ como representa la **Ilustración 2-15**.

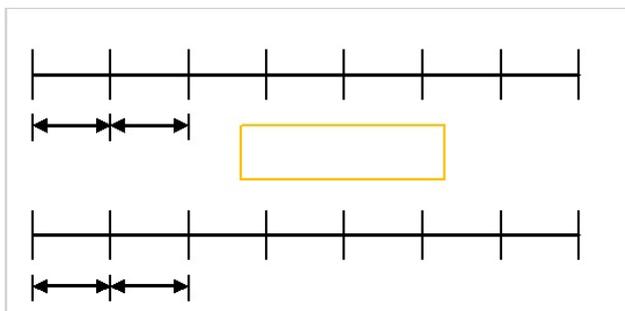


Ilustración 2-15: Esquema para el cambio de variable de x en función de t

Realizado por: Saransig A., 2024.

La Regla del Punto Medio es la fórmula abierta más conocida, esta toma en cuenta un solo punto de muestra para cada subintervalo y aproxima el área bajo la curva mediante el trazo de un rectángulo. Se resumen las fórmulas abiertas de Newton-Cotes en la **Tabla 2-1**, ya que no son un caso de estudio para el presente trabajo.

Tabla 2-1: Fórmulas abiertas de Newton-Cotes

Segmentos (n)	Puntos	Formulas	Error de truncamiento
2	1	$(b-a)f(x_1)$	$\frac{1}{3}h^3 f''(\xi)$
3	2	$(b-a)\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$	$\frac{3}{4}h^3 f''(\xi)$
4	3	$(b-a)\frac{2f(x_1)+f(x_2)+2f(x_3)}{3}$	$\frac{14}{45}h^5 f^{(4)}(\xi)$
5	4	$(b-a)\frac{11f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)+11f(x_4)}{24}$	$\frac{95}{144}h^5 f^{(4)}(\xi)$
6	5	$(b-a)\frac{11f(x_1)+14f(x_2)+26f(x_3)+14f(x_4)+11f(x_5)}{2}$	$\frac{41}{140}h^7 f^{(6)}(\xi)$

Realizado por: Chapra & Anales, 2023.

Fórmulas de Newton-Cotes para resolver integrales múltiples.

Las fórmulas presentadas en los apartados anteriores hacen referencia a integrales unidimensionales, es decir, que se considera una función con una sola variable independiente. Para aquellos casos donde la función representa un espacio de varias dimensiones, denotado como un área $R = [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]$, siendo f continua y $f : R \rightarrow \mathfrak{R}$. El cálculo de la integral de f en el espacio de R se expresa mediante

$$\int_R f dx = \int_{a_n}^{b_n} \left[\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} f(x) dx_1 \right] dx_2 \right) \dots dx_{n-1} \right] dx_n \quad (2.32)$$

La Regla Compuesta del Trapecio señala que esta integral se puede resolver de forma iterativa, por medio de los subintervalos cuyas fronteras de R establecidas $[a_j, b_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$ que tienen amplitudes respectivas $h_j = \frac{b_j - a_j}{m_j}$, $j = 1, 2, \dots, n$. Es decir, la resolución de la integral se desarrolla secuencialmente en integrales unidimensionales desde la parte interna hacia la externa. Primero:

$$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 = I_1 = \frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^{m_1} \left(f(x_{(1,i-1)}, x_2, \dots, x_n) + f(x_{(1,i)}, x_2, \dots, x_n) \right) \quad (2.33)$$

a continuación, para el intervalo comprendido entre $[a_2, b_2]$:

$$\int_{a_2}^{b_2} I_1 dx_2 = \frac{h_2}{2} \sum_{j=1}^{m_2} \left[\frac{h_1}{2} \sum_{i=1}^{m_1} \left(f(x_{(1,i-1)}, x_{(2,j-1)}, \dots, x_n) + f(x_{(1,i)}, x_{(2,j)}, \dots, x_n) \right) \right] \quad (2.34)$$

Estableciendo así el proceso repetitivo para aproximar la integral múltiple (2.32) con

$$\int_R f dx = \frac{h_1}{2} \frac{h_2}{2} \dots \frac{h_n}{2} \sum_{k=1}^{m_n} \dots \sum_{j=1}^{m_2} \sum_{i=1}^{m_1} \left(f(x_{(1,i-1)}, x_{(2,j-1)}, \dots, x_{(n,k-1)}) + f(x_{(1,i)}, x_{(2,j)}, \dots, x_{(n,k)}) \right) \quad (2.35)$$

La regla de Simpson 3/8 también se puede aplicar al caso de integrales múltiples de manera iterativa para cada una de sus dimensiones. Si se considera el caso de una integral doble, definida en un dominio R_2 que es rectangular, con límites $[a, b]$ y $[c, d]$ definidos para las variables independientes x e y respectivamente, la integral puede expresarse como

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \quad (2.36)$$

Al dividir los intervalos en subintervalos con iguales amplitudes (considerando que si este valor es mínimo el resultado será más aproximado, pero requerirá más tiempo de ejecución) y se aplica la regla de 3/8 a cada segmento de cada dimensión, se obtiene en función de x

$$\frac{3h_x}{8} [f(x_0, y_0) + 3f(x_1, y_0) + 3f(x_2, y_0) + f(x_3, y_0)] \quad (2.37)$$

y en función de y

$$\frac{3h_y}{8} [f(x_0, y_0) + 3f(x_0, y_1) + 3f(x_0, y_2) + f(x_0, y_3)] \quad (2.38)$$

Siendo h_x y h_y las distancias de los subintervalos en la dimensión correspondiente. Por último, se realiza la sumatoria de todos los resultados obtenidos en cada uno de los subintervalos para cada dimensión.

Se debe considerar que la aplicación de esta regla a integrales múltiples puede representar un costo computacional muy elevado por lo que puede ser recomendable el uso de otros métodos numéricos, como el de Monte Carlo.

2.2.3. Variables aleatorias.

Números Aleatorios.

Un número aleatorio se define como un valor establecido al azar, y en el contexto matemático, representa una característica importante para el desarrollo de aplicaciones, como son: la simulación

de problemas físicos, creación de muestras aleatorias, modelamiento de procesos para la resolución de problemas por métodos numéricos, entre otras más.

La generación de estos números comprende un reto matemático, al considerar que el principio de aleatorio indica que, cada uno de estos debe ser obtenido bajo la condición de “casualidad”, sin estar relacionado con otro valor, y sujetos a una probabilidad como es el caso de intervalos establecidos. Por tanto, se considera como números aleatorios a aquellos que son independientes y responden a una determinada distribución probabilística. (Sosa, 1997).

El Matemático J. Von Newman fue quien propuso primero la serie de valores aleatorios, donde cada número se obtenía al extraer los dígitos centrales elevados a la segunda potencia de la cantidad anterior. En la actualidad, existen programas computacionales que son capaces de generar conjuntos de valores que cumplen las dos condiciones de aleatoriedad. Sin embargo, no se conciben por completo como aleatorios, sino que se denominan pseudoaleatorios, debido a que los sistemas se consideran máquinas precisas y deterministas. (Illana, 2013).

Una variable X que tiene probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n de tomar un conjunto de valores x_1, x_2, \dots, x_n se conoce como variable aleatoria. Por ejemplo, el proceso de lanzar una moneda tiene por posibles resultados el conjunto *cara, cruz* y las probabilidades respectivas son 0.5, 0.5. Cuando la probabilidad es igual para todos los elementos se dice que la variable aleatoria X tiene distribución uniforme.

Estos conceptos fundamentan el método de Monte Carlo, donde el principal objetivo es encontrar el valor de una variable aleatoria cuya distribución de probabilidad está dada por una función $p(x)$, con un conjunto de valores distribuidos uniformemente en el intervalo $[0, 1)$ y generados por un sistema o programa computacional. (Piñeiro, 2007).

Variables Aleatorias Discretas.

Si se considera la variable aleatoria X que tiene como posibles resultados discretos x_1, x_2, \dots, x_n y probabilidades p_1, p_2, \dots, p_n . La variable X es discreta si, al seleccionar un número aleatorio γ con distribución uniforme en el intervalo $[0, 1)$, se obtiene como resultado x_i que cumple la condición

$$\sum_{j=0}^{i-1} p_j \leq \gamma < \sum_{j=0}^i p_j \quad (2.39)$$

- Todos los elementos: $p_j > 0$.

- $\sum_{j=1}^n p_j = 1$

La esperanza matemática de la variable aleatoria X indica el valor medio y se expresa como

$$E[X] = \sum_{j=1}^n x_j p_j \quad (2.40)$$

Mientras que, la varianza de una variable aleatoria X está dada por la expresión

$$D[X] = E[(X - E[X])^2] = E[(X)^2] - (E[X])^2 \quad (2.41)$$

que representa el cuadrado de la desviación que posee la variable de su valor medio o esperanza, es decir, el esparcimiento de los valores alrededor del valor medio. Por lo tanto, este valor siempre será positivo. (Sóbol, 1976).

Para considerar que dos variables aleatorias X y Z son independientes se debe cumplir dos condiciones:

$$E[X * Z] = E[X] * E[Z] \quad (2.42)$$

$$D[X + Z] = D[X] + D[Z] \quad (2.43)$$

Variables Aleatorias Continuas.

Se dice que una variable aleatoria X es continua cuando puede tomar cualquier valor x comprendido en un intervalo $[a, b]$ con probabilidad de resultado $p(x)$, denominada densidad de probabilidad o distribución de la variable aleatoria X . (Sóbol, 1976).

La probabilidad de que el resultado obtenido para X en un subintervalo (i, j) está dado por la integral

$$[i < X < j] = \int_i^j p(x) dx \quad (2.44)$$

Por lo tanto, la función de densidad $p(x)$ debe cumplir dos condiciones:

- $p(x) > 0$

- $\int_a^b p(x) dx = 1$

Para el cálculo de la esperanza matemática se emplea la integral

$$E[X] = \mu = \int_a^b xp(x)dx \quad (2.45)$$

Y, para determinar la varianza se puede recurrir a la ecuación 2.41 considerando 2.45

$$D[X] = \sigma^2 = \int_a^b x^2 p(x)dx - \left(\int_a^b xp(x)dx \right)^2 \quad (2.46)$$

Función de distribución.

Una Función de distribución es toda aquella función $F_X(x)$ que se relaciona a una variable aleatoria X , y representa la probabilidad para cada valor que toma dicha variable de forma acumulativa.

Si se considera un espacio de probabilidad (Ω, A, P) y una variable aleatoria $X : \Omega \rightarrow R$, entonces, las funciones de distribución de X se definen por $F_X(x) = Pr(\omega : X(\omega) \leq x) = P(X \leq x), x \in \mathfrak{R}$. (Robalino et al., 2023, págs 31-47).

Esta función de distribución, tanto de variables continuas como discretas, cumple con la propiedad de ser una función real, es decir, $F_X : \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ donde:

- F_X es monótona creciente.
- F_X es continua por la derecha.
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$

Para una función de distribución F_X existe una función de densidad real f tal que

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(u)du \quad (2.47)$$

Existen varios tipos de distribución, la principal y más conocida es la Distribución Uniforme, donde, la función de densidad de X en el intervalo (a, b) se cumple:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.48)$$

Se dice que la variable aleatoria X tiene Distribución Exponencial si $P(X > x) = \lambda e^{(-\lambda x)}$ se cumple para $x > 0$ y $\lambda > 0$. La función de distribución exponencial es:

$$F_X(x) = P(X \leq x) = 1 - P(X > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

La función de Distribución Normal establece que $-\infty < \mu < \infty$, $0 < \sigma$ y presenta una densidad:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad (2.50)$$

mientras que la función de distribución normal se establece como

$$F_X(x) = \int_{-\text{inf}}^x f(s) ds \quad (2.51)$$

Una variable aleatoria X que tiene una Distribución Binomial determinada en n pruebas con probabilidad p de éxito si y solo si:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, \dots, n \text{ y } 0 \leq p \leq 1 \quad (2.52)$$

Simulación de variables aleatorias.

Existen varios métodos para la generación de variables aleatorias, el más común se denomina transformación inversa que emplea números al azar estandarizados, para variables continuas, que se aplican a la función inversa de distribución, produciendo así una muestra. (Molina, 2013).

Definición 6: Teorema de inversión.

Sea X una variable aleatoria con función de distribución F_X , continua e invertible. Entonces, la variable aleatoria $U = F_X(X)$, transformada de la original mediante su propia función de distribución, tiene distribución $U(0, 1)$. Recíprocamente, si $U \in U(0, 1)$ entonces la variable $F_X^{-1}(U)$ tiene una función de distribución F la misma distribución que la de X .

Fuente: (Molina, 2013).

El procedimiento de inversión se basa en dos pasos:

1. Generar $U \sim U(0, 1)$.
2. Devolver $X = F^{-1}(U)$.

Debido a que $F_X(x)$, es una función de distribución de la variable aleatoria X , el valor numérico de esta se encuentra en el intervalo $[0, 1]$. Un número aleatorio u_i generado y distribuido uniformemente en $[0, 1]$; a través del método de transformación inversa, el valor se u_i de iguala con

$F_X(X)$ de modo que:

$$x_i = F_X^{-1}(u_i) \quad (2.53)$$

Por lo tanto, si se desea realizar la simulación de la variable aleatoria $X \sim U[a,b]$ que tiene una función de densidad de la forma:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.54)$$

y la función de distribución se expresa como:

$$F_X(x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dt = \frac{x-a}{b-a}, \quad a \leq x \leq b \quad (2.55)$$

mientras que su inversa:

$$F_X^{-1}(x) = (b-a)(x-a), \quad x \in (0,1) \quad (2.56)$$

se establece el generador:

$$x_m = (b-a)u_m + a, \quad u_m \in (0,1) \quad (2.57)$$

Para aplicar el método de inversión y crear una muestra de valores de X , es suficiente generar una muestra distribuidos en el intervalo $(0,1)$ y utilizar los criterios anteriores. (Oliva, 2017).

Otro método para generar variables aleatorias continuas o discretas se indica a continuación:

Definición 7: Generación de variables aleatorias continuas o discretas.

Sea U una variable aleatoria distribuida uniformemente en $(0,1)$, F una función de distribución arbitraria y X una variable aleatoria definida como:

$$X := \min y : F(y) \geq U$$

entonces la función de distribución de X es F . Fuente: (Sosa, 1997).

Si se presume que \hat{F} es la función de distribución de X , y se pretende demostrar que $F = \hat{F}$

Ley De Los Grandes Números.

La Ley de los Grandes Números sustenta el análisis desarrollado durante el uso de números aleatorios. Para comprender este principio, se considera X como una variable aleatoria con una media μ y varianza σ^2 , donde para cualquier valor de $k > 0$ se tiene que

$$P[|X - \mu| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2} \quad (2.58)$$

Esta inecuación indica que el valor de superficie de la distribución localizada fuera del intervalo $[\mu - k\sigma, \mu + k\sigma]$ se aproxima a $\frac{1}{k^2}$, marcando una idea de la concentración de una variable aleatoria sin considerar su distribución. **Fuente:** (Ross, 1999).

Un conjunto de variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_n independientes, con media μ y desviación estándar σ^2 , de acuerdo con la desigualdad de (2.58), presenta para cada $\varepsilon > 0$

$$P \left[\left| \frac{\sum x_i}{n} - \mu \right| \geq \frac{k\mu}{\sqrt{n}} \right] \leq \frac{1}{k^2} \quad (2.59)$$

Si en esta expresión se reemplaza $\frac{k\sigma}{\sqrt{n}}$ por ε , se tiene por resultado

$$P|\bar{x} - \mu| \geq \varepsilon = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \quad (2.60)$$

Para casos donde $n \rightarrow \infty$, la expresión se reescribe como

$$P|\bar{x} - \mu| \geq \varepsilon = 0 \quad (2.61)$$

De este modo, si la muestra aumenta en tamaño, la probabilidad de que x difiera de μ en más de ε tiende a ser igual a cero.

Surge entonces la “Ley Débil de los Grandes Números” debido al interés en la convergencia probabilística de

$$\frac{\sum f(U_i)}{n} \cong E(f(u)) \quad (2.62)$$

La expresión (2.78) representa un reto matemático, ya que se requiere garantizar que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum f(U_i)}{n} = E(f(U)) \quad (2.63)$$

Definición 8: Ley Débil de los Grandes Números.

Sean X_1, X_2, \dots, X_n una sucesión de variables aleatorias independientes, cada una con una media μ y varianza σ^2 , entonces

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = \varepsilon = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.64)$$

Fuente: (Barrera et al., 2006, págs 331-334).

Mediante el teorema denominado “Ley Fuerte de los Grandes Números” se soluciona el inconveniente al considerar que, si se toman en cuenta condiciones muy generales, el valor promedio de una muestra de variables aleatorias posee convergencia a la esperanza matemática de la variable estudiada con probabilidad de 1(100%).

Definición 9: Ley Fuerte de los Grandes Números.

Sean X_1, X_2, \dots, X_n una sucesión de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con $E[X] = \mu < \infty$, entonces

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right] = \mu \right) = 1 \quad (2.65)$$

Fuente: (Barrera et al., 2006, págs 331-334).

Justificando así el método de integración de Monte Carlo que emplea valores aleatorios para el cálculo de integrales múltiples basado en el principio de convergencia. (Barrera et al., 2006, págs 331-334).

2.2.4. Método de Monte Carlo.

Este método, de acuerdo con la investigación de Piñeiro (2007), surgió desde 1777, cuando el matemático Buffon pretendía calcular el número π en base a ensayos repetitivos. Sin embargo, Sosa (1997) argumenta en su escrito que, este método se desarrolló con el uso de los primeros equipos digitales de computación, cuando Ulam y Metrópolis pretendían crear armas nucleares en la Segunda Guerra Mundial.

El procedimiento Monte Carlo está basado en el uso de un conjunto de números aleatorios que poseen la capacidad de crear un recorrido estocástico en el espacio, considerando el modelo de una determinada función para resolver un problema matemático, como es el caso del cálculo de integrales.

En este apartado se presenta un estudio dedicado al método de Monte Carlo para la resolución de

integrales múltiples de la forma

$$\int_B F dx = \int \dots \int F(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_1 dx_2 \dots dx_d \quad (2.66)$$

donde F representa una función de valor real definida en \mathfrak{R}^d con $d \geq 1$, y B corresponde a una región en \mathfrak{R}^d . (López et al., 2002, págs 197-201).

La importancia del método de Monte Carlo radica en aquellos problemas que poseen mucha dificultad para resolverse por métodos analíticos o numéricos, pero que se relacionan con factores de aleatoriedad o modelos deterministas. En la actualidad, los ordenadores digitales facilitan la velocidad de cálculo con este método para la resolución de ciertos problemas como es el caso de la integración numérica. (González, 2008).

El ejemplo más común para comprender el uso del método de Monte Carlo, es el cálculo del valor numérico de π , donde se considera una circunferencia de radio $r = 1$ dentro de un cuadrado de lado 2 ($2r$). Se pretende calcular la relación que existe entre las áreas de ambas figuras, al considerar que el área de la circunferencia es πr^2 y del cuadrado es $(2r)^2$, para que el cociente establezca una relación para el valor de π .

Para conseguir esto, se seleccionan N puntos al azar en el espacio delimitado por el cuadrado, que permitan establecer un total de a muestras dentro del círculo y b muestras fuera del mismo. Al determinar el cociente de a/b se obtiene la aproximación al valor de π . Hay que considerar que este proceso no es tan sencillo si se realiza de forma manual, pero resulta muy sencillo cuando se lo implementa en un ordenador digital. (Madrid, 2013).

Formulación para Integrales en Regiones Acotadas.

La región B corresponde a la forma $B = R^d = C_1 C_2 \dots C_d$, donde C_i es un intervalo de \mathfrak{R} . Se puede entonces denominar a R^d como d-rectángulo. El valor numérico a la integral de F en el d-rectángulo se expresa como

$$I = \int_R^d F(x) dx \quad (2.67)$$

donde $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ y $dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_d)$.

Sea el vector aleatorio $X = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ con rango en \mathfrak{R}^d , donde las variables aleatorias X_1, X_2, \dots, X_d son independientes y cada una posee una distribución uniforme en el subconjunto C_i de \mathfrak{R} para $i = 1, 2, \dots, d$ respectivamente. Si X tiene una distribución uniforme en el d-rectángulo

R^d , posee entonces una función de densidad de la forma

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda(R^d)} & \text{si } x \in R^d \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases} \quad (2.68)$$

donde $\lambda(R^d)$ corresponde al volumen del d-rectángulo R^d .

Si $F : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}$, se dice que $F(X)$ es una variable aleatoria que cumple la propiedad

$$\mu_F := E[F(X)] = \int_{R^d} F(x) \frac{1}{\lambda(R^d)} dx \quad (2.69)$$

Esta expresión se puede reescribir de la forma

$$\mu_F * \lambda(R^d) = \int_{R^d} F(x) dx \cong I \quad (2.70)$$

Donde se indica que la integral de la función F en el d-rectángulo R^d puede aproximarse mediante el valor de la esperanza μ_F . (Suárez, 2012).

Si se consideran $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ como n vectores aleatorios independientes y con distribución uniforme en R^d , expresada mediante $X^{(i)} = X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}, i = 1, 2, \dots, n$. Al suponer que para cada $j = 1, 2, \dots, d$ fija, las variables aleatorias $X_j^{(i)}, i = 1, 2, \dots, n$ tienen una distribución uniforme en $C_j \subset \mathfrak{R}$. Se establece entonces que $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ corresponde a una muestra aleatoria del vector X distribuido uniformemente en R^d . (Sosa, 1997)

Bajo estas condiciones, la Ley Fuerte de los Grandes Números indica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(X^{(i)}) = \mu_F \quad (2.71)$$

Mientras que la Ley Débil de los Grandes Números establece la condición

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(X^{(i)}) - \mu_F \right| < \varepsilon \right] = 1 \quad (2.72)$$

para cualquier valor de $\varepsilon > 0$. Se deduce entonces que, el estimador para la esperanza μ_F dado por

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(X^{(i)}) \quad (2.73)$$

también lo es para la integral

$$I_n := \frac{\lambda(R^d)}{n} \sum_{i=1}^n F(X^{(i)}) \quad (2.74)$$

Este resultado no posee un sesgo y puede asegurar que $I = E[I_n]$ al aplicar las propiedades

$$[I_n] = E \left[\frac{\lambda(R^d)}{n} \sum_{i=1}^n F(X^{(i)}) \right] = \frac{\lambda(R^d)}{n} \sum_{i=1}^n E[F(X^{(i)})] \quad (2.75)$$

Como cada vector $X^{(i)}$ posee una distribución uniforme en R^d , la ecuación anterior se reduce a

$$E[I_n] = \frac{\lambda(R^d)}{n} \sum_{i=1}^n \mu_F = \lambda(R^d) \quad (2.76)$$

Estableciendo así que una muestra aleatoria $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ con distribución uniforme en d-rectángulo R^d , cumple con dos condiciones:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = I$
- $E[I_n] = I$

Cabe mencionar que el elemento I_n es una variable aleatoria.

Si se extiende este concepto a regiones acotadas de manera arbitraria $B \subset \mathfrak{R}^d$:

$$I = \int_B F(x) dx = \int_{R^d} F(x) I_B(x) dx \quad (2.77)$$

El resultado indica que la integral desarrollada en una región B puede transformarse en una integral sobre d-rectángulos. (Sosa, 1997)

Integración en Regiones Acotadas

Para el caso $d = 1$ con la integral $I = \int_a^b F(x) dx$, $F: \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$, se establece $\lambda(R^d) = \lambda(R^1) = b - a$ ya que corresponde a la longitud del intervalo de integración, con las variables aleatorias $X^{(i)}$ uniformemente distribuidas en (a, b) .

$$I_n := \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n F(X^{(i)}) \quad (2.78)$$

Si se adquiere una observación de las variables $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ se genera un conjunto de n números aleatorios x_1, x_2, \dots, x_n en (a, b) . (Sosa, 1997)

Los pasos para llevar a cabo este proceso son:

1. Generar una sucesión de n números aleatorios $u_{i=1}^n$.
2. Determinar $x^{(i)} = (b-a)u_i + a$ con $i = 1, 2, \dots, n$.
3. Calcular $F(x^{(i)})$ para $i = 1, 2, \dots, n$.
4. Utilizar la ecuación (2.78) para estimar I_n .

Al aplicar este algoritmo en bucles repetitivos se puede aproximar el resultado en aquellos casos cuando $d \geq 2$ y existen regiones rectangulares para la integral

$$I = \int_{C_1} \int_{C_2} \dots \int_{C_d} F(x_1, x_2, \dots, x_d) dx_1 dx_2 \dots dx_d \quad (2.79)$$

donde $C_i = (a_i, b_i)$, $i = 1, 2, \dots, d$.

Los n vectores aleatorios $\lambda(R^d) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_d - a_d)$ y $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ son independientes y se encuentran distribuidos uniformemente en R^d . Por lo tanto, el enfoque del problema radica en la obtención de una observación de la muestra $X^{(n)}$, donde $X^{(i)} = (X_1^{(i)}, X_2^{(i)}, \dots, X_d^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Se requiere entonces generar n números aleatorios en (a_j, b_j) , $j = 1, 2, \dots, d$ para representar la j -ésima componente para cada vector.

$$\text{Para } j = 1: \quad X_1^{(1)}, X_1^{(2)}, \dots, X_1^{(n)} \sim U(a_1, b_1) \quad (2.80)$$

$$j = 2: \quad X_2^{(1)}, X_2^{(2)}, \dots, X_2^{(n)} \sim U(a_2, b_2) \quad (2.81)$$

$$\vdots \quad \vdots \quad (2.82)$$

$$j = d: \quad X_d^{(1)}, X_d^{(2)}, \dots, X_d^{(n)} \sim U(a_d, b_d) \quad (2.83)$$

La observación de la muestra está dada por las columnas del arreglo en (2.83) y para escoger los n números aleatorios $u_{i=1}^n$ en cada C_j con $j = 1, 2, \dots, d$ se emplea la relación

$$x_j^{(i)} = (b_j - a_j)u_i + a_j, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.84)$$

Los pasos para llevar a cabo la estimación de la integral $\int_{R^d} F(X) dx$ son:

1. Generar una sucesión de n números aleatorios $u_{i=1}^n$ para cada $j = 1, 2, \dots, d$.
2. Calcular $x_j^{(i)} = (b_j - a_j)u_i + a_j$ para $j = 1, 2, \dots, d$.
3. Establecer $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_d^{(i)})$, $i = 1, 2, \dots, n$.

4. Calcular $F(x^{(i)})$ para $i = 1, 2, \dots, n$.
5. Utilizar la ecuación (2.78) para estimar I_n .

Un parámetro importante al emplear el método de Monte Carlo para integración numérica es el error absoluto que se expresa como la diferencia entre la solución exacta y la aproximada, para denotar la precisión. Sin embargo, este no puede calcularse directamente en la mayoría de los casos, debido a que no se puede obtener una solución exacta, por lo que, se establece una cota de error que pueda satisfacer:

$$Err := |I_n - I| < \varepsilon \quad (2.85)$$

Por medio de interpretaciones probabilísticas de esta expresión del error se puede obtener más información, como es el caso de estudio del error cuadrático medio $E[I_n - I]^2$. Se pretende calcular $\varepsilon > 0$ de modo que

$$(P[|I_n - I| < \varepsilon] = 1 - \alpha, \quad \alpha \in (0, 1)) \quad (2.86)$$

La expresión $(1 - \alpha)$ se denomina nivel de confianza y puede interpretarse como el porcentaje de eventos donde se cumple la expresión (2.85). (Sosa, 1997).

Se considera I_n como el estimador de I , y σ_F^2 como la varianza de la variable aleatoria $F(X)$, entonces:

$$E[I_n - I]^2 = \frac{[\lambda(R^d)]^2}{n} \sigma_F^2, \quad n \in N \quad (2.87)$$

El error promedio $E|I_n - I|$ corresponde al orden $n^{-\frac{1}{2}}$ y la varianza del estimador I_n o de la variable aleatoria $F(X)$ es de gran influencia para el cálculo del error, cuando se desea conocer la precisión del resultado para una muestra de tamaño establecido (n).

De acuerdo con estas definiciones, si se pretende reducir el error fijando un nivel de confianza, se puede incrementar el valor de n , o reducir la varianza de I_n que es equivalente a σ_F^2 . Si el método converge en orden $n^{-1/2}$ genera consecuencias, por ejemplo, si el valor de n se incrementa por un factor de 100, la precisión sólo aumenta con un factor de 10. Para reducir el error es conveniente reemplazar el estimador original por uno de equivalencia con menor varianza, que se conoce como método de Reducción de Varianza. (Sosa, 1997).

Se considera la expresión conocida $J = \int_{R^d} G(x)dx < \infty$, donde $G : \mathfrak{R}^d \rightarrow \mathfrak{R}$, $\mu_{F-G} = E[F(X) - G(X)]$ y X es un vector aleatorio distribuido uniformemente en R^d , siendo:

$$I = J + \int_{R^d} [F(X) - G(X)] dx = J + \lambda(R^d) \mu_{F-G} \quad (2.88)$$

una expresión que sugiere como estimador de I a

$$I'_n = J + \frac{\lambda(R^d)}{n} \sum_{i=1}^n [F(X^{(i)}) - G(X^{(i)})] \quad (2.89)$$

como reemplazo de I_n , donde los vectores aleatorios $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}$ son independientes y distribuidos uniformemente en R^d . Por lo tanto, I'_n es un estimador insesgado de I .

Se considera entonces que, el error de estimación es aquel que se da durante el cálculo de μ_{F-G} y al disminuir la varianza de la variable aleatoria $F(X) - G(X)$ se resuelve la problemática

$$\text{Var}[F(X) - G(X)] = E[F(X) - G(X)]^2 - E[F(X) - G(X)]^2 \leq E[F(X) - G(X)]^2 \quad (2.90)$$

al seleccionar la función G tal que $|F(X) - G(X)| < \delta$, con $\delta > 0$, de modo que $\text{Var}[F(X) - G(X)] < \delta^2$. Esto representa la posibilidad de reducción de varianza al seleccionar una función G muy cercana a la función F .

Método de Monte Carlo para resolver integrales múltiples.

El método de Monte Carlo permite la resolución de integrales múltiples al aplicar el muestreo aleatorio de puntos dentro del dominio de integración. Para obtener el valor final de la integral se promedia los valores adquiridos al evaluar la función en los puntos muestreados y se multiplica por el volumen del dominio de integración. (López, et al., 2002, págs 197-201).

Se considera entonces la integral unidimensional dada por

$$I = \int_b^a F(x) dx \quad (2.91)$$

donde $F(x)$ es una función acotada en $0 < F(x) < M$ para todo $x \in [a, b]$.

Por lo tanto, esta integral se encuentra descrita en el rectángulo R de dimensiones $[a, b][0, M]$ con un volumen que puede estimarse al considerar una muestra de n elementos uniformemente distribuidos en el mismo. Un experimento aleatorio con dos posibles resultados 0, 1 y el vector aleatorio $X = (X_1, Y_1)$ con distribución uniforme en R , se define entonces la variable aleatoria:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } Y \geq F(x) \\ 0 & \text{si } Y < F(x) \end{cases} \quad (2.92)$$

La probabilidad $P(X_0 = 1)$ esta dada por $\frac{I}{M(b-a)}$ mientras que $P(X_0) = 1 - \frac{1}{M(b-a)}$. Si se toman N ensayos independientes del experimento tipo Bernoulli (se encuentra o no dentro del conjunto), y se define la variable aleatoria X_n como la cantidad de veces que se asigna a X_0 el valor de 1 en los n intentos, entonces, la integral I puede aproximarse mediante la ecuación:

$$I \cong M(b-a) \frac{X_n}{n} \quad (2.93)$$

Al generalizar este principio para el cálculo aproximado de integrales múltiples, se obtiene que

$$I = \int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} F(\hat{x}_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n \quad (2.94)$$

donde $\hat{x}_n \in [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_n, b_n]$. (Montes, 2007).

Si se condiciona que el integrando $F(\hat{x}_n)$, es una función acotada con la condición

$$0 \leq F(\hat{x}) \leq M \quad (2.95)$$

Al denotar el área acotada $S_1 = (\hat{x}_{n+1}) \in [a_1, b_1][a_2, b_2] \dots [a_n, b_n][0, M]$ y un vector aleatorio $\bar{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n, X_{n+1})$ con distribución uniforme en S_1 , donde se asocia X_i a cada intervalo $[a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n$ y X_{n+1} a $[0, M]$, se obtiene que el volumen dimensional v de S_1 está dado por

$$v = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)(M) \quad (2.96)$$

La variable aleatoria X se define como:

$$X = \begin{cases} 1 & \text{si } X_{n+1} \leq F(X_1, X_2, \dots, X_n) \\ 0 & \text{si } X_{n+1} > F(X_1, X_2, \dots, X_n) \end{cases} \quad (2.97)$$

que tiene una distribución de tipo Bernoulli:

$$f_x = \begin{cases} \frac{I}{v} & \text{si } X = 1 \\ 1 - \frac{I}{v} & \text{si } X = 0 \end{cases} \quad (2.98)$$

Se conoce que la esperanza de la variable aleatoria X es

$$\mu = E[X] = \frac{I}{v} \quad (2.99)$$

despejando I

$$I = v * \mu \quad (2.100)$$

Para el cálculo de la esperanza se puede recurrir a la Ley de los Grandes Números, donde

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\left| \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right) = 0, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (2.101)$$

y

$$P \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} = \mu \right) = 1 \quad (2.102)$$

Por lo tanto, un valor aproximado para I estaría dado por:

$$I \cong \hat{I} = v * \left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \right) = v * \hat{X}_N \quad (2.103)$$

es decir:

$$\int_{a_n}^{b_n} \int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \int_{a_1}^{b_1} F(\hat{x}_n) dx_1 \dots dx_{n-1} dx_n \cong v * \hat{X}_N \quad (2.104)$$

La varianza de \hat{I} respecto de la integral real I , está dado por la expresión

$$D[\hat{I}] = \sigma^2 = \frac{I(v-I)}{N} \quad (2.105)$$

Se puede decir entonces que si se incrementa el número de ensayos N , la varianza disminuye.

(Zacarías, 2006).

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

Enfoque de Investigación

El enfoque de esta investigación se centra en comparar el rendimiento de la formulas de Newton-Cotes y el método Monte Carlo en el calculo de integrales múltiples definidas con la finalidad de analizar su precision y computacional en diferentes contextos y varias variables.

Tipo de la investigación

En esta investigación, se lleva acabo un estudio de tipo comparativo teórico y aplicativo, que tiene como objetivo principal resaltar el rendimiento de dos enfoques diferentes en el calculo de integrales múltiples definidas: las formulas de Newton-Cotes y el método Monte Carlo. Este tipo de investigación no ayuda analizar las fortalezas y limitaciones de cada método, así como identificar sus aplicaciones mas adecuadas en diferente contexto y condiciones.

A través de la recopilación, análisis y comparación de datos obtenidos mediante la aplicación de los métodos, se busca difundir conclusiones significativas que aporte al conocimiento en el campo del análisis numérico en la integración numérica y su aplicación en problemas matemáticos y científicos. La investigación comparativa se apoya en la necesidad de evaluar y seleccionar la estrategia de integración más apropiada según el problema a resolver de cada integral lo que implica un análisis detallado de las ventajas y desventajas de cada método.

Diseño de la investigación

El diseño de la investigación se estructura en dos etapas: la implementación de las fórmulas de Newton-Cotes, como la regla del trapecio y la regla de Simpson, para el cálculo de integrales múltiples mediante la discretización del dominio de integración; y la aplicación del método Monte

Carlo para estimar el valor de las mismas integrales a través de la generación de números aleatorios y el cálculo de promedios ponderados.

Técnicas e instrumentos de investigación empleadas

Las técnicas utilizadas incluyen análisis numérico y computacional para la implementación de los algoritmos correspondientes a cada método, así como la evaluación del error de aproximación, los tiempos de cálculo y los recursos computacionales requeridos para cada enfoque.

Los instrumentos de investigación empleados serán software especializado como Octave o Mathematica para la implementación y ejecución de los algoritmos de integración numérica, permitiendo una comparación detallada y rigurosa del desempeño de las fórmulas de Newton-Cotes y el método Monte Carlo en la resolución de integrales múltiples.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados.

Para desarrollar la comparación entre los métodos de integración estudiados en el presente trabajo, se plantean ejercicios que se resolverán aplicando las fórmulas de Newton-Cotes y el método de Monte Carlo implementados en el software Octave para establecer diferencias y semejanzas.

Caso 1: Se considera la integral múltiple de 2 variables dada por:

$$\int_1^4 \int_0^2 (6x^2y - 2x) dy dx = 222 \quad (4.106)$$

Se obtiene como resultados:

Tabla 4-2: Resultados obtenidos para el Caso 1.

Puntos de muestra (n)	Método del Trapecio	Método de Simpson 3/8	Método de Monte Carlo
10	222,5400	222,0000	179,2546
100	222,0054	222,0000	223,6961
1000	222,0001	222,0000	225,7271
10000	222,0000	222,0000	221,8694

Realizado por: Saransig A., 2024.

Los datos presentados en la **Tabla 4-2** muestran que el método de la Regla de Simpson 3/8 proporciona una aproximación al valor real con un error nulo, aún con el uso de 10 puntos de muestra. Considerando los resultados adquiridos mediante el método del trapecio, se puede observar que, el error se reduce cuando la cantidad de puntos incrementa, hasta conseguir que el error sea cero. Por otro lado, el método de Monte Carlo aplicado a este caso de dos variables no alcanzó una reducción del error como las fórmulas de Newton Cotes, sin embargo, vale la pena

mencionar que el error absoluto se encontró en un rango de 42,7454 y 0,1306 que representan el 19,25 % y 0,059 % respectivamente.

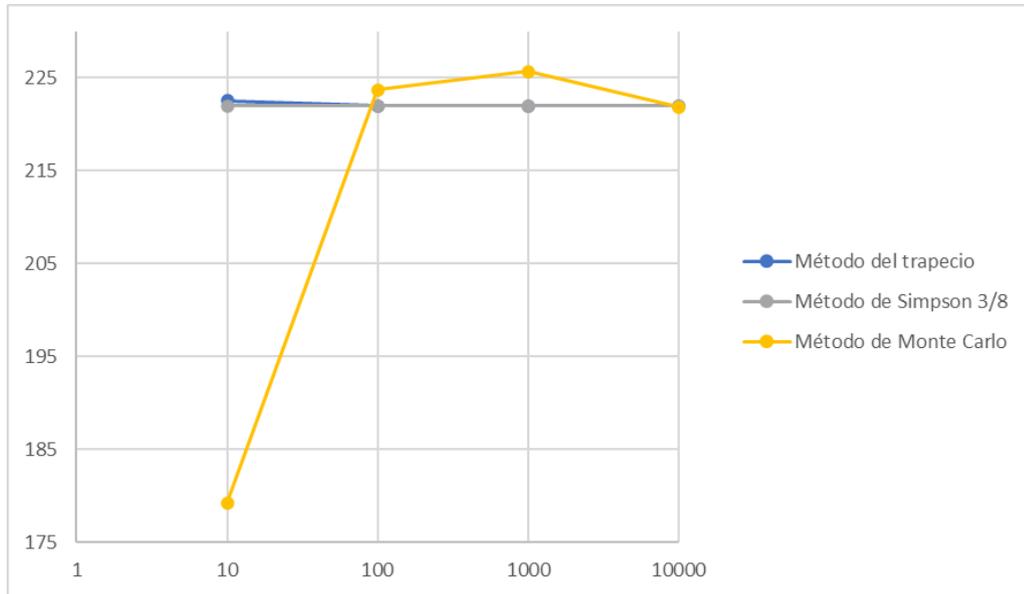


Ilustración 4-16: Aproximaciones obtenidas para el Caso 1.

Realizado por: Saransig A., 2024.

El gráfico mostrado en la **Ilustración 4-16** ilustra de mejor manera la evolución que presenta el método de Monte Carlo para alcanzar el valor real cuando la cantidad de puntos de muestra incrementa con un factor de multiplicidad de 10. Se puede apreciar y deducir de este gráfico que las fórmulas de Newton Cotes son las más efectivas para resolver este caso de ejemplo.

Caso 2: Se considera la integral múltiple de 2 variables dada por:

$$\int_0^4 \int_4^5 (5xy - 6x^2) dy dx = 52 \quad (4.107)$$

Se obtiene como resultados:

Tabla 4-3: Resultados obtenidos para el Caso 2.

Puntos de muestra (n)	Método del Trapecio	Método de Simpson 3/8	Método de Monte Carlo
10	51,3600	52,0000	53,4126
100	51,9936	52,0000	52,1854
1000	51,9999	52,0000	51,3238
10000	52,0000	52,0000	52,0333

Realizado por: Saransig A., 2024.

Los resultados tabulados en la **Tabla 4-3** demuestran, al igual que en el caso anterior, que la regla de Simpson 3/8 brinda resultados muy acertados con errores de cero. El método del Trapecio, para este caso, proporciona un error de 1,23% cuando se consideran sólo 10 puntos de muestra, a diferencia del caso anterior donde el error era inferior al 0,5%, pero permite reducir el error a 0% cuando se utiliza una cantidad de 10 mil nodos muestrales. El método de Monte Carlo logra reducir el error cerca de 0,064% cuando se emplean 10 mil muestras, sin embargo, no genera un margen de error tan grande como en el caso anterior, considerando que el máximo representa el 2,71% del valor real.

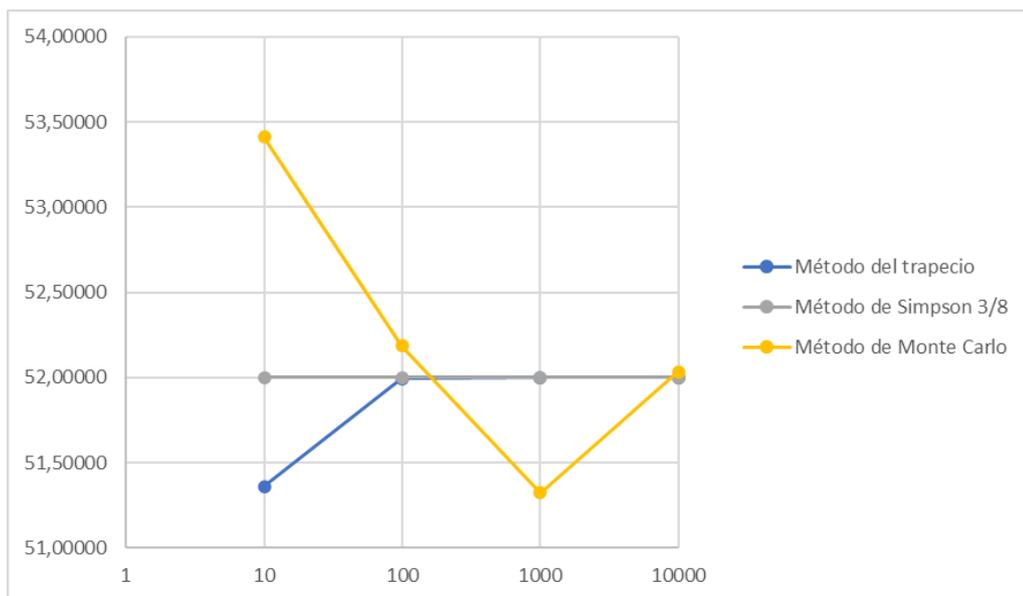


Ilustración 4-17: Aproximaciones obtenidas para el Caso 2.

Realizado por: Saransig A., 2024.

A través de la **Ilustración 4-17** se puede apreciar que los valores arrojados por el método de Monte Carlo generan una ventana de variabilidad de 2,5 puntos que puede considerarse aceptable para casos donde no se requiere de grandes precisiones y se aceptan errores de hasta 3%. Por otro lado, la regla del trapecio, a diferencia del método de Monte Carlo, no arroja valores por encima del valor real, sino que, su resultado se va perfeccionando cuando se reduce la distancia entre los puntos evaluados.

Caso 3: Se considera la integral múltiple de 2 variables dada por:

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx = 13.5 \quad (4.108)$$

Se obtiene como resultados:

Tabla 4-4: Resultados obtenidos para el Caso 3.

Puntos de muestra (n)	Método del Trapecio	Método de Simpson 3/8	Método de Monte Carlo
10	13,5675	13,5000	11,4141
100	13,5007	13,5000	13,3834
1000	13,5000	13,5000	13,6098
10000	13,5000	13,5000	13,5276

Realizado por: Saransig A., 2024.

La **Tabla 4-4** permite deducir que, en este caso donde se considera un polinomio de multiplicación sin adición ni sustracción, el método del trapecio puede proporcionar un resultado con error nulo con tan sólo 1000 muestras. Se reafirma la conclusión respecto de que la regla de Simpson 3/8 aplicada a integrales múltiples de dos variables es el método que brinda mejores resultados con relación a los errores, y que el método de Monte Carlo no brinda resultados con tanta exactitud como las fórmulas de Newton Cotes, ya que, para este ejercicio, el margen de error se encuentra entre 15,45% y 0,2%.

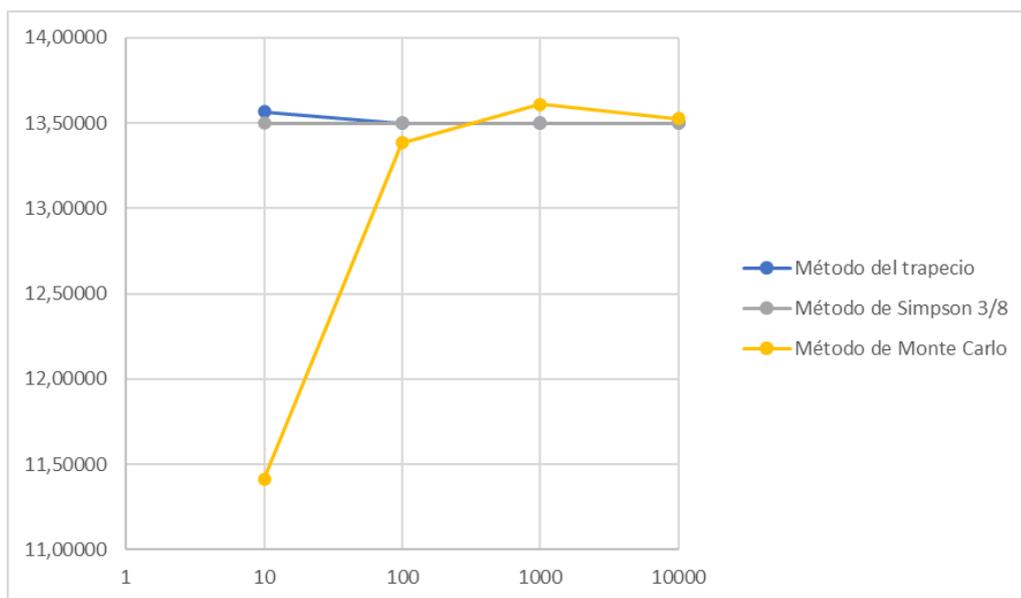


Ilustración 4-18: Aproximaciones obtenidas para el Caso 3.

Realizado por: Saransig A., 2024.

La **Ilustración 4-18** marca la gran diferencia entre las fórmulas de Newton Cotes y el método de Monte Carlo, que al igual que en los dos casos anteriores, las reglas del Trapecio y Simpson 3/8 se acercan más al resultado empleando la misma cantidad de puntos muestrales que en Monte Carlo. Se debe recordar que este último emplea valores aleatorios para evaluar la función y la mayoría de los autores lo recomienda para casos de extrema complejidad donde los métodos tradicionales no son capaces de brindar una solución.

Los casos de estudio que se consideran a continuación presentan sólo una comparativa entre la regla del trapecio y el método de Monte Carlo, debido a que no el tiempo de ejecución de las formulaciones de Simpson es elevada, por tanto, este factor no representa una viabilidad para su uso en el ámbito estudiantil.

Caso 4: Se considera la integral múltiple de 3 variables dada por:

$$\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dz dy dx = 8 \quad (4.109)$$

Se obtiene como resultados:

Tabla 4-5: Resultados obtenidos para el Caso 4.

Puntos de muestra (n)	Método del Trapecio	Puntos de muestra (n)	Método de Monte Carlo
10	8,0600	100	7,5922
100	8,0006	1000	7,7773
1000	8,0000	10000	7,9848
10000	8,0000	100000	8,0024

Realizado por: Saransig A., 2024.

Los datos presentados en la **Tabla 4-5** señalan que el método del trapecio reduce el error absoluto de 0,06 a 0 cuando se consideran mil puntos de muestra. El método de Monte Carlo, a diferencia de los casos con dos variables, reduce su margen de error alcanzando valores absolutos entre 0,408 y 0,0024 que representan 5,1 % y 0,03 % respectivamente, además que el error disminuye al aumentar la cantidad de puntos de muestra.

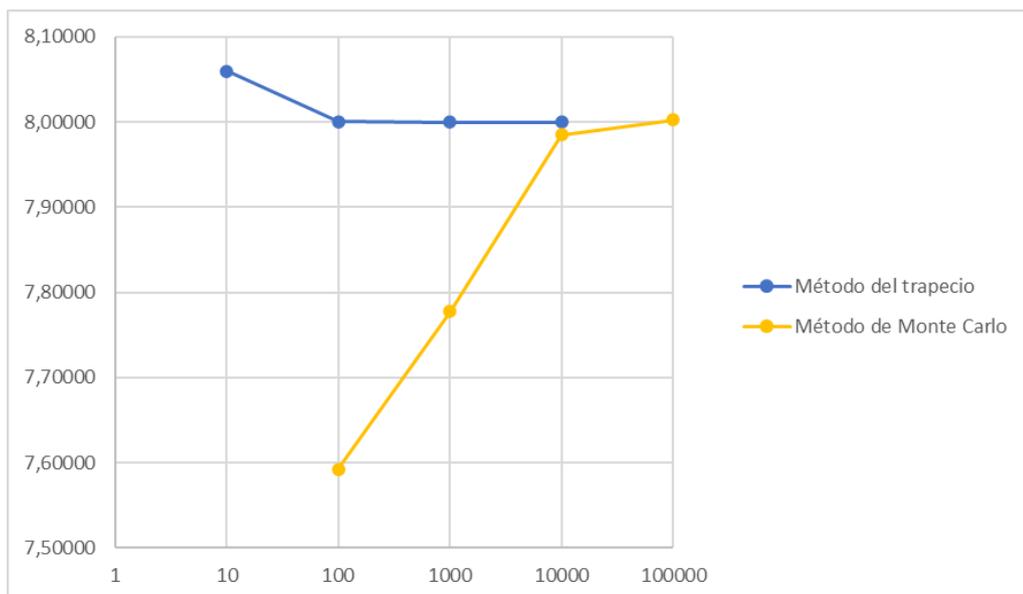


Ilustración 4-19: Aproximaciones obtenidas para el Caso 4.

Realizado por: Saransig A., 2024.

La **Ilustración 4-19** permite observar la diferencia entre los dos métodos utilizados, una de ellas es que el Método de monte Carlo sobrepasa el valor real cuando se utilizan las 100 mil muestras, mientras que, la regla del trapecio inicia con un valor superior al real y va reduciendo el error hasta alcanzar el resultado esperado.

Caso 5: Se considera la integral múltiple de 3 variables dada por:

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^1 \int_0^{\pi} (xy * \text{sen}(yz)) dz dy dx = 0.1371 \quad (4.110)$$

Se obtiene como resultados:

Tabla 4-6: Resultados obtenidos para el Caso 5.

Puntos de muestra (n)	Método del Trapecio	Puntos de muestra (n)	Método de Monte Carlo
10	0,1365	100	0,1447
100	0,1371	1000	0,1360
1000	0,1371	10000	0,1363
10000	0,1371	100000	0,1370

Realizado por: Saransig A., 2024.

Los datos presentados en la **Tabla 4-6** indican que en este ejercicio el método del trapecio proporciona un resultado óptimo con tan sólo 100 muestras y el error absoluto obtenido con 10 muestras corresponde a 0,0006 que representa 0,43 % del valor real. Mientras tanto, el método de Monte Carlo permite reducir el error absoluto de 0,0076 a 0,0001 que representa respectivamente el 5,1 % y 0,03 % del resultado exacto, a diferencia de los casos con sólo dos variables donde los errores son mucho más grandes.

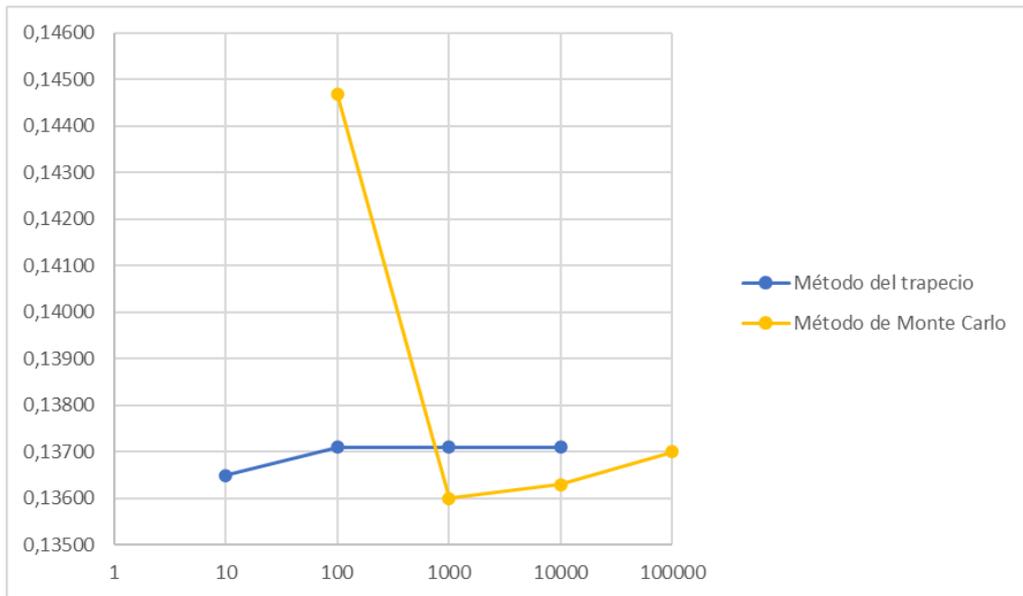


Ilustración 4-20: Aproximación de una integral empleando la regla del trapecio.

Realizado por: Saransig A., 2024.

En la **Ilustración 4-20** se observa que el método de Monte Carlo reduce drásticamente el error cuando se incrementa el número de puntos con un factor de 10, permitiendo evidenciar que es un método muy útil para aquellas ecuaciones que no puedan ser resueltas mediante las fórmulas de Newton Cotes y se permita un margen de error hasta 6 %.

Caso 6: Se considera la integral múltiple de 3 variables dada por:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (xy + z) dz dy dx = 0.75 \quad (4.111)$$

Se obtiene como resultados:

Tabla 4-7: Resultados obtenidos para el Caso 6.

Puntos de muestra (n)	Método del Trapecio	Puntos de muestra (n)	Método de Monte Carlo
10	0,7500	100	0,7367
100	0,7500	1000	0,7534
1000	0,7500	10000	0,7491
10000	0,7500	100000	0,7504

Realizado por: Saransig A., 2024.

En la **Tabla 4-7** se corrobora para este último caso de estudio que el método del Trapecio es muy superior al de Monte Carlo con relación al error obtenido o proporcionado, sin embargo, este último comprende una herramienta muy aplicable para casos de integrales con tres dimensiones. Se observa que los valores aproximados mediante el método de Monte Carlo presentan un error absoluto que se encuentra entre 0,0133 y 0,0004 y representan 1,73 % y 0,05 % del valor real respectivamente.

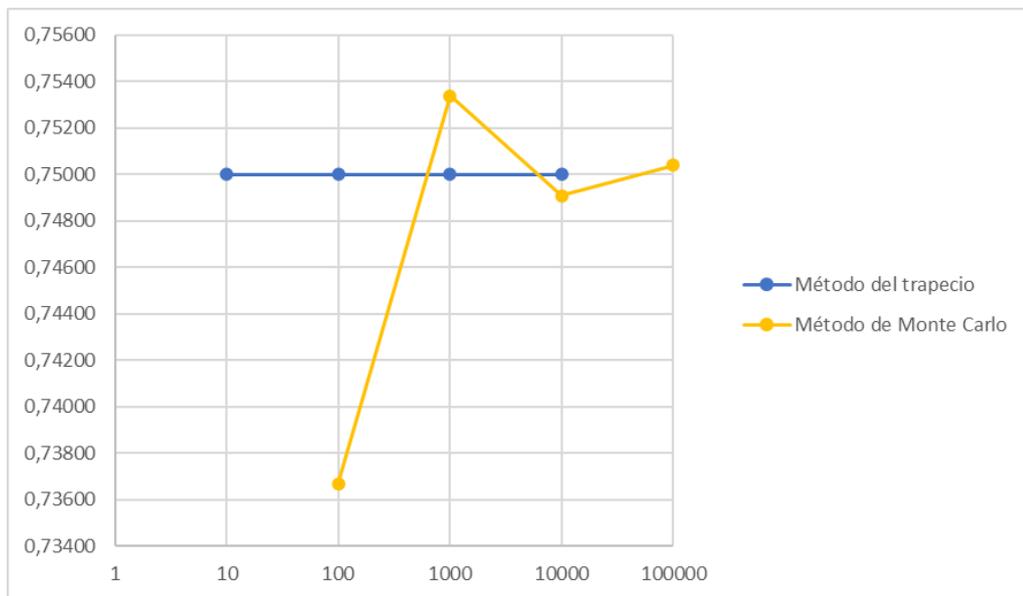


Ilustración 4-21: Aproximaciones obtenidas para el Caso 6.

Realizado por: Saransig A., 2024.

En la **Ilustración 4-21** se observa que los valores proporcionados con el método de Monte Carlo

fluctúan alrededor del valor real, pero, tienden a alcanzarlo cuando se incrementa la cantidad de muestras.

Caso 7: Se considera la integral múltiple de 4 variables dada por:

$$\int_0^2 \int_0^3 \int_0^1 \int_0^2 x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 72.00 \quad (4.112)$$

Se obtiene como resultados:

Tabla 4-8: Resultados obtenidos para el Caso 7.

Puntos de muestra (n)	Método del Trapecio	Puntos de muestra (n)	Método de Monte Carlo
10	72,3600	1000	73,1410
100	72,0036	10000	71,7349
200	72,0009	100000	72,0518

Realizado por: Saransig A., 2024.

Los resultados tabulados en la **Tabla 4-8** muestran que con el método del trapecio el error absoluto se reduce de 0,36 a 0,0009 cuando se incrementa el número de puntos de 10 a 200 respectivamente, sin embargo, con el método de Monte Carlo, el error absoluto obtenido para la integral de 4 variables se encuentra en un rango de 1,141 y 0,0518 que representa el 1,58% y 0,072% del valor real. Estos últimos porcentajes son aceptables para muchos casos, por lo tanto, se puede decir que el uso de estos dos métodos para integrales de 4 variables es viable y tolerable.

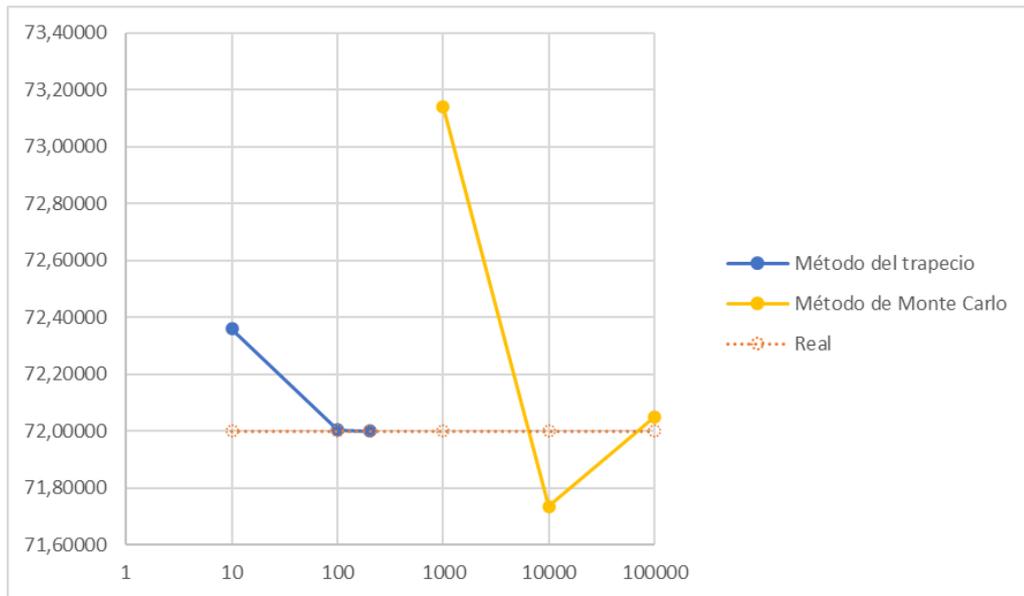


Ilustración 4-22: Aproximaciones obtenidas para el Caso 7.

Realizado por: Saransig A., 2024.

Se puede apreciar en la **Ilustración 4-22** que la regla del trapecio brinda una solución más aproximada que el método de Monte Carlo para el caso de estudio de la integral de 4 variables. Sin embargo, este último método representa una opción viable cuando se requiere evaluar más de 500 puntos, esto debido a que, la regla del trapecio aumenta el tiempo de ejecución cuando se sobrepasan los 100 puntos.

El último caso de estudio que se presenta a continuación corresponde a una integral de 8 variables que se aproxima únicamente mediante el método de Monte Carlo ya que las fórmulas de Newton Cotes requieren de un tiempo de procesamiento elevado debido a la cantidad de iteraciones cuando se consideran casos de integrales múltiples con 5 y 6 variables. Este inconveniente se pudo apreciar también cuando se incrementa a más de 200 puntos de muestra para integrales múltiples de 4 variables, por lo tanto, no es posible con los recursos computacionales de este proyecto, aproximar integrales de 5 o más variables mediante el código de programación implementado en Octave.

Caso 8: Se considera la integral múltiple de 8 variables dada por:

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 x_1 * x_2 * x_3 * x_4 * x_5 * x_6 * x_7 * x_8 = 0.0039 \quad (4.113)$$

Se obtiene como resultados:

Tabla 4-9: Resultados obtenidos para el Caso 8.

Puntos de muestra (n)	Método de Monte Carlo
10	0.0020
100	0.0049
1000	0.0041
10000	0.0039
100000	0.0039
1000000	0.0039

Realizado por: Saransig A., 2024.

La **Tabla 4-9** muestra los resultados obtenidos para la integral múltiple de 8 variables aproximada mediante el método de Monte Carlo donde se aprecia que al incrementar la cantidad de muestras el resultado tiende a ser más cercano al valor real. El error absoluto obtenido con sólo 10 muestras es de 0,0019, sin embargo, este representa un error de 48,72 % que es muy elevado; cuando se aumenta la muestra por un factor de 10 este error absoluto se reduce a 0,001 que representa el 25,64 %, mientras que al considerar las mil muestras se consigue que el error porcentual se reduzca a 5,13 %. Por otro lado, cuando se consideran muestras superiores a los diez mil puntos, el error tiende a ser cero y se consigue un resultado muy aceptable.

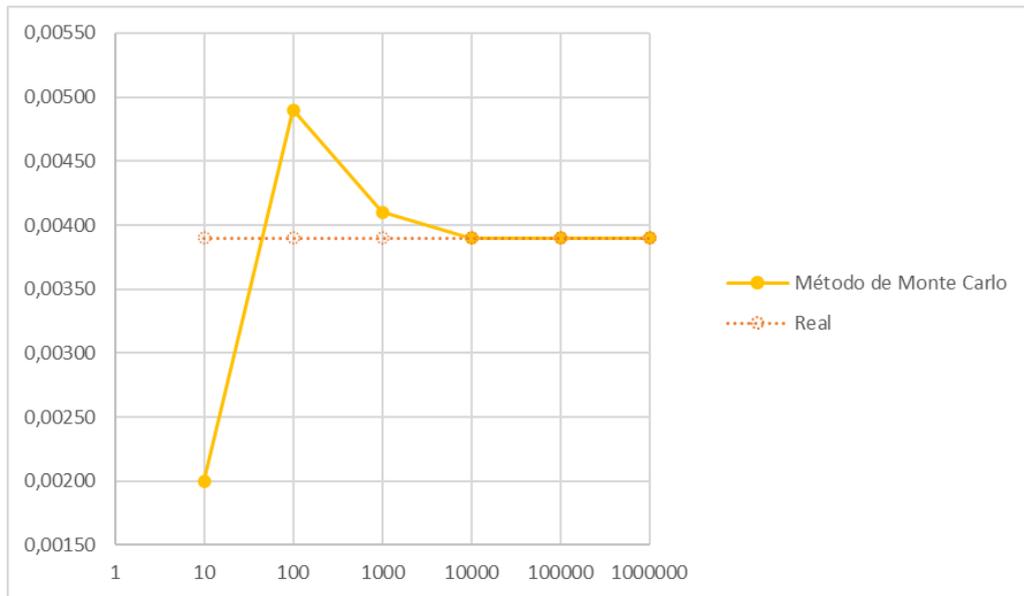


Ilustración 4-23: Aproximaciones obtenidas para el Caso 8.

Realizado por: Saransig A., 2024.

En la **Ilustración 4-23** se puede observar que el resultado es más aproximado al valor real cuando se incrementa el número de puntos de muestra por un factor de diez. Es necesario mencionar que el método de Monte Carlo, a diferencia de las fórmulas de Newton Cotes, representa menos consumo de recursos computacionales y tiempo de ejecución cuando se incrementa el número de variables, por tanto, es un método que se recomienda aplicar para integrales múltiples de 4 o más incógnitas.

4.2. Discusión

Para apreciar de mejor manera los errores obtenidos con el método de Monte Carlo se presentan dos gráficos donde se pueda contrastar su uso tanto en integrales dobles como triples.

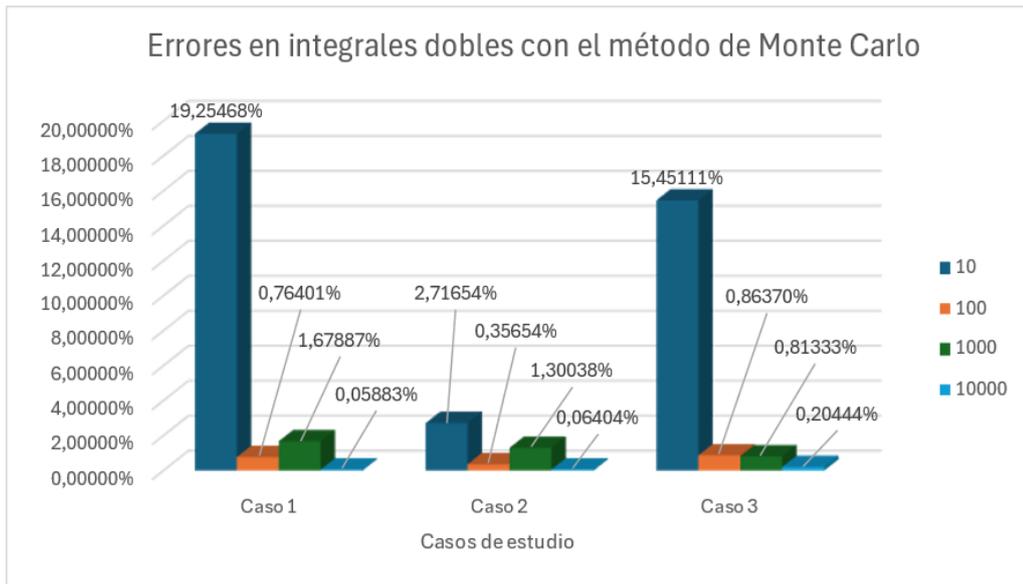


Ilustración 4-24: Errores obtenidos en casos de integrales dobles.

Realizado por: Saransig A., 2024.

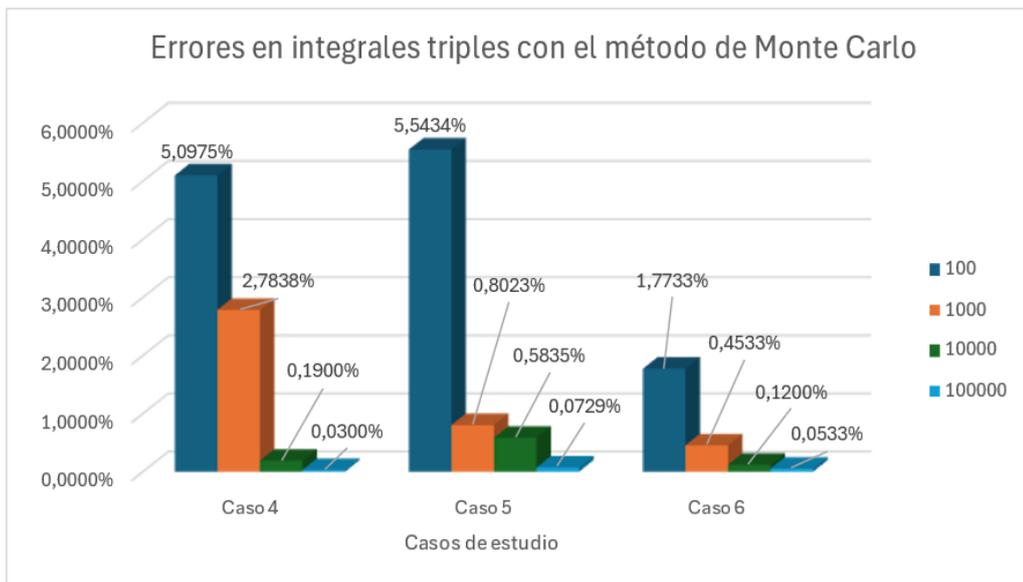


Ilustración 4-25: Errores obtenidos en casos de integrales triples.

Realizado por: Saransig A., 2024.

A partir de las dos imágenes se puede deducir que el error obtenido mediante la aproximación del método de Monte Carlo se reduce en función del incremento de puntos pero que en la **Ilustración 4-24** los errores son significativamente altos en comparación con los errores mostrados en la **Ilustración 4-25**, y son más aceptables los errores cuando el número de muestras supera el valor de 100 puntos.

Los resultados obtenidos muestran que la aplicación de la regla de Simpson 3/8 brinda mejores resultados de aproximación al valor real, pero requiere de un alto tiempo computacional, por este

último factor, se considera su aplicación en casos de integrales múltiples que contengan hasta 2 variables, esto basado en lo mencionado para los casos 4, 5 y 6 de estudio.

La regla del trapecio indica que es posible su aplicación para casos de estudio hasta 3 variables ya que sus resultados son muy útiles y su tiempo de ejecución es aceptable, y por tanto, representa una opción viable y eficiente. Para el caso de integrales con 4 variables se debe tomar en cuenta que la muestra no exceda la cantidad de 200 puntos de evaluación ya que el tiempo de ejecución aumenta.

Por otro lado, el método de Monte Carlo representa una solución muy acertada para casos de estudio de integrales múltiples donde se requieren grandes cantidades de puntos de muestra, ya que no presenta inconvenientes en relación con los tiempos de ejecución y consumo de recursos computacionales. Sin embargo, se debe mencionar que su aplicación para casos de estudio de 3 variables o menos, presenta mayor margen de error que las fórmulas de Newton Cotes cuando los puntos de muestra son cantidades menores a 100 puntos.

Una diferencia marcada entre las fórmulas de Newton Cotes y el método de Monte Carlo, radica en la cantidad de puntos muestreados y su relación con el error de aproximación, ya que las reglas del trapecio y de Simpson señalan que al incrementar el número de muestras se consigue una mejor aproximación, pero, con el método de Monte Carlo, el número de muestras no garantiza siempre que el resultado sea más óptimo de acuerdo a lo observado en los casos de estudio 1 y 2.

De acuerdo con los resultados obtenidos para el caso de estudio 8, el método de Monte Carlo constituye una herramienta matemática de aproximación muy rentable cuando se consideran integrales múltiples con 8 variables donde las fórmulas de Newton Cotes no tienen capacidad operativa debido a la gran cantidad de iteraciones, demostrando gran ventaja respecto de estas, ya que con grandes muestras de puntos se consiguen errores más reducidos que tienden a alcanzar el valor real.

Con base en la investigación teórica, las fórmulas para el cálculo del error en las fórmulas de Newton-Cotes señalan que el método de la regla de Simpson $3/8$ es el que tiene un error más reducido que la de $1/3$ y la regla del trapecio. Se debe considerar que, en estas fórmulas, el error de aproximación disminuye en función de los intervalos que se establezcan para evaluar la función, aumentando el tiempo de cálculo y el costo computacional.

La investigación desarrollada por Oliva (2017) presenta una comparativa entre los métodos de integración Monte Carlo con los de integración numérica convencional, entre ellos la regla del trapecio y la regla de Simpson 1/3. Para establecer diferencias entre estos procedimientos se implementó, mediante código en software “Mathematica”, los algoritmos para resolver integrales múltiples con cada uno de los métodos.

En su escrito concluye que el método Monte Carlo no es recomendable para integrales unidimensionales debido a que el tiempo computacional es mayor respecto de las fórmulas de Newton-Cotes. Sin embargo, para integrales con dimensiones mayores a tres, las fórmulas de Newton-Cotes no son eficientes ya que requieren de más evaluaciones por integral iterada, por lo que recomienda para estos casos, la aplicación de métodos de integración de Monte Carlo basado en éxito-fracaso. (Oliva, 2017, pág.44).

CONCLUSIONES

Por medio de este documento escrito se llevó a cabo la comparación de los métodos Monte Carlo y las fórmulas de Newton Cotes para la resolución de integrales múltiples definidas empleando una investigación teórica y aplicativos de simulación en el software matemático Octave de licencia gratuita, permitiendo alcanzar lo establecido en el objetivo general enfocado a la generación de un documento de apoyo o guía para la comprensión de estos métodos y su aplicación.

Se desarrolló una revisión bibliográfica en el capítulo II para brindar amplia información de los conceptos de integrales múltiples y variables aleatorias que fundamentan las fórmulas de Newton Cotes y el método de Monte Carlo, este apartado contiene varias fuentes bibliográficas que permiten guiar y comprender cómo funciona matemáticamente los conceptos al aplicarlos en la resolución de integrales múltiples.

Se comparó de manera teórica las cotas del error de las fórmulas de Newton Cotes y del método de Monte Carlo mediante la aproximación de integrales múltiples definidas establecidas en seis casos de estudio para 2, 3 y 4 variables, interpretando los resultados mediante tablas y gráficos donde se evidencia que, el método de Monte Carlo reduce el error cuando se consideran muestras superiores a los 100 puntos y es el único con capacidad de aproximar integrales de hasta 8 variables con un error que tiende a cero, mientras que, las fórmulas de Newton Cotes son más apropiadas para aproximar integrales múltiples de hasta 4 variables. Este estudio se llevó a cabo mediante la metodología detallada en el capítulo III y los resultados obtenidos y analizados en el capítulo IV.

La evaluación del comportamiento de las cotas del error indica que, las fórmulas de Newton Cotes están relacionados con el incremento de número de puntos o iteraciones, es decir, a mayor cantidad de iteraciones el error se reduce, por otro lado, se apreció que para el método de Monte Carlo el número de puntos no es un factor muy determinante para reducir el error debido a que el método depende de los valores aleatorios generados en cada ejecución. Mediante esta evaluación también se pudo verificar que el método de Monte Carlo se ejecuta más rápido que las fórmulas de Newton cuando se consideran cantidades de muestras superiores a 100.

RECOMENDACIONES

Al utilizar esta guía de estudio se debe considerar el orden de los temas para su comprensión y tener al menos una base de conocimiento de cálculo diferencial e integral, estadística básica y algebra lineal ya que se desarrolla desde la integración numérica hasta el método de Monte Carlo que tiene por fundamento el uso de variables aleatorias.

Se recomienda para trabajos futuros tomar en cuenta el algoritmo para la generación de números aleatorios o pseudoaleatorios para la simulación del método de Monte Carlo para poder apreciar varios resultados en cada ejecución, ya que, de no realizarlo, se obtendrá el mismo resultado siempre que se considere la misma cantidad de puntos o iteraciones.

No forzar el aplicativo para intentar resolver integrales múltiples de tres variables utilizando las reglas de Simpson debido a que los tiempos de ejecución son elevados, por tanto, se recomienda a docentes y estudiantes para casos de estudio con tres o más dimensiones se emplee el método de Monte Carlo o del trapecio.

BIBLIOGRAFÍA

1. **BARRERA R., Mauricio; et al.** “Integración Montecarlo”. *Scientia Et Technica*, vol. 12, n° 32, (2006), (Colombia).págs. 331-334.
2. **BENALCÁZAR, Gómez.** *Análisis numérico*. Quito, 2007.
3. **CHAPRA, Steven & CANALE, Raymond.** *Métodos numéricos para ingenieros*. 5ª ed. México D.F.: McGRAW-HILL, 2007.
4. **GONZÁLEZ JUAREZ, Karla.** Aplicaciones del método de Monte Carlo a la solución de algunos problemas financieros. (Trabajo de titulación). Instituto Politécnico Nacional, Escuela Superior de Física y Matemática. México D.F.,2008.
5. **ILLANA, José Ignacio.** *Métodos Monte Carlo*. Universidad de Granada, 2013.
6. **LÓPEZ, Maria V. & Mariño, Sonia I.** “Aplicación del método de Monte Carlo para el cálculo de integrales definidas”. *Workshop de Investigadores en Ciencias de la Computación*, n° 1449, (2002), (Argentina).págs. 197-201.
7. **MADRID, Marcos Andrés.** Estudio Teórico y Computacional de Procesos de Difusión Superficial sobre micro/nano-estructuras de alta razón de aspecto. (Trabajo de titulación). (Doctoral). Universidad Nacional de La Plata, Facultad de Ciencias Exactas, Departamento de Química. Argentina,2013.
8. **MATHEWS, Jhon H. & FINK, Kurtis D.** *Métodos numéricos con MATLAB*, Madrid: Prentice Hall, 2000.
9. **METROPOLIS, Nicholas & ULAM, S.** “The Monte Carlo Method”. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 44, n° 247, (1949), págs. 335-341.
10. **MOLINA GALILEA, Daniela.** Simulación del comportamiento de técnicas de calidad industrial mediante Montecarlo con GNU Octave. (Trabajo de titulación).(Maestría). Universidad Zaragoza, Escuela de Ingeniería y Arquitectura. España. 2014.
11. **MONTES, Francisco.** *Introducción a la Probabilidad*, España: Universidad de Valencia, 2007.

12. **MORENO SORIANO, Alfonso.** Estudio de diferentes métodos de integración numérica. Aplicación en la caracterización de superficies mediante deflectometría óptica y un sensor de Shack-Hartmann. (Trabajo de titulación). (Doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Facultad de Ciencias, Departamento de Física. Bellaterra ,2005.
13. **NIEVES HURTADO, Antonio & DOMÍNGUEZ SÁNCHEZ, Federico.** *Métodos numéricos aplicados a la ingeniería.* 4^a ed. Mexico: Grupo Editorial Patria, 2014.
14. **OLIVA LÓPEZ, Rafael de Jesús.** Método de Monte Carlo para el cálculo de integrales n-dimensionales. (Trabajo de titulación). Universidad Autónoma de Puebla, Facultad de Ciencias Físico Matemáticas. Puebla. 2017.
15. **PIÑERO REDONDO, Yolanda.** Simulación de Monte Carlo de sistemas complejos en red. (Trabajo de titulación).(Doctoral). Universidad de Santiago de Compostela, Departamento de Física Aplicada. Santiago de Compostela. 2007.
16. **RÍOS, David; et al.** *Simulación: Métodos y Aplicaciones.* Madrid: Alfaomega.
17. **ROBALINO, María; et al.** “Aplicación del Método Montecarlo en flujo de potencias a través del Software Octave”. *Journal of Economic and Social Science Research*, vol. 3, n° 1, (2023), (Ecuador).págs. 31-47.
18. **ROSS, Sheldon M.** *Simulación.* 2^a ed. México: PRENTICE HALL,1999.
19. **SMYTH, Gordon.** “ Numerical Integration”. *Encyclopedia of Biostatistics*, (1998), (London). págs. 3088-3095.
20. **SÓBOL,I.** *Método de Montecarlo.* Moscú: MIR,1976.
21. **SOSA LÉON, Sonia Guadalupe.** Integración Numérica por el Método Monte Carlo. (Trabajo de titulación). Universidad de Sonora, Departamento de Matemática. México,1997.
22. **STEWART, James.** *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas.* 7^a ed. México: Cengage Learning, 2012.
23. **SUÁREZ RUÍZ, Oscar J.** Métodos Monte Carlo y productos estructurados. (Trabajo de titulación) (Maestría). Centro de Investigación en Matemáticas. Guanajuato-México,2012.
24. **TOSTADO, Marcos; et al.** “A powerful power-flow method based on Composite Newton-Cotes formula for ill-conditioned power systems”. *International Journal of Electrical Power & Energy Systems.* Vol. 116. (2020). pág 105558.

25. WEINZIERL, Stefan. “Introduction to monte carlo methods”. *High Energy Physics-Phenomenology*. (2020), (Amsterdam-Países bajos). págs. 1-47.

26. WITTEVEEN, Jeroen; et al.“An adaptive stochastic finite elements approach based on Newton–Cotes quadrature in simplex elements”. *Computers & Fluids*. Vol. 38, n° 6, (2009), (Delft-Países Bajos). págs. 1270-1288.

27. ZACARÍAS SANTIAGO, Adriana. Métodos de integración y simulación Monte Carlo en la teoría bayesiana. (Trabajo de titulación). Universidad Tecnológica de la Mixteca . Huajuapán de León-Oaxaca, 2006.



ANEXOS

ANEXO A: PROGRAMAS DESARROLLADOS EN EL SOFTWARE OCTAVE

Programa para el método del Trapecio:

```
%%TRAPECIO INTEGRAL DOBLE

% Definición de la función
f = @(x, y) x^2*y;
% Definición de los límites de integración
a = 0;
b = 3;
c = 1;
d = 2;

% Número de puntos para la aproximación
n = 10000; % Puedes ajustar este valor según la precisión deseada

% Paso de integración en x e y
dx = (b - a) / n;
dy = (d - c) / n;

% Inicialización de la suma
sumatoria = 0;

% Aproximación trapezoidal
for i = 1:n
    for j = 1:n
        x0 = a + (j - 1) * dx;
        y0 = c + (j - 1) * dy;
        sumatoria = sumatoria + f(x0, y0) + f(x0 + dx, y0) + f(x0, y0 + dy) + f(x0 + dx, y0 + dy);
    end
end

% Multiplicación por el área de un trapecio
aproximacion = dx * dy * sumatoria / 4
disp(aproximacion);

%% TRAPECIO INTEGRAL TRIPLE
% Definición de la función

%f = @(x, y, z) x^2 + y^2 + z^2; % Integral triple N1

%f = @(x, y, z) x*y*sin(y*z); % Integral triple N2
f = @(x, y, z) x*y+z;
% Definición de los límites de integración
a = 0;
b = 1;
c = 0;
d = 1;
e = 0;
```

```

f1 = 1;

% Número de puntos para la aproximación
nx = 100;
ny = 100;
nz = 100;

% Paso de integración en x, y, y z
dx = (b - a) / nx;
dy = (d - c) / ny;
dz = (f1 - e) / nz;

% Inicialización de la suma
sumatoria = 0;

% Aproximación trapezoidal
for i = 1:nx
    for j = 1:ny
        for k = 1:nz
            x0 = a + (i - 1) * dx;
            y0 = c + (j - 1) * dy;
            z0 = e + (k - 1) * dz;
            sumatoria = sumatoria + f(x0, y0, z0) + f(x0 + dx, y0, z0)
+ f(x0, y0 + dy, z0) + f(x0, y0, z0 + dz) + f(x0 + dx, y0 + dy, z0) +
f(x0 + dx, y0, z0 + dz) + f(x0, y0 + dy, z0 + dz) + f(x0 + dx, y0 + dy,
z0 + dz);
        end
    end
end

% Multiplicación por el volumen de un cubo
aproximacion = dx * dy * dz * sumatoria / 8;
disp(aproximacion);

% METODO TRAPEZIO 4 VARIABLES
% Definición de la función
R = @(x,| y, z, w) x^2 + y^2 + z^2 + w^2; % Ejemplo de función

```

```

sumatoria = 0;

% Aplicación del método del trapecio
for i = 0:n-1
    for j = 0:n-1
        for k = 0:n-1
            for l = 0:n-1
                x0 = a + i * dx;
                y0 = c + j * dy;
                z0 = e + k * dz;
                w0 = g + l * dw;
                x1 = x0 + dx;
                y1 = y0 + dy;
                z1 = z0 + dz;
                w1 = w0 + dw;
                sumatoria = sumatoria + 0.5 * (R(x0, y0, z0, w0) + R(x1, y1, |
z1, w1));
            end
        end
    end
end

% Resultado de la integral
aproximacion = dx * dy * dz * dw * sumatoria;
disp(aproximacion);

```

Programa para el método de Simpson 1/3 y 3/8:

```

%% SIMPSON 1/3 INTEGRAL DOBLE
f = @(x, y) x^2*y;
% Definición de los límites de integración
a = 0;
b = 3;
c = 1;

```

```

sumatoria = 0;

% Aplicación del método del trapecio
for i = 0:n-1
    for j = 0:n-1
        for k = 0:n-1
            for l = 0:n-1
                x0 = a + i * dx;
                y0 = c + j * dy;
                z0 = e + k * dz;
                w0 = g + l * dw;
                x1 = x0 + dx;
                y1 = y0 + dy;
                z1 = z0 + dz;
                w1 = w0 + dw;
                sumatoria = sumatoria + 0.5 * (R(x0, y0, z0, w0) + R(x1, y1, |
z1, w1));
            end
        end
    end
end

% Resultado de la integral
aproximacion = dx * dy * dz * dw * sumatoria;
disp(aproximacion);

```

Programa para el método de Simpson 1/3 y 3/8:

```

%% SIMPSON 1/3 INTEGRAL DOBLE
f = @(x, y) x^2*y;
% Definición de los límites de integración
a = 0;
b = 3;
c = 1;

d = 2;

% Número de intervalos en x e y (deben ser pares)
nx = 10;
ny = 10;

% Paso de integración en x e y
dx = (b - a) / nx;
dy = (d - c) / ny;

% Inicialización de la suma
sumatoria = 0;

% Aplicación de la regla de Simpson 1/3
for i = 0:nx/2 - 1
    for j = 0:ny/2 - 1
        x0 = a + 2*i*dx;
        y0 = c + 2*j*dy;
        sumatoria = sumatoria + f(x0, y0) + 4*f(x0 + dx, y0) + f(x0 +
2*dx, y0) + ...
            4*f(x0, y0 + dy) + 16*f(x0 + dx, y0 + dy) + 4*f(x0 |
+ 2*dx, y0 + dy) + ...

```

```

                f(x0, y0 + 2*dy) + 4*f(x0 + dx, y0 + 2*dy) + f(x0 +
2*dx, y0 + 2*dy);
            end
        end

% Multiplicación por el factor de la regla de Simpson 1/3
aproximacion = (dx * dy / 9) * sumatoria;
disp(aproximacion);
%% SIMPSON 3/8 INTEGRAL DOBLE
f = @(x, y) x^2*y;
% Definición de los límites de integración
a = 0;
b = 4;
c = 4;
d = 5;
% Número de subintervalos en x e y (deben ser múltiplos de 3)
nx = 12;
ny = 12;
% Paso de integración en x e y
dx = (b - a) / nx;
dy = (d - c) / ny;
% Inicialización de la suma
sumatoria = 0;
% Aplicación de la regla de Simpson 3/8
for i = 1:3:nx-2
    for j = 1:3:ny-2
        x0 = a + (i - 1) * dx;
        y0 = c + (j - 1) * dy;
        sumatoria = sumatoria + (3*dx*3*dy/8) * (f(x0, y0) + 3*f(x0 +
dx, y0) + 3*f(x0 + 2*dx, y0) + f(x0 + 3*dx, y0) + 3*f(x0, y0 + dy) +
9*f(x0 + dx, y0 + dy) + 9*f(x0 + 2*dx, y0 + dy) + 3*f(x0 + 3*dx, y0 +
dy) + 3*f(x0, y0 + 2*dy) + 9*f(x0 + dx, y0 + 2*dy) + 9*f(x0 + 2*dx, y0
+ 2*dy) + 3*f(x0 + 3*dx, y0 + 2*dy) + f(x0, y0 + 3*dy) + 3*f(x0 + dx,
y0 + 3*dy) + 3*f(x0 + 2*dx, y0 + 3*dy) + f(x0 + 3*dx, y0 + 3*dy));
    end
end

% Resultado de la integral
aproximacion = sumatoria/8;
disp(aproximacion);

```

Programa para el método de Monte Carlo:

```

%% MONTE CARLO INTEGRAL DOBLE
% Definición de la función que se desea integrar
% function y = f(x, y)
%     % Aquí defines tu función de dos variables
%     % Por ejemplo, y = x^2 + y^2;
%     y = x^2 + y^2; % Ejemplo de función
% end

f = @(x, y) x^2*y;
% Definición de los límites de integración
a = 0;
b = 3;
c = 1;
d = 2;

```

```

% Número de puntos a generar
N = 100000; % Puedes ajustar este valor según la precisión deseada

% Área del dominio D
A = (b - a) * (d - c);

% Generación de puntos aleatorios dentro del dominio D
X = a + (b - a) * rand(N, 1);
Y = c + (d - c) * rand(N, 1);

% Evaluación de la función en cada punto
F = zeros(N, 1);
for i = 1:N
    F(i) = f(X(i), Y(i));
end

% Cálculo del promedio de los valores de la función
promedio = mean(F);

% Aproximación de la integral
aproximacion = promedio * A;
disp(aproximacion);

%% MONTE CARLO INTEGRAL TRIPLE
% Definición de la función que se desea integrar
% function y = f(x, y, z)
%     % Aquí defines tu función de tres variables
%     % Por ejemplo, y = x^2 + y^2 + z^2;
%     y = x^2 + y^2 + z^2; % Ejemplo de función para la suma de los
%     cuadrados de las variables
% end

f = @(x, y, z) x*y+z;
% Definición de los límites de integración
a = 0;
b = 1;
c = 0;

d = 1;
e = 0;
f1 = 1;

% Número de puntos a generar
N = 100000; % Puedes ajustar este valor según la precisión deseada

% Volumen del dominio D
V = (b - a) * (d - c) * (f1 - e);

% Generación de puntos aleatorios dentro del dominio D
X = a + (b - a) * rand(N, 1);
Y = c + (d - c) * rand(N, 1);
Z = e + (f1 - e) * rand(N, 1);

% Evaluación de la función en cada punto
F = zeros(N, 1);
for i = 1:N

```

```

    F(i) = f(X(i), Y(i), Z(i));
end

% Cálculo del promedio de los valores de la función
promedio = mean(F);

% Aproximación de la integral
aproximacion = promedio * V;
disp(aproximacion);

%% MONTE CARLO PARA 8 VARIABLES
% Definición de la función que se desea integrar
% function y = f(x)
%     % Aquí defines tu función de 8 variables
%     % Por ejemplo,  $y = x(1)^2 + x(2)^2 + \dots + x(8)^2$ ;
%     y = sum(x.^2); % Ejemplo de función para la suma de los cuadrados
de las variables
% end

% Número de puntos a generar
N= 1000000; % Puedes ajustar este valor según la precisión deseada

% Volumen del dominio D (puedes definirlo según tus límites)
% Por ejemplo, si el dominio D es un cubo de lado 1 en cada dimensión,
el volumen sería  $1^8 = 1$ .
V = 1; % Volumen del cubo unitario en 8 dimensiones

% Generación de puntos aleatorios dentro del dominio D
X = rand(N, 8); % Matriz de N puntos aleatorios en 8 dimensiones

% Evaluación de la función en cada punto
F = zeros(N, 1);
for i = 1:N
    F(i) = f(X(i, :));
end

% Cálculo del promedio de los valores de la función
promedio = mean(F);

% Aproximación de la integral
aproximacion = promedio * V;
disp(aproximacion);

%% ERROR COTA MÁXIMA MONTECARLO
% Cálculo de la desviación estándar de los valores de la función
desviacion_estandar = std(F);

% Factor de confianza (K) para un 95% de confianza
K = 2;

% Error de cota máxima
error_cota_maxima = K * desviacion_estandar / sqrt(N);
disp(error_cota_maxima);

%METODO MONTECARLO 4 VARIABLES
% Definir la función a integrar
fun = @(x, y, z, w) x.^2 + y.^2+z.^2+w.^2;

```

```

% Definir los límites de integración
a = 0;
b = 2;
c = 0;
d = 3;
e = 0;
f = 1;
g = 0;
h = 2;

% Número de puntos a generar
N = 100000; % Puedes ajustar este valor según la precisión deseada

% Calcular el volumen del dominio de integración
V = (b - a) * (d - c) * (f - e) * (h - g);

% Generar puntos aleatorios dentro del dominio de integración
x = a + (b - a) * rand(N, 1);
y = c + (d - c) * rand(N, 1);
z = e + (f - e) * rand(N, 1);
w = g + (h - g) * rand(N, 1);

% Calcular los valores de la función en cada punto
f_values = fun(x, y, z, w);

% Calcular la suma de los valores de la función
suma = sum(f_values);

% Calcular el promedio de los valores de la función
promedio = suma / N;

% Aproximación de la integral
aproximacion = V * promedio;
disp(aproximacion);

%METODO MONTECARLO 8 VARIABLES
% Definir la función a integrar
fun = @(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8) x1.*x2.*x3.*x4.*x5.*x6.*x7.*x8;

% Definir los límites de integración para cada variable
a1 = 0; b1 = 1;
a2 = 0; b2 = 1;
a3 = 0; b3 = 1;
a4 = 0; b4 = 1;
a5 = 0; b5 = 1;
a6 = 0; b6 = 1;
a7 = 0; b7 = 1;
a8 = 0; b8 = 1;

N = 100000; % Puedes ajustar este valor según la precisión deseada

% Calcular el volumen del dominio de integración
V = (b1 - a1) * (b2 - a2) * (b3 - a3) * (b4 - a4) * (b5 - a5) * (b6 - a6) *
(b7 - a7) * (b8 - a8);

```

```
% Generar puntos aleatorios dentro del dominio de integración
x1 = a1 + (b1 - a1) * rand(N, 1);
x2 = a2 + (b2 - a2) * rand(N, 1);
x3 = a3 + (b3 - a3) * rand(N, 1);
x4 = a4 + (b4 - a4) * rand(N, 1);
x5 = a5 + (b5 - a5) * rand(N, 1);
x6 = a6 + (b6 - a6) * rand(N, 1);
x7 = a7 + (b7 - a7) * rand(N, 1);
x8 = a8 + (b8 - a8) * rand(N, 1);

% Calcular los valores de la función en cada punto
f_values = fun(x1, x2, x3, x4, x5, x6, x7, x8);

% Calcular la suma de los valores de la función
suma = sum(f_values);

% Calcular el promedio de los valores de la función
promedio = suma / N;

% Aproximación de la integral
aproximacion = V * promedio;
disp(aproximacion);
```