



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN
LIGHTHILL-WHITHAM-RICHARDS POR MEDIO DEL MÉTODO
DE DIFERENCIAS FINITAS

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTORA:

ANDREA BELÉN PAREDES FONSECA

Riobamba – Ecuador

2024



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN
LIGHTHILL-WHITHAM-RICHARDS POR MEDIO DEL MÉTODO
DE DIFERENCIAS FINITAS

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTORA: ANDREA BELÉN PAREDES FONSECA
DIRECTOR: ING. ALEX EDUARDO POZO VALDIVIEZO, M.Sc.

Riobamba – Ecuador

2024

©2024, Andrea Belén Paredes Fonseca

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

Yo, Andrea Belén Paredes Fonseca, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este trabajo de titulación; El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 13 de mayo de 2024

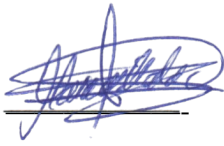
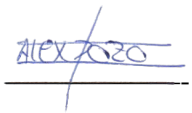
A handwritten signature in blue ink, appearing to read 'Paredes', with a stylized, cursive script.

Andrea Belén Paredes Fonseca

180517910-6

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN LIDTHILL-WHITHAM-RICHARDS POR MEDIO DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS**, realizado por la señorita: **ANDREA BELÉN PAREDES FONSECA**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Ing. María José Mendoza Salazar, M.Sc PRESIDENTA DEL TRIBUNAL		2024-05-13
Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo, M.Sc DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2024-05-13
Ing. María de Lourdes Palacios Robalino Mgs. ASESORA DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR		2024-05-13

DEDICATORIA

A mis padres, Wilson y Carlota, a mi gatita Keiko y a todos aquellos que me acompañaron en el proceso de este trabajo.

AGRADECIMIENTO

Quiero expresar mi gratitud a Dios por permitirme alcanzar metas que en su momento creí imposibles. En segundo lugar, quiero agradecer a mis padres, Carlota y Wilson, quienes han sido mi principal apoyo en mi formación académica. No tengo las palabras suficientes para expresar mi agradecimiento por la confianza que han depositado en mí a lo largo de estos años. De igual forma, quiero agradecer a mi hermana Carolina, quien ha estado presente en los mejores y peores momentos de mi vida. Gracias por tu complicidad a lo largo de estos años.

Asimismo, quiero agradecer a cada uno de los amigos que he conocido a lo largo de estos años. A Helena, Alex, Jessica y Maribel, gracias por enseñarme el verdadero significado de la amistad. Mi segunda familia; Ángel, René, Miryam y Liceth. No saben cuánto agradezco haberlos conocido. Su amistad fue un gran motor para mantenerme en pie en los primeros años de la carrera.

También quiero agradecer a mi comadre, Jessica, con quien hemos logrado una amistad muy bonita. Gracias por leer mi tesis y ayudarme a corregirla, gracias por la confianza y siempre animarme. A Marco, José y Joel, quienes más allá de compartir el mismo anhelo académico, me brindaron su apoyo incondicional cuando más lo necesitaba. Gracias por compartir conmigo sus penas y alegrías, permitiéndome ser parte de sus vidas. A Fernando, mi confidente y mejor amigo. Gracias por compartir tu alegría y por tu paciencia constante, así como tu apoyo en aquellos momentos que estuve por rendirme. Posdata, no te olvides que el switch no se toma como cola.

A ti, querida Alejandra, quiero agradecerte por hacerme sentir parte de tu familia desde el primer día en que nos conocimos. Gracias por tu apoyo incondicional y por demostrarme que la verdadera amistad va más allá de la frecuencia con la que nos vemos. También quiero expresar mi agradecimiento a tus abuelitos, quienes me abrieron las puertas de su hogar. Sobre todo a tu abuelita, quien me ha brindado un cariño tan puro. Estoy completamente agradecida por todas las atenciones que siempre ha tenido conmigo.

Y cómo no mencionarte a ti, David. Gracias por reconfortarme en los momentos de frustración. Te agradezco por demostrarme que a pesar de las adversidades de la vida, uno puede levantarse y seguir adelante con la cabeza en alto, sin complicarse y dando lo mejor de sí mismo.

Finalmente, quiero agradecer a mi tutor, el Ing. Alex Pozo. Su apoyo, orientación y confianza han sido fundamentales en este proceso. Gracias, por ser no solo un profesor, sino también un amigo que me ha acompañado en cada paso de este camino académico. Gracias por creer en mí y por su constante apoyo.

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	viii
RESUMEN	x
ABSTRACT	xi
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	2
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Objetivos	2
1.2.1. <i>Objetivo general</i>	2
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	3
1.3. Justificación	3

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO	4
2.1. Derivación numérica	4
2.1.1. <i>Diferencia finita progresiva o hacia adelante de la primera derivada</i>	4
2.1.2. <i>Diferencia finita regresiva o hacia atrás de la primera derivada</i>	5
2.1.3. <i>Diferencia finita centrada o del punto medio de la primera derivada</i>	6
2.2. Derivadas de orden superior	7
2.2.1. <i>Diferencia finita progresiva o hacia adelante de la segunda derivada</i>	7
2.2.2. <i>Diferencia finita regresiva o hacia atrás de la segunda derivada</i>	8
2.2.3. <i>Diferencia finita centrada de la segunda derivada</i>	9
2.3. Diferenciación numérica para derivadas parciales	10
2.3.1. <i>Diferenciación numérica</i>	10
2.4. Consistencia, Estabilidad y Convergencia	12
2.4.1. <i>Definición de consistencia</i>	13
2.4.2. <i>Definición de estabilidad</i>	13
2.4.3. <i>Definición de convergencia</i>	14
2.4.4. <i>Estabilidad de Von Neumann</i>	14

2.4.5.	<i>Teorema de Lax</i>	15
2.5.	Modelo Lighthill-Whitham-Richards	16

CAPÍTULO III

3.	MARCO METODOLÓGICO	19
3.1.	Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnica e instrumentos de investigación	19

CAPÍTULO IV

4.	MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	21
4.1.	Método de las características para el modelo LWR	21
4.2.	Bien posicionamiento del problema	23
4.3.	Discretización del modelo LWR mediante esquemas de diferencias finitas .	23
4.3.1.	<i>Esquema FTBS</i>	23
4.3.2.	<i>Esquema DuFort-Frankel</i>	26
4.4.	Consistencia, Estabilidad y Convergencia de las diferencias finitas para la ecuación LWR	28
4.4.1.	<i>Consistencia de los esquemas</i>	28
4.4.2.	<i>Estabilidad de los esquemas</i>	31
4.4.3.	<i>Convergencia de los esquemas</i>	33
4.4.4.	<i>Simulación Numérica de la Ecuación LWR</i>	34

CAPÍTULO V

5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	37
5.1.	Conclusiones	37
5.2.	Recomendaciones	37

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

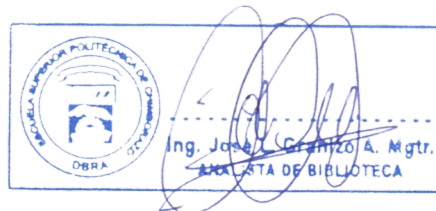
Ilustración 2-1: División del plano $t - x$ en una cuadrícula.	11
Ilustración 4-1: Perfiles de densidad inicial.	22
Ilustración 4-2: Densidad de tráfico vehicular.	34
Ilustración 4-3: Densidad de tráfico vehicular.	35
Ilustración 4-4: Comparación con la solución analítica	35
Ilustración 4-5: Diagrama fundamental	36
Ilustración 4-6: Dinamica del modelo LWR	36

RESUMEN

La Carrera de Matemática de la ESPOCH, presenta una brecha en el plan de estudios en cuanto al estudio y la implementación de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales. En tal virtud, los estudiantes de la Carrera de Matemáticas carecen de recursos que expliquen cómo la matemática aplicada puede resolver problemas reales en diversas áreas del conocimiento. Específicamente, existe una falta de documentos que aborden modelos matemáticos asociados al flujo de tráfico vehicular. Bajo este contexto, se presenta el siguiente trabajo de titulación con el objetivo de analizar el modelo matemático Lighthill-Whitham-Richards y los esquemas en diferencias finitas DuFort-Frankel y FTBS para una simulación del flujo de tráfico vehicular mediante su implementación en Python. De forma que, este trabajo sirva como guía para los estudiantes de la Carrera de Matemática de la ESPOCH, para comprender el proceso de discretización de ecuaciones diferenciales parciales por medio de método de diferencias finitas. Para ello, se trabajó bajo un enfoque cualitativo, con alcance descriptivo y un diseño de investigación documental. Permitiendo así llegar a establecer las condiciones pertinentes para la estabilidad de ambos esquemas en diferencias finitas. Y obteniendo como resultados la comparación de la solución de la ecuación LWR con la resolución tanto del esquema FTBS como DuFort-Frankel.

Palabras clave: <ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS>, <ESQUEMA FORWARD TIME BACKWARD SPACE>, <ESQUEMA DUFORT FRANKEL>, <ECUACIÓN LIGHTHILL WHITHAM RICHARDS>, <IMPLEMENTACIÓN EN PYTHON>.

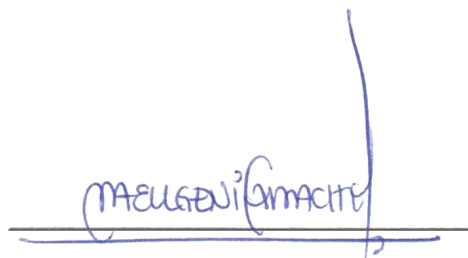
0592-DBRA-UPT-2024



ABSTRACT

The Mathematics Program at Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH) presents a significant gap in its curriculum plan regarding the study and implementation of numerical methods to solve partial differential equations. Consequently, students within the Mathematics Program lack resources that explain how applied mathematics can be used to address real-world problems across various domains of knowledge. Moreover, there are insufficient documents addressing mathematical models related to vehicular traffic flow. In response to this context, the present research work attempts to analyze the Lighthill-Whitham-Richards mathematical model and the DuFort-Frankel and FTBS finite difference schemes for simulating vehicular traffic flow through its implementation in Python. This study is intended to serve as a guide for the students of the Mathematics Degree at ESPOCH, facilitating their understanding of the discretization process of partial differential equations by means of the finite difference method. To achieve this objective, a qualitative approach with a descriptive scope and a documentary research design was employed. This approach allowed to establish relevant conditions for the stability of both finite difference schemes. The results obtained include a comparison of the LWR equation solution using both the FTBS and DuFort-Frankel schemes.

Keywords: <FINITE DIFFERENCE SCHEMES>, <FORT TIME BACKWARD SPACE SCHEME>, <DUFORT FRANKEL SCHEME>, <LIGHTHILL WHITHAM RICHARDS EQUATION>, <IMPLEMENTATION IN PYTHON>



Lic. María Eugenia Camacho, M.Sc.

0601609597

INTRODUCCIÓN

Si bien es cierto, hoy en día uno de los problemas más frecuentes es el tráfico vehicular. El cual consiste en la circulación de personas, algunas de ellas en vehículos, por el espacio público. Por lo que al ser esta una problemática muy usual, se han buscado distintas maneras de solucionarlo por medio de ingeniería de tránsito. Esta última consiste en la aplicación de la ingeniería a fin de aminorar los impactos sociales, urbanos y ambientales derivados del tráfico (Fernández & Dextre, 2011, pág.9). Así pues, una de sus soluciones viene planteada por modelación matemática. Al modelar el flujo de tránsito se pueden predecir futuras condiciones de tráfico, mismas que ayudarán a los ingenieros a desviarlo y maximizar su rendimiento (Omkar & Kumar, 2018, pág.604). Uno de los modelos que explican este proceso, es el modelo de Lighthill-Whitham-Richards (LWR). Este modelo proviene de una ecuación diferencial en derivadas parciales hiperbólica que puede ser discretizada por medio de esquemas de diferencias finitas como por ejemplo, el esquema DuFort-Frankel, esquema Forward-Time Backward- Space (FTBS), entre otros.

En tal virtud, a través del presente documento se presenta una propuesta de trabajo de integración curricular cuyo objetivo es describir, en general, el proceso de discretización de ecuaciones diferenciales parciales a través de los esquemas de diferencias finitas. Adicionalmente se propone discretizar la ecuación LWR que modela un problema de tráfico vehicular. Es así que el presente trabajo de integración curricular, está estructurado por medio de cinco capítulos.

El capítulo I, introduce al problema del cuál surge nuestra investigación, se establecen los objetivos y se justifica la importancia de llevar a cabo el estudio. El capítulo II, proporciona las bases teóricas necesarias para comprender el proceso de discretización de diferencias finitas. El capítulo III, describe la metodología utilizada, de modo que se detalla el enfoque, nivel y diseño de la investigación. El capítulo IV, presenta el marco de análisis e interpretación de resultados. Finalmente, en el capítulo V se presentan las conclusiones y recomendaciones derivadas de la investigación. De este modo, se puede observar que cada capítulo del trabajo de integración curricular cumple un propósito específico y se enlaza con los demás para formar una estructura integral y cohesiva que permita abordar el problema de investigación de manera sistemática y rigurosa.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo, se expone el problema que ha dado origen al presente trabajo de integración curricular. Asimismo, se abordó el objetivo general, el cual orientó el tema de investigación. Mientras, que los objetivos específicos marcaron los pasos necesarios para alcanzar el objetivo general propuesto. Por último, pero no menos importante se mencionó la justificación, en la cual se plasmó la motivación e importancia del trabajo de integración curricular.

1.1. Planteamiento del problema

En los distintos Períodos Académicos Ordinarios (PAOs) de la Carrera de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la ESPOCH, se ha identificado una brecha en el plan de estudios en cuanto al estudio y la implementación de métodos numéricos para resolver ecuaciones diferenciales parciales. Aunque la asignatura de Análisis Numérico se imparte en el PAO 6, no se abordan los métodos de diferencias finitas.

Además, en el contexto de la Carrera de Matemáticas, los estudiantes carecen de recursos que expliquen cómo la matemática aplicada puede resolver problemas reales en diversas áreas del conocimiento. Específicamente, existe una falta de documentos que aborden modelos matemáticos asociados al flujo de tráfico vehicular.

Por consiguiente, surge la necesidad de llevar a cabo una investigación que aborde este vacío académico. Se propone realizar una simulación numérica de la Ecuación Lighthill-Whitham-Richards utilizando el Método de Diferencias Finitas como una manera de cubrir esta necesidad. Esta investigación no solo contribuirá a llenar la brecha en la formación académica de los estudiantes de Matemáticas, sino que también proporcionará una herramienta para abordar problemas reales en diversas disciplinas, específicamente aquellos relacionados con el flujo de tráfico vehicular.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo general*

Analizar el modelo matemático Lighthill-Whitham-Richards y los esquemas en diferencias finitas DuFort-Frankel y FTBS para una simulación del flujo de tráfico vehicular mediante su implementación en Python.

1.2.2. *Objetivos específicos*

1. Determinar los fundamentos teóricos que sustentan el modelo matemático Lighthill-Whitham-Richards y los esquemas en diferencias finitas DuFort-Frankel y FTBS.
2. Caracterizar los elementos que componen el modelo Lighthill-Whitham-Richards y los esquemas en diferencias finitas DuFort-Frankel y FTBS.
3. Establecer relación sistémica entre los elementos que componen el modelo Lighthill-Whitham-Richards y los esquemas en diferencias finitas DuFort-Frankel y FTBS.

1.3. *Justificación*

En la cotidianidad, el tráfico vehicular emerge como uno de los problemas más persistentes que afecta a una gran parte de la población mundial y Ecuador no es una excepción. Esta realidad se manifiesta no solo en ciudades densamente pobladas como Quito y Guayaquil, sino también en localidades menos pobladas como Ambato y Riobamba. A pesar de los esfuerzos por implementar medidas como el sistema de “pico y placa” en Quito, el problema del tráfico persiste a nivel nacional. En este contexto, abordar el problema desde una perspectiva matemática es crucial. Con este propósito, el presente documento se propone ofrecer una descripción del flujo vehicular desde dicho enfoque, centrándose en el estudio y la simulación numérica de la Ecuación Lighthill-Whitham-Richards (LWR) mediante el Método de Diferencias Finitas.

La finalidad de este trabajo de integración curricular es proporcionar una herramienta de apoyo que facilite la comprensión de la aplicación de métodos de diferencias finitas en modelos matemáticos asociados al flujo vehicular, dirigido específicamente a los estudiantes de la carrera de Matemáticas de la ESPOCH interesados en el proceso de discretización de ecuaciones diferenciales parciales a través de esquemas de diferencias finitas.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo, se abordaron las bases teóricas que respaldan el desarrollo del presente trabajo de integración curricular. Para ello, nos centramos principalmente en la revisión de fuentes secundarias, como son, libros académicos y artículos de revistas; con el fin de comprender y describir los métodos de diferencias finitas con los que se trabajó, es decir, el esquema FTBS y el esquema DuFort-Frankel. Con lo cual, se logró asegurar la rigurosidad y validez cada una de las definiciones, teoremas y proposiciones presentados a continuación.

2.1. Derivación numérica

El proceso de discretización de ecuaciones diferenciales parciales facilita la realización de aproximaciones simplificadas de estas ecuaciones. Entre los métodos más comúnmente empleados para este propósito se encuentran: el método de diferencias finitas, el método de elementos finitos y el método de volúmenes finitos. En esta sección, nos enfocaremos en la derivación y diferenciación numérica, que implica aproximar las derivadas de la ecuación diferencial mediante diferencias finitas.

A continuación, se presenta en detalle la aproximación de las derivadas de primer y segundo orden utilizando diferencias finitas.

2.1.1. *Diferencia finita progresiva o hacia adelante de la primera derivada*

La diferencia finita progresiva es una técnica utilizada para aproximar la derivada de primer orden de una función en un punto dado. Supongamos que tenemos una función f de clase C^2 en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$, donde h es un incremento infinitesimal. Queremos encontrar una aproximación de la derivada, f' , en el punto x_0 .

Para esto, consideramos la definición de la derivada:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dado que el límite cuando h tiende a cero no es computacionalmente viable, utilizamos un valor pequeño de h en su lugar. Entonces, podemos aproximar la derivada de la siguiente manera:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \quad (2.1)$$

Esta aproximación se deriva de la definición de la derivada al sustituir el límite por un incremento finito $h < 0$. Es importante tener en cuenta que esta aproximación mejora a medida que h se hace más pequeño, ya que se acerca más al verdadero cambio en la función entre los puntos x_0 y $x_0 + h$. La diferencia finita progresiva es útil en la discretización de ecuaciones diferenciales y en la resolución numérica de problemas en diversas disciplinas científicas y de ingeniería.

Es importante tener en cuenta que esta aproximación introduce un error, especialmente cuando el incremento h utilizado no es lo suficientemente pequeño. Es crucial comprender y cuantificar este error para evaluar la precisión de la aproximación (2.1). Entonces, dado que $f \in C^2([x_0, x_0 + h])$, según el desarrollo de Taylor, podemos expresar:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \frac{h}{2} f''(\xi) \quad \text{donde } \xi \in]x_0, x_0 + h[. \quad (2.2)$$

Luego, el error se expresa como:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| = \left| f''(\xi) \frac{h}{2} \right| = \frac{h}{2} |f''(\xi)|.$$

Dado que la segunda derivada f'' está acotada en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$, se puede concluir que

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{x \leq \xi \leq x+h} |f''(\xi)|.$$

2.1.2. Diferencia finita regresiva o hacia atrás de la primera derivada

La diferencia finita regresiva es una técnica utilizada para aproximar la derivada de primer orden de una función en un punto dado. Supongamos que tenemos una función f de clase C^2 en el intervalo $[x_0 - h, x_0]$, donde $h < 0$ es un incremento infinitesimal. Queremos encontrar una aproximación de la derivada, f' , en el punto x_0 .

Para esto, consideramos la definición de la derivada

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$$

Dado que el límite cuando h tiende a cero (por la izquierda) no es computacionalmente viable, utilizamos un valor pequeño de h en su lugar. Entonces, podemos aproximar la derivada de la siguiente manera:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h}. \quad (2.3)$$

Esta aproximación se deriva de la definición de la derivada al sustituir el límite por un incremento finito h . Es importante tener en cuenta que esta aproximación mejora a medida que h se hace más pequeño, ya que se acerca más al verdadero cambio en la función entre los puntos $x_0 - h$ y x_0 . La diferencia finita regresiva es útil en la discretización de ecuaciones diferenciales asociadas a problemas en diversas disciplinas científicas y de ingeniería.

Es relevante considerar que esta aproximación introduce un error, especialmente cuando el incremento $h < 0$ utilizado no es lo suficientemente pequeño. Es crucial cuantificar este error para evaluar la precisión de la diferencia regresiva (2.3). Entonces, dado que f es de clase C^2 , según el desarrollo de Taylor, podemos expresar:

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} = f'(x_0) - f''(\xi) \frac{h}{2} \quad \text{con } \xi \in [x_0 - h, x_0]. \quad (2.4)$$

Dado que la segunda derivada f'' está acotada en el intervalo $[x_0 - h, x_0]$, se puede concluir que

$$\left| \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{x_0 - h \leq \xi \leq x_0} |f''(\xi)|.$$

2.1.3. Diferencia finita centrada o del punto medio de la primera derivada

La diferencia finita centrada es una técnica que toma en cuenta puntos equidistantes a ambos lados del punto en cuestión para aproximar la derivada de primer orden de una función en un punto dado. Consideramos una función f de clase C^3 en el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$, donde h es un incremento infinitesimal. Deseamos encontrar una aproximación de la derivada, f' , en el punto x_0 .

Al combinar los siguientes desarrollos de Taylor,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + f'(x_0)h + f''(x_0) \frac{h^2}{2} + f'''(\xi_1) \frac{h^3}{6} \quad \text{con } \xi_1 \in [x_0, x_0 + h]. \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0) \frac{h^2}{2} - f'''(\xi_2) \frac{h^3}{6} \quad \text{con } \xi_2 \in [x_0 - h, x_0]. \end{aligned}$$

obtenemos

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - \frac{h^2}{6} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]. \quad (2.5)$$

Donde, la aproximación de la primera derivada por medio de diferencias finitas centrada o del

punto medio es:

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}. \quad (2.6)$$

A continuación, abordaremos el análisis del error asociado a la diferencia finita centrada, entonces dado $f \in C^3([x_0 - h, x_0 + h])$, por los desarrollos de Taylor anteriores se tiene:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0) + \frac{h^2}{6} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)].$$

Luego,

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) \right| = \left| \frac{h^2}{6} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)] \right| \leq \frac{h^2}{6} [|f'''(\xi_1)| + |f'''(\xi_2)|].$$

Puesto que la tercera derivada, f''' , es acotada sobre $[x_0 - h, x_0 + h]$, entonces

$$\left| \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} - f'(x_0) \right| \leq \frac{h^2}{3} \sup_{\xi \in [x_0 - h, x_0 + h]} |f'''(\xi)|.$$

2.2. Derivadas de orden superior

Es importante destacar que al aproximar derivadas de orden superior, en este caso particular de orden dos, se utilizan más términos en las series de Taylor de la función $f \in C^k$ con $k \in \mathbb{N}$. La razón de esto recae en que al aumentar el orden de la derivada, se requiere considerar más términos en la aproximación con el fin de obtener una mejor precisión. A continuación, se detalla la aproximación de la segunda derivada mediante diferencias finitas.

2.2.1. Diferencia finita progresiva o hacia adelante de la segunda derivada

Para aproximar la derivada de segundo orden, se considera una función de clase C^3 en los puntos $x_0 + h$ y $x_0 + 2h$, con $h > 0$. Así, por el desarrollo de Taylor, se tiene

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1) \quad \text{con } \xi_1 \in [x_0, x_0 + h]$$

y

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2 f''(x_0) + \frac{4}{3} h^3 f'''(\xi_2) \quad \text{con } \xi_2 \in [x_0, x_0 + 2h].$$

Al combinar los desarrollos de Taylor anteriores obtenemos

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{h^2} + \frac{1}{3} h [f'''(\xi_1) - 4f'''(\xi_2)].$$

Por tanto, la aproximación de la segunda derivada por medio de diferencias finitas hacia adelante es

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2}. \quad (2.7)$$

Por otra parte, el error absoluto se expresa como

$$\left| \frac{f(x_0) - 2f(x_0 + h) + f(x_0 + 2h)}{h^2} - f''(x_0) \right| = \left| -\frac{1}{3}h [f'''(\xi_1) - 4f'''(\xi_2)] \right|.$$

Dado que la tercera derivada f''' es acotada sobre $[x_0, x_0 + 2h]$ entonces

$$\left| \frac{f(x_0 + 2h) - 2f(x_0 + h) + f(x_0)}{h^2} - f''(x_0) \right| \leq h \sup_{x_0 \leq \xi \leq x_0 + 2h} |f'''(\xi)|.$$

2.2.2. Diferencia finita regresiva o hacia atrás de la segunda derivada

En este enfoque, se utiliza una fórmula que involucra los valores de la función en puntos anteriores al punto de interés. Al igual que en la aproximación central, se requiere que la función pertenezca a la clase C^3 para garantizar resultados precisos.

Dado que f es de clase C^3 , según el desarrollo de Taylor alrededor de $x_0 - 2h$ y $x_0 - h$, podemos expresar

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - f'(x_0)h + f''(x_0)\frac{h^2}{2} - f'''(\xi_1)\frac{h^3}{6} \quad \text{con } \xi_1 \in [x_0 - h, x_0],$$

y

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - f'(x_0)2h + f''(x_0)2h^2 - f'''(\xi_2)\frac{4}{3}h^3 \quad \text{con } \xi_2 \in [x_0 - 2h, x_0 - h].$$

De esta manera, llegamos a expresar la segunda derivada de f como

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 - h)}{h^2} + \frac{1}{3}h [4f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)].$$

Por lo tanto, la expresión para aproximar la segunda derivada de f mediante diferencias finitas hacia atrás es:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 - 2h) - 2f(x_0 - h) + f(x_0)}{h^2}. \quad (2.8)$$

A continuación, exploraremos el análisis del error vinculado a la diferencia finita regresiva de segundo orden. Dado que la función f pertenece a la clase C^3 , según los desarrollos de Taylor

previos, podemos establecer

$$\frac{f(x_0 - 2h) - 2f(x_0 - h) + f(x_0)}{h^2} = f''(x_0) - \frac{1}{3}h [4f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)],$$

y a su vez

$$\left| \frac{f(x_0 - 2h) - 2f(x_0 - h) + f(x_0)}{h^2} - f''(x_0) \right| = \left| -\frac{1}{3}h [4f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)] \right|.$$

Como f''' es acotada sobre $[x_0 - 2h, x_0]$, entonces

$$\left| \frac{f(x_0 - 2h) - 2f(x_0 - h) + f(x_0)}{h^2} - f''(x_0) \right| \leq h \sup_{x_0 - 2h \leq \xi \leq x_0} |f'''(\xi)|.$$

2.2.3. Diferencia finita centrada de la segunda derivada

En esta situación, se emplea una expresión que implica los valores de la función en puntos tanto anteriores como posteriores al punto de interés. Al igual que en la aproximación central, se requiere que la función pertenezca a la clase C^4 para garantizar resultados precisos.

Dado que f es una función de clase C^4 , según el desarrollo de Taylor alrededor de los puntos $x_0 + h$ y $x_0 - h$, con $h > 0$, podemos expresar

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) + \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_1) \quad \text{con } \xi_1 \in]x_0, x_0 + h[,$$

y

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(x_0) - \frac{h^3}{6}f'''(x_0) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_2) \quad \text{con } \xi_2 \in]x_0 - h, x_0[.$$

De esta manera, llegamos a expresar la segunda derivada de f como

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - \frac{1}{24}h^4 [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)].$$

Por tanto, la aproximación de la segunda derivada por medio de diferencias finitas centrada o del punto medio es:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}. \quad (2.9)$$

Seguidamente, exploraremos el análisis del error vinculado a la diferencia finita centrada de segundo orden. Supongamos que f es una función de clase C^4 ; a partir de los desarrollos de Taylor

previamente mencionados, arribamos a la expresión

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - \frac{1}{24}h^4 [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)].$$

Por consiguiente, la expresión del error absoluto viene dado por

$$\left| \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} - f''(x_0) \right| = \left| \frac{1}{24}h^4 [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)] \right|.$$

Como $f^{(4)}$ está acotada en el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$, tenemos que:

$$\left| \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2} - f''(x_0) \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{x-h \leq \xi \leq x+h} |f^{(4)}(\xi)|.$$

El proceso para aproximar las derivadas parciales tanto de primer como de segundo orden, es análogo al realizado con la aproximación de la derivada de primer y segundo orden. Este proceso es utilizado en el área de análisis numérico, para llevar a cabo los métodos de diferencias finitas, los cuales se basan en aproximar las derivadas por medio de diferencias entre los valores de la función en puntos cercanos. Para aproximar la derivada parcial de primer orden, se utiliza la diferencia hacia adelante o hacia atrás, mientras que para la aproximación de las derivadas parciales de segundo orden, se usa las derivadas de segundo orden.

2.3. Diferenciación numérica para derivadas parciales

Una vez que hemos entendido el proceso de las diferencias finitas en una variable, avanzamos al estudio de las funciones de dos variables. En este contexto, la aproximación dependerá de la variable con respecto a la cual deseamos derivar. Además, este paso nos permite comprender cómo funcionan los métodos de diferencias finitas, los cuales se emplean en la resolución numérica de ecuaciones en derivadas parciales.

2.3.1. Diferenciación numérica

La diferenciación numérica se fundamenta en la *discretización* del dominio de la función en intervalos pequeños, donde aproximamos las derivadas parciales empleando diferencias finitas.

Supongamos que f es una función de las variables independientes t y x . Se divide el plano $t - x$ en conjuntos de rectángulos de iguales dimensiones, cuyos lados tienen longitudes de Δt y Δx , mediante cuadrículas igualmente espaciadas. Estas líneas serán paralelas al eje horizontal y estarán definidas por $t_n = n\Delta t$, donde $n = 0, 1, 2, \dots$ y también líneas igualmente espaciadas, paralelas al eje vertical, definidas por $x_j = j\Delta x$, donde $j \in \mathbb{Z}$ como se muestra en la Figura 2-1.

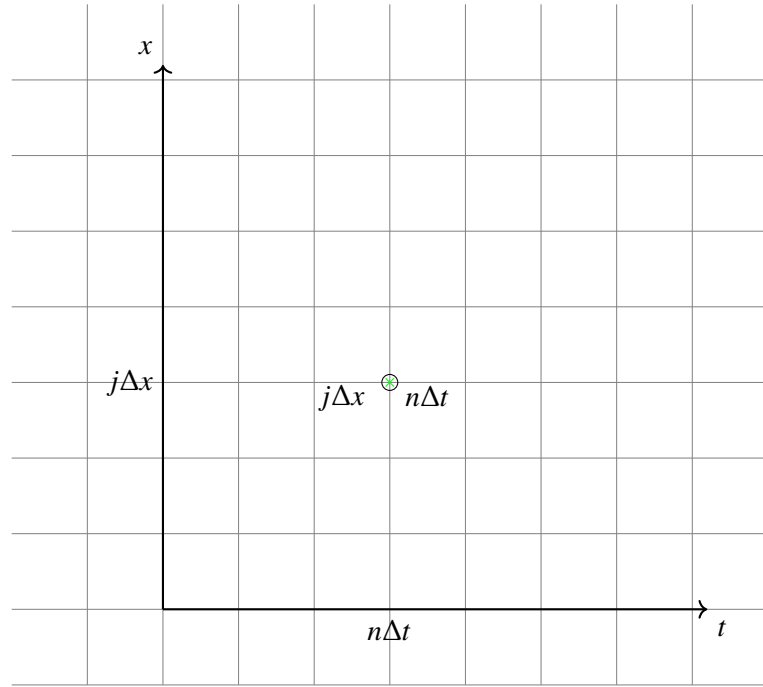


Ilustración 2-1: División del plano $t - x$ en una cuadrícula.

Entonces por la expresión (2.1),

$$\frac{\partial f}{\partial t}(n, j) \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t},$$

con un error de orden $\mathcal{O}(\Delta t)$. Con esta notación, la aproximación de diferencia hacia adelante para $\frac{df}{dt}$ en $(n\Delta t, j\Delta x)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^n}{\Delta t}. \quad (2.10)$$

Mientras que por la expresión (2.3),

$$\frac{\partial f}{\partial x}(n, j) \approx \frac{f_{j-1}^n - f_j^n}{\Delta x},$$

con un error de orden $\mathcal{O}(\Delta x)$. Con esta notación, la aproximación de diferencia hacia atrás para $\frac{df}{dx}$ en $(n\Delta t, j\Delta x)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f_{j-1}^n - f_j^n}{\Delta x}. \quad (2.11)$$

De forma análoga, mediante la expresión (2.6),

$$\frac{\partial f}{\partial t}(n, j) \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t},$$

con un error de orden $\mathcal{O}((\Delta t)^2)$. Bajo este formato, la aproximación de diferencia centrada para $\frac{df}{dt}$

en $(n\Delta t, j\Delta x)$ es

$$\frac{\partial f}{\partial t} \approx \frac{f_j^{n+1} - f_j^{n-1}}{2\Delta t}. \quad (2.12)$$

Por último, mediante la expresión (2.9),

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(n, j) \approx \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{(\Delta x)^2},$$

con un error de orden $\mathcal{O}((\Delta x)^2)$. Bajo este formato, la aproximación de diferencia centrada para $\frac{d^2 f}{dx^2}$ en $(n\Delta t, j\Delta x)$ es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{j+1}^n - 2f_j^n + f_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (2.13)$$

Además, al sustituir el término f_j^n por $f_j^n = \frac{f_j^{n+1} + f_j^{n-1}}{2}$ en la expresión (2.13), obtenemos la siguiente aproximación para $\frac{d^2 f}{dx^2}$ en $(n\Delta t, j\Delta x)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx \frac{f_{j+1}^n - f_j^{n+1} - f_j^{n-1} + f_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}. \quad (2.14)$$

Los esquemas mencionados facilitarán, en el Capítulo IV, la descripción de los métodos *Forward-Time Backward-Space* y DuFort-Frankel para la discretización de la ecuación de Lighthill-Whitham-Richards.

2.4. Consistencia, Estabilidad y Convergencia

Al abordar la resolución de ecuaciones diferenciales con métodos numéricos, resulta crucial comprender estos métodos antes de aplicarlos al modelo de Lighthill-Whitham-Richards. Esta comprensión garantizará que la solución numérica obtenida se aproxime de manera adecuada a la solución exacta del modelo indicado.

Por supuesto, las fórmulas de los esquemas anteriores no son seleccionadas al azar, sino que se derivan de una aproximación de la ecuación mediante el desarrollo de Taylor, tal como se explicó en las secciones anteriores. Para formalizar la aproximación de una ecuación diferencial en derivadas parciales mediante diferencias finitas, se introducen las nociones de **consistencia** y **estabilidad**.

En esta sección, se proporciona una definición de consistencia que es aplicable a cada ecuación diferencial en derivadas parciales que se pueda escribir como $F(u) = 0$. Se debe destacar que $F(u)$ es una notación para una función de u y sus derivadas parciales en cada punto (t, x) . Por lo general, un esquema de diferencias finitas se define para todos los índices posibles n y j mediante la expresión

$$F_{\Delta t, \Delta x} \left(\{u_{j+k}^{n+m}\}_{m^- \leq m \leq m^+, k^- \leq k \leq k^+} \right) = 0 \quad (2.15)$$

donde los enteros m^-, m^+, k^-, k^+ definen el ancho del conjunto de pares (n, j) del esquema respectivo.

2.4.1. Definición de consistencia

El esquema de diferencias finitas (2.15) se dice **consistente** con la ecuación diferencial parcial $F(u) = 0$, si, para cada solución *suficientemente regular* $u(t, x)$ de esta ecuación, el **error de truncamiento** del esquema, definido por

$$F_{\Delta t, \Delta x} (\{u(t + m\Delta t, x + k\Delta x)\}_{m^- \leq m \leq m^+, k^- \leq k \leq k^+}), \quad (2.16)$$

tiende a cero uniformemente con respecto a (t, x) , a medida que Δt y Δx tienden a cero independientemente.

Además, decimos que el esquema tiene **precisión** de orden p en espacio y orden q en tiempo si el error de truncamiento (2.16) tiende a cero como $\mathcal{O}((\Delta x)^p + (\Delta t)^q)$ cuando Δt y Δx tienden a cero.

Concretamente, un método se considera consistente si, para cualquier solución $u(t, x)$ que satisfaga la ecuación diferencial en derivadas parciales, el error de truncamiento tiende a cero con respecto a (t, x) cuando Δt y Δx tienden a cero independientemente.

2.4.2. Definición de estabilidad

Iniciamos denotando como $u^n = (u_j^n)_{1 \leq j \leq N}$ al valor de la solución aproximada en el punto (t_n, x_j) de la solución $u(t, x)$. Además, la condición inicial se discretiza como

$$u(0, x) \approx u_0(x_j) = u_j^0, \quad \forall j \in \{0, \dots, N+1\}.$$

A su vez, se considera la siguiente norma *con peso* sobre \mathbb{R}^N

$$\|u^n\|_p = \left(\sum_{j=1}^N \Delta x |u_j^n|^p \right)^{1/p} \quad \text{para } 1 \leq p < +\infty, \quad (2.17)$$

mientras que para el caso $p = +\infty$, la norma se define como

$$\|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N} |u_j^n|. \quad (2.18)$$

Recordemos que, en la práctica, a menudo se usa las normas correspondientes a los valores $p = 2$ y $p = +\infty$.

Definición 2.1 (Estabilidad). Un esquema en diferencias finitas se dice **estable** respecto a la norma $\|\cdot\|$, definida por (2.17), si existen una constante $K > 0$ independiente de los pasos de discretización Δt y Δx de tal manera que

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\| \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (2.19)$$

para una condición inicial u^0 arbitraria.

Definición 2.2 (Condicionally estable). El esquema en diferencias finitas se considera **condicionalmente estable** si es estable para ciertas combinaciones de pasos de discretización temporal y espacial. Es decir, si la condición (2.19) solo se cumple para los pasos Δt y Δx definidos por ciertas desigualdades.

2.4.3. Definición de convergencia

Una característica importante de un esquema de diferencias finitas es la manera en que se aproximan las derivadas parciales, lo cual influye en su capacidad de *convergencia*. La convergencia asegura que, con una discretización *suficientemente fina*, el esquema pueda proporcionar resultados precisos, acercándose a la solución exacta de la ecuación diferencial.

Definición 2.3 (Convergencia). Un esquema en diferencias finitas que aproxima una ecuación diferencial en derivadas parciales con una discretización temporal Δt y espacial Δx , se dice que es convergente si

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\sup_{t_n \leq T} \|u_j^n - u(t_n, x_j)\| \right) = 0$$

donde $\|\cdot\|$ denota una norma apropiada, como por ejemplo la norma definida en (2.17) o (2.18).

2.4.4. Estabilidad de Von Neumann

Probar la estabilidad de un esquema en diferencias finitas directamente a partir de la definición es bastante complicado, en general. En su lugar, es más fácil utilizar herramientas del Análisis de Fourier para evaluar la estabilidad de los esquemas de diferencias finitas. En particular, se puede demostrar que, para alguna solución de un esquema de diferencias finitas u_j^n , existe una relación

entre la función y su Transformada de Fourier \hat{u}^n , que viene dada por

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \hat{u}^n(k) \exp(2i\pi kx) \quad (2.20)$$

donde $\hat{u}^n(k) = \int_{\Omega} u^n(x) \exp(-2i\pi kx) dx$ y la *Identidad de Plancherel*

$$\int_{\Omega} |u^n(x)|^2 dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{u}^n(k)|^2.$$

Desde el punto de vista práctico, el Análisis de Fourier puede facilitar la demostración de la estabilidad en la norma indicada en (2.17) cuando $p = 2$, de un esquema. Esta norma también es conocida como norma L^2 . Así, se introduce *modos* de Fourier en el esquema

$$u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi kx_j) \quad \text{con} \quad x_j = j\Delta x,$$

y se deduce el valor del *factor de amplificación* $A(k)$. Se aclara que, nos restringimos al caso escalar, es decir, cuando $A(k) \in \mathbb{C}$. La desigualdad

$$|A(k)| \leq 1 \quad \text{para todos los modos } k \in \mathbb{Z} \quad (2.21)$$

se denomina **la condición de estabilidad de Von Neumann**. Si se cumple la condición de estabilidad de Von Neumann, posiblemente con restricciones en Δt y Δx , entonces el esquema es estable para la norma (2.17) cuando $p = 2$, caso contrario es inestable.

Por otro lado, la expresión $A(k)$ recibe el nombre de factor de amplificación por motivo de que representa la cantidad en que se amplifica cada frecuencia en la solución al avanzar la solución un paso de tiempo. Esto se debe a que la Transformada de Fourier cambia la diferenciación en el dominio temporal en multiplicación en el dominio de frecuencia, propiedad que se encuentra descrita en el Capítulo 7, Teorema 7.39 de (Iorio, I.J., 2001).

Mientras que se puede encontrar una deducción detallada de la condición de estabilidad de Von Neumann en el Capítulo 2 de (Smith, G.D., 1985).

2.4.5. Teorema de Lax

Al momento de trabajar con esquemas de diferencias finitas es importante garantizar que el esquema sea convergente, es decir, que la solución aproximada sea bastante cercana a la solución exacta. Para lo cual, se recurre a dos conceptos importantes, que son: la consistencia y estabilidad. Así pues, el resultado que permite alcanzar la convergencia de nuestro esquema por medio de estos dos

conceptos, es el Teorema de Lax. Este teorema permite verificar de forma sencilla, si un esquema es convergente, ya que si intentamos verificar la convergencia directamente por la definición no siempre es posible, sin embargo verificar consistencia y estabilidad suele mucho más fácil, ya que generalmente involucra cálculos solamente algebraicos.

Teorema 2.1 (Lax). *Si el esquema de diferencias finitas es consistente y estable, entonces es convergente.*

Demostración: Para la demostración de este teorema se puede consultar en (Allaire, G.,2017, pág. 43) □

2.5. Modelo Lighthill-Whitham-Richards

El análisis y modelado del tráfico comenzó en los años 30 con el investigador norteamericano Bruce Douglas Greenshields quien realizó por primera vez métodos fotográficos y matemáticos para la medición de diferentes variables relacionadas con el flujo de tráfico y la descripción de su comportamiento (Greenshields, 1934). Tiempo más tarde sería Greenshields quien propondría la existencia de una relación lineal entre la velocidad y la densidad del tráfico, la cual viene dada por:

$$u = F \left(1 - \frac{k}{K} \right). \quad (2.22)$$

Donde F es la velocidad de flujo y K es la densidad del tráfico.

En 1955, James Lighthill y Gerald Whitham formularon una ecuación que describe el flujo de tráfico a través de la dinámica de fluidos (Lighthill, M. J. & Whitham, G. B., 1955). Éste modelo considera que ningún vehículo entra o sale de la vía, de manera que se conserva el número de vehículos. Así, al considerar la ecuación de conservación de masa o ecuación de continuidad para cualquier problema de flujo en un dominio acotado y fijo $V \subset \mathbb{R}^d$ y sea $k(t,x)$ la densidad en el punto x en un tiempo t , en ese caso se tiene:

$$\int_V k(t,x) dV.$$

corresponde a la masa del fluido contenido en V en un tiempo t . Además, se supone que la masa contenida en dicho volumen cambia tras la entrada y salida de material a través de la frontera ∂V de V . Sea n el vector normal unitario que apunta hacia el exterior de ∂V y $v(t,x)$ la velocidad de flujo en (t,x) . En tal caso, la tasa de flujo del fluido en la posición x , en el momento t estará dado por $k(t,x) v(t,x)$. Con lo cual, se tiene la siguiente tasa de cambio de masa en V en el momento t :

$$\frac{d}{dt} \int_V k(t,x) dV = - \int_{\partial V} k(t,x) v(t,x) \cdot n dS.$$

con dS como elemento de superficie. Ésta, es la ecuación de conservación de la masa en forma integral. De modo que, para poder convertirla a su forma diferencial se utiliza el Teorema de la Divergencia, el cual permite transformar una integral de superficie en una integral de volumen :

$$\int_{\partial V} k(t,x) v(t,x) \cdot n dS = \int_V \nabla \cdot (k(t,x) v(t,x)) dV$$

Por tanto, se logra escribir la ecuación de conservación de la masa en forma integral como:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial}{\partial t} k(t,x) dV + \int_V \nabla \cdot [k(t,x) v(t,x)] dV &= 0 \\ \int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} k(t,x) + \nabla \cdot [k(t,x) v(t,x)] \right] dV &= 0 \end{aligned}$$

Y dado que el volumen es arbitrario, el integrando debe anularse idénticamente en el dominio espacial del flujo (Fernández, R. & Ortega, J., pág. 67). Esto implica la siguiente forma diferencial de la ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \nabla \cdot (kv) = 0$$

o, en una dimensión espacial,

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(kv)}{\partial x} = 0$$

Que es la ecuación de conservación de la masa en forma diferencial. En términos del flujo, esta ecuación puede escribirse como:

$$\frac{\partial k(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial q(t,x)}{\partial x} = 0$$

Así, la ecuación de conservación viene dada por:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \tag{2.23}$$

Donde k y q representan la densidad del tráfico y la tasa de flujo, respectivamente. Mientras que, x es el espacio y t el tiempo. Adicionalmente, el modelo LWR suele ir acompañado de la relación fundamental de flujo de tráfico dada por:

$$q = uk. \tag{2.24}$$

Donde u es la velocidad media espacial de los vehículos que circulan por el espacio considerado en

cuestión.

Así pues, el modelo LWR tiene por objetivo ilustrar la relación fundamental existente entre las variables: densidad, velocidad y flujo. Además, viene dado por (2.22)-(2.24), es una ecuación diferencial parcial hiperbólica, la cual será simulada numéricamente a través del esquemas FTBS y del esquema DuFort-Frankel, para aproximar la derivada de la función en un punto dado. Se recuerda que los modelos tipo LWR, deben aproximarse numéricamente tal como se sugiere en (Treiber, M. y Thiemann, C., 2013, pág.90.).

En el Capítulo IV, se utilizarán cada una de las bases teóricas proporcionadas en este capítulo, a fin de utilizar la diferenciación numérica para aproximar las soluciones del modelo LWR. Adicionalmente, se estudiará la estabilidad, consistencia y convergencia tanto del esquema FTBS como del esquema DuFort Frankel, comparandolos en diferentes escenarios del modelo LWR.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

El presente capítulo detalla el marco metodológico, el cual proporciona una base sólida y estructurada. Se detalla el enfoque, diseño y alcance que se utilizaron para responder a los objetivos planteados y abordar el problema de investigación. Asimismo, se presentan cada una de las actividades que fueron consideradas para garantizar no sólo la correcta ejecución del trabajo de integración curricular, sino también su validez y la confiabilidad de los resultados obtenidos.

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, tipo, métodos, técnica e instrumentos de investigación

El presente trabajo de integración curricular, fue llevado a cabo bajo un enfoque cualitativo, con alcance descriptivo y un diseño de investigación documental. Esto se debe a que su objetivo se enfocó principalmente en la revisión bibliográfica de fuentes secundarias, con el fin de comprender y detallar esquemas de diferencias finitas, como son: el esquema FTBS y esquema de DuFort-Frankel. En tal virtud, el presente trabajo de integración curricular adopta un enfoque cualitativo con el objetivo de profundizar en los fundamentos teóricos del modelo LWR, así como las propiedades de consistencia, estabilidad y convergencia de los esquemas en diferencias finitas mencionados anteriormente.

Asimismo, la metodología contempla un alcance de investigación descriptivo que abarca los métodos de diferencias finitas, y se enfoca en el análisis de propiedades y las características del modelo matemático LWR, las cuales serán implementados en Python para la resolución de problemas concretos utilizando el método de diferencias dinifinitas.

Además, el diseño de investigación del presente trabajo de integración curricular es documental ya que tiene por objetivo revisar y reflexionar sistemáticamente la bibliografía relacionadas con temas de diferenciación numérica, métodos de diferencias finitas, consistencia, estabilidad y convergencia de esquemas numéricos.

Estos tres aspectos metodológicos permitieron consolidar un documento que sirva como guía para la comprensión y la aplicación de métodos de diferencias finitas en modelos matemáticos asociados al flujo de tráfico vehicular; así como para los estudiantes de la carrera de Matemática de la ESPOCH, que se encuentren interesados en el proceso de discretización de ecuaciones diferenciales parciales por medio de esquemas de diferencias finitas.

Así pues, para alcanzar el propósito de la investigación planteada se plantearon las siguientes actividades:

1. Selección y organización de material bibliográfico.
2. Revisión y análisis crítico de la bibliografía, para entender y describir los aspectos relevantes de la ecuación LWR y su discretización; así como una breve descripción del método de las características.
3. Asimilar a detalle los esquemas en diferencias finitas: DuFort-Frankel y FTBS.
4. Utilización del lenguaje de programación Python para la implementación de los métodos propuestos y su comparación de la resolución de la ecuación LWR.
5. Descripción y análisis de los resultados.
6. Consolidación del documento de titulación.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

En el presente capítulo, se desarrolló el estudio de las propiedades de estabilidad, consistencia y convergencia tanto del esquema FTBS como del esquema DuFort-Frankel, con base en las referencias teóricas propuestas. Además, se llevó a cabo el estudio analítico en el que se concretaron las simulación del modelo LWR en Python. Para lo cual, se realizó la aproximación de la siguiente ecuación en derivadas parciales, por medio de los esquemas de diferencias finitas ya mencionados. Consideramos un problema de valor inicial dependiente del tiempo, definido en un dominio acotado $\Omega =]0, L[$, donde se busca $k : [0, T] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} \frac{\partial k}{\partial t}(t, x) + \frac{\partial q}{\partial x}(t, x) = 0, & \forall t \in]0, T[, \quad \forall x \in]0, L[\\ k(0, x) = k_0(x), & \forall x \in]0, L[\end{cases} \quad (4.1)$$

Esta ecuación es el conocido modelo LWR que describe la evolución del flujo de tráfico en un dominio dado a lo largo del tiempo, en función de la densidad de vehículos y la velocidad del flujo. Es un ejemplo de una *ecuación diferencial hiperbólica*. La función $k(\cdot, \cdot)$, solución a esta ecuación, describe la densidad de vehículos en una ubicación dada x en el tiempo. En adición, la densidad de tráfico de los vehículos, que está relacionada con el flujo q y la velocidad u según la siguiente relación:

$$q(k) = k u(k).$$

Por otro lado, el modelo de Greenshield conecta la densidad de tráfico k y la velocidad del tráfico u mediante una relación lineal expresada así:

$$u(k) = u_{\max} \left(1 - \frac{k}{k_{\max}} \right)$$

donde u representa la velocidad del tráfico en una densidad de tráfico dada; u_{\max} es la velocidad de flujo libre, que representa la velocidad máxima cuando la densidad del tráfico es baja y k_{\max} densidad máxima de tráfico que la carretera puede manejar sin congestión.

4.1. Método de las características para el modelo LWR

Para resolver la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0, \quad q = uk$$

utilizando el método de las características, primero necesitamos encontrar las *curvas características*. Esto implica resolver el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx}{ds} = u, \quad \frac{dk}{ds} = 0$$

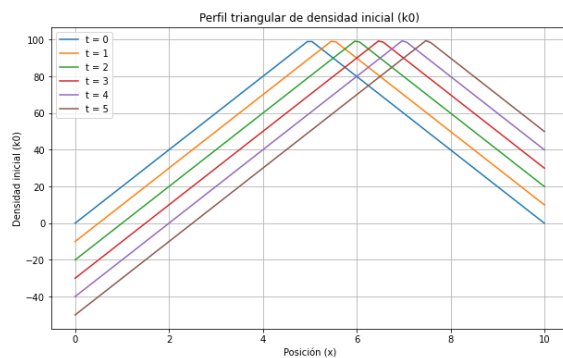
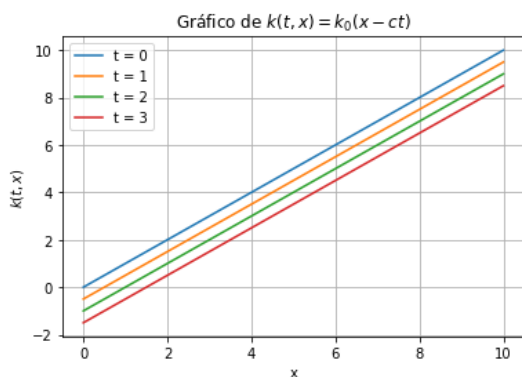
La última ecuación indica que k es constante a lo largo de las curvas características, lo que significa que k es una función constante a lo largo de cada curva característica.

Una vez que se han encontrado las curvas características, podemos escribir la solución general de k como una función de estas curvas. Si k_0 es el valor de k en alguna curva característica inicial (es decir, para $s = 0$), entonces la solución general para k es:

$$k(t, x) = k_0(x - ct)$$

donde k_0 es una función arbitraria de las variables t y x . Esto significa que el valor de k en cualquier punto (t, x) es igual al valor de k en la curva característica que pasa por ese punto en el tiempo $t = 0$.

En resumen, si $q = uk$, entonces la solución de la ecuación diferencial parcial utilizando el método de las características implica que k es constante a lo largo de las curvas características y su valor en cualquier punto (t, x) se determina por el valor de k en la curva característica que pasa por ese punto en $t = 0$.



(a) Densidad inicial k_0 : constante

(b) Densidad inicial k_0 : Triangular

Ilustración 4-1: Perfiles de densidades iniciales de tráfico vehicular

Realizado por: Paredes, Andrea, 2024.

4.2. Bien posicionamiento del problema

En Matemática, un problema *bien planteado* o bien posicionado es un *problema de valor inicial* o de Cauchy, el cual posee al menos una solución $u(x,t)$ la cual es única. Así, la existencia de soluciones se refiere a la capacidad del modelo para encontrar una solución que satisfaga las ecuaciones y las condiciones dadas. Además, la solución única $u(x,t)$ depende de las condiciones iniciales. En tal virtud, es pertinente que modelo LWR esté bien planteado, es decir, que sus soluciones garanticen su existencia, unicidad y estabilidad. Lo que asegura que el problema tenga soluciones significativas y que estas soluciones sean estables y predecibles.

Para profundizar en este aspecto, se recomienda consultar el artículo "Coupling of Lighthill-Whitham-Richards and Phase Transition Models" de Mauro Garavello y Benedetto Piccoli. Este artículo demuestra la existencia de soluciones al problema de Cauchy con datos iniciales arbitrarios de variación acotada, mediante la técnica de seguimiento del frente de onda. Así como el artículo "The Entropy Solutions for the Lighthill-Whitham-Richards Traffic Flow Model with a Discontinuous Flow-Density Relationship".

4.3. Discretización del modelo LWR mediante esquemas de diferencias finitas

En esta sección discretizamos la ecuación (4.1) mediante esquemas de diferencias FTBS y DuFort-Frankel.

4.3.1. Esquema FTBS

Para llevar a cabo la formulación en diferencias finitas de la ecuación LWR por medio del esquema FTBS, debemos recordar que la derivada temporal es aproximada a través de la diferencia finita hacia adelante (Forward-Time), mientras que la derivada espacial se aproxima por medio de la diferencia finita hacia atrás (Backward-Space). Por lo que las ecuaciones (2.22)-(2.24), quedarán discretizadas como se ve a continuación.

i. Ecuación de LWR:

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \quad (4.2)$$

Donde $k_j^{n+1} = k(n\Delta t, j\Delta x)$.

ii. Relación fundamental de flujo de tráfico

$$q_j^n = u_j^n k_j^n. \quad (4.3)$$

iii. Relación entre velocidad y densidad

$$u_j^n = F \left(1 - \frac{k_j^n}{K} \right). \quad (4.4)$$

Una vez discretizadas las tres ecuaciones que conforman el modelo LWR de acuerdo al esquema FTBS, resta expresarlo en una sola ecuación. Para ello, se empieza por sustituir (4.4) en (4.3) como sigue:

$$\begin{aligned} q_j^n &= u_j^n k_j^n. \\ q_j^n &= \left[F \left(1 - \frac{k_j^n}{K} \right) \right] k_j^n. \\ q_j^n &= F k_j^n - \frac{F}{K} k_j^n k_j^n. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Ahora se sustituye la ecuación (4.5) en la ecuación (4.2), obteniendo así:

$$\frac{F k_j^n}{\Delta x} - \frac{\frac{F}{K} k_j^n k_j^n}{\Delta x} - \frac{F k_{j-1}^n}{\Delta x} + \frac{\frac{F}{K} k_{j-1}^n k_{j-1}^n}{\Delta x} = \frac{k_j^n}{\Delta t} - \frac{k_j^{n+1}}{\Delta t}. \quad (4.6)$$

Se multiplica por Δt la ecuación (4.6), obteniendo así:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} F k_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F}{K} k_j^n k_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} F k_{j-1}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F}{K} k_{j-1}^n k_{j-1}^n = k_j^n - k_j^{n+1}. \quad (4.7)$$

Se despeja el término k_j^{n+1} de la ecuación (4.7), obteniendo así:

$$k_j^{n+1} = k_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F}{K} k_j^n k_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} F k_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} F k_{j-1}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \frac{F}{K} k_{j-1}^n k_{j-1}^n.$$

Sacamos factor común de k_j^n , k_{j-1}^n y $\frac{\Delta t}{\Delta x} F$ respectivamente. Obteniendo así la formulación en diferencias finitas del modelo LWR por medio del esquema FTBS:

$$k_j^{n+1} = k_j^n \left[1 - \frac{\Delta t}{\Delta x} F \left(1 - \frac{k_j^n}{K} \right) \right] + k_{j-1}^n \left[\frac{\Delta t}{\Delta x} F \left(1 - \frac{k_{j-1}^n}{K} \right) \right]. \quad (4.8)$$

A partir de la (4.8) se obtiene el siguiente esquema FTBS para (4.1):

$$k_j^{n+1} = k_j^n [1 - r(1 - c)] + k_{j-1}^n [r(1 - d)] \quad (4.9)$$

con $r := \frac{\Delta t}{\Delta x} F$, $c := \frac{k_j^n}{K}$ y $d := \frac{k_{j-1}^n}{K}$.

Y a su vez, (4.9) puede expresarse mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} k_j^2 \\ k_j^3 \\ \vdots \\ k_j^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_j^1 \\ k_j^2 \\ \vdots \\ k_j^n \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} (1-r) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-r) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-c) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-c) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-c) \end{pmatrix} \right] \\ + \begin{pmatrix} k_{j-1}^1 \\ k_{j-1}^2 \\ \vdots \\ k_{j-1}^n \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & r & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1-d) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (1-d) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-d) \end{pmatrix} \right].$$

Ahora, se supone que el vector de valores de la solución $\mathbf{k}^{n+1} = [k_1^{n+1}, k_2^{n+1}, \dots, k_N^{n+1}]^T$ de las ecuaciones de diferencias finitas en el nivel de tiempo $n + 1$ está relacionado con el vector de valores de solución en el nivel de tiempo n por la ecuación

$$\mathbf{k}_j^{n+1} = \mathbf{k}_j^n [(\mathbb{I} - \mathbf{r})(\mathbb{I} - \mathbf{c})] + \mathbf{k}_{j-1}^n [\mathbf{r}(\mathbb{I} - \mathbf{d})].$$

donde \mathbf{k}_j^{n+1} y \mathbf{k}_j^n representan los vectores de soluciones en los pasos de tiempo $n + 1$ y n respectivamente, en el punto de la malla j , mientras que \mathbf{k}_{j-1}^n representa el vector de soluciones en el paso de tiempo n en el punto de la malla $j - 1$. Por otro lado, \mathbf{r} , \mathbf{c} y \mathbf{d} son las matrices diagonales de $N \times N$ que corresponden a los coeficientes indicados en la discretización (4.1).

Una consecuencia práctica de esta notación es el estudio de la estabilidad a partir de las normas matriciales de $(\mathbb{I} - \mathbf{r})(\mathbb{I} - \mathbf{c})$ y $\mathbf{r}(\mathbb{I} - \mathbf{d})$, las cuales deben ser compatibles con una norma de \mathbf{k} . Esto implica asegurar que la solución numérica de una ecuación diferencial parcial no crezca incontrolablemente con el tiempo. Estas condiciones generalmente se relacionan con propiedades de las matrices de coeficientes en la ecuación discretizada.

Al analizar los valores propios de la matriz de coeficientes, se pueden derivar criterios de estabilidad, asegurando que la solución numérica permanezca acotada en el tiempo. Esto es crucial para obtener resultados precisos y confiables en simulaciones numéricas tal como se encuentra detallada en el Capítulo 2 de (Smith, G.D., 1985).

4.3.2. Esquema DuFort-Frankel

Para llevar a cabo la formulación en diferencias finitas de la ecuación LWR por medio del esquema DuFort-Frankel, debemos recordar que la derivada temporal es aproximada a través de la diferencia finita central de primer orden, mientras que la derivada espacial se aproxima por medio de la diferencia finita central de segundo orden. Por lo que las ecuaciones (2.22)-(2.24), quedarán discretizadas como se ve a continuación.

i. Ecuación de conservación:

Derivada temporal: Diferencia finita central de primer orden:

$$\frac{\partial k}{\partial t} \approx \frac{k_j^{n+1} - k_j^{n-1}}{2\Delta t}.$$

Derivada espacial: Diferencia finita central de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \approx \frac{q_{j+1}^n - 2q_j^n + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

Además, se debe reemplazar el término q_j^n por:

$$q_j^n = \frac{q_j^{n+1} + q_j^{n-1}}{2}.$$

Por lo que la aproximación de la derivada espacial será:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} \approx \frac{q_{j+1}^n - q_j^{n+1} - q_j^{n-1} + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.$$

De modo que (2.23) quedará discretizada cómo sigue:

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{q_{j+1}^n - q_j^{n+1} - q_j^{n-1} + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0. \quad (4.10)$$

ii. Relación fundamental de flujo de tráfico

$$q_j^n = u_j^n k_j^n. \quad (4.11)$$

iii. Relación entre velocidad y densidad

$$u_j^n = F\left(1 - \frac{k_j^n}{K}\right). \quad (4.12)$$

Una vez discretizadas las tres ecuaciones que conforman el modelo LWR de acuerdo al esquema DuFort-Frankel, resta expresarlo en una sola ecuación.

Para ello se empieza sustituyendo (4.12) en (4.11) como sigue:

$$\begin{aligned}
 q_j^n &= u_j^n k_j^n. \\
 q_j^n &= \left[F \left(1 - \frac{k_j^n}{K} \right) \right] k_j^n. \\
 q_j^n &= F k_j^n - \frac{F}{K} k_j^n k_j^n.
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

Ahora se sustituye la ecuación (4.13) en la ecuación (4.10), obteniendo así:

$$\begin{aligned}
 \frac{k_j^{n+1}}{2\Delta t} &= -\frac{F k_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\frac{F}{K} k_{j+1}^n k_{j+1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{F k_j^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{\frac{F}{K} k_j^{n+1} k_j^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{k_j^{n-1}}{2\Delta t} \\
 &+ \frac{F k_j^{n-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{\frac{F}{K} k_j^{n-1} k_j^{n-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{F k_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{\frac{F}{K} k_{j-1}^n k_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}.
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Se multiplica la ecuación (4.14) por $2\Delta t$, obteniendo así:

$$\begin{aligned}
 k_j^{n+1} &= -\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F k_{j+1}^n + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K} k_{j+1}^n k_{j+1}^n + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F k_j^{n+1} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K} k_j^{n+1} k_j^{n+1} \\
 &+ k_j^{n-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F k_j^{n-1} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K} k_j^{n-1} k_j^{n-1} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F k_{j-1}^n + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K} k_{j-1}^n k_{j-1}^n.
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

Sacamos factor común de k_{j+1}^n , k_j^{n+1} , k_j^{n-1} , k_{j-1}^n y $\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F$ respectivamente, obteniendo así la formulación en diferencias finitas del modelo LWR por medio del esquema DuFort-Frankel:

$$\begin{aligned}
 k_j^{n+1} &= k_{j+1}^n \left[-\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F \left(1 - \frac{k_{j+1}^n}{K} \right) \right] + k_j^{n+1} \left[\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F \left(1 - \frac{k_j^{n+1}}{K} \right) \right] \\
 &+ k_j^{n-1} \left[1 + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F \left(1 - \frac{k_j^{n-1}}{K} \right) \right] + k_{j-1}^n \left[\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F \left(-1 + \frac{k_{j-1}^n}{K} \right) \right].
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

De manera análoga, el esquema DuFort-Frankel puede ser expresado bajo un sistema de ecuaciones, para ello se reescribe la ecuación (4.15) como sigue:

$$\begin{aligned}
 k_j^{n+1} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F k_j^{n+1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K} k_j^{n+1} k_j^{n+1} &= -\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F k_{j+1}^n + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K} k_{j+1}^n k_{j+1}^n + k_j^{n-1} \\
 &+ \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F k_j^{n-1} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K} k_j^{n-1} k_j^{n-1} \\
 &- \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F k_{j-1}^n + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K} k_{j-1}^n k_{j-1}^n.
 \end{aligned} \tag{4.17}$$

A continuación, se reescribe la ecuación (4.17) como sigue:

$$k_j^{n+1} - rk_j^{n+1} + d(k_j^{n+1})^2 = -rk_{j+1}^n + d(k_{j+1}^n)^2 + k_j^{n-1} + rk_j^{n-1} - d(k_j^{n-1})^2 - rk_{j-1}^n + d(k_{j-1}^n)^2. \quad (4.18)$$

Donde, $r := \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} F$ y $d := \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \frac{F}{K}$, con lo cual de acuerdo a la ecuación (4.18) el esquema DuFort-Frankel puede ser expresado como el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} k_j^2 \\ k_j^3 \\ \vdots \\ k_j^{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_j^2 \\ k_j^3 \\ \vdots \\ k_j^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_j^2)^2 \\ (k_j^3)^2 \\ \vdots \\ (k_j^{n+1})^2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{j+1}^1 \\ k_{j+1}^2 \\ \vdots \\ k_{j+1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_{j+1}^1)^2 \\ (k_{j+1}^2)^2 \\ \vdots \\ (k_{j+1}^n)^2 \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} k_j^0 \\ k_j^1 \\ \vdots \\ k_j^{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_j^0 \\ k_j^1 \\ \vdots \\ k_j^{n-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_j^0)^2 \\ (k_j^1)^2 \\ \vdots \\ (k_j^{n-1})^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{j-1}^1 \\ k_{j-1}^2 \\ \vdots \\ k_{j-1}^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (k_{j-1}^1)^2 \\ (k_{j-1}^2)^2 \\ \vdots \\ (k_{j-1}^n)^2 \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

El sistema vectorial que representa la expresión dada en (4.19) es el siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_j^{n+1} &= \mathbf{k}_j^n ((\mathbb{I} - \mathbf{r})(\mathbb{I} - \mathbf{c})) + \mathbf{k}_{j-1}^n (\mathbf{r}(\mathbb{I} - \mathbf{d})) \\ &\quad - \mathbf{r}\mathbf{k}_{j+1}^n + \mathbf{d}\mathbf{k}_{j+1}^2 + \mathbf{k}_j^0 + \mathbf{r}\mathbf{k}_j^0 - \mathbf{d}\mathbf{k}_j^2 \\ &\quad - \mathbf{r}\mathbf{k}_{j-1}^n + \mathbf{d}\mathbf{k}_{j-1}^2. \end{aligned}$$

Como se pudo evidenciar, los sistemas matriciales descritos tanto por el esquema FTBS como por el esquema de DuFort-Frankel, no describen el sistema matricial usual dado $Ax = b$. En cambio, podemos observar que sus sistemas matriciales están compuestos por el producto de una matriz diagonal cuadrada y un vector.

4.4. Consistencia, Estabilidad y Convergencia de las diferencias finitas para la ecuación LWR

Es importante que un esquema numérico sea eficiente, es decir, que a medida que Δt , Δx tienden a cero sus soluciones se aproximarán hacia la solución de la ecuación. Cuando esto sucede, decimos que dicho esquema es convergente. En tal virtud, a continuación se presenta el estudio realizado de consistencia y estabilidad tanto del esquema FTBS como del esquema DuFort-Frankel.

4.4.1. Consistencia de los esquemas

Teorema 4.1. *El esquema FTBS (4.9) de la ecuación LWR es un esquema consistente.*

Demostración. Para probar que el esquema FTBS es consistente, se usa el desarrollo de Taylor de k_j^{n+1} y q_{j-1}^n con el fin de harrar el error de truncamiento. Para el caso de k_j^{n+1} , se utilizan los 4

primeros términos del desarrollo de Taylor al igual que en el caso de q_{j-1}^n , con el fin de aproximar la ecuación (4.2), es decir:

$$\begin{aligned} & \frac{k_j^{n+1} - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0. \\ & \frac{k_j^n + \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3) - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - \left[q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \mathcal{O}((\Delta t)^3) \right]}{\Delta x} = 0. \\ & \frac{k_j^n + \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3) - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - q_{j-1}^n + \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3)}{\Delta x} = 0. \\ & \frac{\Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3)}{\Delta t} + \frac{\Delta x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^3)}{\Delta x} = 0. \\ & \frac{\Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \frac{\mathcal{O}((\Delta t)^3)}{\Delta t}}{\Delta t} + \frac{\Delta x \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\mathcal{O}((\Delta x)^3)}{\Delta x}}{\Delta x} = 0. \\ & \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) + \frac{\partial q}{\partial x} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0. \end{aligned} \quad (4.20)$$

A continuación, se reescribe la ecuación (4.20) como sigue

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0. \quad (4.21)$$

Según el modelo LWR, la ecuación (4.21) se expresa como

$$\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) + \mathcal{O}((\Delta x)^2) = 0.$$

Por ende, el error de consistencia para este esquema viene dado por

$$e_{\Delta x, \Delta t} := \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 k}{\partial t^2} - \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2).$$

Y si Δx como Δt tienden a cero, se tiene como resultado que

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} e_{\Delta x, \Delta t} = 0.$$

Esta expresión indica que conforme los intervalos de espacio y tiempo se hacen infinitesimalmente pequeños, el error de consistencia tiende a cero. \square

Por lo tanto, se puede concluir que el esquema FTBS es consistente y presenta un error cuadrático tanto en tiempo como en espacio.

Teorema 4.2. *El esquema DuFort-Frankel (4.18) de la ecuación LWR es un esquema consistente.*

Demostración. Para probar que el esquema DuFort-Frankel es consistente, se usa el desarrollo de Taylor de $k_j^{n\pm 1}$, $q_j^{n\pm 1}$ y $q_{j\pm 1}^n$, con el fin de harrar el error de truncamiento. Para el caso de $k_j^{n\pm 1}$, se utilizan los 3 primeros términos del desarrollo de Taylor al igual en el caso de $q_j^{n\pm 1}$, mientras que en el caso de $q_{j\pm 1}^n$ se utilizaran los cinco primeros términos del desarrollo de Taylor, para aproximar la ecuación (4.10), es decir:

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{q_{j+1}^n - q_j^{n+1} - q_j^{n-1} + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0.$$

$$\begin{aligned} & \frac{k_j^n + \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) - [k_j^n - \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2)]}{2\Delta t} + \frac{-[q_j^n + \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \mathcal{O}((\Delta t)^2)] - [q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \mathcal{O}((\Delta t)^2)]}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{q_j^n + \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) + q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4)}{(\Delta x)^2} = 0. \end{aligned}$$

Se eliminan los términos opuestos:

$$\begin{aligned} & \frac{k_j^n + \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} + \mathcal{O}((\Delta t)^2) - k_j^n + \Delta t \frac{\partial k}{\partial t} - \mathcal{O}((\Delta t)^2)}{2\Delta t} + \frac{-q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} - \mathcal{O}((\Delta t)^2) - q_j^n + \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} - \mathcal{O}((\Delta t)^2)}{(\Delta x)^2} \\ & + \frac{q_j^n + \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4) + q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - \frac{(\Delta x)^3}{6} \frac{\partial^3 q}{\partial x^3} + \mathcal{O}((\Delta x)^4)}{(\Delta x)^2} = 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Al simplificar la ecuación (4.22) se tiene:

$$\begin{aligned} & \frac{2\Delta t \frac{\partial k}{\partial t}}{2\Delta t} + \frac{-q_j^n - \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} - \mathcal{O}((\Delta t)^2) - q_j^n + \Delta x \frac{\partial q}{\partial x} - \mathcal{O}((\Delta t)^2)}{(\Delta x)^2} + \frac{2q_j^n + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\mathcal{O}((\Delta x)^4)}{(\Delta x)^2} = 0. \\ & \frac{\partial k}{\partial t} - \frac{2q_j^n}{(\Delta x)^2} - \frac{2\mathcal{O}((\Delta t)^2)}{(\Delta x)^2} + \frac{2q_j^n}{(\Delta x)^2} + \frac{(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}{(\Delta x)^2} + \frac{2\mathcal{O}((\Delta x)^4)}{(\Delta x)^2} = 0. \\ & \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + 2\mathcal{O}((\Delta x)^2) - 2\mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Ahora resta hallar el error de consistencia, denotado por $e_{\Delta x, \Delta t}$.

$$e_{\Delta x, \Delta t} = \underbrace{\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}}_{=0} + 2\mathcal{O}((\Delta x)^2) + 2\mathcal{O}\left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right)$$

y así se ve que

$$e_{\Delta x, \Delta t} = 2\mathcal{O}\left((\Delta x)^2 + \left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2\right).$$

Ahora hallamos el límite del error de consistencia cuando Δx y Δt tienden a cero.

$$\lim_{\Delta x, \Delta t \rightarrow 0} e_{\Delta x, \Delta t} = 0.$$

□

Por tanto, podemos afirmar que el esquema de DuFort-Frankel es consistente y posee un error cuadrático tanto en tiempo como en espacio. La presencia de $\left(\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2$ sugiere que el error también depende de la relación entre Δt y Δx . Esta relación es importante en esquemas numéricos, ya que afecta la estabilidad y la precisión del método. Cuando la relación $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ es grande, se puede esperar que este término contribuya significativamente al error de consistencia.

4.4.2. Estabilidad de los esquemas

Teorema 4.3. *El esquema FTBS (4.9) es condicionalmente estable en la norma L^2 , siempre y cuando se cumpla la condición CFL $\frac{\Delta t}{\Delta x} u \leq 1$.*

Demostración. Partimos de (4.2), es decir

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^n}{\Delta t} + \frac{q_j^n - q_{j-1}^n}{\Delta x} = 0.$$

$$\frac{A^{n+1} e^{2i\pi jx} - A^n e^{2i\pi jx}}{\Delta t} + \frac{A^n e^{2i\pi jx} - A^n e^{2i\pi(j-1)x}}{\Delta x} = 0.$$

Multiplicamos por Δt , obteniendo así:

$$A^{n+1} e^{2i\pi jx} - A^n e^{2i\pi jx} + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^n (e^{2i\pi jx} - e^{2i\pi(j-1)x}) = 0.$$

Dividimos para $e^{2i\pi jx}$.

$$A^{n+1} - A^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} A^n \frac{\Delta t}{\Delta x} A^n e^{-2i\pi x} = 0.$$

Obtenemos que:

$$A - 1 = \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{2i\pi x} - u).$$

Por propiedades de valor absoluto, se tiene:

$$|A| = \left| 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} (e^{2i\pi x} - u) \right| \leq 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} |e^{2i\pi x} - u|.$$

De donde

$$1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} |e^{2i\pi x} - u| \leq 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x} [|e^{2i\pi x}| + |u|].$$

Así,

$$|A| \leq 1 + \frac{\Delta t}{\Delta x}(1 + u) \leq 1.$$

Donde,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}(1 + u) \leq 1, \text{ si y sólo si } (1 + u)\Delta t \leq \Delta x.$$

Además, tenemos que

$$1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}u(1 - e^{-2i\pi x}). \quad (4.23)$$

Recordemos que $e^{-2i\pi x} = \cos(2\pi x) - i \operatorname{sen}(2\pi x)$, con lo cual tenemos que:

$$1 - e^{-2i\pi x} = \underbrace{1 - \cos(2\pi x)}_{\geq 0} + i \operatorname{sen}(2\pi x) \geq 1 - \cos(2\pi x).$$

$$1 - e^{-2i\pi x} \geq 1 - \cos(2\pi x).$$

Por tanto, se sigue que (4.23) cumple la siguiente desigualdad.

$$1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}u(1 - e^{-2i\pi x}) \leq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}u(1 - \cos(2\pi x)).$$

Entonces, $|A| \leq \left| 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}u(1 - \cos(2\pi x)) \right| \leq 1$, si y sólo si:

$$-1 \leq 1 - \frac{\Delta t}{\Delta x}u(1 - \cos(2\pi x)) \leq 1.$$

$$-2 \leq -\frac{\Delta t}{\Delta x}u(1 - \cos(2\pi x)) \leq 0.$$

$$0 \leq \frac{\Delta t}{\Delta x}u(1 - \cos(2\pi x)) \leq 2.$$

Para que se cumpla la desigualdad $\frac{\Delta t}{\Delta x}u(1 - \cos(2\pi x)) \leq 2$, dado el hecho de que $1 - \cos(2\pi x) \leq 1$, es necesario que:

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}u \leq 1.$$

Por lo tanto, observamos que:

$$u\Delta t \leq \Delta x.$$

Por consiguiente, concluimos que el esquema FTBS es *condicionalmente* estable, siempre que

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}u \leq 1. \quad \square$$

Teorema 4.4. *El esquema DuFort-Frankel (4.18) es condicionalmente estable para la norma L^2 siempre y cuando se cumpla la condición CFL $\frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1$.*

Demostración. Para el desarrollo de la demostración, partimos de (4.10):

$$\frac{k_j^{n+1} - k_j^{n-1}}{2\Delta t} + \frac{q_{j+1}^n - q_j^{n+1} - q_j^{n-1} + q_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} = 0. \quad (4.24)$$

Se reescribe (4.24), teniendo en cuenta que $k_j^n = A^n e^{2i\pi jx}$, obteniendo así:

$$\frac{A^{n+1} e^{2i\pi jx} - A^{n-1} e^{2i\pi jx}}{2\Delta t} + \frac{A^n e^{2i\pi(j+1)x} - A^{n+1} e^{2i\pi jx} - A^{n-1} e^{2i\pi jx} + A^n e^{2i\pi(j-1)x}}{(\Delta x)^2} = 0.$$

Multiplicamos por $2\Delta t$ y a continuación dividimos para $e^{2i\pi jx}$, obteniendo así:

$$A^{n+1} - A^{n-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^n e^{2i\pi x} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{n+1} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{n-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^n e^{-2i\pi x} = 0.$$

Dividimos para A^n .

$$A - A^{-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} e^{2i\pi x} - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} e^{-2i\pi x} = 0.$$

$$A - A^{-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} (e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x}) - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{-1} = 0.$$

Recordemos que $\cos(2\pi x) = \frac{e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x}}{2}$, de donde se sigue que $e^{2i\pi x} + e^{-2i\pi x} = 2\cos(2\pi x)$.

$$A - A^{-1} + \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} [2\cos(2\pi x)] - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A - \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A^{-1} = 0.$$

Simplificando términos, obtenemos:

$$A - 1 = \frac{2\Delta t}{(\Delta x)^2} A - 2\cos(2\pi x).$$

De manera análoga a la demostración de la estabilidad del esquema FTBS, llegamos a la condición CFL para el esquema de DuFort-Frankel, la cual está dada por $2\Delta t \leq (\Delta x)^2$. □

4.4.3. Convergencia de los esquemas

Para determinar la consistencia de ambos esquemas, recurrimos al Teorema de Lax, el cual establece que un método numérico es convergente si y solo si es consistente y estable.

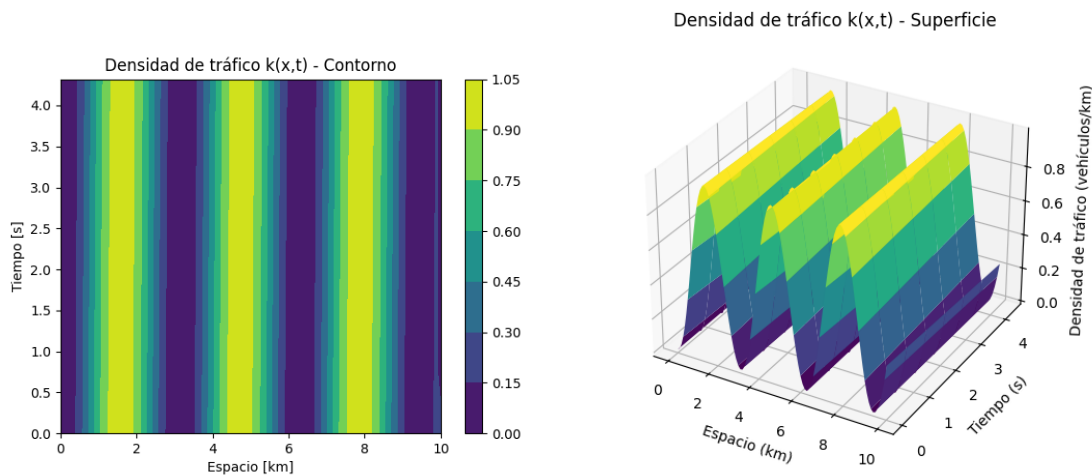
Por lo tanto, dado que tanto el esquema FTBS como el esquema de DuFort-Frankel son consistentes

y estables, también son métodos convergentes. Esto significa que, en los resultados obtenidos, los niveles de error disminuirán de la manera más rápida posible.

4.4.4. Simulación Numérica de la Ecuación LWR

A fin de comprender el comportamiento del flujo de tráfico vehicular, se realizó la simulación numérica de cada uno de los esquemas de diferencias finitas trabajados. Actividad que facilitó la comprensión del comportamiento de la ecuación de LWR discretizada tanto en el esquema FTBS como en el esquema DuFort-Frankel.

A continuación se presentan las gráficas de los esquemas FTBS y DuFort-Frankel. Para esto se consideraron los siguientes datos: velocidad flujo libre o velocidad máxima de $F = 50$ [km/h], densidad de atasco o densidad máxima de $K = 120$ [v/km], discretización espacial de $dx = 0.1$ [km], discretización temporal de $dt = 0.0002$ [h], longitud del banco de pruebas de $x_{max} = 10$ [km] y un tiempo total de simulación de $t_{max} = 4/3600$ [h].



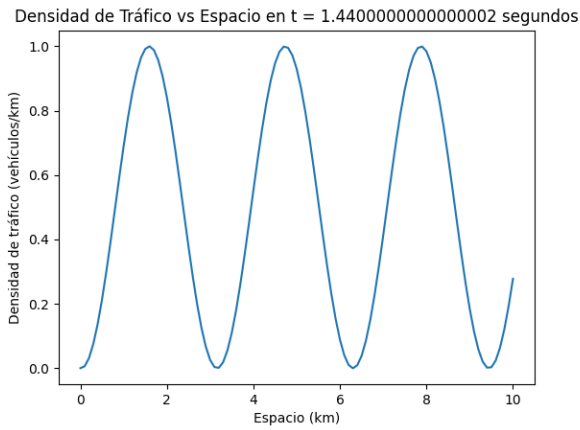
(a) Dénscidad-Contorno

(b) Dénscidad-Superficie

Ilustración 4-2: Dénscidad de tráfico vehicular

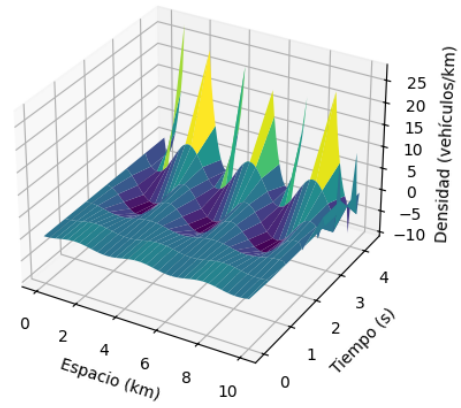
Realizado por: Paredes, Andrea, 2024.

La Figura 4-2a representa la densidad de tráfico mediante a través de curvas de nivel, donde el eje x representa el espacio, el eje y representa el tiempo (en kilómetros y en segundos, respectivamente). Las curvas de nivel nos indican los diferentes niveles de densidad de tráfico. Por otro lado, la figura 4-2b nos muestra cómo se visualiza la figura 4-2a en tres dimensiones, teniendo en cuenta que el eje z representa la densidad de tráfico.



(a) Dénalidad-Espacio

Densidad de Tráfico - Modelo LWR



(b) Dénalidad-Modelo LWR

Ilustración 4-3: Dénalidad de tráfico vehicular

Realizado por: Paredes, Andrea, 2024.

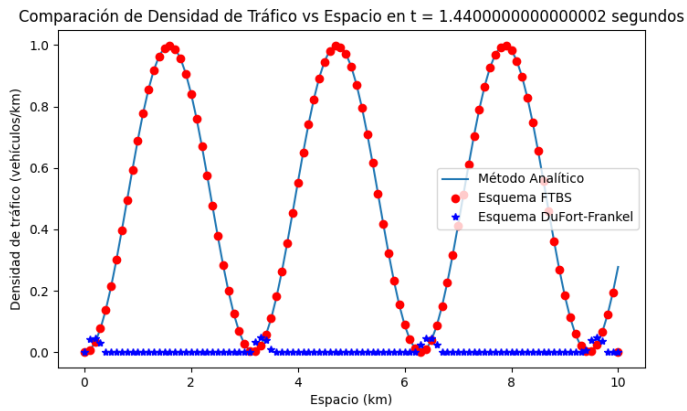


Ilustración 4-4: Comparación con la solución analítica

Realizado por: Paredes, Andrea, 2024.

En base a la Figura 4-4, se puede evidenciar que el esquema DuFort-Frankel, es el que más se aleja de la solución de la ecuación LWR, a diferencia del esquema FTBS que se proxima muy bien a la solución analítica.

Las siguientes simulaciones fueron realizadas con los siguientes parámetros: $dx = 50$, $dt = 2$, $F = \frac{53}{3,6}$, $K = \frac{680}{1000}$, obteniendo así lo siguiente:

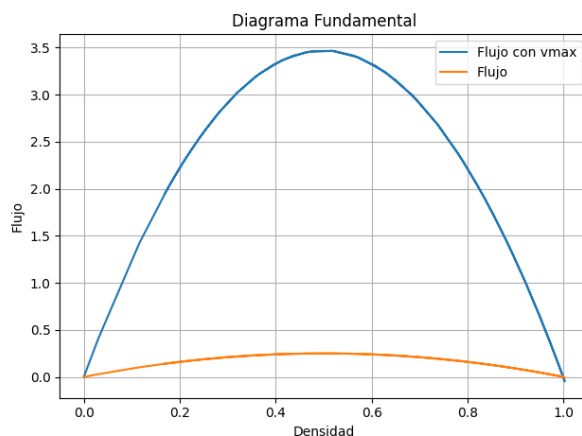


Ilustración 4-5: Diagrama fundamental

Realizado por: Paredes, Andrea, 2024.

La Figura 4-5, representa la relación entre la densidad y el flujo de tráfico. En la figura, la densidad está representada por el eje x , mientras que el flujo se representa en el eje y . El diagrama fundamental, es una herramienta que no solo analiza el comportamiento del tráfico en diferentes condiciones, sino que también permite identificar el flujo máximo posible (flujo libre) y la densidad máxima posible (densidad máxima) en una carretera. Además, muestra la relación no lineal que existe entre la densidad y el flujo, esto implica que a medida que aumenta la densidad, el flujo alcanza un máximo y luego disminuye.

Dinámica del modelo LWR - densidad

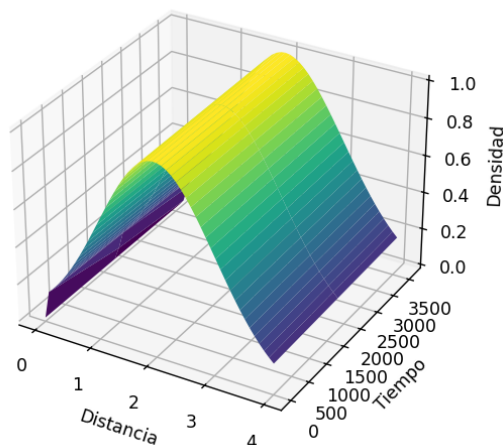


Ilustración 4-6: Dinámica del modelo LWR

Realizado por: Paredes, Andrea, 2024.

En la Figura 4-6, la superficie en 3D nos permite observar cómo el flujo de tráfico cambia a medida que la densidad de vehículos aumenta o disminuye. En general, se tiene que el flujo aumenta a medida que la densidad aumenta hasta alcanzar un punto máximo. Y tras alcanzar el flujo máximo, el flujo comienza a disminuir a medida que la densidad sigue aumentando.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este capítulo, se presentan las conclusiones obtenidas a partir del estudio del modelo LWR por medio de esquemas de diferencias finitas. Asimismo, se ofrecen recomendaciones que podrían ampliar y mejorar el uso de esquemas de diferencias finitas en la simulación del modelo LWR. A través de estas conclusiones y recomendaciones, se busca proporcionar un cierre al trabajo de integración curricular y orientar futuras investigaciones en este campo.

5.1. Conclusiones

1. Tras el estudio de las condiciones de consistencia, estabilidad y convergencia del esquema DuFort-Frankel, se observa que este es consistente con la ecuación de difusión, que es una ecuación parabólica. Sin embargo, el modelo LWR es un modelo hiperbólico, lo que significa que tiene características de onda y no se puede describir mediante una ecuación de difusión. Por lo tanto, el esquema Dufort-Frankel no es apropiado para resolver el modelo LWR en su forma original.
2. Después del estudio respectivo del esquema FTBS y de su simulación en Python, se puede observar que el esquema no sólo es convergente, sino que este se aproxima de forma correcta a la solución de la ecuación LWR.

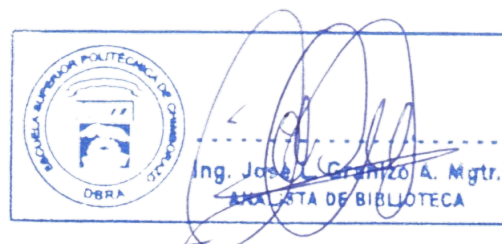
5.2. Recomendaciones

1. Se recomienda, ensayar el modelo LWR por medio de diferentes esquemas de diferencias finitas, como son: esquema de Godunov, esquema de MacCormack. Estos esquemas están diseñados específicamente para resolver ecuaciones hiperbólicas y son más precisos y estables para este tipo de modelos.
2. Dado que el presente trabajo fue realizado con datos sintéticos, se sugiere realizarlo con datos reales, para poder ver estudiar el comportamiento tanto del esquema FTBS como de DuFort-Frankel al ser simulados con datos reales.
3. Debido a que la ecuación LWR es hiperbólica de tipo conservación, se recomienda utilizar un esquema de volúmenes finitos. Ya que, este método posee el principio de conservación con lo cual se podrá aproximar la solución de mejor forma.

BIBLIOGRAFÍA

1. **ALLAIRE, G.**, 2007. Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modelling and numerical simulation. Oxford; New York: *Oxford University Press*. Numerical mathematics and scientific computation, ISBN 978-0-19-920521-9. QA297 .A52513 2007.
2. **BENALCÁZAR GÓMEZ, H.**, 2007. Análisis Numérico. Quito: s.n.
3. **BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. y BURDEN, A.M.**, 2016. Análisis numérico. Décima. S.l.: *Cengage Learning*. ISBN 978-607-526-411-0.
4. **CHÁVEZ, Z., LARA, L., CASTAÑEDA, J.**, 2019. El método de diferencias finitas. Teoría y práctica.[en línea]. *Editorial UPAO*. [consulta: 14 de diciembre de 2023]. Disponible en: <https://acortar.link/BbmLj5>.
5. **FERNÁNDEZ A, R. y DEXTRE QUIJANDRÍA, J.C.**, 2011. Elementos de la teoría del tráfico vehicular [en línea]. S.l.: *Pontificia Universidad Católica del Perú. Fondo Editorial*. [consulta: 11 mayo 2023]. ISBN 978-9972-42-953-8. Disponible en: <https://repositorio.pucp.edu.pe/index/handle/123456789/173103>.
6. **FERNÁNDEZ, R. y ORTEGA, J.**, 2017. MECÁNICA DE FLUIDOS. Notas de clase: Teoría, problemas y prácticas. [en línea]. *Universidad de Málaga*. [consulta: 23 de abril 2024]. Disponible en: http://www.fluidmal.uma.es/NCMF/Notas%20de%20clase_MF_2017.pdf.
7. **GADDAM, H. K., CHINTHIREDDY, A., RAO, K. R.**, 2016. Comparison of Numerical Schemes for LWR Model under Heterogeneous Traffic Conditions, *Periodica Polytechnica Transportation Engineering*, 44(3), pp. 132–140. <https://doi.org/10.3311/PPtr.8297>
8. **GREENSHIELDS, B. D., THOMPSON, J., DICKINSON, H., AND SWINTON, R.**, 1934. The photographic method of studying traffic behavior. In Highway Research Board Proceedings,
9. **GREENSHIELDS, B., CHANNING, W., MILLER, H., et al.**, 1935. A study of traffic capacity. In Highway research board proceedings. *National Research Council (USA), Highway Research Board.*, volume 13.



10. **HERNÁNDEZ, YADIRA.** ,2014. Métodos de integración geométrica para sistemas con función de Lyapunov. *Publicaciones y Divulgación Científica. Universidad de Málaga.* [consulta:17 de mayo de 2023]. Disponible en: https://www.uma.es/doctorado-imee/navegador_de_ficheros/REPOSITORIO-PD-IMEE/descargar/TesisYadira17x24.pdf
11. **IORIO JR, I. J. y DE MAGALHÃES IORIO, V.,** 2001. Fourier analysis and partial differential equations (No. 70). *Cambridge University Press.*
12. **LIGHTHILL, M. J. AND WHITHAM, G. B.,** 1955. On kinematic waves. ii. a theory of traffic flow on long crowded roads. In Proceedings of the Royal Society of London. *Series A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 229, no. 1178, DOI 10.1098/rspa.1955.0089.
13. **OMKAR, G. y KUMAR, S.V.,** 2018. Finite difference formulation of Lighthill Whitham Richards macroscopic model for traffic flow predictionn. *International Journal of Applied Mathematics*, vol. 31, no. 5, ISSN 1311-17258.
14. **RICHARDS, P.I.,** 1956. Shock Waves on the Highway. *Operations Research*, vol. 4, no. 1, ISSN 0030-364X.
15. **SMITH, G.D.,** 1985. Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods. *Oxford university press.*
16. **TREIBER, M. y THIEMANN, C.,** 2013. Traffic Flow Dynamics: Data, Models and Simulation. S.l.:*Springer.*
17. **VASQUÉZ, Y. y LAGUARDIA, J.,** 2017. Estudio del flujo vehicular mediante un modelo de Lighthill-Whitham-Richards. *Knowledge E.* vol. 2018, DOI 10.18502/keg.v3i1.1449.





ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
CERTIFICADO DE CUMPLIMIENTO DE LA GUÍA PARA
NORMALIZACIÓN DE TRABAJOS DE FIN DE GRADO

Fecha de entrega: 18/06/2024

INFORMACIÓN DEL AUTOR
Nombres – Apellidos: Andrea Belén Paredes Fonseca
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemática
<p style="text-align: center;"> Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo, M.Sc. Director del Trabajo de Integración Curricular</p> <p style="text-align: center;"> Ing. María de Lourdes Palacios Robalino Mgs. Asesora del Trabajo de Integración Curricular</p>