ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTORA: JESSICA ESTHEFANIA PAREDES MORALES

DIRECTOR: LIC. RAMÓN ANTONIO ABANCÍN OSPINA, MSc.

Riobamba – Ecuador

2023

Yo, Jessica Esthefania Paredes Morales, declaro que el presente Trabajo de Integración Curricular es de mi autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.
Como autora asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este trabajo de titulación; El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 10 de noviembre de 2023

Jessica Esthefania Paredes Morales
060469658-3

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

FACULTAD DE CIENCIAS

CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. **PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LA GEOMETRÍA ANALÍTICA A TRAVÉS DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS**, realizado por la señorita: **JESSICA ESTHEFANIA PAREDES MORALES**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

	FIRMA	**FECHA**
MSc. Carlos Eduardo Cova Salaya **PRESIDENTE DEL TRIBUNAL**		2023-11-10
MSc. Ramón Antonio Abancín Ospina **DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2023-11-10
MSc. María José Mendoza Salazar **ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR**		2023-11-10

DEDICATORIA

El resultado de este trabajo de investigación se lo dedico a mis padres. Debido a que ellos fueron las principales personas que me inculcaron a seguir esta carrera.

El esfuerzo realizado para culminar este trabajo de investigación se debe al apoyo incondicional y paciencia de mi madre Gladis Morales. Por sobrellevar todos los buenos y malos momentos que, a pesar de todo, ha estado siempre junto a mí.

Al igual, sé que desde el cielo mi padre Manuel Paredes, me ha acompañado durante este largo proceso. Es por ello, que le quiero dedicar este trabajo y lo que he logrado durante el tiempo que no ha estado presente.

Jessica

AGRADECIMIENTO

En primera instancia, agradezco a Dios, por la bendición de poder culminar la carrera y tener a mi familia presente en este logro.

Agradezco a mi madre, quien ha estado presente impulsándome cada día a lograr mis sueños y metas. También, a mi hermano que con sus consejos me motivó a no rendirme y a mi padre que me ha cuidado desde el cielo.

Expreso mi más sincero agradecimiento a mi tutor el MSc. Ramón Abancín, por la paciencia, el esfuerzo, los consejos y por todo el conocimiento impartido para la construcción de este trabajo de investigación. Gracias por encaminar este trabajo para que sea un documento de calidad.

Agradezco a todos los docentes de mi carrera, en especial a aquellos que me incentivaron en continuar en este camino universitario a pesar de los obstáculos.

Expreso mi gratitud a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo por brindar las condiciones necesarias para poder adquirir todos los conocimientos, ya sea en el ámbito profesional y personal, y así, poder desarrollarme como una ciudadana ejemplar en servicio de la comunidad.

Finalmente, agradezco a mis amigos Marco, Belén, Wilmer, Fernando y Joel, que fueron como mis hermanos, que me poyaron en todo momento y me ayudaron a salir en adelante. Gracias por las historias vividas y todas las horas de estudio que compartimos juntos, pues así, logramos que cada etapa de esta carrera universitaria sea más agradable y divertida.

Jessica

ÍNDICE DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

La Geometría Analítica es una rama de la matemática de fácil visualización en la vida cotidiana, pero a pesar de esto, existen dificultades en su enseñanza y aprendizaje, lo que ocasiona indeferencia en los alumnos al momento de estudiar esta ciencia. Además, existe la necesidad que adquieran conocimientos precisos y un aprendizaje significativo de Geometría Analítica, particularmente en cónicas. Por lo tanto, el objetivo del presente trabajo de investigación fue diseñar un documento referencial en el que se enuncie una propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de Geometría Analítica a través de la resolución de problemas. La metodología utilizada tuvo un enfoque cualitativo con alcance descriptivo y diseño de investigación documental. Debido a que se recolectó información de Geometría Analítica, resolución de problemas y herramientas tecnológicas utilizadas para el estudio, a través de fuentes bibliográficas verídicas, como lo son artículos científicos y libros. Además, se detalló las características más importantes de la investigación tales como: definiciones y características de problema, resolución de problemas y contextualización. Como principales resultados se plantearon seis fases para la resolución de problemas de Geometría Analítica, en específico cónicas. De igual manera, se abordó un conjunto de problemas contextualizados, en los cuales se aplican las fases propuestas para encontrar su respectiva solución. Ambos elementos, cristalizaron un documento referencial con características teóricas y prácticas donde se destacan los aspectos visuales de la Geometría. Este material servirá como instrumento alternativo para la enseñanza y aprendizaje de Geometría Analítica. Se concluye que a través de este documento referencial se pueda contribuir al desarrollo de una visión geométrica en los aprendices a partir de la resolución de problemas, así como también, mostrar un escenario atractivo para el estudio en otras áreas de la matemática.

Palabras clave: <RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS>, <HERRAMIENTAS TECNOLÓGICAS>, <GEOGEBRA (*SOFTWARE*)>, <PROBLEMAS CONTEXTUALIZADOS>, <FASES>, <CÓNICAS>, <GEOMETRÍA ANALÍTICA>.
2139-DBRA-UPT-2023

ABSTRACT

Analytical Geometry represents a branch of mathematics easily visualized in everyday life. Despite its practicality, challenges persist in its teaching and learning processes, leading to student indifference towards the subject. In addition, there is a need for learners to acquire accurate knowledge and meaningful learning of Analytic Geometry, particularly in conics. Therefore, the aim of this research was to address these issues by designing a referential document in which a methodological proposal for the teaching and learning of Analytical Geometry through problem-solving is enunciated. The methodology used had a qualitative approach with descriptive scope and documentary research design, given that information on Analytical Geometry, problem-solving, and technological tools used in the field was gathered from reliable bibliographic sources, including scientific articles and books. Moreover, the research meticulously details key aspects, such as problem definitions and characteristics, problem-solving, and contextualization. The primary outcomes of the study delineate a six-phase framework for problem-solving in Analytical Geometry, specifically conics. Likewise, a set of contextualized problems was explored, applying the proposed phases to derive solutions. Both elements generated a reference document with theoretical and practical characteristics where the visual aspects of Geometry are highlighted. This material will serve as an alternative instrument for the teaching and learning of Analytic Geometry. It is concluded that this reference document can contribute to the development of a geometric vision in learners through problem-solving, as well as to show an attractive scenario for the study of other areas of mathematics.

Keywords: <PROBLEM-SOLVING>, <TECHNOLOGICAL TOOLS>, <GEOGEBRA (SOFTWARE)>, <CONTEXTUALIZED PROBLEMS>, <PHASES>, <CONICS>, <ANALYTIC GEOMETRY>.

Lic. María Eugenia Camacho Oleas MSc.

060160959-7

INTRODUCCIÓN

Al observar atentamente a nuestro alrededor se puede apreciar que la Geometría se encuentra tanto de forma natural como en obras realizadas por el hombre. Por ejemplo, en el primer caso se tienen las órbitas del sistema solar que son de forma elíptica; la corola de un girasol tiene forma de una circunferencia; el recorrido de un ave puede ser de forma parabólica; entre otras. Mientras que, en el segundo caso, se pueden mencionar las estructuras de edificios, casas y puentes, es decir, los arquitectos suelen poner en práctica las herramientas que ofrecen las formas geométricas estudiadas en Geometría, en particular la Analítica, para estructurar y embellecer sus obras.

En este sentido, Fernández (2018) manifiesta que se coordinan armoniosamente la visión exterior, que contempla la naturaleza para descubrir sus leyes, es decir, como la Geometría puede llegar a explicar estos fenómenos; y la visión interior, que describe lo que es realizado por parte del hombre y lo que hace progresar la ciencia. Es así que, prestando atención al entorno se podría ilustrar conceptos relacionados con Geometría que comúnmente se estudian teóricamente en las aulas de clases. Esta perspectiva ayudaría a optimizar el proceso de Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría, particularmente con una visión práctica.

Partiendo de este hecho teórico-práctico (contenido-contextualizado, respectivamente) se tendrá un punto de apoyo sólido para desarrollar la visión geométrica en los aprendices, lo que abre un abanico de posibilidades para optimizar el estudio de Geometría. Específicamente, la Geometría Analítica (GA) es una rama de la matemática de fácil manifestación en diferentes ámbitos de la vida real, lo que se puede tomar como ventaja para la enseñanza y aprendizaje de esta temática, y así, incentivar y motivar a los estudiantes a un estudio más significativo, extenso y profundo.

Esto último se puede lograr articulandolo con el desarrollo tecnológico actual, el cual cuenta con una variedad de herramientas tecnológicas tales como: GeoGebra, Desmos, Descartes, Symbolab, entre otras; que pueden servir de apoyo para el proceso de enseñanza y aprendizaje de varios tópicos de Matemática, en especial para asignaturas como Geometría Análitica, especialmente por su carácter visual.

No obstante, a pesar de la presencia de la Geometría Analítica en el entorno y el uso de las herramientas tecnológicas actualmente, existe un rechazo por su estudio o dificultades en su enseñanza y aprendizaje tanto dentro como fuera de las aulas de clases, debido a que es común que piensen que la matemática es una ciencia no accesible para todas las personas, lo que predispone a los aprendices. En adición, los modelos de enseñanza y aprendizaje tradicionales, como por ejemplo, el modelo de aprendizaje por transmisión, puede no ser el apropiado para ciertos temas, y en este caso, para la enseñanza y aprendizaje de una temática tan visual como lo es la Geometría. Ambas circunstancias pueden influir en el proceso, así como en el interés en el área por parte de los aprendices.

Referente a lo mencionado, la resolución de problemas puede llegar a ser un recurso de gran ayuda para la enseñanza y aprendizaje de Geometría Analítica. Para así, motivar a los estudiantes a resolver problemas más complejos y buscar nuevas herramientas para resolverlos. Dado que varios autores como por ejemplo Skinner (1984) mencionan que el aprendizaje es el resultado de poner en práctica la resolución de problemas.

Concretamente, con esta investigación se cristalizó un documento referencial, donde se define detalladamente temas de importancia de este estudio, como lo son, cónicas, problemas, resolución de problemas, contextualización, fases y métodos que proponen algunos autores para la resolución de problemas. Así mismo, unas nuevas fases que se originaron a través de la investigación bibliográfica, como resultado del presente trabajo.

De este modo, se diseñaron lineamientos importantes e innovadores para la resolución de problemas de Geometría Analítica, enfocado a cónicas, donde el uso de herramientas tecnológicas y *softwares* matemáticos fueron fundamentales para este estudio. Además, se considera que a través de esta investigación, los estudiantes adquieran y desarrollen una visión geométrica, con el propósito de que puedan desempeñarse de mejor manera en futuros problemas matemáticos. De la misma manera, se procura presentar el documento referencial como un instrumento de apoyo para el estudio de Geometría Analítica en los estudiantes de la carrera de Matemática, al igual que en estudiantes que cursen esta asignatura en otras carreras de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH).

En definitiva, este trabajo de investigación se consolidó a través de 5 capítulos, donde se describen de la siguiente manera: el primer capítulo se inicia enmarcando el problema de investigación, en el cual se define el planteamiento del problema, donde se describen sus principales características para el desarrollo de la investigación, de igual manera se plantea el objetivo general y objetivos específicos, para así tener una guía de como se llevó a cabo el estudio del tema planteado, y por último su justificación, en el cual se fundamenta el problema de investigación.

En el segundo capítulo, se expuso los aspectos fundamentales del tema de estudio, en el cual se utilizó artículos, libros y tesis para sustentar esta sección, con la finalidad de presentar definiciones concretas y evidentes. Luego, en el tercer capítulo, se describe el marco metodológico, donde se especifica el enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación que se utilizaron en este estudio. Posteriormente, en el cuarto capítulo se expone el marco de análisis e interpretación de resultados, en el que se presenta las nuevas fases para la resolución de problemas y cómo se organizó el documento referencial que se propone. Para finalizar, en el quinto capítulo se muestra las conclusiones y recomendaciones de la investigación realizada.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

En la literatura existen autores como Fernández (2018) con el trabajo "la geometría para la vida y su enseñanza"; Camargo y Acosta (2012) con el artículo "la geometría, su enseñanza y su aprendizaje"; Aray *et al.* (2019) con el estudio relacionado con "la falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí". Estos son algunos trabajos de investigación a modo de ilustración que resaltan la problemática que existe entorno al proceso de enseñanza y aprendizaje de la Geometría.

Dentro del contexto anterior, existe la necesidad de que los estudiantes adquieran conocimientos sólidos relacionados con Geometría, particularmente en Geometría Analítica, que conduzca a un aprendizaje significativo de la temática. Es decir, el problema se centra en la dificultad latente dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje en esta rama de la matemática, particularmente, en el estudio de cónicas (circunferencia, parábola, elipse e hipérbola). Además, a pesar que la Geometría Analítica es de fácil manifestación en diferentes ámbitos de la vida real, no es común aprovechar esta perspectiva dentro del proceso en las aulas de clases.

Concretamente, con respecto a la problemática planteada en los párrafos anteriores, la asignatura de Geometría Analítica de la Carrera de Matemática de la ESPOCH no está extenta de su manifestación dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. Por tanto, se propone en el presente trabajo, diseñar una propuesta alternativa para el estudio de Geometría Analítica soportada en la resolución de problemas, herramientas tecnológicas y contextualización. En otras palabras, se espera presentar lineamientos generales que contemplen estrategias innovadoras que articulen la temática de cónicas de manera formal y contextualizada, soportadas en algunos *softwares* matemáticos que optimizen el proceso de enseñanza y aprendizaje de Geometría Analítica.

Concretamente, se diseñó un documento referencial que resalte tres aspectos fundamentales dentro del estudio actual de Matemática, a saber: a) Matemática formal (definiciones, propiedades y resultados fundamentales); b) Aplicabilidad (ejemplos contextualizados en la vida cotidiana); y c) Apoyo tecnológico (*softwares* matemáticos tales como GeoGebra, Desmos, Descartes, entre otros).

1.2. Objetivos

Objetivo general

Realizar un estudio de Geometría Analítica, a través de revisión bibliográfica (libros, artículos y tesis) relacionados con cónicas, para diseñar un documento referencial que contemple una propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica a través de la resolución de problemas, como material complementario alternativo para los estudiantes de la carrera de Matemática de la ESPOCH.

Objetivos específicos

- Realizar una búsqueda de conceptos de la resolución de problemas, mediante la utilización de artículos, tesis y libros, para elegir y organizar los aspectos fundamentales con respecto al tema.

- Analizar los métodos y fases que proponen algunos autores para la resolución de problemas, a través de la revisión bibliográfica, para orientar el estudio a una propuesta de nuevas fases.

- Detallar un nuevo grupo de fases para la resolución de problemas, por medio del estudio bibliográfico, para incorporarlo a la propuesta metodológica.

- Revisar los aspectos formales de la Geometría Analítica, con respecto a cónicas, mediante el uso de libros clásicos, para utilizar estas definiciones dentro de la resolución de problemas geométricos contextualizados con las nuevas fases propuestas.

- Analizar las herramientas tecnológicas existentes tales como: GeoGebra, Desmos, Symbolab, entre otras; mediante el uso de motores de búsqueda, para seleccionar aquellas que puedan servir en la verificación de las soluciones de los problemas contextualizados.

- Cristalizar un documento referencial, a través del empleo de la información adquirida en el estudio, para realizar una propuesta metodológica para la resolución de problemas enfocados a Geometría Analítica, específicamente cónicas.

1.3. Justificación

Se espera que el tema de investigación muestre un entorno útil e interesante, donde los estudiantes puedan adquirir información precisa de la resolución de problemas, herramientas tecnológicas y cónicas. Dado que la importancia de este estudio, es que los estudiantes adquieran el desarrollo de una visión geométrica, a través de la resolución de problemas de cónicas, al igual que el uso de herramientas tecnológicas y *softwares* matemáticos educativos.

Dentro de este contexto, el presente estudio se justifica principalmente debido a que el documento además de un complemento para el estudio de la Geometría Analítica en la Carrera de Matemática de la ESPOCH, podrá ser un documento visual, tecnológico y aplicativo. Esto con el propósito de incentivar el interés y motivación en los aprendices por el estudio de Geometría Analítica. Así mismo, generar un escenario más atractivo para los estudiantes, así como también un medio para contribuir al desarrollo de una visión geométrica en ellos.

Debido a la investigación, se presenta como principal aporte a la Carrera de Matemática de la ESPOCH un documento referencial que contemple los principales aspectos de la resolución de problemas, herramientas tecnológicas y cónicas. Con miras a proponer un proceso de enseñanza y aprendizaje de estos temas, principalmente de manera formal (caracterización de la Matemática) apoyada en el uso de herramientas tecnológicas (*software*) y contextualización (aplicabilidad).

Pues así, este material alternativo ofrece una oportunidad, donde los estudiantes que cursen la asignatura de Geometría Analítica y estudien el tema de cónicas en otras carreras de la ESPOCH, puedan adquirir un aprendizaje significativo con respecto a sus estudios académicos, a través de la resolución de problemas contextualizados. También, se debe mencionar que el documento referencial toma en cuenta la era digital actual, debido a la utilización de herramientas tecnológicas disponibles y de libre acceso.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

La Geometría es una de las ramas de la matemática, la cual puede estar presente en la vida cotidiana, es por ello que su aprendizaje puede ser contextualizado a través de la resolución de problemas. En este sentido, se presenta la siguiente estructura que se organizó según los intereses de la investigación y lo que mejor enmarque el propósito de este estudio.

2.1. Cónicas

Se utilizaron los libros de Geometría Analítica de los autores como: Lehmann (1989), Swokowski y Cole (2009), Benítez y Zaldivar (2011) y Kindle (2007). Debido a que fueron libros esenciales para la realización del primer capítulo del documento referencial y de la siguiente sección.

Las cónicas son un tema principal en el estudio de Geometría Analítica. De esta manera, Fuller y Tarwater (1998) mencionan que una cónica consiste en la gráfica de una ecuación de segundo grado en las coordenadas x y y. Esta denominación viene del hecho de que la curva se puede obtener como la intersección de un cono circular recto y un plano.

En este sentido, la Geometría Analítica se remonta a 1637 cuando se publicó *La Geometría* de René Descartes (1596-1650) conocido como su creador, en el cual introdujo dos ramas de la Matemática que no habían tenido ningún tipo de relación, a saber, el Álgebra y Geometría. Es decir, lo que para matemáticos de esa época no era coherente enlazar el álgebra y la geometría, Descartes lo presentó en su libro.

Ilustración 2-1: Retrato de René Descartes

Realizado por: Hals, Frans, 1648.

Al igual que Descartes, Pierre de Fermat (1601-1665) envío su investigación titulada *Introducción a los lugares planos y sólidos* el mismo año que publicó su obra Descartes, pero no fue publicada hasta un año después de la muerte de Fermat. Debido a este acontecimiento, normalmente en Geometría Analítica, utilizamos la mayoría de la notación matemática que Descartes utilizó al escribir su trabajo.

Ilustración 2-2: Retrato de Pierre de Fermat
Realizado por: Lefebvre, Rolland, s.f.

Pues así, la Geometría Analítica consiste en el uso del álgebra y geometría para el estudio de cuerpos geométricos con una característica básica, el uso de un sistema de coordenadas, representado a las figuras con ecuaciones algebraicas.

A continuación se presentan las definiciones elementales de las principales cónicas, como la circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Además, de ser piezas fundamentales en el proceso de formación de los estudiantes que se introducen en su estudio.

2.1.1. *Circunferencia*

Es un lugar geométrico que se mueve en el plano de modo que la distancia desde el punto P a otro punto fijo C es constante.
A continuación se muestran algunas ecuaciones importantes de la circunferencia:
Ecuación ordinaria: Sea $(h,k),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se define la ecuación de la circunferencia de centro (h,k) y radio $r > 0$ como:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2. \tag{2.1}$$

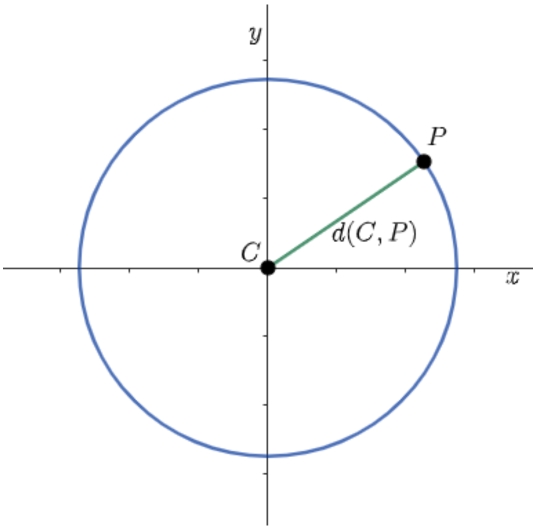


Ilustración 2-3: Circunferencia con centro en el origen del plano
Realizado por: Paredes, Jessica, 2023.

Ecuación general: Sea $(x,y) \in \mathbb{R}$ y además $A,\ B$ y C constantes, se define la ecuación como:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0. \tag{2.2}$$

2.1.2. *Parábola*

Es el lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano de modo que la distancia de P a un punto fijo F (foco) es igual a la distancia de P a una recta fija L (directriz).

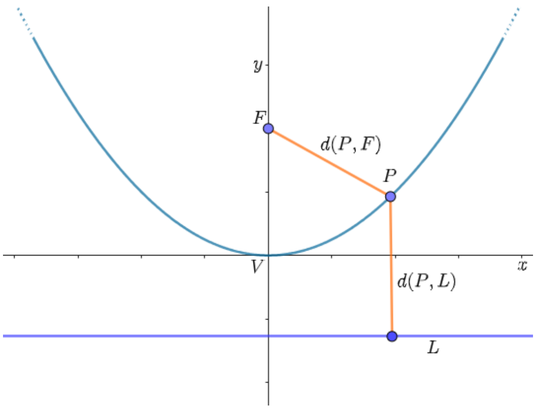


Ilustración 2-4: Parábola con vértice en el origen del plano
Realizado por: Paredes, Jessica, 2023.

A continuación se muestran algunas ecuaciones importantes de la parábola:

Ecuación de la parábola con vértice y eje focal paralelo al eje x: Sea $(h,k),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $p \in \mathbb{R}$ es la abscisa del foco, se define la ecuación de la parábola de vértice (h,k) y eje focal $y = k$ como:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h). \tag{2.3}$$

Ecuación de la parábola con vértice y eje focal paralelo al eje y**:** Sea $(h,k),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $p \in \mathbb{R}$ es la ordenada del foco, se define la ecuación de la parábola de vértice (h,k) y eje focal $x = h$ como:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k). \tag{2.4}$$

Ecuación general: Sea $(x,y) \in \mathbb{R}$ y además A, B, C, D y E constantes, se define la ecuación como:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0. \tag{2.5}$$

2.1.3. *Elipse*

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de modo que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 es igual a una constante y esta es mayor que la distancia entre los dos puntos.

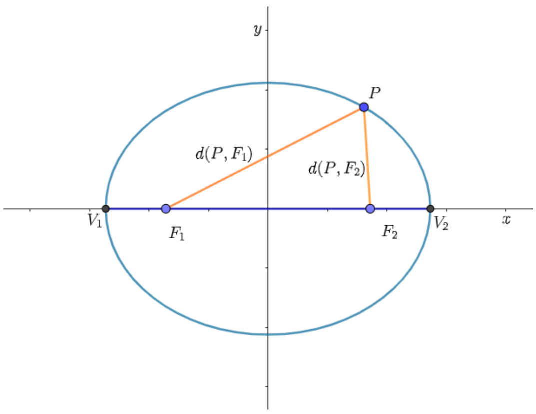


Ilustración 2-5: Elipse con centro en el origen del plano
Realizado por: Paredes, Jessica, 2023.

A continuación se muestran algunas ecuaciones importantes de la elipse:

Ecuación de la elipse con centro y eje focal paralelo al eje x**:** Sea $(h,k),(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ es la longitud del semi-eje mayor y $b \in \mathbb{R}$ es la longitud del semi-eje menor, se define la ecuación de la elipse de centro (h,k) y eje focal paralelo al eje x como:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1. \tag{2.6}$$

Ecuación de la elipse con centro y eje focal paralelo al eje y**:** Sea $(h,k),(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $a \in \mathbb{R}$ es la longitud del semi-eje mayor y $b \in \mathbb{R}$ es la longitud del semi-eje menor, se define la ecuación de la parábola de vértice (h,k) y eje focal paralelo al eje y como:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1. \tag{2.7}$$

Ecuación general: Sea $(x,y)\in\mathbb{R}$ y además $A,\ B,\ C,\ D$ y E constantes, se define la ecuación como:

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0. \tag{2.8}$$

2.1.4. *Hipérbola*

Es el lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano de modo que la diferencia entre las distancias de este punto a dos puntos fijos es igual a una constante.

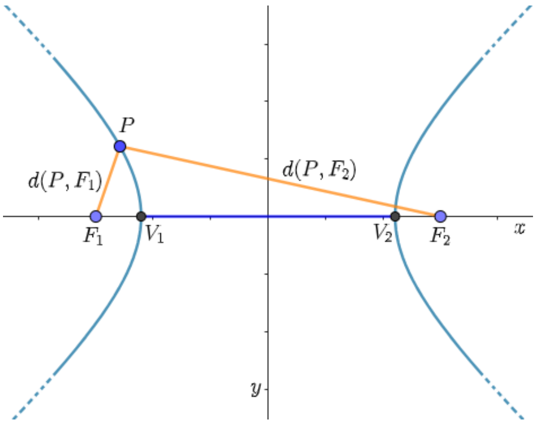


Ilustración 2-6: Hipérbola con centro en el origen del plano
Realizado por: Paredes, Jessica, 2023.

A continuación se muestran algunas ecuaciones importantes de la hipérbola:

Ecuación de la hipérbola con centro y eje focal paralelo al eje x: Sea $(h,k),(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $a\in\mathbb{R}$ es la longitud del semi-eje transverso y $b\in\mathbb{R}$ es la longitud del semi-eje conjugado, se define la ecuación de la hipérbola de centro (h,k) y eje focal $y=k$ como:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1. \tag{2.9}$$

Ecuación de la elipse con centro y eje focal paralelo al eje y: Sea $(h,k),(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $a\in\mathbb{R}$ es la longitud del semi-eje transverso y $b\in\mathbb{R}$ es la longitud del semi-eje conjugado, se define la ecuación de la parábola de vértice (h,k) y eje focal $x=h$ como:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1. \tag{2.10}$$

Ecuación general: Sea $(x,y)\in\mathbb{R}$ y además $A,\ C,\ D,\ E$ y F constantes, donde A y C tienen diferente signo, se define la ecuación de la hipérbola de ejes paralelos a los coordenados como:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \tag{2.11}$$

Para profundizar en el tema las definiciones de cónicas expuesto en esta sección, las cuales son estudiadas en detalle, ver el documento referencial que se encuentra en el ANEXO A.

2.2. Aspectos elementales de los problemas matemáticos y su resolución

Esta capítulo del documento referencial se organizó con respecto a la investigación realizada, en los que se tomó en cuenta los siguientes autores: Farooq (1980), Daros (2002), Hiebert *et al.* (1997), Pozo (1994), Piñeiro *et al.* (2015), Skinner (1984), Illuno *et al.* (2021), Allen y Garden (2002), Okereke (2006), Cai y Lester (2010), Pólya (1962), Pólya (1979), Mason *et al.* (1992), Guzmán (2006), González (2000), Zamora (2013), Meyer *et al.* (2001) y Wenglinsky (2002).

Los problemas matemáticos buscan encontrar una solución acertada, a través de una resolución efectiva, basándose en herramientas matemáticas y razonamiento lógico. Además, al resolverlos se busca que sean contextualizados y tengan un aprendizaje significativo. Dentro de esta perspectiva, se busca detallar los aspectos elementales de la resolución de problemas.

A continuación se presenta el esquema de como se organizó el segundo capítulo del documento referencial.

2.2.1. *Problema*

El estudio de cualquier rama de la ciencia, puede determinar ciertos inconvenientes que ayuden a obtener nueva información. De la misma manera, un problema de investigación genera nuevas ideas durante el tiempo que se lo aborda. Según Farooq (1980) "un problema suele indicar un desafío, cuya solución se requiere estudio e investigación" (p. 14). En este caso, al realizar el estudio de investigación, se adquiere habilidades y técnicas que son necesarias para encontrar fácilmente información.

2.2.2. *Resolución de problema*

El aprendizaje de nuevos de temas, se debe a la investigación que se realiza para obteber nuevo conocimiento, pues este proceso, es una resolución a un problema que se tiene. Según Skinner (1984) afirma que "la resolución de problemas se define como la estructura o modelo dentro del cual tienen lugar el pensamiento creativo y el aprendizaje" (p. 529). En este sentido, su resolución sirve como una herramienta para fomentar la creatividad y habilidad de encontrar una respuesta, ya sea en el ámbito matemático o en cualquier otro.

2.2.3. *Contextualización*

El conocimiento adquirido al momento de estudiar o investigar nuevos tópicos, se relacionan con los temas que se han aprendido con anterioridad. Por ende, se convierte en un aprendizaje significativo. Según Zamora (2013) dice que "la contextualización se define como la conexión entre los conocimientos y las experiencias" (p. 3). Es decir, el aprendizaje de los estudiantes incrementa cuando ellos pueden observar como los conceptos aprendidos en las clases se pueden usar en la vida cotidiana.

2.2.4. *Algunas fases propuestas para la resolución de problemas*

En la literartura existen varios autores que proponen fases y métodos para la resolución de problemas, entre ellos se pueden mencionar los siguientes autores:

Fases de González (2000)

A continuación, se describe las siguientes fases del autor:

1. Comprensión del problema: en esta fase se realiza una representación icónica del problema a través de un dibujo esquemático del mismo, luego una descripción verbal del enunciado dibujado y finalmente, una aproximación a una estrategia de solución.

2. Ejecución de la operación: aquí se realiza una manipulación de los elementos tangibles y se hace una descripción verbal de los elementos que intervienen en la ejecución de la operación.

3. Verificación de los resultados: en esta fase se realiza un análisis de los resultados obtenidos.

Fases de Pólya (1979)

El autor enlista las siguientes fases para la resolución de problemas como sigue:

1. Comprensión del problema: en este fase se debe comprender cuál es la incógnita, cuales son los datos y condiciones, si es posible cumplir con estas condiciones. Además, se debe tener una notación adecuada.

2. Diseño del plan: se debe descubrir que tipos de relaciones existe entre los datos recolectados y la incógnita del problema. Así como, ver si se realciona con un algún otro tipo de problema anterior.

3. Ejecución del plan: se realiza el plan de la resolución y se debe verificar cada paso a realizar.

4. Verificación de la solución obtenida: se comprueba el resultado obtenido y el razonamiento utilizado, y también, se revisa si existía otra forma de resolverlo.

Se recomienda ver el documento referencial en el ANEXO A, en donde se detalla con más precisión todo lo que engloba esta sección.

2.3. Tecnologías de la información y comunicación

Los autores que se utilizaron en este capítulo del documento referencial son los siguientes: Daher *et al.* (2022), Trejo (2018), García *et al.* (2018), Ain *et al.* (2019), Bizami (2023), Vlieghe (2014), Prieto (1989), Gros (2000), Vidal (2010), Marqués (1996) y Ledesma (2004).

La comunicación que se genera en la actualidad ha evolucionado, pues, las nuevas tecnologías han brindado facilidades para transmitir información, que puede originar nuevo conocimiento. Esto se ha debido a la conexión que se ha ido desarrollando entre las tecnologías y la comunicación.

Con respecto a lo mencionado, Baelo y Cantón (2009) definen las tecnologías de la información y comunicación (TIC) como la realización social que facilita los procesos de información y comunicación, gracias a los desarrollos tecnológicos, buscando la construcción y extensión del conocimiento que derive en la satisfacción de las necesidades de los integrantes de una determinada organización social. Por consiguiente, las tecnologías de la información y comunicación es lo que engloba a las herramientas tecnológicas y a *softwares* que se utilizan en esta investigación.

En este sentido, las herramientas tecnológicas y varios *softwares* educativos han sido desarrollados para ayudar en el aprendizaje. Por lo que, se describen sus definiciones en un contexto educativo y su uso en otros ámbitos.

2.3.1. *Herramienta tecnológica*

Varias actividades que se realizan en el diario vivir necesitan el uso de herramientas tecnológicas, pues así optimizan el tiempo para realizar esta actividad. Por lo que, se define las herramientas tecnológicas como dispositivos electrónicos, o conjunto de programas, que pueden ayudar a actividades cotidianas.

2.3.2. *Software*

La tecnología ha avanzado exponencialmente, que el uso de varios *softwares* se han facilitado para poder ser utilizado en varias ciencias. Según Prieto (1989) “software es conjunto de programas ejecutables por el ordenador, es decir, todas las materias relacionadas con la construcción y uso de los programas” (p. 2).

2.3.3. *Algunas herramientas tecnológicas y softwares matemáticos libres*

Dentro de este apartado, se enlista los siguientes programas informáticos, que fueron escogidos por su libre acceso y su fácil utilización con respecto a las funciones que ofrece, como soporte para el aprendizaje de temas matemáticos. Estos progrmas son GeoGebra, Desmos, Descartes y Symbolab. Para encontrar más información detallada de esta sección, ir al documento referencial que se encuentra en el ANEXO A.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1. Descripción de enfoque, alcance, diseño, técnicas e instrumentos de investigación empleadas

Primero, en este estudio se empleó un enfoque metodológico cualitativo con alcance descriptivo y diseño de investigación documental, puesto que principalmente se recopiló información de fuentes bibliográficas especializadas tales como: artículos y libros relacionados al tema de investigación, por lo general, disponibles en Internet a través de *Google* académico, para luego realizar una descripción detallada del tema de Geometría Analítica.

En este sentido, la investigación cualitativa implica una forma de pensar, una manera particular de acercamiento al objeto de estudio que busca descubrir lo nuevo, antes que verificar lo conocido, permitiendo comprender la complejidad, destacar las particularidades, innovar y crear conocimiento (Vasilachis, 2005). Así, para la presente investigación se enfocó en una recolección de datos, en especial, información puntual de Geometría Analítica y Herramientas Tecnológicas orientadas al aprendizaje de temas matemáticos, que ya han sido estudiados por otros autores, que sirvieron de punto de partida para el estudio de Geometría Analítica desde otra perspectiva. Tal como se meciona en la definición de investigación cualitativa, destacar las particularidades, en este sentido, recalcar lo más importante de Geometría Analítica, donde encaminen a los estudiantes hacia un aprendizaje significativo. La información que se obtuvo, no requirió de técnicas numéricas, sino más bien, de una indagación bibliográfica.

Según Yuni (2006) "el alcance descriptivo apunta a hacer una descripción de un tema bajo estudio, mediante la caracterización de sus rasgos generales, ya que su finalidad es describir la naturaleza del tópico a través de sus atributos" (p. 80). Por tanto, la importancia del alcance descriptivo para este trabajo radicó en detallar las propiedades y características más relevantes de una investigación relacionada con Geometría Analítica, herramientas tecnológicas y resolución de problemas, que articuladas derivaron en un diseño de estrategias innovadoras para la enseñanza y aprendizaje del tema de cónicas y en la elaboración de un documento referencial ameno y visual.

Dentro de este contexto, la investigación documental tomó un rol protagónico para el desarrollo del trabajo. Donde, según Guerrero (2015) "la investigación documental es una de las técnicas cualitativas que se encarga de recolectar, recopilar y seleccionar información de las lecturas de documentos, revistas, libros, grabaciones, filmaciones, periódicos, artículos resultados de investigaciones, memorias de eventos, entre otros" (p. 9). Es por ello que, la investigación documental permitió recolectar información, ampliar y profundizar en los principales tópicos que contempla la Geometría Analítica, las herramientas tecnológicas, la resolución de problemas y la contextualización del tema de cónicas, todos cristalizados a través de estrategias de enseñanza y aprendizaje.

Segundo, para diseñar el documento referencial que contempla estrategias de enseñanza y aprendizaje del tópico de Geometría Analítica, en específico cónicas, articulada con la resolución de problemas y herramientas tecnológicas, el proceso metodológico se llevó a cabo cubriendo las siguientes etapas investigativas:

E1) Revisión bibliográfica: se realizó con hincapié en la indagación, recolección y selección a fin y de interés relacionados con la Geometría Analítica, resolución de problemas y herramientas tecnológicas. En términos generales, las fuentes que se encuentran en la Internet, principalmente, en repositorios académicos accesibles y de confiabilidad.

E2) Proceso de selección y elección de herramientas tecnológicas: se utilizaron diferentes *softwares* matemáticos con el propósito de determinar aquel que facilite y optimice la enseñanza y aprendizaje de Geometría Analítica, en específico, cónicas.

E3) Diseño y materialización de una propuesta para la resolución de problemas: la cual contempló un cuerpo de estrategias innovadoras fundamentadas en tres aspectos esenciales para alcanzar un aprendizaje significativo de Geometría Analítica, a saber, matemática formal y resolución de problemas. Ambas apoyadas con el uso de herramientas tecnológicas, facilitando su aplicación a problemas contextualizados en la vida cotidiana.

Tercero, para la realización del formato y la escritura del documento referencial, al igual que el trabajo de integración curricular se utilizaron los siguientes instrumentos:

- Portátil, pues es un instrumento indispensable al momento de realizar varias actividades, como por ejemplo, crear documentos, procesar información, realizar tareas en menor tiempo y evitando errores. Por lo tanto, es cómo este instrumento formó parte fundamenal en la realización de este trabajo de investigación.

- Internet, debido a que es una red global de comunicación, se convierte en una herramienta importante al momento de realizar una investigación que necesite datos especializados. En este caso, se pudo obtener información esencial para esta investigación, pues este instrumento es de gran importancia, ya que sin su uso, el acceso a los datos deseados no habría sido posible.

- Buscadores de información, permiten obtener información que se necesite y sea precisa para la investigación, pues una de las ventajas de este instrumento, es que al utilizar palabras claves del estudio, permite encontrar información en menor tiempo. En este sentido, los buscadores que se utilizó para encontrar la información de esta investigación fueron *Google*, Eric, Scielo, entre otras.

- *Software* de escritura, pues el que se empleó para escribir este documento fue LaTeX, debido a que normalmente la escritura de documentos matemáticos se realizan en este programa informático. Además, de ser un *software* de libre acceso para redactar todo tipo de trabajos de investigación.

- Otro *software* que se utilizó para esta investigación fue GeoGebra, debido a que es una herramienta de libre acceso, de utilización fácil y comprensible, tanto para las personas que estudian matemática y temas relacionados a esta ciencia.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

4.1. Procesamiento, análisis e interpretación de resultados

En primer lugar, se realizó una búsqueda de datos relacionados a la investigación, que a través de ingresar palabras claves en los buscadores de información como *Google* académico, donde se obtuvo artículos, tesis y libros que gran importancia para este estudio. Luego, se revisó y seleccionó la bibliografía de interés, es decir, los artículos y otros documentos que tenían información relevante acerca de fases y métodos para la resolución de problemas.

Una vez realizado este proceso, se prosiguió con la elección y depuración de contenido, es decir que, luego de haber recolectado todos estos documentos, se tomó en cuenta a los autores que habían realizado algún tipo de investigación similar a esta, es decir, cuáles fueron las características que estos autores tomaron en cuenta para la realización de sus trabajos de investigación. En consecuencia, obteniendo información precisa y con aporte significativo a este estudio.

Posteriormente, se realizó un primer borrador, donde se propusó un conjunto de fases para la resolución de problemas, en el cual se sometió a ajustes de revisión. De este modo, se concretó la investigación bibliográfica realizada y se propusieron las siguientes fases para la resolución de problemas matemáticos relacionados al área de Geometría Analítica, en específico cónicas.

Cabe recalcar que, las fases que se proponen a continuación pueden ser utilizadas en otras áreas de la matemática. Debido a la naturaleza de esta investigación, se considera la resolución de problemas en Geometría Analítica, enfocado en cónicas.

F1) Lectura y comprensión del problema

En esta fase se indica todos los aspectos más importantes que ayudará a resolver el problema. Es decir, cómo podemos iniciar y abordarlo, y qué es lo que se quiere alcanzar al resolverlo, también se debe identificar la hipótesis y tesis, para poder encontrar una solución óptima. Cabe recalcar que se realiza una representación mental del problema, es decir, relacionarlo con algún problema que se haya resuelto anteriormente y encontrar aspectos similares que ayuden a abordar el problema actual.

Debido a que nuestro estudio se enfoca en Geometría particularmente cónicas, los aspectos a tomar en cuenta al resolver un problema geométrico, deben estar relacionados a la Geometría, para que así sea más fácil encontrar una solución. Para iniciar a resolver este problema geométrico debemos distinguir los aspectos más importantes del problema.

F2) Indagación de herramientas matemáticas para la solución

En esta fase se debe tomar en cuenta que herramientas matemáticas se tiene al alcance e identificar cuales se debe tener para desarrollar la solución del problema. La búsqueda de estas herramientas se puede realizar en libros matemáticos que estén relacionados al problema, o en la Internet, considerando que la información obtenida sea de fácil entendimiento.

En problemas geométricos, las herramientas matemáticas a tener en cuenta deben estar relacionados a Geometría, al igual que su búsqueda, deben ser en libros de Geometría. Se debe establecer que proposiciones, definiciones o teoremas de geometría que ya se conocen. En otras palabras, si los datos geométricos que nos ofrece el problema son suficientes para resolverlo o si es necesario buscar información adicional para abordarlo.

F3) Aplicación de herramientas matemáticas seleccionadas para resolver el problema

En esta fase se debe aplicar toda la información que se ha obtenido en las anteriores fases, es decir, encontrar la manera más óptima de emplear y manipular todas las herramientas matemáticas antes adquiridas. Luego se debe describir todo la información importante de una forma ordenada y correcta.

En el problema geométrico, se debe considerar las herramientas geométricas que se van a aplicar. Encontrando una manera eficiente de construir una solución coherente, que se adapte a lo establecido en la fase 1, es decir, con todas las herramientas que se consideró en la fase 2 llegar a encontrar y concluir la tesis identificada.

F4) Examinación del resultado obtenido

En esta fase se realiza una observación detallada del procedimiento ejecutado, de este modo, se revisa si no se realizó ningún tipo de error que pueda alterar el resultado final. Se debe recordar la información de la fase 1, es decir, lo que se quería alcanzar al resolverlo y a donde se quería llegar. Para así, efectuar una examinación sea más eficiente.

Dentro del problema geométrico que se resuelve, la examinación del resultado obtenido es esencial para verificar y analizar si el procedimiento que se ha realizado para la solución fue óptimo y también, identificar si ayudó a resolver el problema geométrico.

F5) Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados

En esta fase se analiza y revisa los resultados obtenidos a través de la implementación de herramientas tecnológicas, para así visualizar los resultados obtenidos, y los estudiantes logren de manera progresiva mejorar su forma de resolver problemas matemáticos de mayor dificultad.

Para verificar la solución obtenida del problema geométrico, es implementando herramientas tecnológicas, en este caso, se va a utilizar es GeoGebra, debido a su funcionalidad y sus características didácticas para demostrar figuras geométricas, en específico, cónicas. Puesto que es de gran ayuda para visualizar los resultados obtenidos y es más fácil detectar algún error, en caso de que exista.

F6) Conclusión de la solución del problema

En esta última fase se debe indicar todo el proceso realizado, que herramientas matemáticas se utilizó y como se verificó el problema, se describe todos los datos obtenidos de todas las anteriores fases y concluimos que resultado se obtuvo.

De igual manera se realizará para la resolución del problema geométrico. Se muestra las herramientas matemáticas geométricas utilizadas para el procedimiento y obtención de resultados. Además, se describe cómo se comprobó la solución y cuál fue la herramienta tecnológica utilizada para la verificación, en este caso, sería GeoGebra. Por último, se describe las conclusiones obtenidas.

Finalmente, se obtuvo un documento referencial, el cual se organizó según los interéses de la investigación y con respecto a todo la información que se consiguió.

1. **Capítulo 1:** Cónicas
   - 1.1. Circunferencia
   - 1.2. Parábola
   - 1.3. Elipse
   - 1.4. Hipérbola
2. **Capítulo 2:** Aspectos elementales de los problemas matemáticos y su resolución
   - 2.1. Problema
     - 2.1.1. Definición de problema
     - 2.1.2. Definición de problema enfocado a Matemática
   - 2.2. Resolución de problema
     - 2.2.1. Definición de resolución de problema
     - 2.2.2. Definición de resolución de problemas enfocado a Matemática
     - 2.2.3. Algunas fases para resolución de problemas en matemática
   - 2.3. Contextualización

3. **Capítulo 3:** Tecnologías de la información y comunicación

   3.1. Herramienta tecnológica

      3.1.1. Definición de herramientas tecnológicas

      3.1.2. Definición y características de herramientas tecnológicas educativas

   3.2. Software

      3.2.1. Definición de software

      3.2.2. Definición y características de software educativo

   3.3. Algunas herramientas tecnológicas y softwares matemáticos libres

      3.3.1 GeoGebra

4. **Capítulo 4:** Algunas aplicaciones para la resolución de problemas

   4.1. Fases propuestas para la resolución de problemas

   4.2. Resolución de problemas enfocados a Geometría Analítica: Cónicas

4.2. Discusión

Después de la cristalización del documento referencial donde se encuentran las fases propuestas, se debe mecionar que el documento referencial se propuso según los intereses de la investigación y lo que mejor enmarque la información que se desea transmitir a los aprendices. Pues el documento, se propone como un instrumento de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de Geometría Analítica.

Dicho esto, en el primer capítulo, Cónicas, se definen aspectos básicos de las cónicas, con el fin de que el aprendiz tenga una guía de definiciones y características importantes. Además, se pretende que el conocimiento en el área de Geometría Analítica sea útil al momento de utilizar las fases.

Así mismo, el segundo capítulo, se definen aspectos importantes para entender porqué la resolución de problemas es una herramienta de apoyo fundamental en el aprendizaje de la matemática. También, dentro de este capítulo se mencionan autores que han propuesto fases y métodos para la resolución de problemas, pues así, el aprendiz podrá saber cuales fueron las cualidades que se consideraron para realizar la propuesta de las fases.

Actualmente se está atravesando una era tecnológica, en donde varias actividades cotidianas se han visto en la necesidad de utilizar las nuevas tecnologías. Dentro de esto, se encuentran las actividades relacionadas con las tareas académicas. Dado que, la tecnología desempeña un rol importante en la enseñanza y aprendizaje, debido a esto, se concretó el tercer capítulo. De igual modo, el alumno tendrá información de algunos *softwares* y herramientas tecnológicas que pueden ser utilizadas como un instrumento de apoyo al momento de aprender nuevos temas matemáticos.

Para finalizar, el último capítulo se propone las fases para la resolución de problemas, de este modo, el estudiante podrá saber como aplicarlas según su conveniencia. Además, se propone problemas matemáticos de cónicas resueltos a través de la fases propuestas, así también, el aprendiz obtendrá información de como utilizarlas.

En concreto, el documento referencial se organizó en cuatro capítulos, cada uno ordenado de una manera en que el lector pueda adquirir información mientras va avanzando en la lectura del documento. Para que así, el último capítulo sea comprendido de manera apropiada. Además, el propósito del presente trabajo es contribuir al desarrollo de una visión geométrica a partir del estudio de cónicas a través de la resolución de problemas. Para esto, se utilizó, fases de la resolución de problemas y herramientas tecnológicas que cristalizaron esta acción.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Con respecto al objetivo principal de esta investigación, se puede decir que se alcanzó satisfactoriamente, puesto que, se concretó un documento referencial que esta conformado por cuatro capítulos: cónicas, aspectos elementales de los problemas matemáticos y su resolución, tecnologías de la información y comunicación, y algunas aplicaciones para la resolución de problemas. En este último capítulo, se destacan como principales resultados: las nuevas fases propuestas para la resolución de problemas y algunos problemas contextualizados de cónicas, en el cual se consiguió utilizar herramientas tecnológicas y *softwares* matemáticos como instrumentos para la verificación de resultados, lo que se convierte en una propuesta innovadora.

Específicamente, los conceptos de la resolución de problemas que se obtuvieron a través de la búsqueda bibliográfica fueron organizados correctamente de tal manera que introdujera a los estudiantes en este tópico. Segundo, se analizaron los métodos y fases que propusieron algunos autores para la resolución de problemas, en donde se destacarón las características más importantes y relevantes, para así proponer nuevas fases para la resolución de problemas, como resultado de está investigación.

Tercero, en virtud de lo analizado, se presentó de forma detallada las seis fases para la resolución de problemas matemáticos geométricos. En donde fueron desarrolladas con respecto a la información bibliográfica adquirida anteriormente. Cuarto, se obtuvieron definiciones necesarias del tópico de cónicas, teniendo en cuenta los aspectos importantes de este tema; además, de problemas contextualizados de Geometría Analítica, cuya solución se encontró a través de las fases propuestas por esta investigación para la resolución de problemas.

Quinto, se describió el *software* matemático ideal para este estudio, el cual fue GeoGebra. Debido a que cumplió con los intereses de la investigación. De igual manera, resultó fundamental indagar en herramientas tecnológicas matemáticas que contengan graficadoras, debido a la naturaleza del estudio, debido a que con este instrumento se pudo visualizar representaciones gráficas que corresponden a la matemática formal de las cónicas. Finalmente, se cristalizó un documento referencial como material alternativo para el proceso de enseñanza y aprendizaje de cónicas a través de la resolución de problemas.

5.2. Recomendaciones

Este trabajo de investigación abre un abanico de posibilidades puesto que, las fases que se proponen, tienen un enfoque para ser utilizadas ampliamente tanto en Geometría como en otras áreas de la matemática. Con lo que se orienta el uso de estas fases para la resolución de problemas en otros temas. Dada la estructuración del documento referencial, este puede ser utilizado como material de apoyo para la enseñanza y aprendizaje de la asignatura de Geometría Analítica, y por su naturaleza flexible en cuanto a las fases propuestas lo hace un material idóneo para ser incorporado a otras ramas de la matemática que se estudie en otras carreras de la ESPOCH.

Finalmente, el documento referencial puede ser empleado como un instrumento de investigación cuantitativa, ya que se podría tomar un grupo de estudio para aplicar la propuesta metodológica que se realiza en esta investigación. Es decir, utilizar un diseño pre-test antes de realizar el estudio, y al culminar, aplicar un diseño post-test, para así, recolectar datos acerca de su efectividad en la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes en cuanto al tópico de cónicas y medir de forma objetiva los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

AIN, S; et al. "A Review of Technological Tools in Teaching and Learning Computer Science". *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* [en línea], 2019, 15(11), pp. 1-17. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1305-8223. Disponible en: https://doi.org/10.29333/ejmste/109611

ALLEN, S.; & GTRADEN, J. *Best practices in collaborative problem solving for intervention design. In A. Thomas, & J. Grimes (Eds.), Best practices in school psychology IV*. Washington, DC-USA: National Association of School Psychologists, 2002, pp. 565582.

ARAY, C.; et al. "La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí". *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)* [en línea], 2019, 4(1), pp. 23-36. [Consulta: 17 febrero 2023]. ISSN 2550-6587. Disponible en: https://doi.org/10.33936/rehuso.v4i1.1622

BAELO, R.; & CANTÓN, I. "Las tecnologías de la información y la comunicación en la educación superior". *Comunicar* [en línea], 2009, (España), 35, pp. 1-12. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1988-3293. Disponible en: http://10.0.15.76/C35-2010-03-09

BENÍTEZ, R.; & ZALDIVAR, F. *Geometría Analítica Plana*. 1^{a} ed. México: Trillas, 2011.

BIZAMI, N.A; et al. "Innovative pedagogical principles and technological tools capabilities for immersive blended learning: a systematic literature review". *Education and Information Technologies* [en línea], 2023, (Suiza), 28(2), pp. 13731425. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1573-7608. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10639-022-11243-w

CAI, L.; & LESTER, F. "Why is teaching with problem solving important to student learning". *National Council of Teachers of Mathematics.* [en línea], 2010, (USA), 13(2), pp. 1-6. [Consulta: 15 febrero 2023]. Disponible en: https://inquiringmindsinbermuda.files.wordpress.com/2016/09/why-is-teaching-with-problem-sol
ving-important.pdf

CAMARGO, L.; & ACOSTA, M. "La Geometría, su enseñanza y su aprendizaje". *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, n° 32 (2012), (Colombia) p. 4-8.

DAHER, W; et al. “Elementary Teachers Development in Using Technological Tools to Engage Students in Online Learning”. *European Journal of Educational Research* [en línea], 2022, (USA), 11(2), pp. 1183-1195. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN-2165-8714. Disponible en: https://doi.org/10.12973/eujer.11.2.1183

DAROS, W. “£Qué es un marco teórico?”. *Enfoques* [en línea], 2002, (México), 14(1), pp. 73-112. [Consulta: 06 abril 2023]. ISSN 1514-6006. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=25914108

FAROOQ, R. A Comparative study of effectiveness of Problem Solving Approach and Traditional Approach of Teaching Social Studies to Secondary Schools Learners (Trabajo de titulación) (doctoral). University of Punjab Lahore, Pakistan. 1980. pp. 14-19.

FERNÁNDEZ, E. “La Geometría para la vida y su enseñanza”. *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería* [en línea], 2018, (Colombia), 6(1), pp. 33-61. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2346-030x. Disponible en: https://doi.org/10.15649/2346030X.475

FULLER, G.; & TARWATER, D. *Geometría Analítica*. 7^a ed. México: Addison-Wesley Iberoamericana México, 1998, p. 1

GARCÍA, M; et al. “Las Tic en la educación superior, innovaciones y retos / The ICT in higher education, innovations and challenges”. *RICSH Revista Iberoamericana De Las Ciencias Sociales Y Humanísticas* [en línea], 2018, 6(12), pp. 299-316. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2395-7972. Disponible en: https://doi.org/10.23913/ricsh.v6i12.135

GONZÁLEZ, T. “Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: un estudio evaluativo”. *Revista de Investigación educativa* [en línea], 2000, (España), 18(1), pp. 175-199. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 0212-4068. Disponible en: https://revistas.um.es/rie/article/view/121541

GROS, B. “Del software educativo a educar con software”. *Revista Quaderns Digital* [en línea], 2000, (España), 24(1), pp. 440-482. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1575-9393. Disponible en: http://www.quadernsdigitals.net/articuloquaderns.asp?IdArticle=3743

GUERREO, G. *Metodología de la investigación.*. 1^a ed. México: Grupo Editorial Patria, 2014.

GUZMÁN, M. *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. 2^a ed. España-Madrid: Pirámide, 2006.

HIEBERT, J; et al. *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding.* 1^a ed. Inglaterra: Heinemann, 2007.

ILLUNO, C; et al. “Exploratory Analysis of Problem Solving Based Learning for Mathematics Skills Acquisition in Tertiary Institutions”. *IOSR Journal of Mathematics* [en línea], 2021, 17(2), pp. 28-36. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2319-765X. Disponible en: https://www.iosrjournals.org/iosr-jm/papers/Vol17-issue2/Series-4/E1702042836.pdf

KINDLE, J. *Geometría Analítica*. 1^a ed. España: McGraw Hill, 2007.

LEDESMA, R. “Sistemas estadsticos de propósitos múltiples: una revisión de programas gratuitos”. *Metodología de Encuestas* [en línea], 2004, (España), 6(2), pp. 105-117. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1575-7803. Disponible en: http://casus.usal.es/pkp/index.php/MdE/article/view/956/897

LENHMANN, C. *Geometría Analítica*. 1^a ed. México: Editorial Limusa, 1989.

MARQUÉS, P. “El software educativo”. *Comunicación educativa y Nuevas Tecnologas* [en línea], 1996, (España), pp. 119-144. [Consulta: 15 febrero 2023]. Disponible en: https://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/educativo_de_pere_MARQUES.pdf

MASON, J; et al. *Pensar matemáticamente*. 1^a ed. Barcelona-Madrid: MEC-Labor, 1992.

MEYER, M; et al. “Innovation in curriculum: Context in mathematics curricula”. *National Council of Teachers of Mathematics* [en línea], 2001, 6(9), pp. 522-527. [Consulta: 15 febrero 2023]. Disponible en: https://doi.org/10.5951/MTMS.6.9.0522

OKEREKE, S. “Effects of Prior Knowledge of Application of Mathematics to Carrier Types and Gender on Students Achievement, Interest and Retention”. *STAN Proceeding of the 47th Annual Conference.*, (2006), (Nigeria) p. 253-289.

PIÑEIRO, J; et al. “£Qué es la resolución de problemas?”. *Boletín Redipe* [en línea], 2015, 4(2), pp. 6-14. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2256-1536. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/6495/

POLYA, G; et al. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1979.

POLYA, G. *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. USA: John Wiley & Son, 1962.

POZO, J; et al. *La solución de problemas*. Madrid-España: Santillana, 1994.

PRIETO, A; et al. *Introducción a la Informática*. 3^a ed. España: McGraw-Hill, 1989.

SKINNER, C. *Educational Psychology*. 4^a ed. India: Prentice Hall of India, 1984.

SWOKOWSKI, E.; & COLE, J. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. 13ª ed. México: CENGAGE Learning, 2009.

TREJO, H. "Herramientas tecnológicas para el diseño de materiales visuales en entornos educativos". *Sincronía* [en línea], 2018, (74), pp. 617-669. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1562-384X. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=513855742031

VASILACHIS, I. "Ontological and Epistemological Foundations of Qualitative Research". *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research* [en línea], 2009, (España), 10(2). [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1438-5627. Disponible en: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0902307

VIDAL, M; et al. "Software educativos". *Educ Med Super* [en línea], 2010, 4(1), pp. 97-110. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 0864-2141. Disponible en: http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S0864-21412010000100012&script=sci_arttext&tlng=en

VLIEGHE, J. " Education in an age of digital technologies: Flusser, Stiegler, and Agamben on the idea of the posthistorical". *Philosophy & Technology* [en línea], 2014, 27(4), pp. 519-537. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2210-5441. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s13347-013-0131-x

WENGLINSKY, H. "How schools matter: The link between teacher classroom practices and student academic performance". *Education Policy Analysis Archives* [en línea], 2002, 10(12), pp. 1-30. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1068-2341. Disponible en: http://epaa.asu.edu/epaa/v10n12/

YUNI, J.; & URBANO, C. *Técnicas para investigar: Recursos metodológicos para la preparación de proyectos de investigación*. 2ª ed. Córdoba-Argentina: Brujas, 2014.

ZAMORA, P. "La contextualización de las matemáticas". 2013. [Consulta: 20 febrero 2023]. Disponible en: http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/2323/Trabajo.pdf.

ANEXO

ANEXO A: DOCUMENTO REFERENCIAL.


Escuela Superior Politécnica de Chimborazo


Propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica a través de la resolución de problemas






Jessica Paredes Morales

Propuesta metodológica para la enseñanza y aprendizaje de la Geometría Analítica a través de la resolución de problemas

Autora:
Jessica Esthefanía Paredes Morales

"Dentro del mundo de la Matemática, el conocimiento y aprendizaje se convierte significativo al encontrar una resolución a un problema."

Paredes

Índice general

Introducción

Las formas geométricas simples pueden abrir un mundo de complejas conexiones matemáticas, donde el entorno que nos rodea se entrelaza con la geometría. Observar como las definiciones fundamentales de la geometría pueden llegar a moldear el mundo que nos rodea, es decir, la arquitectura, la naturaleza, las nuevas invenciones tecnológicas, entre otras. Es así que, explorando las formas geométricas que nos rodea, se puede conectar con los conceptos matemáticos formales.

En este sentido, el propósito de este presente libro es mostrar una nueva propuesta para la resolución de problemas, donde puedan ser aplicados a problemas de geometría analítica y otros temas matemáticos. Además, se presenta la resolución de problemas contextualizados a través de las fases propuestas, donde se pone en práctica los fundamentos de cónicas en aplicaciones contemporáneas. La finalidad de este libro es que sea autocontenido y accesible para los aprendices, enriqueciendo la comprensión del entorno en el que vivimos a través del entendimiento matemático.

La importancia de este libro es incentivar a que los estudiantes se adentren en la geometría y logren desarrollar una visión geométrica, un pensamiento lógico y abstracto. Donde, puedan aplicar el conocimiento adquirido en nuevas y más avanzadas áreas de la Geometría, convirtiéndose en un soporte teórico para sus futuros estudios. Por tanto, este libro servirá como un complemento para la formación académica de los estudiantes de la carrera de matemática de la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH). Además, puede ser utilizado como material alternativo para la enseñanza y aprendizaje de la asignatura de Geometría Analítica en otras carreras de la institución.

Dentro de este contexto, se presenta el documento referencial estructurado en cuatro módulos, donde se encontrarán definiciones elementales para la comprensión del tema. Es así que, el primer capítulo se detalla los fundamentos básicos de las cónicas, las cuales son, circunferencia, parábola, elipse e hipérbola. Es decir, se muestra definiciones básicas e importantes, sus respectivos elementos y sus ecuaciones principales. En el segundo capítulo, se describen los aspectos elementales de la resolución de problemas, como lo es la definición de problema, resolución de problemas, contextualización, todos ellos enfocados al ámbito matemático. De igual manera, se presenta las fases y modelos para la resolución de problemas de algunos autores. En el tercer capítulo, se indica las definiciones y características de herramienta tecnológica y *software*. Igualmente, se presenta algunas herramientas tecnológicas y *softwares* matemáticos educativos de libre acceso. Finalmente, el cuarto capítulo se expone la propuesta de nuevas fases para la resolución de problemas de geometría analítica, con respecto cónicas. Donde también, pueden ser aplicadas en otras áreas de la matemática. Adicionalmente, se presenta la resolución problemas contextualizados de cónicas, utilizando las nuevas fases.

Para finalizar, se recalca que las imágenes que se muestran en la portada del documento referencial son fotografías tomadas de la arquitectura ecuatoriana. La razón de utilizar estas fotografías es debido a que en sus estructuras se puede visualizar fácilmente las formas de ciertas cónicas que se van a estudiar en este documento.

Capítulo 1

Cónicas

1.1. Circunferencia

Definición 1.1.1: Circunferencia

La circunferencia es un lugar geométrico de un punto que se mueve en el plano $\mathbb{R}^2$ de tal manera que se mantiene una distancia constante de un punto fijo del plano.

Al punto que se mueve en el plano se nombrará $P(x, y)$, mientras que la punto fijo se llamará C.

Por lo que tomando la definición, se tiene:

$$C_{cir} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(C, P) = r\}.$$

Es decir, que C es el centro de la circunferencia y la distancia constante entre el punto fijo $P(x, y)$ y C es el radio r, donde $r > 0$.

$$d(C, P) = r.$$

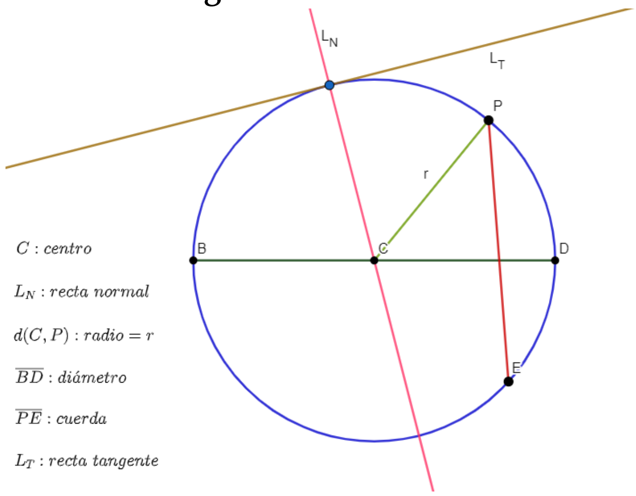
1.1.1. Elementos de la circunferencia

Los elementos de la circunferencia son:

- C centro de la circunferencia.
- $d(C, P)$ radio de la circunferencia.
- $\overline{BD}$ diámetro de la circunferencia.
- $\overline{PE}$ cuerda de la circunferencia.
- L_T recta tangente a la circunferencia.

- L_N recta normal a la circunferencia.

Figura 1. Circunferencia



Fuente: Elaboración propia

1.1.2. Ecuaciones de la circunferencia

Ecuación ordinaria

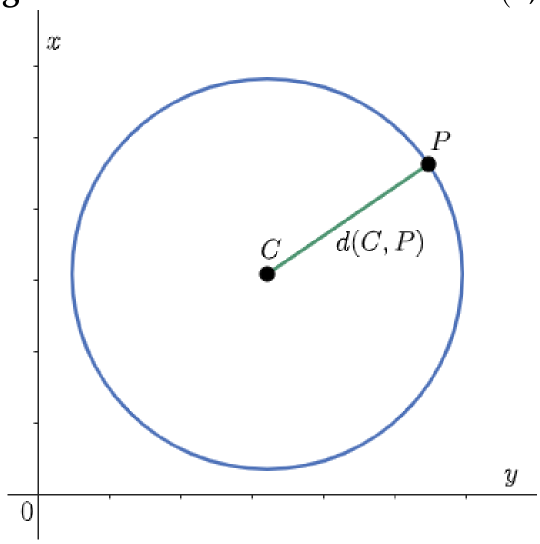
Teorema 1.1.1: Ecuación ordinaria de la circunferencia

La ecuación de una circunferencia con centro $C(h, k)$ y radio $r > 0$ es:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Demostración:

Figura 2. Circunferencia con centro $C(h, k)$



Fuente: Elaboración propia

Se considera la gráfica de una circunferencia, donde el punto $P(x,y)$ está en la circunferencia y $C(h,k)$ es el centro. Entonces usando la definición de circunferecia se tiene:

$$d(C,P) = r.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x,y)$ y $C(h,k)$

$$d(C,P) = r \Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r.$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}\right)^2 = r^2 \Longrightarrow (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Por lo que se consigue la ecuación ordinaria de la circunferencia. ■

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la circunferencia si el centro está en el punto $C(-5,12)$ y el punto $P(2,3)$ pertenece a la circunferencia.

La ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen $C(h,k)$ es

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Luego, se tiene que $C(-5,12)$ donde se deduce que $h = -5$ y $k = 12$. De la misma manera para $P(2,3)$ con $x = 2$ y $y = 3$, por lo que se reemplaza en la ecuación antes descrita.

$$\begin{aligned}
(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\
(2+5)^2 + (3-12)^2 &= r^2 \\
7^2 + (-9)^2 &= r^2 \\
49 + 81 &= r^2 \\
r^2 &= 130.
\end{aligned}$$

Así, se obtiene la siguiente ecuación

$$(x+5)^2 + (y-12)^2 = 130.$$

Ecuación canónica

Corolario 1.1.1: Ecuación canónica de la circunferencia

La ecuación de una circunferencia con centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$ y radio $r > 0$ es:

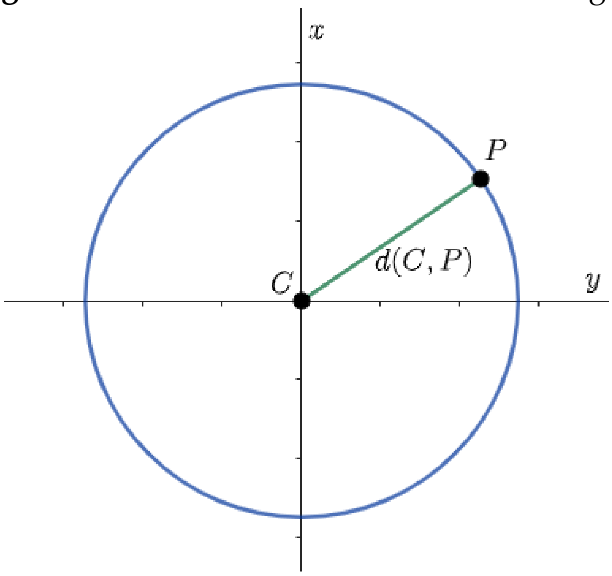
$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Demostración:

Se considera la gráfica de una circunferencia, donde el punto $P(x, y)$ está en la circunferencia y $C(0, 0)$ es el centro. Entonces usando la definición de circunferecia se tiene:

$$d(C, P) = r.$$

Figura 3. Circunferencia con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x, y)$ y $C(0, 0)$ se tiene:

$$d(C, P) = r \Longrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r.$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\left(\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2}\right)^2 = r^2 \Longrightarrow x^2 + y^2 = r^2.$$

Por lo que se consigue la ecuación canónica de la circunferencia. ■

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la circunferencia si pasa por los puntos $P_1(-2,0)$ y $P_2(2,0)$.

Se deduce que los dos puntos P_1 y P_2 se encuentran en el eje x, por lo que se va a encontrar el punto medio entre ellos, para obtener el radio de la circunferencia. Pues se asume esto, debido a que una circunferencia no puede pasar por tres puntos colineales. De este modo, la fórmula para encontrar el punto medio entre dos puntos es $P_m\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$, donde se tiene

$$\begin{aligned}\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) &= \left(\frac{-2+2}{2}, \frac{0+0}{2}\right)\\ &= \left(\frac{0}{2}, \frac{0}{2}\right)\\ &= (0,0).\end{aligned}$$

Por lo que el centro de la circunferencia es el origen del plano, entonces se sabe que la ecuación de la circunferencia es $x^2+y^2=r^2$. Luego, se reemplaza el punto $(2,0)$ en la ecuación,

$$\begin{aligned}x^2+y^2 &= r^2\\ 2^2+0^2 &= r^2\\ 4 &= r^2.\end{aligned}$$

Así, se obtiene que la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $P_1(-2,0)$ y $P_2(2,0)$ es $x^2+y^2=4$.

Casos particulares de la ecuación ordinaria

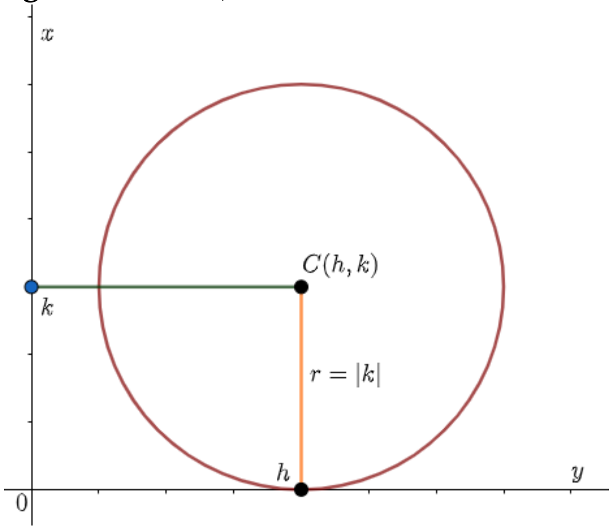
a) Cuando la circunferencia es tangente al eje x su radio $r=k$, y por definición se sabe que $r>0$, por lo que se tiene $r=|k|$, así

$$(x-h)^2+(y-k)^2=k^2.$$

b) Cuando la circunferencia es tangente al eje y su radio $r=y$, y por definición se sabe que $r>0$, por lo que se tiene $r=|y|$, así

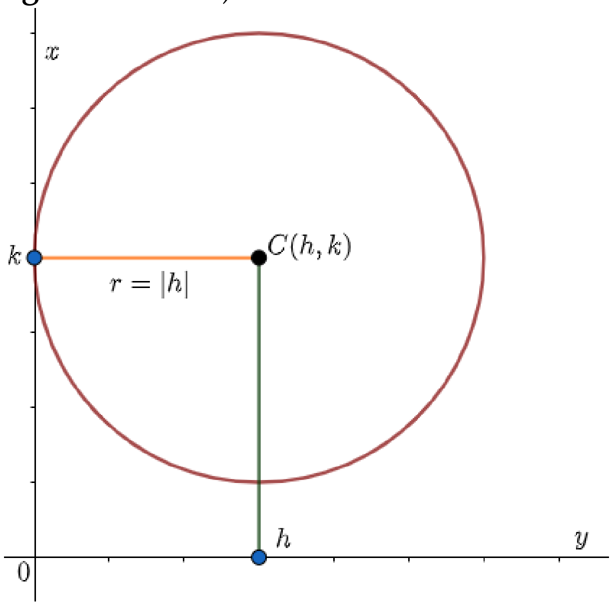
$$(x-h)^2+(y-k)^2=y^2.$$

Figura 4. Caso a) de circunferencia ordinaria



Fuente: Elaboración propia

Figura 5. Caso b) de circunferencia ordinaria



Fuente: Elaboración propia

Ecuación general de la circunferencia

Corolario 1.1.2: Ecuación general de la circunferencia

La ecuación general de la circunferencia se enuncia de la siguiente manera:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Demostración:

Se considera la ecuación ordinaria de la circunferencia

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2.$$

Se desarrolla la ecuación

$$\begin{aligned}(x^2-2xh+h^2)+(y^2-2yk+k^2)=r^2 &\Longrightarrow x^2+y^2-2xh-2yh+h^2+k^2=r^2\\ &\Longrightarrow x^2+y^2+(-2h)x+(-2k)y+(h^2+k^2-r^2)=0.\end{aligned}$$

Luego, se reemplaza $A=-2h$, $B=-2k$ y $C=h^2+k^2-r^2$ ya que son constantes por lo que se obtiene:

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

■

Para obtener la ecuación ordinaria de la circunferencia, de manera recíproca se desarrolla la ecuación general de la circunferencia.

$$x^2+y^2+Ax+By+C=0.$$

Se aplica el método de completar cuadrados en la ecuación:

$$\begin{aligned}x^2+y^2+Ax+By+C&=0\\ \left(x^2+Ax+\left(\frac{A}{2}\right)^2\right)+\left(y^2+By+\left(\frac{B}{2}\right)^2\right)+C&=0+\left(\frac{A}{2}\right)^2+\left(\frac{B}{2}\right)^2\\ \left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2&=\frac{A^2}{4}+\frac{B^2}{4}-C.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}, \tag{1.1}$$

ya que anteriormente se había definido las siguientes variables $A=-2h$, $B=-2k$ y $C=h^2+k^2-r^2$, se obtiene $-h=\frac{A}{2}$ y $-k=\frac{B}{2}$.

Al reemplazar en la ecuación (1.1) se tiene

$$\begin{aligned}(x-h)^2+(y-k)^2&=\frac{(-2h)^2+(-2k)^2-4(h^2+k^2-r^2)}{4}\\ (x-h)^2+(y-k)^2&=\frac{4r^2}{4}\\ (x-h)^2+(y-k)^2&=r^2.\end{aligned}$$

Con los datos obtenidos, también se puede definir a

$$r^2=\frac{A^2+B^2-4C}{4}.$$

Con la ecuación (1.1) antes obtenida se puede representar tres casos:

- Como se definió que $r^2 = \dfrac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$, entonces si $r^2 > 0$ se tiene que $A^2 + B^2 - 4C > 0$, por lo que el radio es $r = \dfrac{1}{2}\sqrt{A^2 + B^2 - 4C}$ y el centro de la circunferencia de la ecuación (1) es $C\left(\dfrac{-A}{2}, \dfrac{-B}{2}\right)$.

- Si se toma $A^2 + B^2 - 4C = 0$, se tiene que:

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{0}{4} \Longrightarrow \sqrt{\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2} = \sqrt{0}$$
$$\Longrightarrow \sqrt{\left(x - \left(\frac{-A}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{-B}{2}\right)\right)^2} = 0.$$

  Por lo que tomando la definición de circunferencia $d(C, P) = r$ se tiene que:

$$d(C, P) = \sqrt{\left(x - \left(\frac{-A}{2}\right)\right)^2 + \left(y - \left(\frac{-B}{2}\right)\right)^2} \text{ y } r = 0.$$

  Como se sabe que la distancia entre C y P es nula entonces estos dos puntos son iguales por lo que la ecuación (1) solo representa un punto, en este caso $C\left(\dfrac{-A}{2}, \dfrac{-B}{2}\right)$.

- Si $A^2 + B^2 - 4C < 0$ la ecuación (1) representa un círculo imaginario.

Ejemplo:

Encontrar la ecuación general de la circunferencia de la siguiente $(x + 5)^2 + (y - 12)^2 = 130$.

Se utiliza la ecuación (1.1) que se define

$$\left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4},$$

donde se puede deducir que $\dfrac{A}{2} = 5$, $\dfrac{B}{2} = -12$ y $\dfrac{A^2 + B^2 - 4C}{4} = 130$. Luego se tiene que,

$$\begin{aligned} &\frac{A}{2} = 5 & \qquad &\frac{B}{2} = -12 \\ &A = (5)(2) & &B = (-12)(2) \\ &A = 10 & &B = -24 \end{aligned}$$

Por lo que se reemplaza $A = 10$ y $B = -24$ en lo que sigue,

$$\begin{aligned}
\frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} &= 130 \\
\frac{(10)^2 + (-24)^2 - 4C}{4} &= 130 \\
\frac{100 + 576 - 4C}{4} &= 130 \\
\frac{676 - 4C}{4} &= 130 \\
676 - 4C &= (130)(4) \\
-4C &= 520 - 676 \\
-4C &= -156 \\
C &= \frac{-156}{-4} \\
C &= 39.
\end{aligned}$$

Se conoce que la ecuación general de la circunferencia es $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$. De esta manera se reemplaza $A = 10$, $B = -24$ y $C = 39$, donde se obtiene la ecuación $x^2 + y^2 + 10x - 24B + 39 = 0$.

Ejemplo:

Utilizar los casos antes dado dentro de la sección de ecuación general para identificar cuál de las siguientes ecuaciones pertenece a una ecuación de circunferencia o un punto en el plano.

1. $x^2 + y^2 - 0{,}38x - 5{,}3y + 4{,}9486 = 0$
2. $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 13 = 0$

En la primera ecuación (1.) se determina que $A = -0{,}38$, $B = -5{,}3$ y $C = 4{,}9486$, por lo que usando la fórmula $r^2 = \dfrac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$ se tiene,

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \\
r^2 &= \frac{(-0{,}38)^2 + (-5{,}3)^2 - 4(4{,}9486)}{4} \\
r^2 &= \frac{0{,}1444 + 28{,}09 - 19{,}7944}{4} \\
r^2 &= 2{,}11.
\end{aligned}$$

Es decir, se obtiene que $r^2 > 0$, por lo que esta ecuación pertenece a la ecuación de una circunferencia, donde su centro se puede determinar como $C\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right)$, como sigue

$$\begin{aligned} C\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right) &= C\left(\frac{-(-0{,}38)}{2}, \frac{-(-5{,}3)}{2}\right) \\ &= C(0{,}19, 2{,}65). \end{aligned}$$

Es así que la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen se reescribe como

$$\begin{aligned} (x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\ (x-0{,}19)^2 + (y-2{,}65)^2 &= 2{,}11. \end{aligned}$$

En la segunda ecuación (2.) se determina que $A = -6$, $B = -4$ y $C = 13$. Si se utiliza la fórmula $r^2 = \dfrac{A^2 + B^2 - 4C}{4}$ se tiene

$$\begin{aligned} r^2 &= \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \\ r^2 &= \frac{(-6)^2 + (-4)^2 - 4(13)}{4} \\ r^2 &= \frac{36 + 16 - 52}{4} \\ r^2 &= \frac{0}{4} \\ r^2 &= 0 \\ \sqrt{r^2} &= \sqrt{0} \\ r &= 0. \end{aligned}$$

Luego, por el caso 2 de la sección de ecuación general de la circunferencia, se sabe que la distancia entre el centro de la circunferencia y un punto de esta es nula, por lo que la ecuación (2.) representa un punto. El cual se define como sigue

$$\begin{aligned} C\left(\frac{-A}{2}, \frac{B}{2}\right) &= C\left(\frac{-(-6)}{2}, \frac{-(-4)}{2}\right) \\ &= C(3, 2). \end{aligned}$$

1.1.3. Determinanción de una circunferencia sujeta a tres condiciones

Al describir las ecuaciones de la circunferencia, se puede notar que tanto como la ecuación ordinaria $(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$ y la ecuación general $x^2+y^2+Ax+By+C = 0$ existen tres constantes arbitrarias independientes, es decir analíticamente, que la ecuación de cualquier circunferencia se puede obtener determinando los valores de estas tres constantes o tres condiciones independientes. Por ello se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1.1.2: Ecuación de la circunferencia por tres puntos

La ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos dados no colineales $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2)$ y $P_3(x_3,y_3)$ viene dada por el determinante

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Demostración: La demostración puede ser encontrada en Lehmann (1989). ■

El anterior teorema describe una forma útil de determinar si cuatro puntos dados pertenecen o no a la circunferencia, en caso de que sí pertenezcan se llaman puntos concíclicos.

Ejemplo:

Obtener la ecuación de la circunferencia si se sabe que pasa por los siguientes puntos $P_1(-2;1{,}5)$, $P_2(2{,}5;1{,}5)$ y $P_3(0{,}5;-1)$.

Con respecto a los puntos dados se tine que $x_1 = -2$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 0{,}5$, $y_1 = 1{,}5$, $y_2 = 1{,}5$ y $y_3 = -1$. Por el teorema (1.1.2.) la ecuación de la circunferencia que pasa por tres puntos no colineales se puede determinar mediante el siguiente determinante, donde se reemplaza los valores obtemidos,

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ x_1^2+y_1^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ (-2)^2+(1{,}5)^2 & -2 & 1{,}5 & 1 \\ (2{,}5)^2+(1{,}5)^2 & 2{,}5 & 1{,}5 & 1 \\ (0{,}5)^2+(-1)^2 & 0{,}5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 4+2{,}25 & -2 & 1{,}5 & 1 \\ 6{,}25+2{,}25 & 2{,}5 & 1{,}5 & 1 \\ 0{,}25+1 & 0{,}5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Longrightarrow \begin{vmatrix} x^2+y^2 & x & y & 1 \\ 6{,}25 & -2 & 1{,}5 & 1 \\ 8{,}5 & 2{,}5 & 1{,}5 & 1 \\ 1{,}25 & 0{,}5 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\Longrightarrow (x^2+y^2)\begin{vmatrix} -2 & 1{,}5 & 1 \\ 2{,}5 & 1{,}5 & 1 \\ 0{,}5 & -1 & 1 \end{vmatrix} - (x)\begin{vmatrix} 6{,}25 & 1{,}5 & 1 \\ 8{,}5 & 1{,}5 & 1 \\ 1{,}25 & -1 & 1 \end{vmatrix} + (y)\begin{vmatrix} 6{,}25 & -2 & 1 \\ 8{,}5 & 2{,}5 & 1 \\ 1{,}25 & 0{,}5 & 1 \end{vmatrix}$$

$$- (1)\begin{vmatrix} 6{,}25 & -2 & 1{,}5 \\ 8{,}5 & 2{,}5 & 1{,}5 \\ 1{,}25 & 0{,}5 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & (x^2+y^2)[(-2)(-1{,}5+1) - (1{,}5)(2{,}5-0{,}5) + (1)(-2{,}5-0{,}75)] \\ & - (x)[(6{,}25)(1{,}5+1) - (1{,}5)(8{,}5-1{,}25) + (1)(-8{,}5-1{,}875)] \\ & + (y)[(6{,}25)(2{,}5-0{,}5) - (-2)(8{,}5-1{,}25) + (1)(4{,}25-3{,}125)] \\ & - (1)[(6{,}25)(-2{,}5-0{,}75) - (-2)(-8{,}5-1{,}875) + (1{,}5)(4{,}25-3{,}125)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & (x^2+y^2)[(-2)(2{,}5) - (1{,}5)(2) + (-3{,}25)] - (x)[(6{,}25)(2{,}5) - (1{,}5)(7{,}25) \\ & + (1)(-10{,}375)] + (y)[(6{,}25)(2) - (-2)(7{,}25) + (1{,}125)] \\ & - [(6{,}25)(-3{,}25) - (-2)(-10{,}375) + (1{,}5)(1{,}125)] = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & (x^2+y^2)[-5-3-3{,}25] - (x)[15{,}625-10{,}875-10{,}375] \\ & + (y)[12{,}5+14{,}5+1{,}125] - [-20{,}3125-20{,}75+1{,}6875] = 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (x^2+y^2)(-11{,}25) - (x)(-5{,}625) + (y)(28{,}125) + (39{,}375) = 0$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ & \left(\frac{1}{-11{,}25}\right)(x^2+y^2)(-11{,}25) - \left(\frac{1}{-11{,}25}\right)(x)(-5{,}625) \\ & + \left(\frac{1}{-11{,}25}\right)(y)(28{,}125) + \left(\frac{1}{-11{,}25}\right)(39{,}375) = \left(\frac{1}{-11{,}25}\right)(0) \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow (x^2+y^2) - (0{,}5)(x) - (2{,}5)(y) - 3{,}5 = 0.$$

De este modo, se obtiene la ecuación general de la circunferencia, donde el radio de la circunferencia se puede encontrar como sigue, sabiendo que $A = -0{,}5$, $B = -2{,}5$

y $C = -3{,}5$.

$$\begin{aligned}
r^2 &= \frac{A^2 + B^2 - 4C}{4} \\
r^2 &= \frac{(-0{,}5)^2 + (-2{,}5)^2 - 4(-3{,}5)}{4} \\
r^2 &= \frac{0{,}25 + 6{,}25 + 14}{4} \\
r^2 &= \frac{20{,}5}{4} \\
r^2 &= 5{,}125.
\end{aligned}$$

De la misma manera, se detemina el centro de la circunferencia

$$\begin{aligned}
C\left(\frac{-A}{2}, \frac{-B}{2}\right) &= C\left(\frac{-(-0{,}5)}{2}, \frac{-(-2{,}5)}{2}\right) \\
&= C(0{,}25; 1{,}25).
\end{aligned}$$

Así, la ecuación de la circunferencia con centro fuera del origen es

$$\begin{aligned}
(x-h)^2 + (y-k)^2 &= r^2 \\
(x-0{,}25)^2 + (y-1{,}25)^2 &= 5{,}125.
\end{aligned}$$

1.1.4. Familias de circunferencias

Como se mencionó anteriormente, se obtiene una circunferencia y su ecuación cuando se cumple tres condiciones arbitrarias, pero existen circunferencias que cumplen menos de tres condiciones, es decir, la ecuación de la circunferencia que cumple solo dos condiciones, esta implica que tiene una constante arbitraria llamada parámetro, normalmente representada con k. Asi se enuncia el siguiente teorema.

Teorema 1.1.3: Familia de circunferencias

Sean ecuaciones de dos circunferencias cualesquiera

$$\begin{aligned}
C_1 : x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 = 0 \\
C_2 : x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2 = 0
\end{aligned}$$

la ecuación

$$x^2 + y^2 + D_1 x + E_1 y + F_1 + k(x^2 + y^2 + D_2 x + E_2 y + F_2) = 0 \tag{1.2}$$

Para todo $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, representa una familia de circunferencias todas las cuales tienen sus centros en la recta que pasan por los centros de C_1 y C_2.

Demostración: La demostración puede ser encontrada en Lehmann (1989). ■

Observaciones:

1) Si C_1 y C_2 se intersecan en dos puntos distintos P_1 y P_2, tenemos primero que las coordenadas de P_1 satisfacen las ecuaciones de C_1 y C_2, consecuentemente satisfacen a la ecuación (1.2), donde reemplazando C_1 y C_2 en (1.2) se obtiene que $0 + K \cdot 0 = 0$, lo cual es verdadera dado para cualquier k. Analogamente se realiza para el punto P_2. Por lo que la ecuación (1.2) representa toda la familia de circunferncias que pasan por los puntos P_1 y P_2 donde $k \neq 1$.

2) Si C_1 y C_2 son tangentes entre sí, para todo $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ la ecuación (1.2) representa todas la circunferencias que pasan por el punto en común entre C_1 y C_2, con la única excepción de C_2 misma.

3) Si C_1 y C_2 no tienen ningún punto de intersección, la ecuación (1.2) representa una circunferencia para cada valor $k \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, donde la ecuación resultante tenga los coeficientes que cumpla con las condiciones especificadas en la ecuación $x^2 + abc$. Las circunferencias de la familia obtenidas no van a tener ningún punto en común con las circunferencias C_1 y C_2.

Ejemplo:

Dadas las siguientes ecuaciones encontrar la familia de circunferencias a la que representan.

1. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$
2. $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 4$

Se toma la ecuación (1.) y la expresamos en la forma de la ecuación general de la circunferencia

$$\begin{aligned}
(x-1)^2 + (y-2)^2 &= 1 \\
x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= 1 \\
x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 &= 1 \\
x^2 + y^2 - 2x - 4y + 4 &= 0.
\end{aligned}$$

De la misma manera, para la ecuación (2.), por lo que se tiene,

$$\begin{aligned}
(x-3)^2 + (y-1)^2 &= 4 \\
x^2 - 6x + 9 + y^2 - 2y + 1 &= 4 \\
x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10 &= 4 \\
x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 &= 0.
\end{aligned}$$

Luego, con la ecuación $x^2+y^2-2x-4y+4=0$ se determina que $D_1=-2$, $E_1=-4$ y $F_1=0$, al igual con la ecuación $x^2+y^2-6x-2y+6=0$ se deduce $D_2=-6$, $E_2=-2$ y $F_2=6$. Por lo que, utilizando el teorema 1.1.3 y reemplazando los valores obtenidos se tiene,

$$\begin{aligned} x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)&=0 \quad \forall k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x^2+y^2+(-2)x+(-4)y+0+k(x^2+y^2+6x+(-2)y+6)&=0 \quad \forall k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x^2+y^2-2x-4y+k(x^2+y^2+6x-2y+6)&=0 \quad \forall k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\} \end{aligned}$$

Así, las ecuaciones dadas representan la siguiente familia de circunferencias $x^2+y^2-2x-4y+k(x^2+y^2+6x-2y+6)=0$ para todo $k\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

1.2. Parábola

Definición 1.2.1: Parábola

La parábola es un lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano $\mathbb{R}^2$ de modo que la distancia de este punto a otro punto fijo F sea igual a la distancia más cercana de P a una recta L.

El punto que se mueve en el plano es $P(x,y)$, donde este punto pertenece a la parábola. Mientras que el punto fijo será llamado foco, el cual se lo representa como $F(x,y)$, además la recta L será llamada directriz.

Por lo que la definición formal se la describe como:

$$P_{par}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : d(P,F)=d(P,L)\}.$$

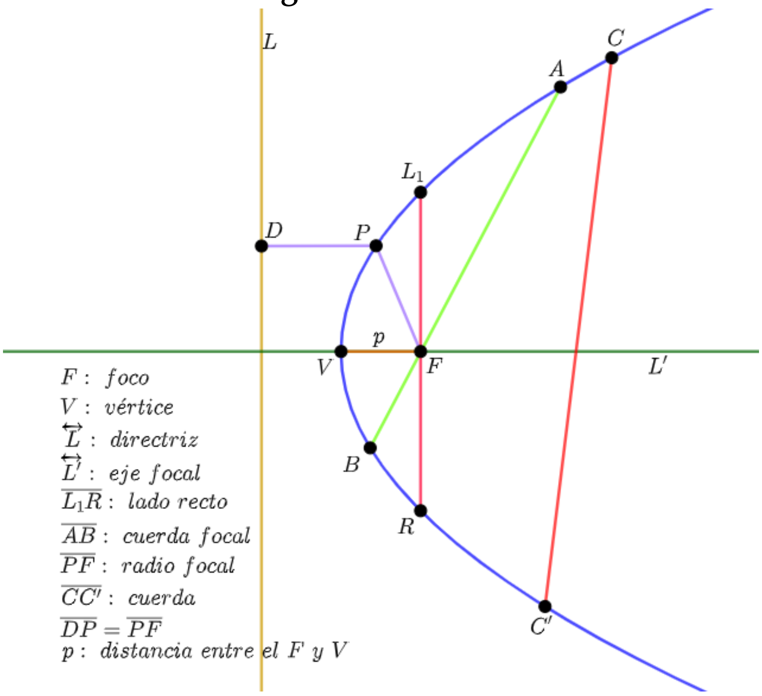
1.2.1. Elementos de la parábola

Los elementos de la parábola son:

- F foco de la parábola
- V vértice
- L directriz
- L' eje focal o eje de simetría o eje de la parábola
- $\overline{L_1R}$ lado recto
- $\overline{AB}$ cuerda focal
- p distancia entre el foco y vértive

- $\overline{PF}$ radio focal de P o radio vector
- $\overline{CC'}$cuerda

Figura 6. Parábola



Fuente: Elaboración propia

1.2.2. Ecuaciones de la parábola

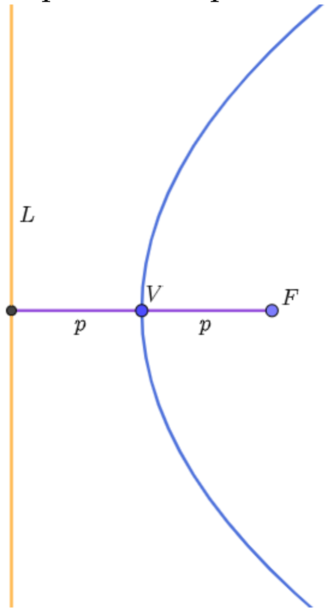
La definición formal de la parábola indica que $d(P, F) = d(P, L)$, donde P es cualquier punto que pertenezca a la parábola. De este modo, si se toma como punto P el vértice V de la parábola se tiene lo siguiente $d(V, F) = d(V, L)$. Además, por la gráfica anterior se sabe que la distancia del vértice al foco de la parábola se denomina p. Por lo que se tiene lo siguiente

$$\begin{aligned} d(V, F) &= d(V, L) \\ p &= d(V, L). \end{aligned}$$

Es decir, la distancia del punto de la parábola, definido como el vértice V, hacia la recta L es igual a p. Se presenta la siguiente gráfica para visualizar de una mejor manera lo antes descrito.

Es así, que la distancia entre el vértice hacia el foco de la parábola va ser igual a la distancia del vértice hacia la directriz de la parábola, donde se representa esta distancia con p.

Figura 7. Distancia de un punto de la parábola hacia el foco y directriz



Fuente: Elaboración propia

Ecuación de la parábola con vértice en el origen y el eje focal en el eje x

Teorema 1.2.1: Ecuación de la parábola con vértice en el origen

La ecuación de la parábola con vértice en el origen del plano $\mathbb{R}^2$ y el eje focal es el eje x es de la forma:

$$y^2 = 4px.$$

Donde $p \in \mathbb{R}$ y el punto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

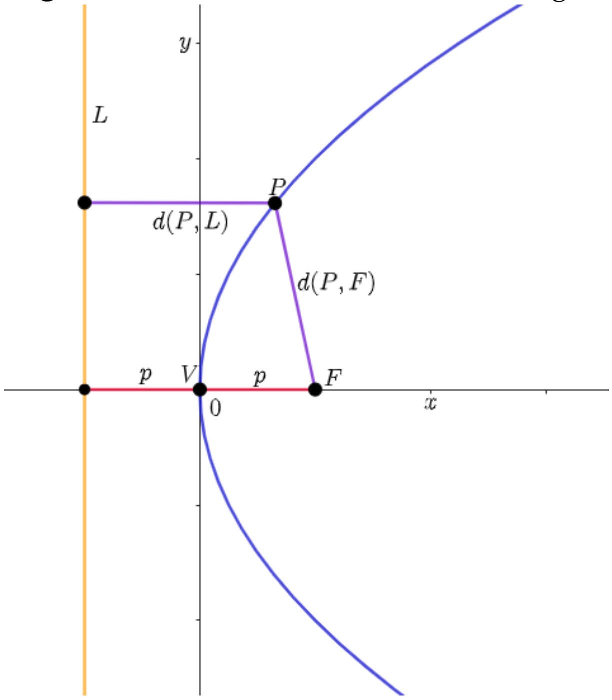
Demostración:

Se considera la gráfica de una parábola, donde el punto $P(x, y)$ está en la parábola, el vértice está en el origen $V(0, 0)$, el foco se encuentra en el eje x a una distancia p desde el vértice por lo que se describe como $F(p, 0)$. Además, como la distancia del vértice al foco es igual a la distancia entre el vértice a la directriz y en este caso, pasa por la parte negativa del eje x se describe como $L : x = -p$.

Entonces usando la definición de parábola tenemos

$$d(P, F) = d(P, L).$$

Figura 8. Parábola con vértice en el origen



Fuente: Elaboración propia

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x,y)$ y $F(p,0)$, de igual manera, aplicando la fórmula de la distancia entre un punto y una recta, en este caso $P(x,y)$ y $L : x = -p \to L : x + p = 0$,

$$\begin{aligned} d(P,F) = d(P,L) &\Longrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + (y-0)^2} = \frac{|(1)x + (0)y + p|}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \frac{|x+p|}{\sqrt{1}}. \end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\left(\sqrt{(x-p)^2 + y^2}\right)^2 = \left(\frac{|x+p|}{\sqrt{1}}\right)^2 \Longrightarrow (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2.$$

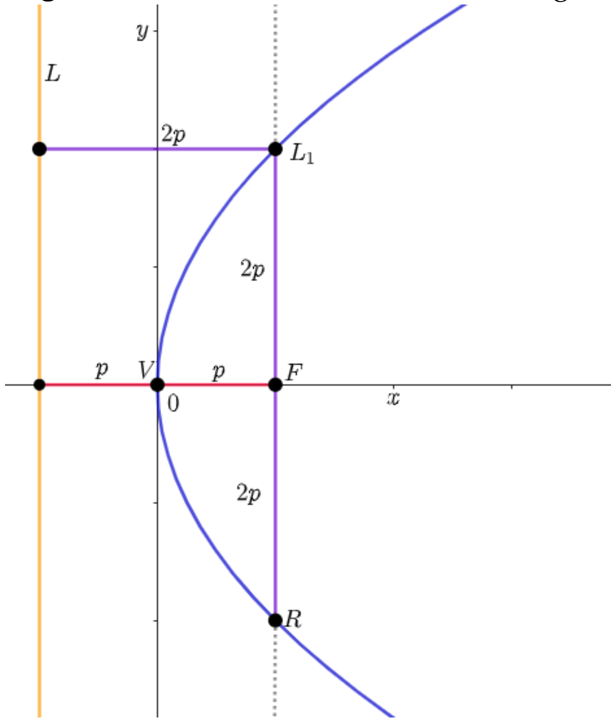
Finalmente, se resuelve los binomios al cuadrado,

$$\begin{aligned} y^2 = (x+p)^2 - (x-p)^2 &\Longrightarrow y^2 = x^2 + 2px + p^2 - x^2 + 2px - p^2 \\ &\Longrightarrow y^2 = 4px. \end{aligned}$$

Por lo que se consigue la ecuación de la parábola. ■

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Figura 9. Parábola con vértice en el origen



Fuente: Elaboración propia

- Vértice $\rightarrow \ V(0,0)$
- Foco $\rightarrow \ F(p,0)$
- Eje focal $\rightarrow$ eje x
- Directriz $\rightarrow \ L : x + p = 0$
- Longitud del lado recto $\rightarrow \ \overline{L_1 R} = |4p|$
- Lado recto $\rightarrow \ L_1 : x = p$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la parábola si el vértice está en el origen y su foco es $F(2,0)$.

Debido a que el foco de la parábola es

$$F(2,0) = F(p,0).$$

Lo que implica que $p = 2$. Además, el vértice se encuentra en el origen por lo que la ecuación a utilizar es $y^2 = 4px$, de este modo se tiene

$$\begin{aligned} y^2 &= 4px \\ y^2 &= 4(2)x \\ y^2 &= 8x. \end{aligned}$$

Así, se obtiene la ecuación de la parábola.

Ecuación de la parábola con vértice en el origen y el eje focal en el eje y

Teorema 1.2.2: Ecuación de la parábola con vértice en el origen

La ecuación de la parábola con vértice en el origen del plano $\mathbb{R}^2$ y el eje focal es el eje y:

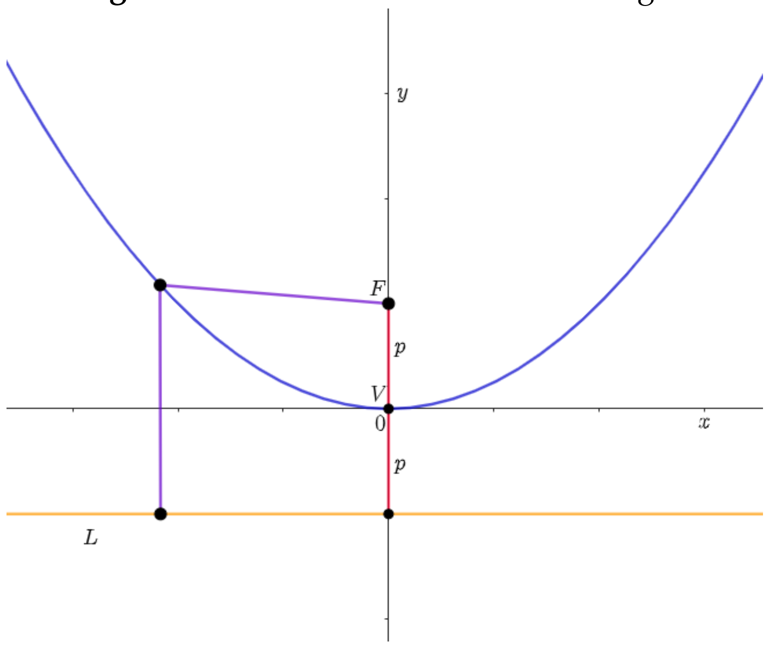
$$x^2 = 4py.$$

Donde $p \in \mathbb{R}$ y el punto $P(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración:

Se considera la gráfica de una parábola, donde el punto $P(x, y)$ está en la parábola, el vértice está en el origen $V(0, 0)$, el foco se encuentra en el eje y a una distancia p desde el vértice por lo que se describe como $F(0, p)$. Además, como la distancia del vértice al foco es igual a la distancia entre el vértice a la directriz y en este caso, pasa por la parte negativa del eje y se describe como $L : y = -p$.

Figura 10. Parábola con vértice en el origen



Fuente: Elaboración propia

Entonces usando la definición de parábola se tiene

$$d(P, F) = d(P, L).$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x, y)$ y $F(0, p)$, de igual manera, aplicando la fórmula de la distancia entre un punto y una recta, en este caso $P(x,y)$ y $L : y = -p \rightarrow L : y + p = 0$,

$$d(P,F) = d(P,L) \Longrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-p)^2} = \frac{|(0)x + (1)y + p|}{\sqrt{(0)^2 + (1)^2}}$$
$$\Longrightarrow \sqrt{x^2 + (y-p)^2} = \frac{|y+p|}{\sqrt{1}}.$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\left(\sqrt{x^2 + (y-p)^2}\right)^2 = \left(\frac{|y+p|}{\sqrt{1}}\right)^2 \Longrightarrow x^2 + (y-p)^2 = (y+p)^2.$$

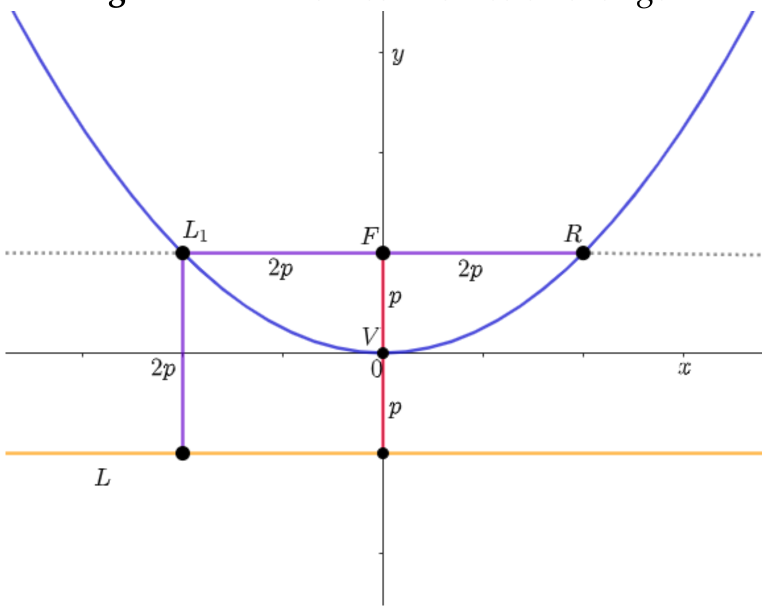
Finalmente, se resuelve los binomios al cuadrado,

$$x^2 = (y+p)^2 - (y-p)^2 \Longrightarrow x^2 = y^2 + 2py + p^2 - y^2 + 2py - p^2$$
$$\Longrightarrow x^2 = 4py.$$

Por lo que se consigue la ecuación de la parábola. ■

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Figura 11. Parábola con vértice en el origen



Fuente: Elaboración propia

- Vértice $\rightarrow$ $V(0,0)$
- Foco $\rightarrow$ $F(0,p)$
- Eje focal $\rightarrow$ eje y
- Directriz $\rightarrow$ $L : y + p = 0$

- Longitud del lado recto $\rightarrow$ $\overline{L_1R} = |4p|$

- Lado recto $\rightarrow$ $L_1 : y = p$

Ejemplo:

Determinar la ecuación y foco de la parábola si su directriz es $y = -5$ y su vértice se encuentra en el origen del plano.

Se conoce que la directriz se representa L, es decir que $L : y = -5$. Además, se indicó que la distancia entre el vértice hacia el foco de la parábola va ser igual a la distancia del vértice hacia la directriz de la parábola, donde se representa esta distancia con p. De este modo, la distancia desde el vértice hacia la directriz es $p = 5$, por lo que se obtiene que el foco es $F(0, p) = F(0, 5)$, donde el eje focal es el eje y. Pues así, se conoce que la ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje focal y es,

$$\begin{aligned} x^2 &= 4py \\ x^2 &= 4(5)y \\ x^2 &= 20y. \end{aligned}$$

Ecuación de la parábola con vértice $V(h, k)$ y el eje focal paralelo al eje x

Teorema 1.2.3: Ecuación de la parábola con vértice en $V(h, k)$

Sea $(h, k), (x, y) \in \mathbb{R}^2$ y $p \in \mathbb{R}$ es la abscisa del foco, la ecuación de la parábola con vértice en $V(h, k)$ y el eje focal paralelo al eje x es:

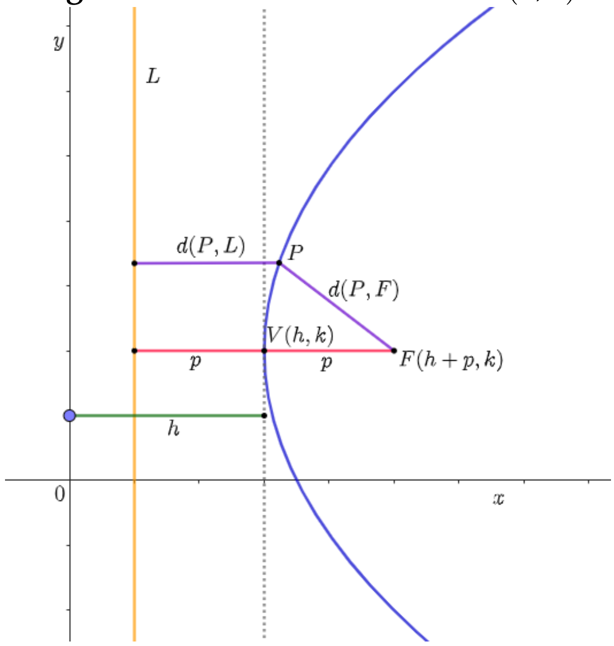
$$(y - k)^2 = 4p(x - h).$$

Donde $p \in \mathbb{R}$ y los puntos $P(x, y)$ y $V(h, k) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración:

Se considera la gráfica de la parábola, donde el punto $P(x, y)$ pertenece a la parábola, el vértice es $V(h, k)$, el foco se encuentra paralelo al eje x. Además, se sabe que la distancia entre el vértice hacia el foco de la parábola va ser igual a la distancia del vértice hacia la directriz de la parábola, donde se representa esta distancia con p.

Figura 12. Parábola con vértice $V(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

Tal como se muestra la gráfica de la parábola, el foco de está parábola es $F(h+p,k)$ y la directriz viene dada por $L : x = h - p$. Entonces usando la definición de parábola se tiene

$$d(P,F) = d(P,L).$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x,y)$ y $F(h+p,k)$, de igual manera, aplicando la fórmula de la distancia entre un punto y una recta, en este caso $P(x,y)$ y $L : x = h - p \to L : x - h + p = 0$,

$$\begin{aligned} d(P,F) = d(P,L) &\Longrightarrow \sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} = \frac{|(1)x + (0)y + (-h+p)|}{\sqrt{(1)^2 + (0)^2}} \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2} = \frac{|x + (-h+p)|}{\sqrt{1}}. \end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{(x-(h+p))^2 + (y-k)^2}\right)^2 &= \left(\frac{|x + (-h+p)|}{\sqrt{1}}\right)^2 \\ \Longrightarrow (x-(h+p))^2 + (y-k)^2 &= (x + (-h+p))^2. \end{aligned}$$

Finalmente, se resuelve los binomios al cuadrado,

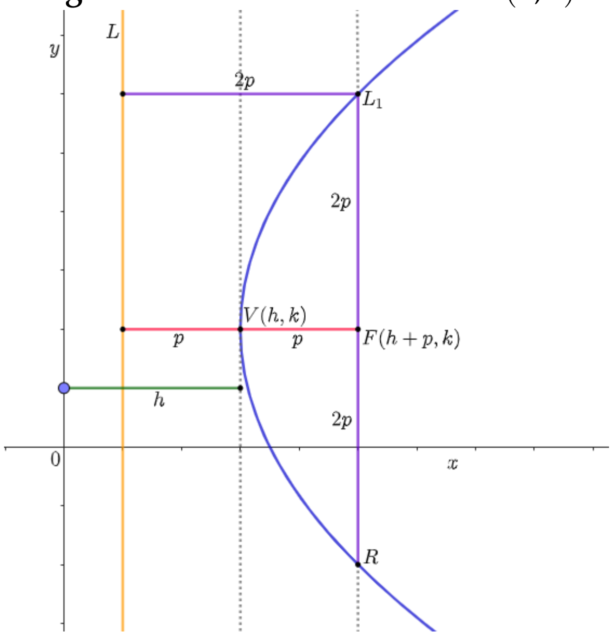
$$(y-k)^2 = (x + (-h+p))^2 - (x-(h+p))^2$$

$$\implies (y-k)^2 = x^2 + 2(-h+p)x + (-h+p)^2 - (-h+p)^2 - (x^2 - 2(h+p)x + (h+p)^2)$$
$$\implies (y-k)^2 = x^2 - 2hx + 2px + h^2 - 2hp + p^2 - x^2 + 2hx + 2px - h^2 - 2hp - p^2$$
$$\implies (y-k)^2 = 2px + 2px - 2hp - 2hp$$
$$\implies (y-k)^2 = 4px - 4hp$$
$$\implies (y-k)^2 = 4p(x-h).$$

Por lo que se consigue la ecuación de la parábola. ■

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Figura 13. Parábola con vértice $V(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

- Vértice $\rightarrow$ $V(h,k)$
- Foco $\rightarrow$ $F(h+p,k)$
- Eje focal $\rightarrow$ Paralelo al eje x
- Directriz $\rightarrow$ $L: x-h+p=0$
- Longitud del lado recto $\rightarrow$ $\overline{L_1R} = |4p|$
- Lado recto $\rightarrow$ $L_1: x = h+p$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la parábola que tiene vértice sobre la recta $L:\ 3x-2y-19=0$, foco sobre la recta $L':\ x+4y=0$ y directriz $x=2$.

Por la información, se puede deducir que el vértice de la parábola se encuentra fuera del origen y su eje focal es paralelo al eje x. Donde su foco es $F(h+p,k)$, la directriz es $x=h-p$ y su ecuación es $(y-k)^2=4p(x-h)$. Además, $V(h,k)inL$, donde se reemplaza $x=h$ y $y=k$

$$3x-2y-19=0 \Longrightarrow 3h-2k-19=0,$$

y $F(h+p,k)\in L'$, donde se reemplaza $x=h+p$ y $y=k$

$$x+4y=0 \Longrightarrow h+p+4k=0.$$

Ya que la directriz es $x=2$ y su ecuación es $x=h-p$, se tine

$$h-p=2 \Longrightarrow h=2+p.$$

Ahora, se reemplaza $h=2+p$ en $h+p+4k=0$

$$\begin{aligned} h+p+4k=0 &\Longrightarrow 2+p+p+4k=0\\ &\Longrightarrow 2+2p+4k=0\\ &\Longrightarrow 1+p+2k=0\\ &\Longrightarrow 2k=-p-1\\ &\Longrightarrow k=\frac{-p-1}{2}. \end{aligned}$$

Luego, se reemplaza las igualdades de h y k en $3h-2k-19=0$

$$\begin{aligned} 3h-2k-19=0 &\Longrightarrow 3(2+p)-2\left(\frac{-p-1}{2}\right)-19=0\\ &\Longrightarrow 6+3p+p+1-19=0\\ &\Longrightarrow 4p-12=0\\ &\Longrightarrow p=3. \end{aligned}$$

Por lo que se reemplaza $p=3$ en $h=2+p$ y $k=\dfrac{-p-1}{2}$, donde se obtiene $h=5$ y $k=-2$. Así, se obtiene la ecuación de la parábola $(y+2)^2=12(x-5)$.

Ecuación de la parábola con vértice $V(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje y

Teorema 1.2.4: Ecuación de la parabola con vértice $V(h,k)$

Sea $(h,k),(x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $p \in \mathbb{R}$ es la abscisa del foco, la ecuación de la parábola con vértice en $V(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje y es:

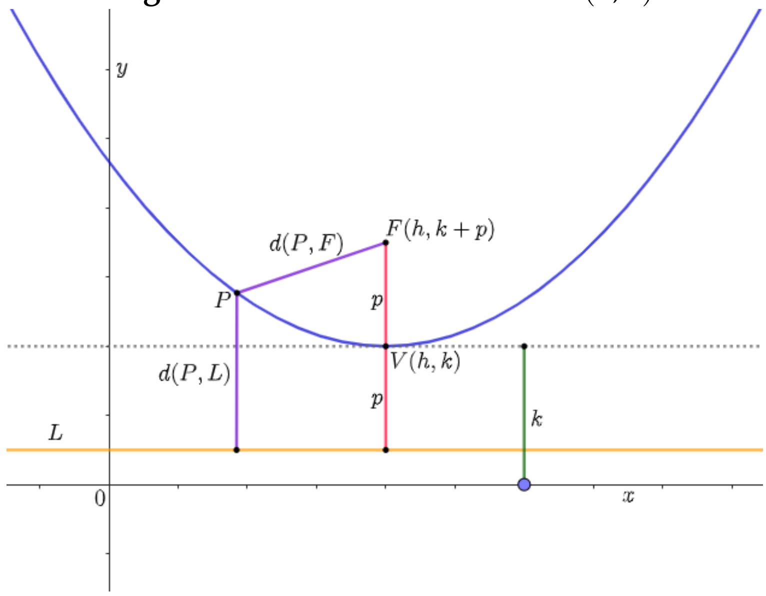
$$(x-h)^2 = 4p(y-k).$$

Donde $p \in \mathbb{R}$ y los puntos $P(x,y)$ y $V(h,k) \in \mathbb{R}^2$.

Demostración:

Se considera la gráfica de la parábola, donde el punto $P(x,y)$ pertenece a la parábola, el vértice es $V(h,k)$, el foco se encuentra paralelo al eje y. Además, se sabe que la distancia entre el vértice hacia el foco de la parábola va ser igual a la distancia del vértice hacia la directriz de la parábola, donde se representa esta distancia con p.

Figura 14. Parábola con vértice $V(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

Tal como se muestra la gráfica de la parábola, el foco de está parábola es $F(h,k+p)$ y la directriz viene dada por $L: y = k - p$. Entonces usando la definición de parábola se tiene

$$d(P,F) = d(P,L).$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x,y)$ y $F(h,k+p)$, de igual manera, aplicando la fórmula de la distancia entre un punto y una recta, en este caso $P(x,y)$ y $L : x = k - p \rightarrow L : x - k + p = 0$,

$$\begin{aligned} d(P,F) = d(P,L) &\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = \frac{|(0)x + (1)y + (-k+p)|}{\sqrt{(0)^2+(1)^2}} \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2} = \frac{|y + (-k+p)|}{\sqrt{1}}. \end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned} &\left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+p))^2}\right)^2 = \left(\frac{|y+(-k+p)|}{\sqrt{1}}\right)^2 \\ &\Longrightarrow (x-h)^2 + (y-(k+p))^2 = (y+(-k+p))^2. \end{aligned}$$

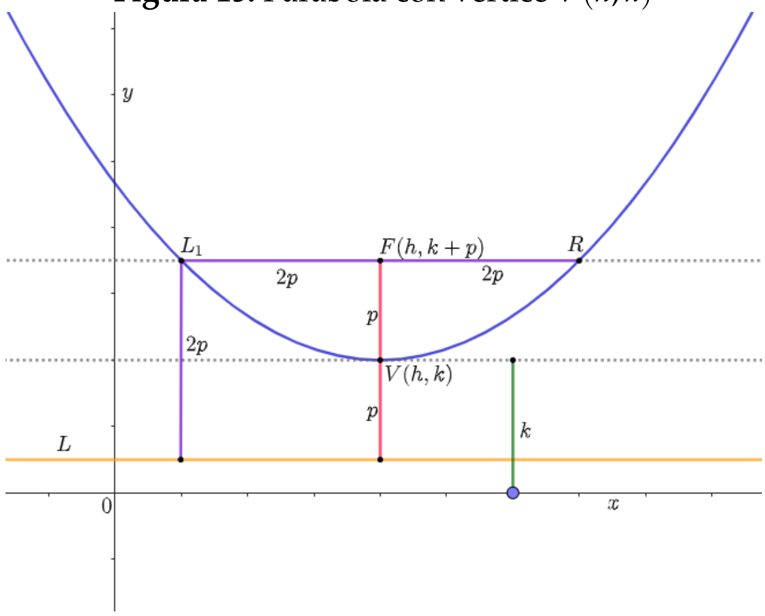
Finalmente, se resuelve los binomios al cuadrado,

$$\begin{aligned} &(x-h)^2 = (y+(-k+p))^2 - (y-(k+p))^2 \\ &\Longrightarrow (x-h)^2 = y^2 + 2(-k+p)y + (-k+p)^2 - (y^2 - 2(k+p)y + (k+p)^2 \\ &\Longrightarrow (x-h)^2 = y^2 - 2ky + 2py + k^2 - 2kp + p^2 - y^2 + 2ky + 2py - k^2 - 2kp - p^2 \\ &\Longrightarrow (x-h)^2 = 2py + 2py - 2kp - 2kp \\ &\Longrightarrow (x-h)^2 = 4py - 4kp \\ &\Longrightarrow (x-h)^2 = 4p(y-k). \end{aligned}$$

Por lo que se consigue la ecuación de la parábola. ■

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Figura 15. Parábola con vértice $V(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

- Vértice $\rightarrow$ $V(h, k)$
- Foco $\rightarrow$ $F(h, k+p)$
- Eje focal $\rightarrow$ Paralelo al eje y
- Directriz $\rightarrow$ $L : y - k + p = 0$
- Longitud del lado recto $\rightarrow$ $\overline{L_1 R} = |4p|$
- Lado recto $\rightarrow$ $L_1 : y = k + p$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la parábola que tiene un foco $F(2, 1)$, vértice sobre la recta $L: \; 3x + 7y + 1 = 0$, directriz horizontal.

Debido a la información que el problema da, se puede deducir que es una parábola con eje focal paralelo al eje y. Por lo que la ecuación de esta parábola es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$ y el foco $F(h, k+p)$. Donde se sabe que el foco $F(2, 1)$

$$F(h, k+p) = F(2, 1)$$
$$h = 2 \qquad k + p = 1$$

Además, sabemos que el vértice de la parábola se describe como $V(h, k)$ donde este punto pertence a L. Es decir, $V(h, k) \in L$, donde $h = x$ y $k = y$

$$3x + 7y + 1 = 0 \Longrightarrow 3h + 7k + 1 = 0.$$

Luego se reemplaza $h = 2$

$$\begin{aligned} 3h + 7k + 1 = 0 &\Longrightarrow 3(2) + 7k + 1 = 0 \\ &\Longrightarrow k = -1. \end{aligned}$$

Después, se reemplaza $k = -1$ en $k + p = 1$, por lo que

$$\begin{aligned} k + p = 1 &\Longrightarrow -1 + p = 1 \\ &\Longrightarrow p = 2. \end{aligned}$$

Así, teniendo que $h = 2$, $k = -1$ y $p = 2$ se obtiene la ecuación de la parábola

$$(x-2)^2 = 8(y+1).$$

Ecuación general de la parábola

Teorema 1.2.5: Ecuación general de la parábola

La ecuación general de la parábola se enuncia de la siguiente manera:

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

1. Si $A = 0$, $B \neq 0$ y $C \neq 0$ entonces $By^2 + Cx + Dy + E = 0$. Es decir, $\frac{B}{B}y^2 + \frac{C}{B}x + \frac{D}{B}y + \frac{E}{B} = 0$, por lo que $y^2 + ax + by + c = 0$. Así, la ecuación representa una parábola con eje focal paralelo o igual al eje x.
2. Si $B = 0$, $A \neq 0$ y $D \neq 0$ entonces $Ax^2 + Cx + Dy + E = 0$. Es decir, $\frac{A}{A}x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A}y + \frac{E}{A} = 0$, por lo que $x^2 + ax + by + c = 0$. Así, la ecuación representa una parábola con eje focal paralelo o igual al eje y.

Demostración:

Para la demostración del numeral 1., se utiliza la ecuación $(y-k)^2 = 4p(x-h)$, en el cual se desarrolla y se obtiene

$$\begin{aligned}(y-k)^2 = 4p(x-h) &\Longrightarrow y^2 - 2ky + k^2 = 4px - 4ph \\ &\Longrightarrow y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0,\end{aligned}$$

el cual se puede escribir de la siguiente forma

$$y^2 + ax + by + c = 0. \tag{1.3}$$

Donde $a = -4p$, $b = -2k$ y $c = k^2 + 4ph$. ∎

Para obtener la ecuación que representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje x, se desarrolla de manera recíproca la ecuación general de la parábola (1.3). Así, aplicamos el método de completar cuadrados en la ecuación

$$\begin{aligned}&y^2 + ax + by + c = 0 \\ &\Longrightarrow \left(y^2 + by + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right) + ax + c = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \\ &\Longrightarrow \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + ax + c = \left(\frac{b}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Luego, se reemplaza los valores de a, b y c.

$$\left(y + \frac{-2k}{2}\right)^2 + (-4p)x + k^2 + 4ph = \left(\frac{-2k}{2}\right)^2$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow (y-k)^2 - 4px + k^2 + 4ph = k^2\\
&\Longrightarrow (y-k)^2 = 4px - 4ph\\
&\Longrightarrow (y-k)^2 = 4p(x-h).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Para la demostración del numeral 2., se utiliza la ecuación $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, en el cual se desarrolla y se obtiene

$$\begin{aligned}
&(x-h)^2 = 4p(y-k)\\
&\Longrightarrow x^2 - 2hx + h^2 = 4py - 4pk\\
&\Longrightarrow x^2 - 4py - 2hx + h^2 + 4pk = 0,
\end{aligned}$$

el cual se puede escribir de la siguiente forma

$$x^2 + ax + by + c = 0. \tag{1.4}$$

Donde $a = -2h$, $b = -4p$ y $c = h^2 + 4pk$. $\blacksquare$

Para obtener la ecuación que representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje y, se realiza de manera recíproca con la ecuación general de la parábola (1.4). Así, aplicanddo el método de completar cuadrados en la ecuación

$$\begin{aligned}
&x^2 + ax + by + c = 0\\
&\Longrightarrow \left(x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right) + by + c = \left(\frac{a}{2}\right)^2\\
&\Longrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + by + c = \left(\frac{a}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Luego, se reemplaza los valores de a, b y c.

$$\begin{aligned}
&\left(x + \frac{-2h}{2}\right)^2 + (-4p)y + (h^2 + 4pk) = \left(\frac{-2h}{2}\right)^2\\
&\Longrightarrow (x-h)^2 - 4py + h^2 + 4pk = h^2\\
&\Longrightarrow (x-h)^2 = 4py - h^2 - 4pk + h^2\\
&\Longrightarrow (x-h)^2 = 4py - 4pk\\
&\Longrightarrow (x-h)^2 = 4p(y-k).
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Por otra parte, con la ecuación (1.3) antes obtenida se indica lo siguiente:

Si $a = 0$, la ecuación es como sigue,

$$y^2 + by + c = 0, \tag{1.5}$$

la cual es una ecuación cuadrática con la variable y.

- Si las raíces de la ecuación (1.5) son reales y desiguales, donde sus raíces son r_1 y r_2, la ecuación (1.5) se puede escribir como

  $$(y - r_1)(y - r_2) = 0.$$

  Por lo que representa un lugar geométrico que corresponde de dos rectas diferentes paralelas al eje x, denominadas $y = r_1$ y $y = r_2$.

- Si las raíces de la ecuación (1.5) son reales e iguales, representan un lugar geométrico de dos rectas coincidentes que representan una sola recta paralela al eje x.

- Si las raíces de la ecuación (1.5) son complejas, no existe un lugar geométrico.

De la misma manera, para la ecuación (1.4) se inidica lo siguiente: Si $b = 0$, la ecuación es como sigue,

$$x^2 + ax + c = 0, \tag{1.6}$$

la cual es una ecuación cuadrática con la variable x.

- Si las raíces de la ecuación (1.6) son reales y desiguales, donde sus raíces son r_1 y r_2, la ecuación (1.6) se puede escribir como

  $$(x - r_1)(x - r_2) = 0.$$

  Por lo que representa un lugar geométrico que corresponde de dos rectas diferentes paralelas al eje y, denominadas $x = r_1$ y $x = r_2$.

- Si las raíces de la ecuación (1.6) son reales e iguales, representan un lugar geométrico de dos rectas coincidentes que representan una sola recta paralela al eje y.

- Si las raíces de la ecuación (1.6) son complejas, no existe un lugar geométrico.

Después de describir las ecuaciones de la parábola se realiza las siguientes observaciones con respecto a la orientación de la parábola:

- Si $p > 0$ la parábola se abre hacia a la derecha, siempre que el eje focal es paralelo o igual al eje x.

- Si $p < 0$ la parábola se abre hacia la izquierda, siempre que el eje focal es paralelo o igual al eje x.

- Si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba, siempre que el eje focal es paralelo o igual al eje y.
- Si $p < 0$ la parábola se abre hacia abajo, siempre que el eje focal es paralelo o igual al eje y.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la parábola del eje paralelo al eje de la abscisa y que pasa por los puntos $A(-2,1)$, $B(1,2)$ y $C(-1,3)$.

Se reemplaza los puntos en la ecuación general de la parábola de eje paralelo al eje x

$$y^2 + ax + by + c = 0.$$

Donde se obtienen las siguientes ecuaciones:

1. $1 - 2a + b + c = 0$
2. $4 + a + 2b + c = 0$
3. $9 - a + 3b + c = 0$

Por lo que de la ecuación 1 se obtiene $c = -1 + 2a - b$, y se reeemplaza en 2.

$$\begin{aligned} 4 + a + 2b + c = 0 &\Longrightarrow 4 + a + 2b + -1 + 2a - b = 0 \\ &\Longrightarrow 3 + 3a + b = 0 \\ &\Longrightarrow b = -3 - 3a. \end{aligned}$$

Luego se reemplaza $c = -1 + 2a - b$ en 3.

$$\begin{aligned} 9 - a + 3b + c = 0 &\Longrightarrow 9 - a + 3b - 1 + 2a - b = 0 \\ &\Longrightarrow 8 + a + 2b = 0 \\ &\Longrightarrow a = -8 - 2b. \end{aligned}$$

Se reemplaza $a = -8 - 2b$ en $b = -3 - 3a$

$$\begin{aligned} b = -3 - 3a &\Longrightarrow b = -3 - 3(-8 - 2b) \\ &\Longrightarrow b = -3 + 24 + 6b \\ &\Longrightarrow b = -\frac{21}{5}. \end{aligned}$$

Luego, se reemplaza $b = -\frac{21}{5}$ en $a = -8 - 2b$

$$\begin{aligned} a = -8 - 2b &\Longrightarrow a = -8 - 2(-\frac{21}{5}) \\ &\Longrightarrow a = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Después, se reemplaza a y b en $c = -1 + 2a - b$

$$\begin{aligned} c = -1 + 2a - b &\Longrightarrow c = -1 + 2\left(\frac{2}{5}\right) - \left(-\frac{21}{5}\right) \\ &\Longrightarrow c = 4. \end{aligned}$$

Finalmente, se reemplaza los valores de a, b y c en la ecuación general

$$\begin{aligned} y^2 + ax + by + c = 0 \\ y^2 + \frac{2}{5}x - \frac{21}{5}y + 4 = 0. \end{aligned}$$

Así, se obtiene la ecuación de la parábola.

1.3. Elipse

Definición 1.3.1: Elipse

La elipse es un lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano $\mathbb{R}^2$ de modo que la suma de este a dos puntos fijos F_1 y F_2 es igual a una constante y esta es mayor que la distancia entre estos puntos fijos.

El punto que se mueve en el plano es $P(x, y)$, donde este punto pertenece a la elipse. Mientras que los puntos fijos serán llamados focos, los cuales se los representan como $F_1(x, y)$ y $F_2(x, y)$, además la constante se denominará $2a$.

Por lo que la definición formal se la describe como:

$$E_{elip} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

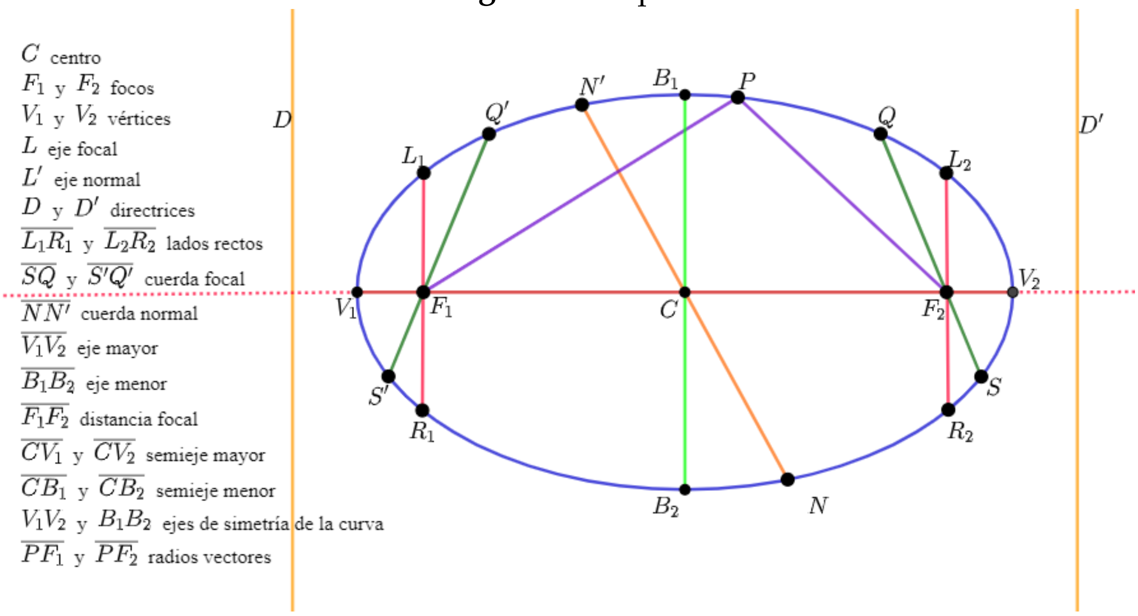
1.3.1. Elementos de la elipse

Los elementos de la elipse son:

- C centro
- F_1 y F_2 focos

- V_1 y V_2 vértices
- L eje focal
- L' eje normal
- D y D' directrices
- $\overline{L_1R_1}$ y $\overline{L_2R_2}$ lados rectos
- $\overline{SQ}$ y $\overline{S'Q'}$ cuerda focal
- $\overline{NN'}$ cuerda normal o diámetro
- $\overline{V_1V_2}$ eje mayor $\rightarrow$ $\overline{V_1V_2} = 2a$
- $\overline{B_1B_2}$ eje menor $\rightarrow$ $\overline{B_1B_2} = 2b$
- $\overline{F_1F_2}$ distancia focal $\rightarrow$ $\overline{F_1F_2} = 2c$
- $\overline{CV_1}$ y $\overline{CV_2}$ semieje mayor $\rightarrow$ $\overline{CV_1} = a$
- $\overline{CB_1}$ y $\overline{CB_2}$ semieje menor $\rightarrow$ $\overline{CB_1} = b$
- V_1V_2 y B_1B_2 ejes de simetría de la curva o ejes principales
- $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ radios vectores de P

Figura 16. Elipse



Fuente: Elaboración propia

1.3.2. Ecuaciones de la elipse

Una de las ecuaciones que se puede conseguir con respecto a la gráfica de la elipse es $b^2 + c^2 = a^2$. Esto debido a que se forma un triángulo rectángulo, donde su hipotenusa es a^2 y sus catetos son b^2 y c^2.

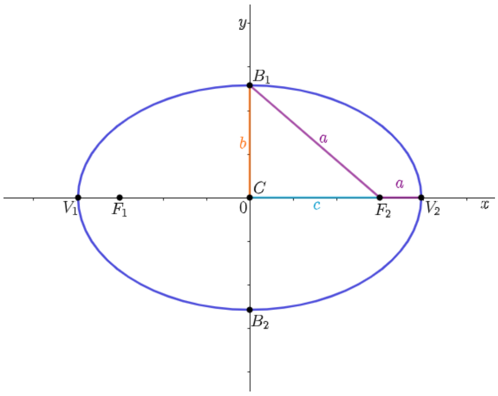


Figura 1.1: Elipse con centro en el origen y eje focal en el eje x.

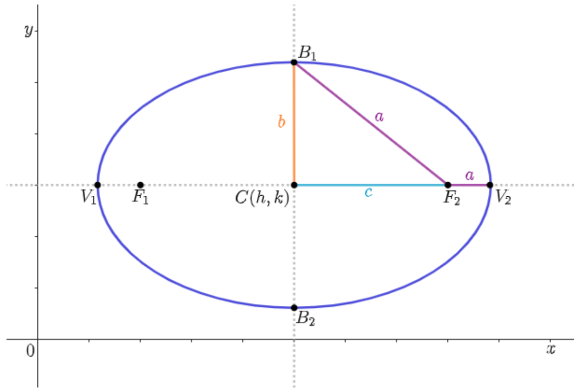


Figura 1.2: Elipse con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje x.

De este modo, si la gráfica de la elipse se encuentra en el origen del plano , este indica que la distancia del centro de la elipse hacia unos de sus vértices es a, por lo que el centro es $C(0,0)$ y el vértice es $V(a,0)$. De igual manera, indica la distancia desde B, el cual es el punto $B(0,b)$, hacia uno de sus focos $F(c,0)$, el cual es la hipotenusa del triángulo rectángulo.

La razón por la que igualamos esta dos distancias es debido a que en la gráfica tenemos de hipótesis que la distancia al cuadrado entre C y V es a^2, por lo que la distancia al cuadrado entre B y F debe ser igual a a^2 para asumir que la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma es a^2. Al igualar estas dos distancias y aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

$$\begin{aligned}
d(B,F) = d(C,V) &\Longrightarrow (d(B,F))^2 = (d(C,V))^2 \\
&\Longrightarrow \left(\sqrt{(0-c)^2+(b-0)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(0-a)^2+(0-0)^2}\right)^2 \\
&\Longrightarrow (-c)^2+(b)^2 = (-a)^2+(0)^2 \\
&\Longrightarrow c^2+b^2 = a^2.
\end{aligned}$$

Por otro lado, si la gráfica de la elipse se encuentra fuera del origen se tiene los siguientes puntos: el centro $C(h,k)$, uno de los focos $F(h+c,k)$, $V(h+a,k)$ y $B(h,k+b)$. Así, al reemplazar estos valores se obtiene

$$\begin{aligned}
d(B,F) = d(C,V) &\Longrightarrow (d(B,F))^2 = (d(C,V))^2 \\
&\Longrightarrow \left(\sqrt{(h-h+c)^2+(k+b-k)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(h-h+a)^2+(k-k)^2}\right)^2 \\
&\Longrightarrow (c)^2+(b)^2 = (a)^2+(0)^2 \\
&\Longrightarrow c^2+b^2 = a^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, esta ecuación no va a variar con respecto a la localización de la elipse.

Ecuación de la elipse con centro en el origen y el eje focal en el eje x

Teorema 1.3.1: Ecuación de la elipse en el origen

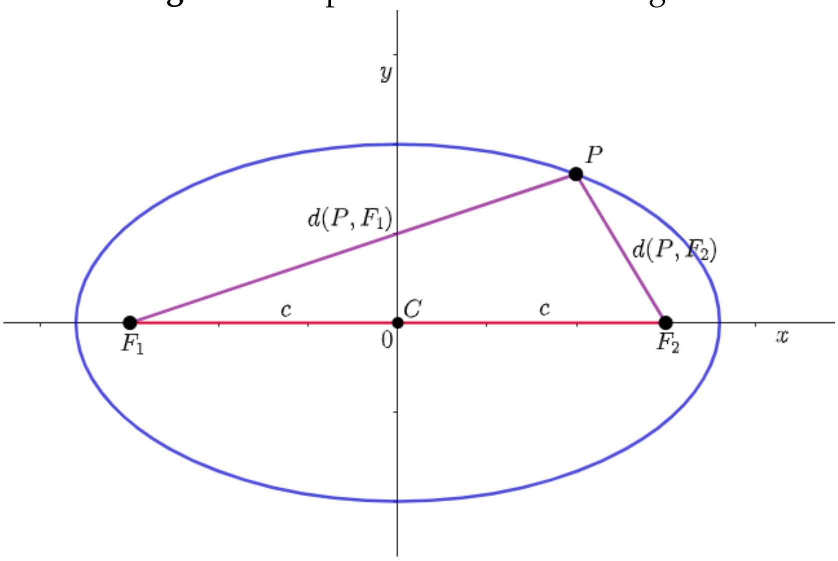
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la elipse con centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$ y el eje focal es el eje x es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demostración:

Consideremos la gráfica de una elipse, donde el punto $P(x, y)$ está en la elipse, $C(0, 0)$ es el centro y sus focos F_1 y F_2 están en el eje x.

Figura 17. Elipse con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Entonces usando la definición de elipse y aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x, y)$, $F_1(-c, 0)$ y $F_2(c, 0)$ se tiene:

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(d, F_2) = 2a &\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\left(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 = \left(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2$$
$$\Longrightarrow (x-c)^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2.$$

Se continúa desarrollando la igualdad,

$$\begin{aligned}
&x^2-2cx+c^2+y^2 = 4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2\\
&\Longrightarrow x^2-2cx+c^2+y^2-4a^2-x^2-2cx-c^2-y^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\\
&\Longrightarrow -4cx-4a^2 = -4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Ahora se multiplica a cada lado de la igualdad por $-\dfrac{1}{4}$

$$(-4cx-4a^2)\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) \Longrightarrow cx+a^2 = a\sqrt{(x+c)^2+y^2}.$$

Nuevamenete se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad y se sigue resolviendo

$$\begin{aligned}
(cx+a^2)^2 = \left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2 &\Longrightarrow c^2x^2+2cxa^2+a^4 = a^2((x+c)^2+y^2)\\
&\Longrightarrow c^2x^2+2cxa^2+a^4 = a^2(x^2+2cx+c^2+y^2)\\
&\Longrightarrow c^2x^2+2cxa^2+a^4 = a^2x^2+a^22cx+a^2c^2+a^2y^2\\
&\Longrightarrow c^2x^2-a^2x^2-a^2y^2 = a^2c^2-a^4\\
&\Longrightarrow x^2(c^2-a^2)-a^2y^2 = a^2(c^2-a^2)\\
&\Longrightarrow -x^2(a^2-c^2)-a^2y^2 = -a^2(a^2-c^2).
\end{aligned}$$

Reemplazamos $b^2 = a^2-c^2$, donde se tiene

$$\begin{aligned}
&-x^2(a^2-c^2)-a^2y^2 = -a^2(a^2-c^2)\\
&\Longrightarrow -x^2(b^2)-a^2y^2 = -a^2(b^2).
\end{aligned}$$

Se multiplica $\dfrac{1}{a^2b^2}$ y (-1) a cada lado de la igualdad

$$\begin{aligned}
&(-x^2b^2-a^2y^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)(-1) = (-a^2b^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)(-1)\\
&\Longrightarrow \frac{x^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2y^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.
\end{aligned}$$

Finalmente, se simplifica lo que corresponda

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por lo que se obtiene la ecuación de la elipse. ■

Al factorizar la ecuación de la elipse con centro en el origen y con eje focal el eje x se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 - \frac{y^2}{b^2} \\
&\Longrightarrow x^2 = \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) a^2 \\
&\Longrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) a^2} \\
&\Longrightarrow x = \pm a \sqrt{\frac{b^2 - y^2}{b^2}} \\
&\Longrightarrow x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - y^2}. \qquad (1.7)
\end{aligned}$$

Con respecto a la nueva ecuación se deduce que

$$b^2 - y^2 \geq 0 \Longrightarrow b^2 \geq y^2.$$

Luego, aplicando las propiedades del valor absoluto y factorizando las expresión se obtiene

$$\begin{aligned}
b^2 \geq y^2 &\Longrightarrow b^2 \geq y^2 = |y|^2 \\
&\Longrightarrow b^2 \geq |y|^2 \\
&\Longrightarrow \sqrt{b^2} \geq \sqrt{|y|^2} \\
&\Longrightarrow b \geq |y| \\
&\Longrightarrow |y| \leq b \\
&\Longrightarrow -b \leq y \leq b.
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (1.7) puede ser utilizada cuando $-b \leq y \leq b$ o $y \in [-b, b]$.

Análogamente, si se factoriza la ecuación de la elipse, se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2\\
&\Longrightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2}\\
&\Longrightarrow y = \pm b\sqrt{\frac{a^2 - x^2}{a^2}}\\
&\Longrightarrow y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (1.8)
\end{aligned}$$

De este modo, se deduce que

$$a^2 - x^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 \geq x^2.$$

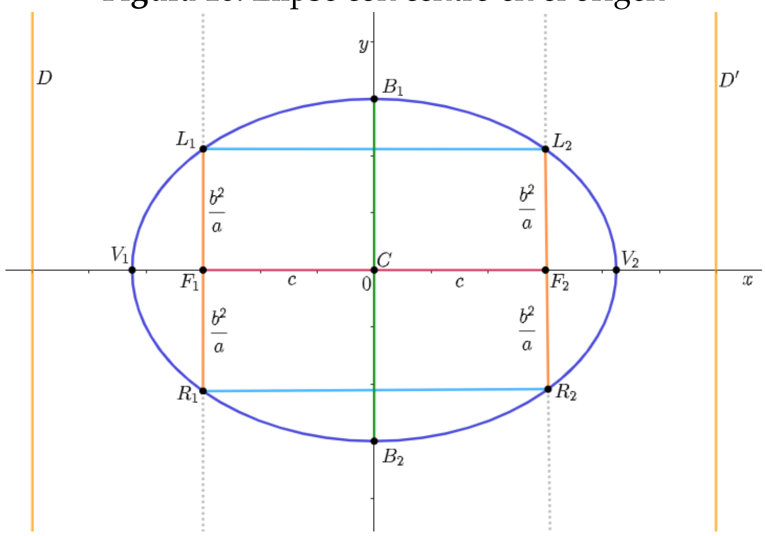
Luego, aplicando las propiedades del valor absoluto y factorizando las expresión se obtiene

$$\begin{aligned}
a^2 \geq x^2 &\Longrightarrow a^2 \geq x^2 = |x|^2\\
&\Longrightarrow a^2 \geq |x|^2\\
&\Longrightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{|x|^2}\\
&\Longrightarrow a \geq |x|\\
&\Longrightarrow |x| \leq a\\
&\Longrightarrow -a \leq x \leq a.
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (1.8) puede ser utilizada cuando $-a \leq x \leq a$ o $x \in [-a, a]$.

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Figura 18. Elipse con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Si se toma la coordenada del foco $x = c$ y se reemplaza en (1.8)

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}.$$

Luego, se vuelve a reemplazar $b^2 = a^2 - c^2$

$$\begin{aligned} y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} &\Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} \\ &\Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}(b) \\ &\Longrightarrow y = \pm\frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Es decir, que las rectas $y = \dfrac{b^2}{a}$ y $y = \dfrac{-b^2}{a}$ cortan con la elipse al nivel de donde se encuentran los focos, por lo que se puede deducir que la longitud de los lados rectos son $\overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a}$ y $\overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$.

Por otro lado, se define la excentricidad e, la cual sirve para identificar el achatamiento de la elipse. Esta se denota como el cociente

$$e = \frac{c}{a}.$$

Además, viene dada por la fórmula

$$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}.$$

Como $c < a$, la excentricidad de una elipse es menor que la unidad y por la fórmula se sabe que $a^2 - b^2 > 0$ por lo que se deduce que la excentricidad es mayor que 0. Así, se obtiene que la excentricidad de la elipse es $0 < e < 1$. Cabe recalcar, que la excentricidad se define de la misma manera en todos los casos correspondientes a la elipse.

En este sentido, si la excentricidad no cumple con esta condición se describe los siguientes casos:

- Si $e = \infty$ los focos se alejan y localizan en los vértices de la elipse hasta formarse una línea recta.
- Si $e = 0$ los focos se aproximan y localizan en el centro de la elipse, convirtiendose en una circunferencia.
- Si $e = 1$, este representa una parábola.

Ahora, para encontrar la ecuación de la directriz se utiliza la expresión que se halló al realizar la demostración de la ecuación de la elipse para este caso

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2} = cx + a^2.$$

Luego, se multiplica $\frac{1}{a}$ en cada lado de la igualdad y se factoriza

$$\begin{aligned}\left(a\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right) = (cx+a^2)\left(\frac{1}{a}\right) &\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \frac{cx}{a}+a \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2} = \frac{c}{a}\left(x+\frac{a^2}{c}\right).\end{aligned}$$

Donde se deduce que $\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ es la distancia del punto $P(x,y)$ hacia el foco $F(-c,0)$ y $\frac{c}{a}\left(x+\frac{a^2}{c}\right)$ es la distancia entre el punto $P(x,y)$ y la directriz de la elipse. Por lo que $\frac{c}{a}$ es una constante entonces

$$x+\frac{a^2}{c} = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Así, se obtiene la ecuación de la directriz.

En resumen, se tiene que:

- Centro $\rightarrow\ C(0,0)$
- Focos $\rightarrow\ F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$
- Vértices $\rightarrow\ V_1(-a,0),\ V_2(a,0)$
- Eje focal $\rightarrow\ eje\ x$
- Directrices $\rightarrow D : x - \frac{a^2}{c} = 0,\ D' : x + \frac{a^2}{c} = 0$
- Longitud de los lados rectos $\rightarrow \overline{L_1R_1} = 2\frac{b^2}{a},\ \overline{L_2R_2} = 2\frac{b^2}{a}$
- Lados rectos $\rightarrow\ L_1:\ x=-c,\ L_2:\ x=c$
- $B_1(0,b)$ y $B_2(0,-b)$
- excentricidad $\rightarrow e = \frac{c}{a}$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la elipse, si el centro está en el origen, uno de sus focos es $F_1(-3,0)$ y la recta $y=2$ corta la elipse en su punto máximo.

La ecuación de una elipse con centro en el origen en $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Debido a que el foco es $F_1(-3, 0)$, se deduce que su eje focal es el eje x y se sabe que el foco de la elipse se define $F_1(-c, 0)$, por lo que $c = 3$. También, el punto máximo de la elipse es $B_1(0, b)$, donde $y = 2$ pasa por este punto, se deduce que $B_1(0, 2)$, es decir $b = 2$. De este modo, se reemplaza c y b en la igualdad $c^2 + b^2 = a^2$.

$$\begin{aligned} c^2 + b^2 = a^2 &\Longrightarrow a^2 = (3)^2 + (2)^2 \\ &\Longrightarrow a^2 = 13 \\ &\Longrightarrow a = \sqrt{13}. \end{aligned}$$

Así, se reemplaza a y b en la ecuación de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Por lo que se obtiene su ecuación.

Ecuación de la elipse con centro en el origen y el eje focal en el eje y

Teorema 1.3.2: Ecuación de la elipse en el origen

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la elipse con centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$ y el eje focal es el eje y es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Demostración:

Consideremos la gráfica de una elipse, donde el punto $P(x, y)$ está en la elipse, $C(0, 0)$ es el centro y sus focos F_1 y F_2 están en el eje y.

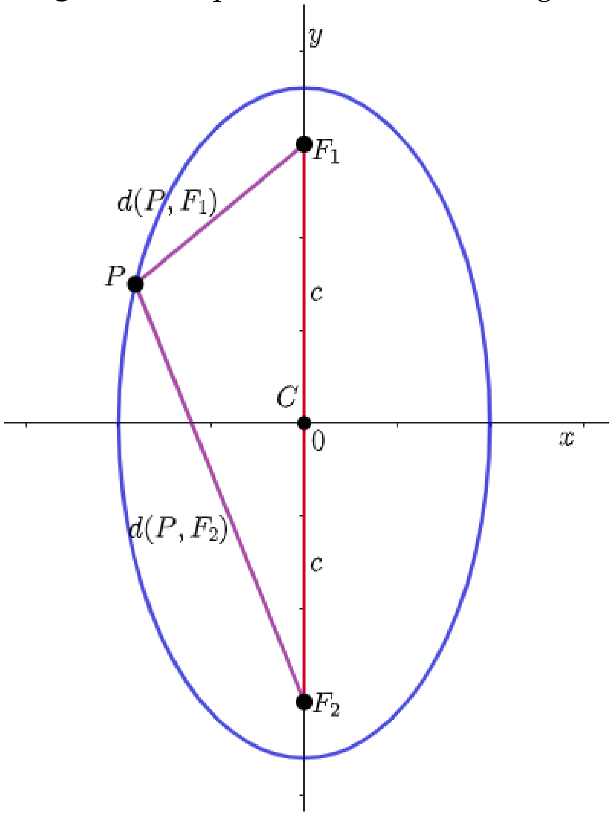
Entonces usando la definición de elipse se tiene

$$d(P, F_1) + d(d, F_2) = 2a.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x, y)$, $F_1(0, c)$ y $F_2(0, -c)$ se tiene:

$$\begin{aligned} d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a &\Longrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-c)^2} + \sqrt{(x-0)^2 + (y+c)^2} = 2a \\ &\Longrightarrow \sqrt{x^2 + (y-c)^2} + \sqrt{x^2 + (y+c)^2} = 2a \\ &\Longrightarrow \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2a - \sqrt{x^2 + (y+c)^2}. \end{aligned}$$

Figura 19. Elipse con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\left(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2 = \left(2a-\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)^2$$
$$\Longrightarrow x^2+(y-c)^2 = 4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+(y+c)^2.$$

Se continúa desarrollando la igualdad,

$$x^2+y^2-2cy+c^2 = 4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+y^2+2cy+c^2$$
$$\Longrightarrow x^2+y^2-2cy+c^2-4a^2-x^2-y^2-2cy-c^2 = -4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}$$
$$\Longrightarrow -4cy-4a^2 = -4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}.$$

Ahora se multiplica a cada lado de la igualdad por $-\dfrac{1}{4}$

$$(-4cy-4a^2)\left(-\frac{1}{4}\right) = \left(-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right) \Longrightarrow cy+a^2 = a\sqrt{x^2+(y+c)^2}.$$

Nuevamenete se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad y se sigue resolviendo

$$
\begin{aligned}
&(cy+a^2)^2=\left(a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)^2\\
&\Longrightarrow c^2y^2+2cya^2+a^4=a^2(x^2+(y+c)^2)\\
&\Longrightarrow c^2y^2+2cya^2+a^4=a^2(x^2+y^2+2cy+c^2)\\
&\Longrightarrow c^2y^2+2cya^2+a^4=a^2x^2+a^2y^2+a^22cy+a^2c^2\\
&\Longrightarrow c^2y^2-a^2y^2-a^2x^2=a^2c^2-a^4\\
&\Longrightarrow y^2(c^2-a^2)-a^2x^2=a^2(c^2-a^2)\\
&\Longrightarrow -y^2(a^2-c^2)-a^2x^2=-a^2(a^2-c^2).
\end{aligned}
$$

Se reemplaza $b^2=a^2-c^2$, donde se tiene

$$
\begin{aligned}
&-y^2(a^2-c^2)-a^2x^2=-a^2(a^2-c^2)\\
&\Longrightarrow -y^2(b^2)-a^2x^2=-a^2(b^2).
\end{aligned}
$$

Se multiplica $\dfrac{1}{a^2b^2}$ y (-1) a cada lado de la igualdad

$$
\begin{aligned}
&(-y^2b^2-a^2x^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)(-1)=(-a^2b^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)(-1)\\
&\Longrightarrow \frac{y^2b^2}{a^2b^2}+\frac{a^2x^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}.
\end{aligned}
$$

Finalmente, se simplifica lo que corresponda

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1.$$

Por lo que se obtiene la ecuación de la elipse. ■

Al factorizar la ecuación de la elipse con centro en el origen y con eje focal el eje y se tiene las siguientes expresiones:

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\Longrightarrow x=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-y^2}. \tag{1.9}$$

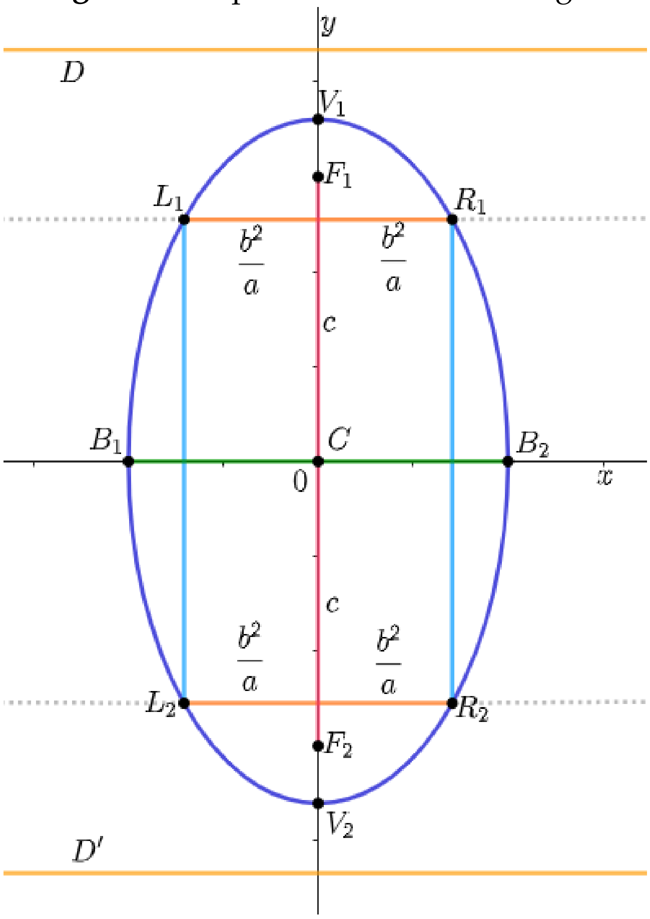
Donde la ecuación (1.9) puede ser utilizada cuando $-a\leq y\leq a$ o $y\in[-a,a]$.

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1\Longrightarrow y=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-x^2}. \tag{1.10}$$

Donde la ecuación (1.10) puede ser utilizada cuando $-b\leq x\leq b$ o $x\in[-b,b]$.

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtiene en este caso:

Figura 20. Elipse con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Al tomar la coordenada del foco $y = c$ y reemplazar en (1.9)

$$x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - y^2} \Longrightarrow x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}.$$

Luego, se vuelve a reemplazar $b^2 = a^2 - c^2$

$$x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} \Longrightarrow x = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Es decir, que las rectas $x = \dfrac{b^2}{a}$ y $x = \dfrac{-b^2}{a}$ cortan con la elipse al nivel de donde se encuentran los focos, por lo que se puede deducir que la longitud de los lados rectos son $\overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a}$ y $\overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$.

Ahora, para encontrar la ecuación de la directriz se utiliza la expresión que se halló al realizar la demostración de la ecuación de la elipse para este caso

$$a\sqrt{x^2+(y+c)^2} = cy + a^2.$$

Luego, se multiplica $\frac{1}{a}$ en cada lado de la igualdad y se factoriza

$$\left(a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right) = (cy+a^2)\left(\frac{1}{a}\right) \Longrightarrow \sqrt{x^2+(y+c)^2} = \frac{c}{a}\left(y+\frac{a^2}{c}\right).$$

Donde se deduce que $\sqrt{x^2+(y+c)^2}$ es la distancia del punto $P(x,y)$ hacia el foco $F(0,-c)$ y $\frac{c}{a}\left(y+\frac{a^2}{c}\right)$ es la distancia entre el punto $P(x,y)$ y la directriz de la elipse. Por lo que $\frac{c}{a}$ es una constante entonces

$$y+\frac{a^2}{c} = 0 \Longrightarrow y = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Así, se obtiene la ecuación de la directriz.

En resumen, se tiene que:

- Centro $\rightarrow\ C(0,0)$
- Focos $\rightarrow\ F_1(0,c),\ F_2(0,-c)$
- Vértices $\rightarrow\ V_1(0,a),\ V_2(0,-a)$
- Eje focal $\rightarrow$ *eje y*
- Directrices $\rightarrow y = \frac{a^2}{c}, y = -\frac{a^2}{c}$
- Longitud de los lados rectos $\rightarrow \overline{L_1R_1} = 2\frac{b^2}{a},\ \overline{L_2R_2} = 2\frac{b^2}{a}$
- Lados rectos $\rightarrow\ L_1:\ y = c,\ L_2:\ y = -c$
- $B_1(-b,0)$ y $B_2(b,0)$
- excentricidad $\rightarrow e = \frac{c}{a}$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la elipse si uno de sus vértices se encuentra en el punto $(0,6)$ y la distancia del eje menor de la elipse es 8.

Como se conoce que la distancia del eje menor de la elipse es 8, entonces se deduce los puntos $B_1(0,4)$ y $B_2(0,-4)$, donde $b = 4$. Además, el vértice de una elipse es $V_1(0,a)$, por lo que si el vértice es $(0,6)$ entonces se sabe que $a = 6$. De esta manera, si los valores de a y b se reemplazan en la ecuación de la elipse se obtiene

$$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{y^2}{(6)^2}+\frac{x^2}{(4)^2}=1$$
$$\Longrightarrow \frac{y^2}{36}+\frac{x^2}{16}=1.$$

Así, se obtiene la ecuación de la elipse.

Ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje x

Teorema 1.3.3: Ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$

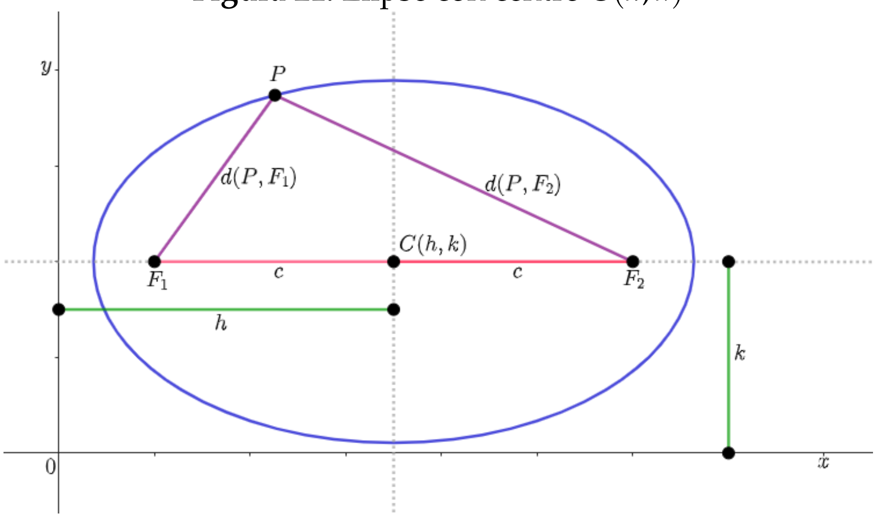
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y (h,k), $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje x es de la forma:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$$

Demostración:

Se considera la gráfica de una elipse, donde el punto $P(x,y)$ está en la elipse, $C(h,k)$ es el centro y sus focos F_1 y F_2 están en el eje x. Entonces usando la definición de elipse y aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x,y)$, $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$ se tiene:

$$d(P,F_1)+d(d,F_2)=2a.$$

Figura 21. Elipse con centro $C(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

$$
\begin{aligned}
&d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}+\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}=2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}=2a-\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}.
\end{aligned}
$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\left(\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right)^2\\
&\Longrightarrow (x-(h-c))^2+(y-k)^2=4a^2-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}+(x-(h+c))^2\\
&+(y-k)^2.
\end{aligned}
$$

Se continúa desarrollando la igualdad,

$$
\begin{aligned}
&x^2-2x(h-c)+(h-c)^2+y^2-2ky+k^2\\
&=4a^2-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2+y^2-2ky+k^2\\
&\Longrightarrow x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2+y^2-2ky+k^2-4a^2-x^2+2xh+2xc-h^2\\
&-2hc-c^2-y^2+2ky-k^2=-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\\
&\Longrightarrow 4cx-4hc-4a^2=-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}.
\end{aligned}
$$

Ahora se multiplica a cada lado de la igualdad por $\dfrac{1}{4}$

$$
\begin{aligned}
&(4cx-4hc-4a^2)\left(\frac{1}{4}\right)=\left(-4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\\
&\Longrightarrow cx-hc-a^2=-a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\\
&\Longrightarrow c(x-h)-a^2=-a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}.
\end{aligned}
$$

Nuevamenete se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad y se sigue resolviendo

$$
\begin{aligned}
&(c(x-h)-a^2)^2=\left(-a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right)^2\\
&\Longrightarrow c^2(x-h)^2-2ca^2(x-h)+a^4=a^2((x-(h+c))^2+(y-k)^2)\\
&\Longrightarrow c^2(x^2-2xh+h^2)-2ca^2x+2ca^2h+a^4=a^2(x^2-2x(h+c)+(h+c)^2y^2-2ky+k^2)\\
&\Longrightarrow c^2x^2-2xhc^2+h^2c^2-2ca^2x+2ca^2h+a^4=a^2x^2-2a^2xh-2a^2xc+a^2(h^2+2hc+c^2)
\end{aligned}
$$

$$+ a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2$$
$$\implies c^2x^2 - 2xhc^2 + h^2c^2 - 2ca^2x + 2ca^2h + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xh - 2a^2xc + a^2h^2 + 2hca^2$$
$$+ c^2a^2 + a^2y^2 - 2a^2yk + a^2k^2$$
$$\implies c^2x^2 - 2xhc^2 + h^2c^2 + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + c^2a^2 + a^2y^2 + a^2k^2 - 2a^2yk$$
$$\implies c^2x^2 - 2xhc^2 - a^2x^2 + 2a^2xh = -h^2c^2 - a^4 + a^2h^2 + c^2a^2 + a^2y^2 + a^2k^2 - 2a^2yk$$
$$\implies x(c^2x - 2hc^2 - a^2x + 2a^2h) = -h^2c^2 - a^2(a^2 - h^2 - c^2 - y^2 - k^2 + 2yk)$$
$$\implies x(x(c^2 - a^2) - 2h(c^2 - a^2)) = -h^2c^2 - a^2(a^2 - c^2 - h^2 - y^2 - k^2 + 2yk)$$
$$\implies -x(x(a^2 - c^2) - 2h(a^2 - c^2)) = -h^2c^2 - a^2(a^2 - c^2 - h^2 - y^2 - k^2 + 2yk).$$

Se reemplaza $b^2 = a^2 - c^2$, donde se tiene

$$\begin{aligned} &- x(x(b^2) - 2h(b^2)) = -h^2c^2 - a^2(b^2 - h^2 - y^2 - k^2 + 2yk) \\ &\implies -x^2b^2 + 2hb^2x = -h^2c^2 - a^2(b^2 - h^2 - y^2 - k^2 + 2yk). \end{aligned}$$

También se reemplaza $c^2 = a^2 - b^2$ y se continúa desarrollando la igualdad

$$\begin{aligned} &- x^2b^2 + 2hb^2x = -h^2(a^2 - b^2) - a^2(b^2 - h^2 - y^2 - k^2 + 2yk) \\ &\implies -x^2b^2 + 2hb^2x = -h^2a^2 + h^2b^2 - a^2b^2 + a^2h^2 + a^2y^2 + a^2k^2 - 2a^2yk \\ &\implies -x^2b^2 + 2hb^2x + h^2a^2 - h^2b^2 + a^2b^2 - a^2h^2 - a^2y^2 - a^2k^2 + 2a^2yk = 0. \end{aligned}$$

Se multiplica $\dfrac{1}{a^2b^2}$ y (-1) a cada lado de la igualdad

$$(-x^2b^2 + 2hb^2x - h^2b^2 + a^2b^2 - a^2y^2 - a^2k^2 + 2a^2yk)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)(-1) = (0)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)(-1)$$
$$\implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{2hx}{a^2} + \frac{h^2}{a^2} + 1 + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2yk}{b^2} + \frac{k^2}{b^2} = 0$$
$$\implies \frac{x^2}{a^2} - \frac{2hx}{a^2} + \frac{h^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2yk}{b^2} + \frac{k^2}{b^2} = 1.$$

Se simplifica, donde se tiene

$$\frac{x^2 - 2hx + h^2}{a^2} + \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} = 1.$$

Finalmente, se factoriza

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Por lo que se obtiene la ecuación de la elipse. ■

Al factorizar la ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje x

se tiene

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 &\Longrightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2}=1-\frac{(y-k)^2}{b^2}\\ &\Longrightarrow (x-h)^2=\left(1-\frac{(y-k)^2}{b^2}\right)a^2\\ &\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2}=\sqrt{\left(1-\frac{(y-k)^2}{b^2}\right)a^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow x-h=\pm a\sqrt{\left(\frac{b^2-(y-k)^2}{b^2}\right)}\\ &\Longrightarrow x-h=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(y-k)^2}.\end{aligned}\tag{1.11}$$

Con respecto a la nueva ecuación se deduce que

$$b^2-(y-k)^2\geq 0\Longrightarrow b^2\geq (y-k)^2.$$

Luego, aplicando las propiedades del valor absoluto y factorizando las expresión se obtiene

$$\begin{aligned}b^2\geq (y-k)^2 &\Longrightarrow b^2\geq (y-k)^2=|y-k|^2\\ &\Longrightarrow b^2\geq |y-k|^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\Longrightarrow \sqrt{b^2}\geq\sqrt{|y-k|^2}\\ &\Longrightarrow b\geq |y-k|\\ &\Longrightarrow |y-k|\leq b\\ &\Longrightarrow -b\leq y-k\leq b\\ &\Longrightarrow -b+k\leq y\leq b+k.\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (1.11) puede ser utilizada cuando $-b+k\leq y\leq b+k$ o $y\in[-b+k,b+k]$.

Análogamente, si se factoriza la ecuación de la elipse, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 &\Longrightarrow \frac{(y-k)^2}{b^2}=1-\frac{(x-h)^2}{a^2}\\ &\Longrightarrow (y-k)^2=\left(1-\frac{(x-h)^2}{a^2}\right)b^2\\ &\Longrightarrow \sqrt{(y-k)^2}=\sqrt{\left(1-\frac{(x-h)^2}{a^2}\right)b^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow y-k = \pm b\sqrt{\left(\frac{a^2-(x-h)^2}{a^2}\right)} \\
&\Longrightarrow y-k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(x-h)^2}. \qquad (1.12)
\end{aligned}$$

De este modo, se deduce que

$$a^2-(x-h)^2 \geq 0 \Longrightarrow a^2 \geq (x-h)^2.$$

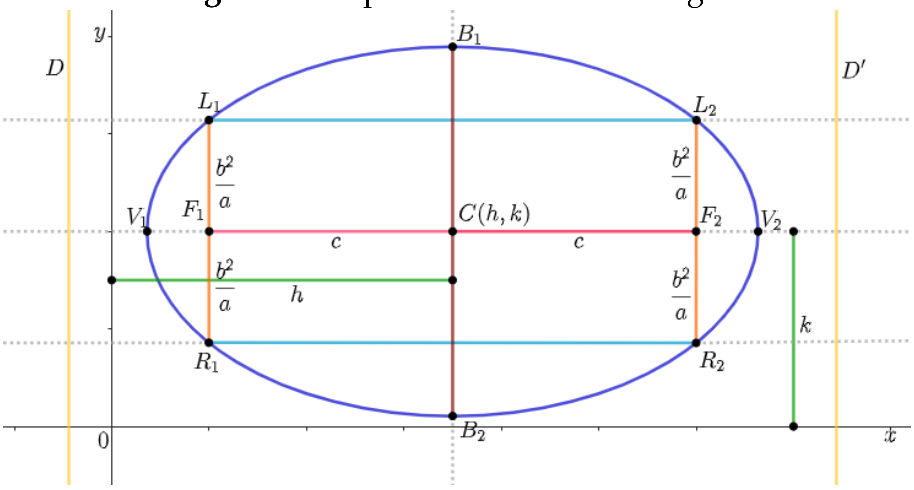
Luego, aplicando las propiedades del valor absoluto y factorizando las expresión se obtiene

$$\begin{aligned}
a^2 \geq (x-h)^2 &\Longrightarrow a^2 \geq (x-h)^2 = |x-h|^2 \\
&\Longrightarrow a^2 \geq |x-h|^2 \\
&\Longrightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{|x-h|^2} \\
&\Longrightarrow a \geq |x-h| \\
&\Longrightarrow |x-h| \leq a \\
&\Longrightarrow -a \leq x-h \leq a \\
&\Longrightarrow -a+h \leq x \leq a+h.
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuació (1.12) puede ser utilizada cuando $-a+h \leq x \leq a+h$ o $x \in [-a+h, a+h]$.

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Figura 22. Elipse con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Si se toma la coordenada del foco $x = h - c$ y se reemplaza en (1.12)

$$
\begin{aligned}
y - k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (x-h)^2} &\Longrightarrow y - k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (h-c-h)^2} \\
&\Longrightarrow y - k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - (-c)^2} \\
&\Longrightarrow y - k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2}.
\end{aligned}
$$

Luego, se vuelve a reemplazar $b^2 = a^2 - c^2$

$$
\begin{aligned}
y - k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} &\Longrightarrow y - k = \pm\frac{b}{a}(b) \\
&\Longrightarrow y - k = \pm\frac{b^2}{a}.
\end{aligned}
$$

Es decir, que las rectas $y - k = \frac{b^2}{a}$ y $y - k = -\frac{b^2}{a}$ cortan con la elipse al nivel de donde se encuentran los focos, por lo que se puede deducir que la longitud de los lados rectos son $\overline{L_1R_1} = 2\frac{b^2}{a}$ y $\overline{L_2R_2} = 2\frac{b^2}{a}$.

Ahora, para encontrar la ecuación de la directriz se utiliza la expresión que se halló al realizar la demostración de la ecuación de la elipse para este caso

$$c(x-h) - a^2 = -a\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2}.$$

Luego, se multiplica $-\frac{1}{a}$ en cada lado de la igualdad y se factoriza

$$
\begin{aligned}
&\left(-a\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right) = (c(x-h) - a^2)\left(-\frac{1}{a}\right) \\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} = -\frac{c(x-h)}{a} + a \\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} = \frac{c}{a}\left(-(x-h) + \frac{a^2}{c}\right).
\end{aligned}
$$

Donde se deduce que $\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2}$ es la distancia del punto $P(x, y)$ hacia el foco $F(h+c, k)$ y $\frac{c}{a}\left(-(x-h) + \frac{a^2}{c}\right)$ es la distancia entre el punto $P(x, y)$ y la directriz de la elipse. Por lo que $\frac{c}{a}$ es una constante entonces

$$
\begin{aligned}
-(x-h) + \frac{a^2}{c} = 0 &\Longrightarrow -x + h = -\frac{a^2}{c} \\
&\Longrightarrow x = h \pm \frac{a^2}{c}.
\end{aligned}
$$

Así, se obtiene la ecuación de la directriz.

En resumen, se tiene que:

- Centro $\rightarrow$ $C(h,k)$
- Focos $\rightarrow$ $F_1(h-c,k),\ F_2(h+c,k)$
- Vértices $\rightarrow$ $V_1(h-a,k),\ V_2(h+a,k)$
- Eje focal $\rightarrow$ $\mathit{Paralelo\ al\ eje\ x}$
- Directrices $\rightarrow x = h + \dfrac{a^2}{c}, x = h - \dfrac{a^2}{c}$
- Longitud de los lados rectos $\rightarrow \overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a},\ \overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$
- Lados rectos $\rightarrow$ $L_1:\ x = h - c,\ L_2:\ x = h + c$
- $B_1(h,k+b)$ y $B_2(h,k-b)$
- excentricidad $\rightarrow e = \dfrac{c}{a}$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la elipse, donde sus focos $F_1(-2,-2)$ y $F_2(4,-2)$ y uno de sus vértices está en la recta $L:\ x - y - 8 = 0$.

Los focos de la elipse indica si el eje focal se encuentra paralelo al eje x o al eje y. En este caso, se encuentra paralelo al eje x, donde los focos de esta elipse se definen como $F_1(h+c,k)$ y $F_2(h-c,k)$. Para encontar el centro de la elipse, se toma los dos puntos de los focos y se encuentra su punto medio,

$$Pm = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) \Longrightarrow Pm = \left(\frac{-2+4}{2}, \frac{-2-2}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow Pm = (1,-2),$$

donde Pm es el centro de la elipse $C(1,-2)$, es decir $h = 1$ y $k = -2$.

Como la elipse tiene el eje paralelo al eje x, su ecuación se define como $\dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1$, por lo que la reemplazar los valores de $h = 1$ y $k = -2$ se obtiene la ecuación buscada

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{(x-1)^2}{a^2} + \frac{(y+2)^2}{b^2} = 1.$$

Ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje y

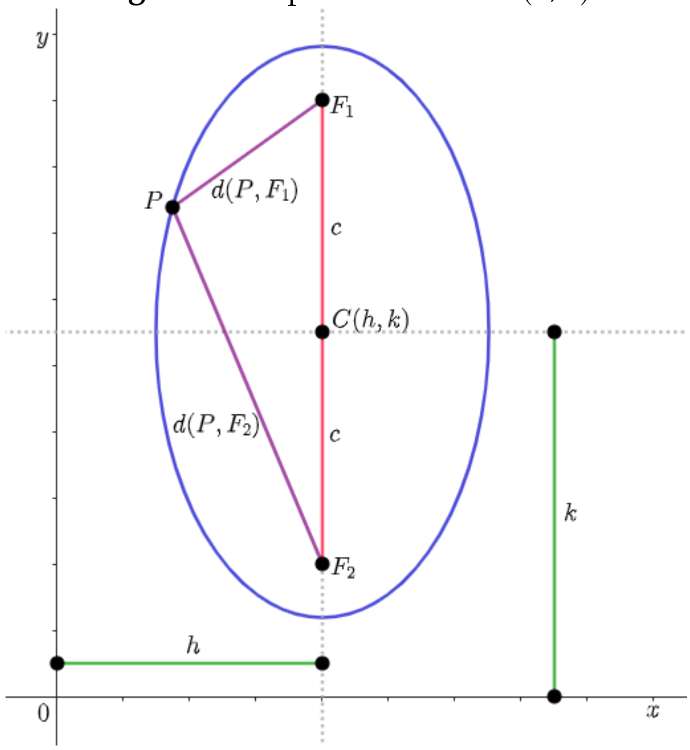
Teorema 1.3.4: Ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $(h,k), (x,y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje y es de la forma:
$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Demostración:

Consideremos la gráfica de una elipse, donde el punto $P(x,y)$ está en la elipse, $C(0,0)$ es el centro y sus focos F_1 y F_2 están en el eje y.

Figura 23. Elipse con centro $C(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

Entonces usando la definición de elipse se tiene

$$d(P,F_1) + d(d,F_2) = 2a.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos

$P(x,y)$, $F_1(h,k+c)$ y $F_2(h,k-c)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2}+\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}=2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2}=2a-\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}.
\end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+c))^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}\right)^2\\
&\Longrightarrow (x-h)^2+(y-(k+c))^2=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}+(x-h)^2+(y-(k-c))^2
\end{aligned}$$

Se continúa desarrollando la igualdad,

$$\begin{aligned}
&x^2-2xh+h^2+y^2-2y(k+c)+(k+c)^2=4a^2-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}\\
&+x^2-2xh+h^2+y^2-2y(k-c)+(k-c)^2\\
&\Longrightarrow x^2-2xh+h^2+y^2-2yk-2yc+k^2+2kc+c^2-4a^2-x^2+2xh-h^2-y^2\\
&+2yk-2yc-k^2+2kc-c^2=-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}\\
&\Longrightarrow -4yc+4ck-4a^2=-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}.
\end{aligned}$$

Ahora se multiplica a cada lado de la igualdad por $\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
&(-4yc+4ck-4a^2)\left(\frac{1}{4}\right)=\left(-4a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\\
&\Longrightarrow -yc+ck-a^2=-a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}\\
&\Longrightarrow c(k-y)-a^2=-a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}.
\end{aligned}$$

Nuevamenete se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad y se sigue resolviendo

$$\begin{aligned}
&(c(k-y)-a^2)^2=\left(-a\sqrt{(x-h)^2+(y-(k-c))^2}\right)^2\\
&\Longrightarrow c^2(k-y)^2-2ca^2(k-y)+a^4=a^2((x-h)^2+(y-(k-c))^2)\\
&\Longrightarrow c^2(k^2-2ky+y^2)-2ca^2k+2ca^2y+a^4=a^2(x^2-2xh+h^2+y^2-2y(k-c)\\
&+(k-c)^2)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow c^2k^2 - 2c^2yk + c^2y^2 - 2ca^2k + 2ca^2y + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + a^2y^2$$
$$- 2a^2yk + 2a^2yc + a^2(k^2 - 2kc + c^2)$$
$$\Longrightarrow c^2k^2 - 2c^2yk + c^2y^2 - 2ca^2k + 2ca^2y + a^4 = a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + a^2y^2 - 2a^2yk$$
$$+ 2a^2yc + a^2k^2 - 2a^2kc + a^2c^2$$
$$\Longrightarrow c^2y^2 - 2c^2yk - a^2y^2 + 2a^2yk = -c^2k^2 - a^4 + a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + a^2k^2 + a^2c^2$$
$$\Longrightarrow y(-2c^2k + c^2y - a^2y + 2a^2k) = -c^2k^2 - a^2(a^2 - x^2 + 2xh - h^2 - k^2 - c^2)$$
$$\Longrightarrow y(y(c^2 - a^2) - 2k(c^2 - a^2)) = -c^2k^2 - a^2(a^2 - x^2 + 2xh - h^2 - k^2 - c^2)$$
$$\Longrightarrow -y(y(a^2c^2) - 2k(a^2 - c^2)) = -c^2k^2 - a^2(a^2 - c^2 - x^2 + 2xh - h^2 - k^2).$$

Se reemplaza $b^2 = a^2 - c^2$, donde se tiene

$$\begin{aligned} &- y(yb^2 - 2kb^2) = -c^2k^2 - a^2(a^2 - c^2 - x^2 + 2xh - h^2 - k^2) \\ &\Longrightarrow -y^2b^2 + 2kb^2y = -c^2k^2 - a^2(a^2 - c^2 - x^2 + 2xh - h^2 - k^2). \end{aligned}$$

También se reemplaza $c^2 = a^2 - b^2$ y se continúa desarrollando la igualdad

$$\begin{aligned} &- y^2b^2 + 2kb^2y = -(a^2 - b^2)k^2 - a^2(b^2 - x^2 + 2xh - h^2 - k^2) \\ &\Longrightarrow -y^2b^2 + 2kb^2y = -a^2k^2 + b^2k^2 - a^2b^2 + a^2x^2 - 2a^2xh + a^2h^2 + a^2k^2 \\ &\Longrightarrow -y^2b^2 + 2kb^2y + a^2k^2 - b^2k^2 + a^2b^2 - a^2x^2 + 2a^2xh - a^2h^2 - a^2k^2 = 0 \\ &\Longrightarrow -y^2b^2 + 2kb^2y - b^2k^2 + a^2b^2 - a^2x^2 + 2a^2xh - a^2h^2 = 0. \end{aligned}$$

Se multiplica $\dfrac{1}{a^2b^2}$ y (-1) a cada lado de la igualdad

$$(-y^2b^2 + 2kb^2y - b^2k^2 + a^2b^2 - a^2x^2 + 2a^2xh - a^2h^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)(-1) = (0)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)(-1)$$
$$\Longrightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{2ky}{a^2} + \frac{k^2}{a^2} - 1 + \frac{x^2}{b^2} - \frac{2xh}{b^2} + \frac{h^2}{b^2} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{y^2}{a^2} - \frac{2ky}{a^2} + \frac{k^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} - \frac{2xh}{b^2} + \frac{h^2}{b^2} = 1.$$

Se simplifica, donde se tiene

$$\frac{y^2 - 2ky + k^2}{a^2} + \frac{x^2 - 2xh + h^2}{b^2} = 1.$$

Finalmente, se factoriza

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} + \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Por lo que se obtiene la ecuación de la elipse. ■

Al factorizar la ecuación de la elipse con centro en el origen y con eje focal el eje x se tiene las siguientes expresiones:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \Longrightarrow y-k=\pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2-(x-h)^2}. \tag{1.13}$$

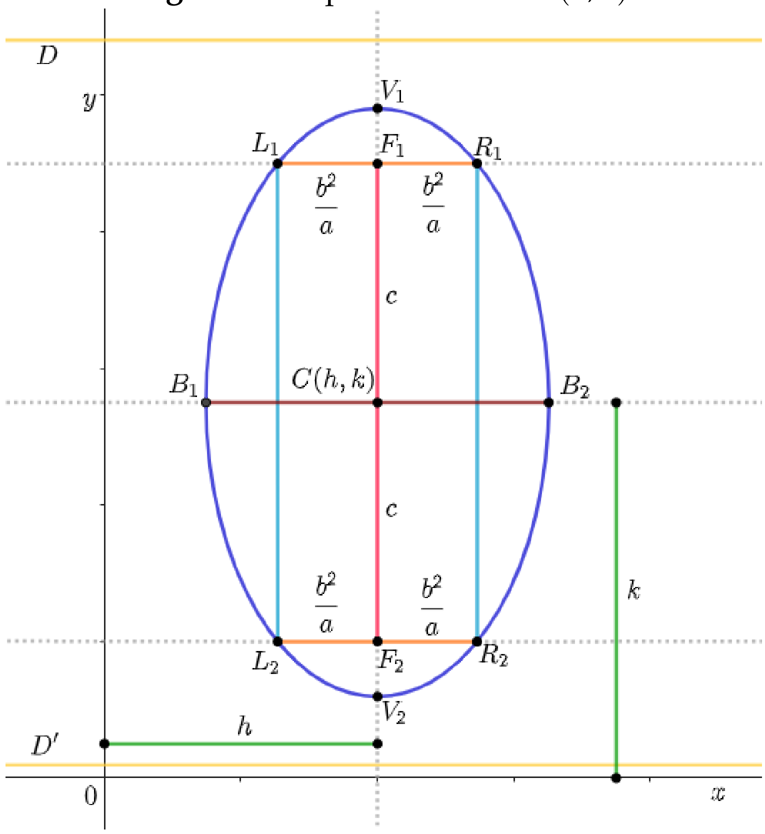
Donde la ecuación (1.13) puede ser utilizada cuando $-b+h \leq x \leq b+h$ o $x \in [-b+h, b+h]$.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \Longrightarrow x-h=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(y-k)^2}. \tag{1.14}$$

Donde la ecuación (1.14) puede ser utilizada cuando $-a+k \leq y \leq a+k$ o $y \in [-a+k, a+k]$.

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtiene en este caso:

Figura 24. Elipse con centro $C(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

Al tomar la coordenada del foco $y=k+c$ y reemplazar en (1.14)

$$x-h=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-(y-k)^2} \Longrightarrow x-h=\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-c^2}.$$

Luego, se vuelve a reemplazar $b^2 = a^2 - c^2$

$$x - h = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} \Longrightarrow x - h = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Es decir, que las rectas $x - h = \dfrac{b^2}{a}$ y $x - h = -\dfrac{b^2}{a}$ cortan con la elipse al nivel de donde se encuentran los focos, por lo que se puede deducir que la longitud de los lados rectos son $\overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a}$ y $\overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$.

Ahora, para encontrar la ecuación de la directriz se utiliza la expresión que se halló al realizar la demostración de la ecuación de la elipse para este caso

$$-a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} = c(k-y) - a^2.$$

Luego, se multiplica $-\dfrac{1}{a}$ en cada lado de la igualdad y se factoriza

$$\begin{aligned}
&\left(-a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right) = \left(c(k-y) - a^2\right)\left(-\frac{1}{a}\right)\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} = \frac{c}{a}\left(-(k-y) + \frac{a^2}{c}\right).
\end{aligned}$$

Donde se deduce que $\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2}$ es la distancia del punto $P(x,y)$ hacia el foco $F(h, k-c)$ y $\dfrac{c}{a}\left(-(k-y) + \dfrac{a^2}{c}\right)$ es la distancia entre el punto $P(x,y)$ y la directriz de la elipse. Por lo que $\dfrac{c}{a}$ es una constante entonces

$$-(k-y) + \frac{a^2}{c} = 0 \Longrightarrow y = k \pm \frac{a^2}{c}.$$

Así, se obtiene la ecuación de la directriz.

En resumen, se tiene que:

- Centro $\rightarrow\ C(h,k)$
- Focos $\rightarrow\ F_1(h, k+c),\ F_2(h, k-c)$
- Vértices $\rightarrow\ V_1(h, k+a),\ V_2(h, k-a)$
- Eje focal $\rightarrow$ *Paralelo al eje y*
- Directrices $\rightarrow y = k + \dfrac{a^2}{c}, y = k - \dfrac{a^2}{c}$
- Longitud de los lados rectos $\rightarrow \overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a},\ \overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$

- Lados rectos $\rightarrow$ $L_1 :\ y = k + c,\ L_2 :\ y = k - c$
- $B_1(h-b,k)$ y $B_2(h+b,k)$
- excentricidad $\rightarrow e = \dfrac{c}{a}$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la elipse con extremos del eje menor en $(-9,0)$ y $(15,0)$; cuya excentricidad es $\frac{3}{5}$.

Debido a los extremos del eje menor, se puede deducir que la elipse tiene eje focal paralelo al eje y. Con estos puntos se puede encontrar el centro de la elipse, a través del punto medio

$$\begin{aligned} Pm = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right) &\Longrightarrow Pm = \left(\frac{-9+15}{2}, \frac{0+0}{2}\right) \\ &\Longrightarrow Pm = (3,0) \end{aligned}$$

donde Pm es el centro de la elipse $C(3,0)$, es decir $h = 3$ y $k = 0$. Si tomamos uno de los puntos del eje menor, se tiene

$$B_1(h-b,k) = B_1(-9,0).$$

Donde, $h - b = 9$ y $k = 0$, por lo que si reemplazamos $h = 3$

$$\begin{aligned} h - b = 9 &\Longrightarrow 3 - b = 9 \\ &\Longrightarrow b = 12. \end{aligned}$$

Se conoce que la excentricidad de una elipse es $e = \frac{c}{a}$, donde esta elipse es $e = \frac{3}{5}$ y al reemplazar

$$\frac{c}{a} = \frac{3}{5} \Longrightarrow c = \frac{3a}{5}.$$

Luego, reemplazamos los valores de c y b en la igualdad $b^2 = a^2 - c^2$,

$$\begin{aligned} b^2 = a^2 - c^2 \longrightarrow a^2 &= b^2 + c^2 \\ &\Longrightarrow a^2 = (12)^2 + (\frac{3a}{5})^2 \\ &\Longrightarrow a^2 = 144 + \frac{9a^2}{25} \\ &\Longrightarrow a^2 = 225. \end{aligned}$$

Así, se reemplaza a y b en la ecuación de la elipse

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1 \Longrightarrow \frac{(y)^2}{225}+\frac{(x-3)^2}{144}=1.$$

Ecuación general de la elipse

Teorema 1.3.5: Ecuación general de la elipse

Si los coeficientes A y C son del mismo signo, la ecuación

$$Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0.$$

representa una elipse con su eje focal paralelo al eje de coordenadas, o bien puede ser un punto o no puede representar ningún lúgar geométrico.

Demostración: La demostración puede ser encontrada en Lehmann (1989). ■

Ejemplo:

La ecuación de una elipse es $x^2+4y^2+2x-12y+6=0$. Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos.

Se toma la ecuación, se ordena y se completa los cuadrados

$$\begin{aligned}
x^2+4y^2+2x-12y+6=0 &\Longrightarrow (x^2+2x)+4(y^2-3y)=-6\\
&\Longrightarrow \left(x^2+2x+\frac{2^2}{4}\right)+4\left(y^2-3y+3^2\right)=-6+\frac{2^2}{4}+\frac{(-3)^2}{4}\\
&\Longrightarrow (x^2+2x+1)+4\left(y^2-3y+\frac{9}{4}\right)=-6+1+9\\
&\Longrightarrow (x+1)^2+4\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=4.
\end{aligned}$$

Donde, la forma ordinaria de la ecuación es

$$\frac{(x+1)^2}{4}+\frac{\left(y-\frac{3}{2}\right)^2}{1}=1.$$

Claramente, se conoce que las coordenadas del centro de la elipse es $C(-1,\frac{3}{2})$ y el eje focal es paralelo al eje x. Debido a que $a^2=4$ entonces $a=2$, por lo que los vértices de la elipse son $V_1(h-a,k)$ y $V_2(h+a,k)$, entonces se tiene

$$V_1\left(-1+2,\frac{3}{2}\right) \qquad V_2\left(-1-2,\frac{3}{2}\right)$$
$$V_1\left(1,\frac{3}{2}\right) \qquad V_2\left(-3,\frac{3}{2}\right).$$

Luego, se reemplaza $a^2=4$ y $b^2=1$ en $c^2=a^2-b^2$

$$\begin{aligned} c^2=a^2-b^2 &\implies c=\sqrt{a^2-b^2}\\ &\implies c=\sqrt{4-1}\\ &\implies c=\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Así, se reemplaza c en los focos $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$, donde se obtiene que $F_1\left(-1+\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$ y $F_2\left(-1-\sqrt{3},\frac{3}{2}\right)$ los focos de esta elipse.

1.4. Hipérbola

Definición 1.4.1: Hipérbola

La hipérbola es un lugar geométrico de un punto P que se mueve en el plano $\mathbb{R}^2$ de modo que la diferencia entre las distancias de este punto a dos puntos fijos F_1 y F_2 es igual a una constante.

El punto que se mueve en el plano es $P(x,y)$, donde este punto pertenece a la hipérbola. Mientras que los puntos fijos serán llamados focos, los cuales se los representan como $F_1(x,y)$ y $F_2(x,y)$, además la constante se denominará $2a$.

Por lo que la definición formal se la describe como:

$$H_{hip}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a\}.$$

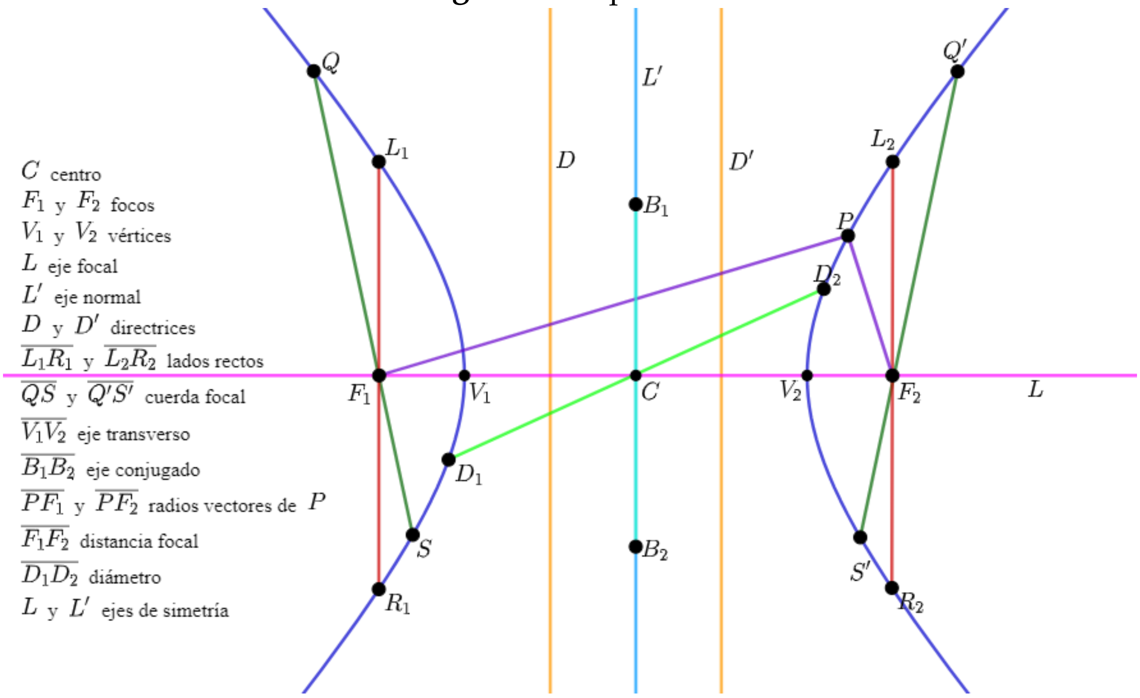
1.4.1. Elementos de la hipérbola

Los elementos de la elipse son:

- C centro
- F_1 y F_2 focos
- V_1 y V_2 vértices
- L eje focal
- L' eje normal

- D y D' directrices
- $\overline{L_1R_1}$ y $\overline{L_2R_2}$ lados rectos
- $\overline{QS}$ y $\overline{Q'S'}$ cuerda focal
- $\overline{V_1V_2}$ eje transverso $\rightarrow$ $\overline{V_1V_2} = 2a$
- $\overline{B_1B_2}$ eje conjugado $\rightarrow$ $\overline{B_1B_2} = 2b$
- $\overline{F_1F_2}$ distancia focal $\rightarrow$ $\overline{F_1F_2} = 2c$
- $\overline{D_1D_2}$ diámetro
- L y L' ejes de simetría de la hipérbola
- $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ radios vectores de P

Figura 25. Hipérbola



Fuente: Elaboración propia

1.4.2. Ecuaciones de la hipérbola

Una de las ecuaciones que se puede conseguir con respecto a la gráfica de la hipérbola es $a^2 + b^2 = c^2$. Esto debido a que se forma un triángulo rectángulo, donde su hipotenusa es c^2 y sus catetos son a^2 y b^2.

De este modo, si la gráfica de la hipérbola se encuentra en el origen del plano , este indica que la distancia del centro de la hipérbola hacia unos de sus vértices es a, por lo que el centro es $C(0,0)$ y el vértice es $V(a,0)$. De igual manera, indica la

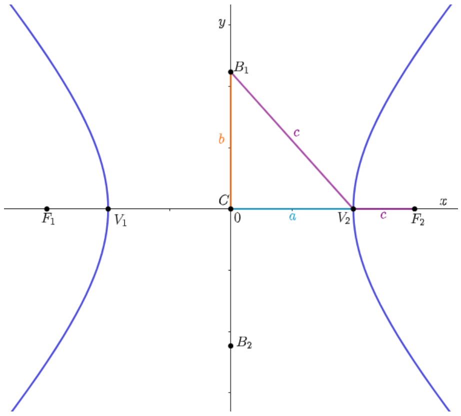


Figura 1.3: Hipérbola con centro en el origen y eje focal en el eje x.

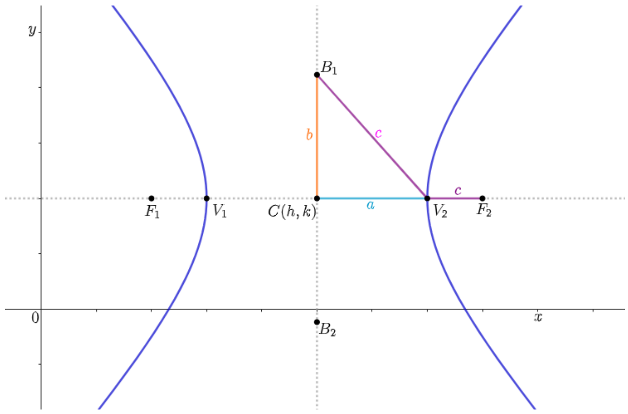


Figura 1.4: Hipérbola con centro $C(h,k)$ y eje focal paralelo al eje x.

distancia desde B, el cual es el punto $B(0,b)$, hacia uno de sus focos $F(c,0)$, el cual es la hipotenusa del triángulo rectángulo.

La razón por la que se iguala estas dos distancias es debido a que en la gráfica se tiene de hipótesis que la distancia al cuadrado entre C y V es c^2, por lo que la distancia al cuadrado entre B y F debe ser igual a c^2 para asumir que la hipotenusa del triángulo rectángulo que se forma es c^2. Al igualar estas dos distancias y aplicar la fórmula de la distancia entre dos puntos se tiene

$$
\begin{aligned}
d(B,V) = d(C,F) &\Longrightarrow (d(B,V))^2 = (d(C,F))^2 \\
&\Longrightarrow \left(\sqrt{(0-a)^2+(b-0)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(0-c)^2+(0-0)^2}\right)^2 \\
&\Longrightarrow (-a)^2+(b)^2 = (-c)^2+(0)^2 \\
&\Longrightarrow a^2+b^2 = c^2.
\end{aligned}
$$

Por otro lado, si la gráfica de la elipse se encuentra fuera del origen se tiene los siguientes puntos: el centro $C(h,k)$, uno de los focos $F(h+c,k)$, $V(h+a,k)$ y $B(h,k+b)$. Así, al reemplazar estos valores se obtiene

$$
\begin{aligned}
d(B,F) = d(C,V) &\Longrightarrow (d(B,V))^2 = (d(C,F))^2 \\
&\Longrightarrow \left(\sqrt{(h-h-a)^2+(k+b-k)^2}\right)^2 = \left(\sqrt{(h-h-c)^2+(k-k)^2}\right)^2 \\
&\Longrightarrow (-a)^2+(b)^2 = (-c)^2+(0)^2 \\
&\Longrightarrow a^2+b^2 = c^2.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, esta ecuación no va a variar con respecto a la localización de la hipérbola.

Además, la definición formal de la hipérbola es equivalente a ser escrita de la siguiente manera,

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a \tag{1.15}$$

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = -2a. \tag{1.16}$$

Esto debido a la definición de valor absoluto. De este modo, la igualdad (1.15) es utilizada cuando el punto $P(x,y)$ está sobre la rama izquierda de la hipérbola, y la igualdad (1.16) es utilizada cuando el punto $P(x,y)$ está sobre la rama derecha de la hipérbola.

Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y el eje focal en el eje x

Teorema 1.4.1: Ecuación de la hipérbola con centro en el origen

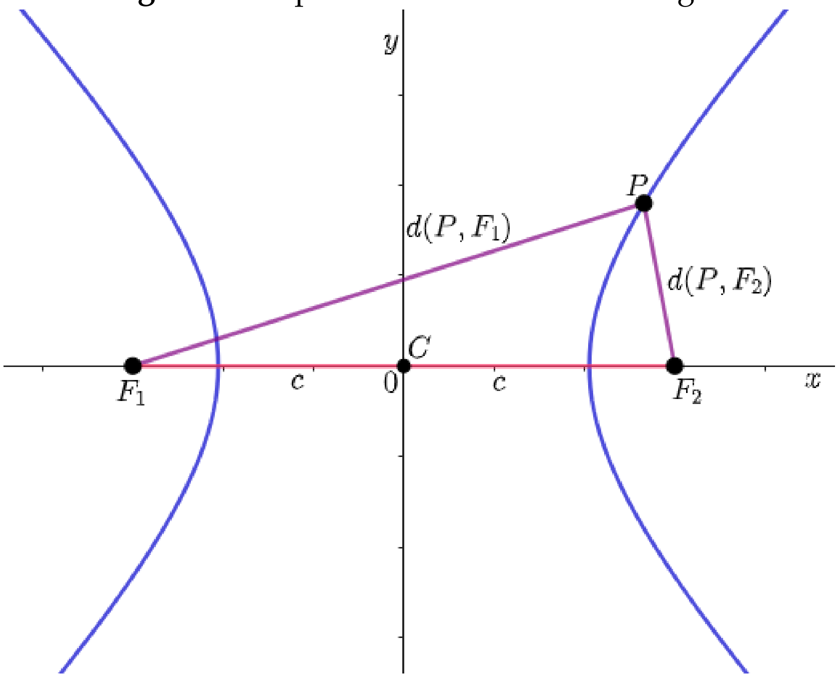
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la hipérbola con centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$ y el eje focal es el eje x es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Demostración:

Consideremos la gráfica de una hipérbola, donde el punto $P(x,y)$ está en la hipérbola, $C(0,0)$ es el centro y sus focos F_1 y F_2 están en el eje x.

Figura 26. Hipérbola con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Entonces usando la definición de hipérbola se tiene

$$d(P,F_1)-d(d,F_2)=2a.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos $P(x,y)$, $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
d(P,F_1)-d(P,F_2)=2a &\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}-\sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}=2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2\\
&\Longrightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2.
\end{aligned}$$

Se sigue desarrollando la igualdad,

$$\begin{aligned}
&x^2+2xc+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2xc+c^2+y^2\\
&\Longrightarrow 2xc+2xc-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\\
&\Longrightarrow 4xc-4a^2=4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.
\end{aligned}$$

Ahora se multiplica a cada lado de la igualdad por $\dfrac{1}{4}$

$$(2xc+2xc-4a^2)\left(\frac{1}{4}\right)=\left(4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\Longrightarrow xc-a^2=a\sqrt{(x-c)^2+y^2}.$$

Nuevamenete se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad y se sigue resolviendo

$$\begin{aligned}
(xc-a^2)^2=\left(a\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2 &\Longrightarrow x^2c^2-2a^2xc+a^4=a^2((x-c)^2+y^2)\\
&\Longrightarrow x^2c^2-2a^2xc+a^4=a^2(x^2-2xc+c^2+y^2)\\
&\Longrightarrow x^2c^2-2a^2xc+a^4=a^2x^2-2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2\\
&\Longrightarrow x^2c^2-a^2x^2+a^4-c^2a^2-a^2y^2=0\\
&\Longrightarrow x^2(c^2-a^2)+a^2(a^2-c^2-y^2)=0\\
&\Longrightarrow x^2(c^2-a^2)-a^2(c^2-a^2+y^2)=0.
\end{aligned}$$

Se reemplaza $b^2 = c^2 - a^2$, donde se tiene

$$x^2(b^2) - a^2(b^2 + y^2) = 0 \Longrightarrow x^2b^2 - a^2b^2 - a^2y^2 = 0.$$

Se multiplica $\dfrac{1}{a^2b^2}$ a cada lado de la igualdad

$$(x^2b^2 - a^2b^2 - a^2y^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right) = (0)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right) \Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - 1 - \frac{y^2}{b^2} = 0.$$

Finalmente se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Por lo que se obtiene la ecuación de la elipse. ■

Al factorizar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y con eje focal el eje x se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} = 1 + \frac{y^2}{b^2} \\
&\Longrightarrow x^2 = \left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) a^2 \\
&\Longrightarrow \sqrt{x^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{y^2}{b^2}\right) a^2} \\
&\Longrightarrow x = \pm a\sqrt{\frac{b^2 + y^2}{b^2}} \\
&\Longrightarrow x = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + y^2}. \qquad (1.17)
\end{aligned}$$

Donde se deduce que y puede tomar todos los valores de $\mathbb{R}$, es decir que la ecuación (1.17) puede ser utilizada para todo $y \in \mathbb{R}$.

Análogamente, si se factoriza la ecuación de la hipérbola, se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 &\Longrightarrow \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 \\
&\Longrightarrow y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) b^2 \\
&\Longrightarrow \sqrt{y^2} = \sqrt{\left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) b^2} \\
&\Longrightarrow y = \pm b\sqrt{\frac{x^2 - a^2}{a^2}}
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{1.18}$$

De este modo, se deduce que

$$x^2 - a^2 \geq 0 \Longrightarrow x^2 \geq a^2.$$

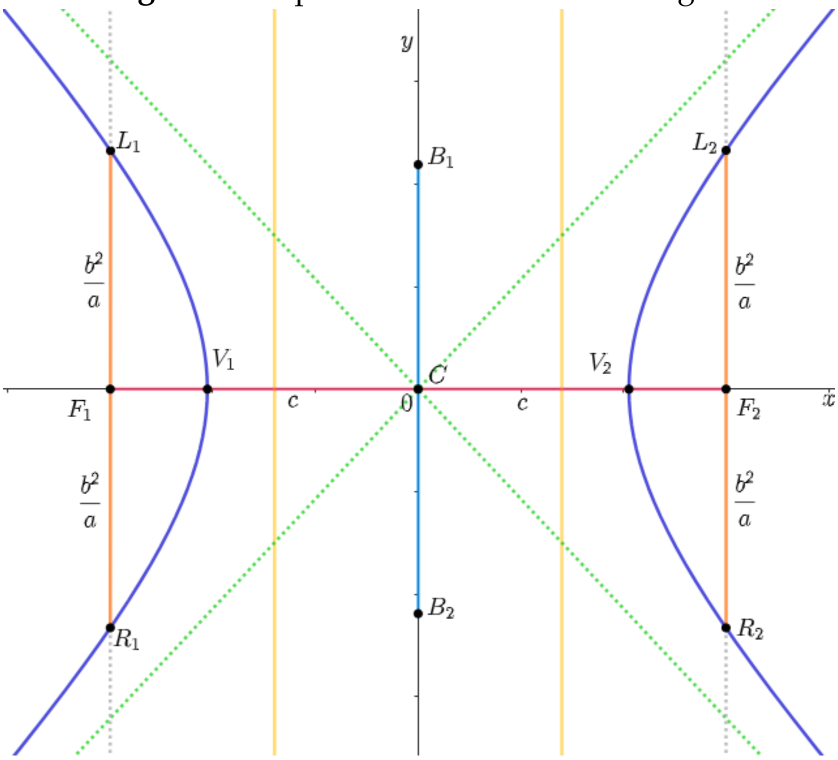
Luego, aplicando las propiedades del valor absoluto y factorizando las expresión se obtiene

$$\begin{aligned} x^2 \geq a^2 &\Longrightarrow |x|^2 = x^2 \geq a^2 \\ &\Longrightarrow |x|^2 \geq a^2 \\ &\Longrightarrow \sqrt{|x|^2} \geq \sqrt{a^2} \\ &\Longrightarrow |x| \geq a \\ &\Longrightarrow x \leq -a \ y \ x \geq a. \end{aligned}$$

Por lo que la ecuació (1.18) puede ser utilizada cuando $x \leq -a$ y $x \geq a$.

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Figura 27. Hipérbola con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Si se toma la coordenada del foco $x = c$ y se reemplaza en (1.18)

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}.$$

Luego, se vuelve a reemplazar $b^2 = c^2 - a^2$

$$\begin{aligned} y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - c^2} &\Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} \\ &\Longrightarrow y = \pm\frac{b}{a}(b) \\ &\Longrightarrow y = \pm\frac{b^2}{a}. \end{aligned}$$

Es decir, que las rectas $y = \dfrac{b^2}{a}$ y $y = \dfrac{-b^2}{a}$ cortan con la hipérbola al nivel de donde se encuentran los focos, por lo que se puede deducir que la longitud de los lados rectos son $\overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a}$ y $\overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$.

Por otro lado, se define la excentricidad e, la cual sirve para identificar la abertura de las ramas de la hipérbola. Esta se denota como el cociente

$$e = \frac{c}{a}.$$

Además, viene dada por la fórmula

$$e = \frac{c}{a} \Longrightarrow e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}.$$

Como $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad, $e > 1$. Cabe recalcar, que la excentricidad se define de la misma manera en todos los casos correspondientes a la hipérbola.

Ahora, para encontrar la ecuación de la directriz se utiliza la expresión que se halló al realizar la demostración de la ecuación de la elipse para este caso

$$a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Luego, se multiplica $\dfrac{1}{a}$ en cada lado de la igualdad y se factoriza

$$\begin{aligned} \left(a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right) = (cx - a^2)\left(\frac{1}{a}\right) &\Longrightarrow \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{cx}{a} - a \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x - c)^2 + y^2} = \frac{c}{a}\left(x - \frac{a^2}{c}\right). \end{aligned}$$

Donde se deduce que $\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ es la distancia del punto $P(x,y)$ hacia el foco $F(c,0)$ y $\frac{c}{a}\left(x-\frac{a^2}{c}\right)$ es la distancia entre el punto $P(x,y)$ y la directriz de la elipse. Por lo que $\frac{c}{a}$ es una constante entonces

$$x-\frac{a^2}{c}=0 \Longrightarrow x=\pm\frac{a^2}{c}.$$

Así, se obtiene la ecuación de la directriz.

Finalmente, para obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola se utiliza la ecuación (1.18)

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}.$$

Luego, se multiplica $\frac{x^2}{x^2}$ dentro de la raíz

$$\begin{aligned} y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}(x^2-a^2)} &\Longrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{\frac{1}{x^2}(x^2-a^2)} \\ &\Longrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{a^2}{x^2}} \\ &\Longrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}. \end{aligned}$$

Se sabe que para determinar las asíntotas de una curva es importante conocer el comportamiento de las variables de la ecuación en estudio. En este caso, saber cuál es el comportamiento de y, cada vez que se le da valores más grandes a la variable x. Por lo que, si un punto de la hipérbola se mueve a lo largo de la curva, de tal manera que x aumente sin límite se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{x^2}=0.$$

Así, se obtiene que

$$y=\pm\frac{b}{a}x\sqrt{1-0} \Longrightarrow y=\pm\frac{b}{a}x.$$

Por lo que las ecuaciones de las asíntota de la hipérbola son $y=\frac{b}{a}x$ y $y=-\frac{b}{a}$.

En resumen, se tiene que:

- Centro $\rightarrow$ $C(0,0)$

- Focos $\rightarrow\ F_1(-c,0),\ F_2(c,0)$
- Vértices $\rightarrow\ V_1(-a,0),\ V_2(a,0)$
- Eje focal $\rightarrow$ *eje x*
- Eje normal $\rightarrow$ *eje y*
- Directrices $\rightarrow x = \dfrac{a^2}{c}, x = -\dfrac{a^2}{c}$
- Longitud de los lados rectos $\rightarrow \overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a},\ \overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$
- Lados rectos $\rightarrow\ L_1 :\ x = -c,\ L_2 :\ x = c$
- $B_1(0,b)$ y $B_2(0,-b)$
- Excentricidad $\rightarrow e = \dfrac{c}{a}$
- Asíntotas $\rightarrow y = \dfrac{b}{a}x, y = -\dfrac{b}{a}x$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la hipérbola si sus focos son los puntos $F_1(-3,0)$, $F_2(3,0)$ y su excentricidad es $\dfrac{3}{2}$.

Se deduce que la hipérbola va tener su eje focal en el eje x, por lo que los focos se describen $F_1(-c,0)$ y $F_2(c,0)$. Así, se determina que $c = 3$. Luego, como la excentricidad se define como $e = \dfrac{c}{a}$, se iguala con la información dada y se reemplaza $c = 3$

$$
\begin{aligned}
e = \frac{c}{a} &\Longrightarrow \frac{3}{2} = \frac{c}{a} \\
&\Longrightarrow \frac{3}{2} = \frac{3}{a} \\
&\Longrightarrow a = 2 \\
&\Longrightarrow a^2 = 4.
\end{aligned}
$$

Después, se reemplaza c y a en la ecuación $b^2 = c^2 - a^2$

$$
\begin{aligned}
b^2 = c^2 - a^2 &\Longrightarrow b^2 = (3)^2 - (2)^2 \\
&\Longrightarrow b^2 = 5.
\end{aligned}
$$

Finalmente, se conoce que la ecuación de la hipérbola se describe $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ donde se reemplaza los datos obtenidos

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$$

Por lo que se halla la ecuación de la hipérbola.

Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y el eje focal en el eje y

Teorema 1.4.2: Ecuación de la hipérbola en el origen

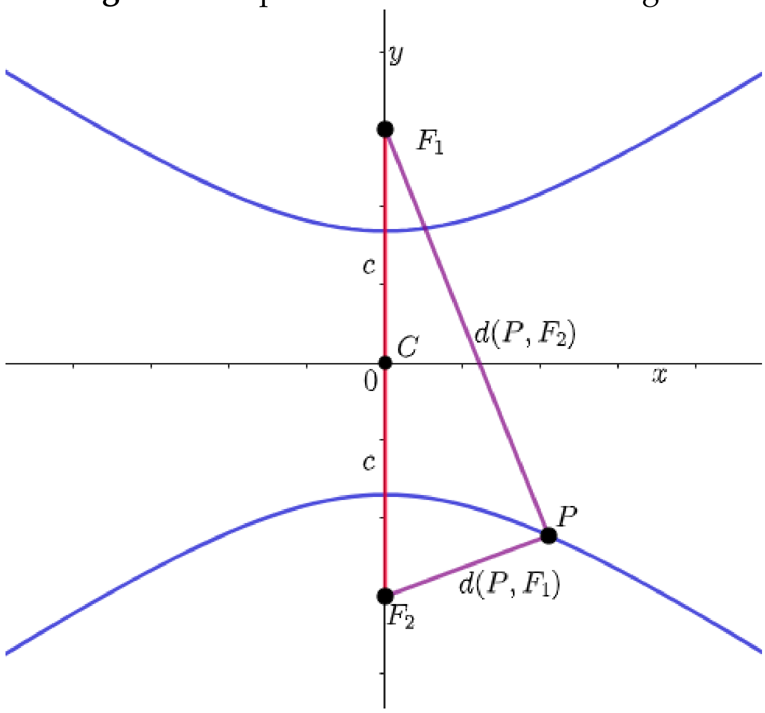
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la hipérbola con centro en el origen del plano $\mathbb{R}^2$ y el eje focal es el eje y es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Demostración:

Consideremos la gráfica de una hipérbola, donde el punto $P(x, y)$ está en la hipérbola, $C(0, 0)$ es el centro y sus focos F_1 y F_2 están en el eje y.

Figura 28. Hipérbola con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

Entonces usando la definición de hipérbola se tiene

$$d(P, F_1) - d(d, F_2) = -2a.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos

$P(x,y)$, $F_1(0,c)$ y $F_2(0,-c)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
d(P,F_1)-d(P,F_2)=-2a &\Longrightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-c)^2}-\sqrt{(x-0)^2+(y+c)^2}=-2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{x^2+(y-c)^2}-\sqrt{x^2+(y+c)^2}=-2a\\
&\Longrightarrow \sqrt{x^2+(y-c)^2}=-2a+\sqrt{x^2+(y+c)^2}.
\end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{x^2+(y-c)^2}\right)^2=\left(-2a+\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)^2\\
&\Longrightarrow x^2(y-c)^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+(y+c)^2.
\end{aligned}$$

Se continúa desarrollando la igualdad,

$$\begin{aligned}
&x^2+y^2-2yc+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}+x^2+y^2+2yc+c^2\\
&\Longrightarrow -2yc-2yc-4a^2=-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\\
&\Longrightarrow -4yc-4a^2=-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}.
\end{aligned}$$

Ahora se multiplica a cada lado de la igualdad por $-\dfrac{1}{4}$

$$(-4yc-4a^2)\left(-\frac{1}{4}\right)=\left(-4a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\Longrightarrow yc+a^2=a\sqrt{x^2+(y+c)^2}.$$

Nuevamenete se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad y se sigue resolviendo

$$\begin{aligned}
(yc+a^2)^2=\left(a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)^2 &\Longrightarrow y^2c^2+2a^2yc+a^4=a^2(x^2+(y+c)^2)\\
&\Longrightarrow y^2c^2+2a^2yc+a^4=a^2(x^2+y^2+2yc+c^2)\\
&\Longrightarrow y^2c^2+2a^2yc+a^4=a^2x^2+a^2y^2+2a^2yc+a^2c^2\\
&\Longrightarrow y^2c^2+a^4-a^2x^2-a^2y^2-a^2c^2=0\\
&\Longrightarrow y^2(c^2-a^2)+a^2(a^2-x^2-c^2)=0\\
&\Longrightarrow y^2(c^2-a^2)-a^2(c^2-a^2+x^2)=0.
\end{aligned}$$

Reemplazamos $b^2=c^2-a^2$, donde se tiene

$$y^2(b^2)-a^2(b^2+x^2)=0\Longrightarrow y^2b^2-a^2b^2-a^2x^2=0.$$

Se multiplica $\dfrac{1}{a^2b^2}$ a cada lado de la igualdad

$$(y^2b^2 - a^2b^2 - a^2x^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right) = (0)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right) \Longrightarrow \frac{y^2}{a^2} - 1 - \frac{x^2}{b^2} = 0.$$

Finalmente se tiene

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Por lo que se obtiene la ecuación de la hipérbola. ■

Al factorizar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y con eje focal el eje x se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + x^2}. \tag{1.19}$$

Donde se deduce que x puede tomar todos los valores de $\mathbb{R}$, es decir que la ecuación (1.19) puede ser utilizada para todo $x \in \mathbb{R}$.

Análogamente, si se factoriza la ecuación de la hipérbola, se tiene

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{y^2 - a^2}. \tag{1.20}$$

Por lo que la ecuación (1.20) puede ser utilizada cuando $y \leq -a$ y $y \geq a$.

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Si se toma la coordenada del foco $y = c$ y se reemplaza en (1.20)

$$x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{y^2 - a^2} \Longrightarrow x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}.$$

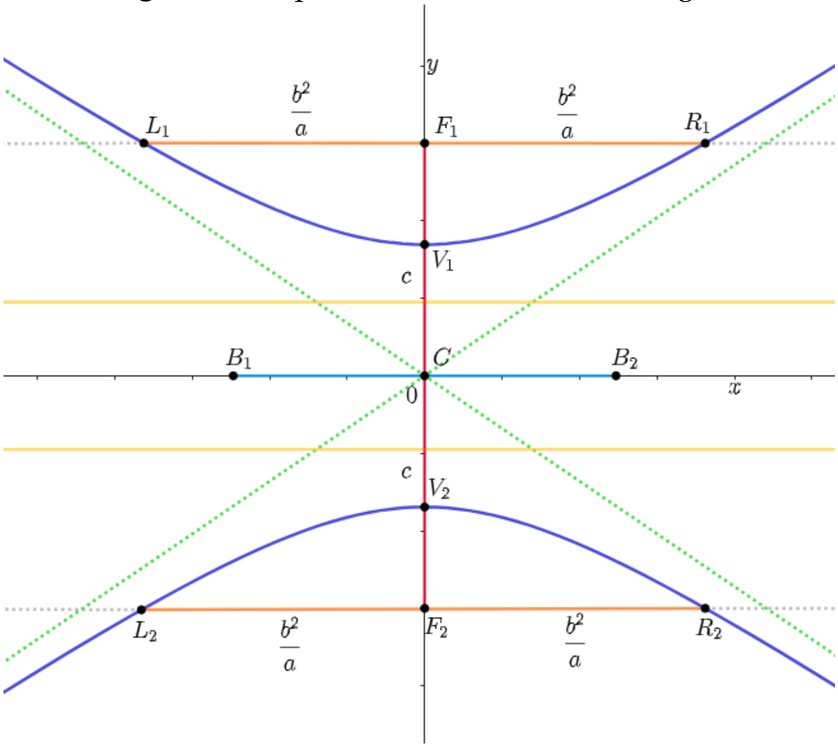
Luego, se vuelve a reemplazar $b^2 = c^2 - a^2$

$$x = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} \Longrightarrow x = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Es decir, que las rectas $y = \dfrac{b^2}{a}$ y $y = \dfrac{-b^2}{a}$ cortan con la hipérbola al nivel de donde se encuentran los focos, por lo que se puede deducir que la longitud de los lados rectos son $\overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a}$ y $\overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$.

Por otro lado, para encontrar la ecuación de la directriz se utiliza la expresión que

Figura 29. Hipérbola con centro en el origen



Fuente: Elaboración propia

se halló al realizar la demostración de la ecuación de la hipérbola para este caso

$$a\sqrt{x^2+(y+c)^2} = cy + a^2.$$

Luego, se multiplica $\frac{1}{a}$ en cada lado de la igualdad y se factoriza

$$\left(a\sqrt{x^2+(y+c)^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right) = (cy+a^2)\left(\frac{1}{a}\right) \Longrightarrow \sqrt{x^2+(y+c)^2} = \frac{c}{a}\left(y+\frac{a^2}{c}\right).$$

Donde se deduce que $\sqrt{x^2+(y+c)^2}$ es la distancia del punto $P(x,y)$ hacia el foco $F(0,-c)$ y $\frac{c}{a}\left(y+\frac{a^2}{c}\right)$ es la distancia entre el punto $P(x,y)$ y la directriz de la hipérbola. Por lo que $\frac{c}{a}$ es una constante entonces

$$y+\frac{a^2}{c} = 0 \Longrightarrow y = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Así, se obtiene la ecuación de la directriz.

Finalmente, para obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola se utiliza la ecuación (1.19)

$$y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2+x^2}.$$

Luego, se multiplica $\frac{x^2}{x^2}$ dentro de la raíz

$$\begin{aligned} y = \pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{x^2}{x^2}(b^2+x^2)} &\Longrightarrow y = \pm\frac{a}{b}x\sqrt{\frac{1}{x^2}(b^2+x^2)} \\ &\Longrightarrow y = \pm\frac{a}{b}x\sqrt{\frac{b^2}{x^2}+\frac{x^2}{x^2}} \\ &\Longrightarrow y = \pm\frac{a}{b}x\sqrt{\frac{b^2}{x^2}+1}. \end{aligned}$$

Se sabe que para determinar las asíntotas de una curva es importante conocer el comportamiento de las variables de la ecuación en estudio. En este caso, saber cuál es el comportamiento de y, cada vez que se le da valores más grandes a la variable x. Por lo que, si un punto de la hipérbola se mueve a lo largo de la curva, de tal manera que x aumente sin límite se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b^2}{x^2} = 0.$$

Así, se obtiene que

$$y = \pm\frac{a}{b}x\sqrt{0+1} \Longrightarrow y = \pm\frac{a}{b}x.$$

Por lo que las ecuaciones de las asíntota de la hipérbola son $y = \frac{a}{b}x$ y $y = -\frac{a}{b}x$.

En resumen, se tiene que:

- Centro $\rightarrow$ $C(0,0)$
- Focos $\rightarrow$ $F_1(0,c),\ F_2(0,-c)$
- Vértices $\rightarrow$ $V_1(0,a),\ V_2(0,-a)$
- Eje focal $\rightarrow$ *eje y*
- Eje normal $\rightarrow$ *eje x*
- Directrices $\rightarrow y = \frac{a^2}{c}, y = -\frac{a^2}{c}$
- Longitud de los lados rectos $\rightarrow \overline{L_1R_1} = 2\frac{b^2}{a},\ \overline{L_2R_2} = 2\frac{b^2}{a}$
- Lados rectos $\rightarrow$ $L_1 :\ y = -c,\ L_2 :\ y = c$
- $B_1(0,b)$ y $B_2(0,-b)$
- Excentricidad $\rightarrow e = \frac{c}{a}$

- Asíntotas $\to y = \frac{a}{b}x, y = -\frac{a}{b}x$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la hipérbola con vértices en los puntos $V_1(0,-5)$ y $V_2(0,5)$ sabiendo que la longitud de su lafo recto es 18.

Debido a como están definidos los vértices se sabe que la hipérbola tiene su eje focal en el eje x. Además, los vértices $V_1(0,a)$ y $V_2(0,-a)$, por lo que se deduce que $a=5$. Luego se define el lado recto $\overline{LR} = 2\frac{b^2}{a}$, donde se sabe que $\overline{LR} = 18$ y se reemplaza los datos

$$\begin{aligned}
\overline{LR} = 2\frac{b^2}{a} &\Longrightarrow 18 = 2\frac{b^2}{a} \\
&\Longrightarrow 18 = 2\frac{b^2}{5} \\
&\Longrightarrow b^2 = \frac{90}{2} \\
&\Longrightarrow b^2 = 45.
\end{aligned}$$

Por lo que se reemplaza, a y b en la ecuación de la hipérbola

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{45} = 1.$$

Ecuación de la hipérbola con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje x

Teorema 1.4.3: Ecuación de la hipérbola con centro $C(h,k)$

Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y $(h,k), (x,y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje x es de la forma:
$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Demostración:

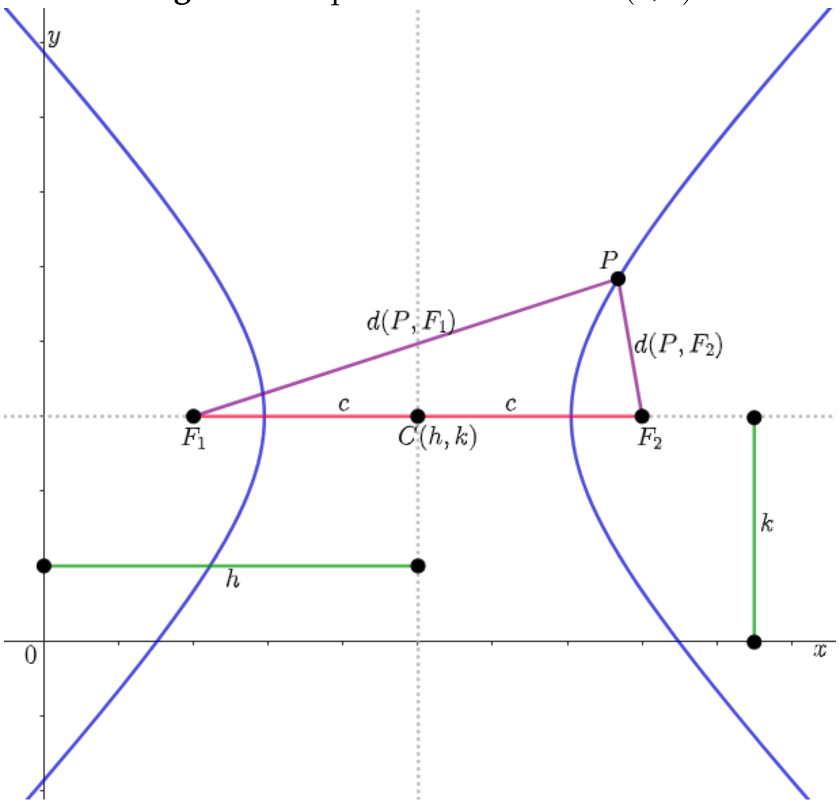
Consideremos la gráfica de una hipérbola, donde el punto $P(x,y)$ está en la hipérbola, $C(h,k)$ es el centro y sus focos F_1 y F_2 están en el eje x.

Entonces usando la definición de elipse se tiene

$$d(P,F_1) - d(d,F_2) = 2a.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos

Figura 30. Hipérbola con centro $C(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

$P(x,y)$, $F_1(h-c,k)$ y $F_2(h+c,k)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&d(P,F_1)-d(P,F_2)=2a\\
&\implies \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}-\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k^2}=2a\\
&\implies \sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}=2a+\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}.
\end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2}\right)^2=\left(2a+\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right)^2\\
&\implies (x-(h-c))^2+(y-k)^2=4a^2+4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\\
&+(x-(h+c))^2+(y-k)^2.
\end{aligned}$$

Se contiúa desarrollando la igualdad,

$$\begin{aligned}
&x^2-2x(h-c)+(h-c)^2+y^2-2yk+k^2=4a^2+4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\\
&+x^2-2x(h+c)+(h+c)^2+y^2-2yk+k^2\\
&\implies x^2-2xh+2xc+h^2-2hc+c^2+y^2-2yk+k^2=4a^2
\end{aligned}$$

$$+4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}+x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2+y^2-2yk+k^2$$
$$\Longrightarrow 2xc+2xc-2hc-2hc-4a^2=4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$
$$\Longrightarrow 4xc-4hc-4a^2=4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}.$$

Ahora se multiplica a cada lado de la igualdad por $\frac{1}{4}$

$$(4xc-4hc-4a^2)\left(\frac{1}{4}\right)=\left(4a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$
$$\Longrightarrow xc-hc-a^2=a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$$
$$\Longrightarrow c(x-h)-a^2=a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}.$$

Nuevamenete se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad y se sigue resolviendo

$$(c(x-h)-a^2)^2=\left(a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right)^2$$
$$\Longrightarrow c^2(x-h)^2-2ca^2(x-h)+a^4=a^2((x-(h+c))^2+(y-k)^2)$$
$$\Longrightarrow c^2(x^2-2xh+h^2)-2cxa^2+2cha^2+a^4=a^2(x^22x(h+c)+(h+c)^2+y^2-2yk+k^2)$$
$$\Longrightarrow c^2x^2-2c^2xh+c^2h^2-2cxa^2+2cha^2+a^4=a^2(x^2-2xh-2xc+h^2+2hc+c^2$$
$$+y^2-2yk+k^2)$$
$$\Longrightarrow c^2x^2-2c^2xh+c^2h^2-2cxa^2+2cha^2+a^4=a^2x^2-2a^2xh-2a^2xc+a^2h^2+2a^2hc$$
$$+a^2c^2+a^2y^2-2a^2yk+a^2k^2$$
$$\Longrightarrow c^2x^2-2c^2xh+c^2h^2-2cxa^2+2cha^2+a^4-a^2x^2+2a^2xh+2a^2xc-a^2h^2-2a^2hc$$
$$-a^2c^2-a^2y^2+2a^2yk-a^2k^2=0$$
$$\Longrightarrow x(c^2x-2c^2h-a^2x+2a^2h)+c^2h^2+a^2(a^2-h^2-c^2-y^2+2yk-k^2)=0$$
$$\Longrightarrow x(x(c^2-a^2)-2h(c^2-a^2))+c^2h^2+a^2(a^2-c^2-h^2-y^2+2yk-k^2)=0$$
$$\Longrightarrow x(x(c^2-a^2)-2h(c^2-a^2))+c^2h^2-a^2(c^2-a^2+h^2+y^2-2yk+k^2)=0.$$

Se reemplaza $b^2=c^2-a^2$, donde se tiene

$$x(x(b^2)-2h(b^2))+c^2h^2-a^2(b^2+h^2+y^2-2yk+k^2)=0$$
$$\Longrightarrow x^2b^2-2hb^2x+c^2h^2-a^2b^2-a^2h^2-a^2y^2+2yka^2-a^2k^2=0.$$

También se reemplaza $c^2=a^2-b^2$ y se continúa desarrollando la igualdad

$$x^2b^2-2hb^2x+(a^2+b^2)h^2-a^2b^2-a^2h^2-a^2y^2+2yka^2-a^2k^2=0$$

$$\Longrightarrow x^2b^2 - 2hb^2x + a^2h^2 + b^2h^2 - a^2b^2 - a^2h^2 - a^2y^2 + 2yka^2 - a^2k^2 = 0$$
$$\Longrightarrow x^2b^2 - 2hb^2x + b^2h^2 - a^2b^2 - a^2y^2 + 2yka^2 - a^2k^2 = 0.$$

Se multiplica $\dfrac{1}{a^2b^2}$ a cada lado de la igualdad

$$(x^2b^2 - 2hb^2x + b^2h^2 - a^2b^2 - a^2y^2 + 2yka^2 - a^2k^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right) = (0)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{2hx}{a^2} + \frac{h^2}{a^2} - 1 - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2yk}{b^2} - \frac{k^2}{b^2} = 0$$
$$\Longrightarrow \frac{x^2}{a^2} - \frac{2hx}{a^2} + \frac{h^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{2yk}{b^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1.$$

Se simplifica, donde se tiene

$$\frac{x^2 - 2hx + h^2}{a^2} - \frac{y^2 - 2yk + k^2}{b^2} = 1.$$

Finalmente, se factoriza

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1.$$

Por lo que se obtiene la ecuación de la hipérbola. ■

Al factorizar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y con eje focal el eje x se tiene

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 &\Longrightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1 + \frac{(y-k)^2}{b^2} \\ &\Longrightarrow (x-h)^2 = \left(1 + \frac{(y-k)^2}{b^2}\right)a^2 \\ &\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2} = \sqrt{\left(1 + \frac{(y-k)^2}{b^2}\right)a^2} \\ &\Longrightarrow x - h = \pm a\sqrt{\frac{b^2 + (y-k)^2}{b^2}} \\ &\Longrightarrow x - h = \pm \frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (y-k)^2}. \qquad (1.21)\end{aligned}$$

Donde se deduce que y puede tomar todos los valores de $\mathbb{R}$, es decir que la ecuación (1.21) puede ser utilizada para todo $y \in \mathbb{R}$.

Análogamente, si se factoriza la ecuación de la hipérbola, se tiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{(y-k)^2}{b^2} = \frac{(x-h)^2}{a^2} - 1$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow (y-k)^2 = \left(\frac{(x-h)^2}{a^2} - 1\right) b^2 \\
&\Longrightarrow \sqrt{(y-k)^2} = \sqrt{\left(\frac{(x-h)^2}{a^2} - 1\right) b^2} \\
&\Longrightarrow y-k = \pm b\sqrt{\frac{(x-h)^2 - a^2}{a^2}} \\
&\Longrightarrow y-k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2 - a^2}. \qquad (1.22)
\end{aligned}$$

De este modo, se deduce que

$$(x-h)^2 - a^2 \geq 0 \Longrightarrow (x-h)^2 \geq a^2.$$

Luego, aplicando las propiedades del valor absoluto y factorizando las expresión se obtiene

$$\begin{aligned}
(x-h)^2 \geq a^2 &\Longrightarrow |x-h|^2 = (x-h)^2 \geq a^2 \\
&\Longrightarrow |x-h|^2 \geq a^2 \\
&\Longrightarrow \sqrt{|x-h|^2} \geq \sqrt{a^2} \\
&\Longrightarrow |x-h| \geq a \\
&\Longrightarrow x-h \leq -a \text{ y } x-h \geq a.
\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación (1.22) puede ser utilizada cuando $x \leq h - a$ y $x \geq h + a$.

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Si se toma la coordenada del foco $x = h + c$ y se reemplaza en (1.18)

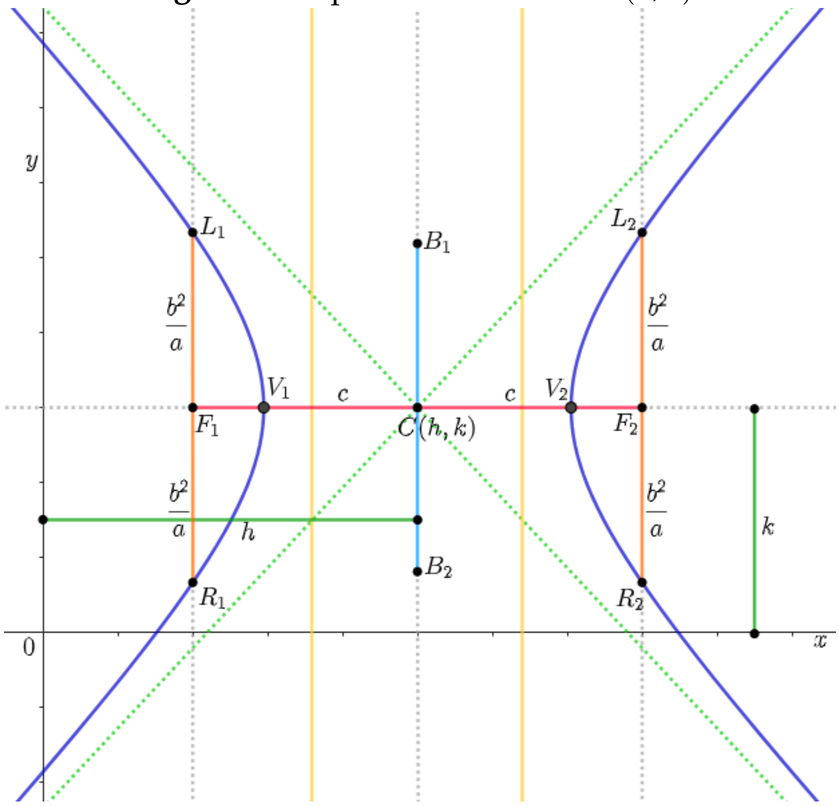
$$\begin{aligned}
y-k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2 - a^2} &\Longrightarrow y-k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(h+c-h)^2 - a^2} \\
&\Longrightarrow y-k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}.
\end{aligned}$$

Luego, se vuelve a reemplazar $b^2 = c^2 - a^2$

$$\begin{aligned}
y-k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2} &\Longrightarrow y-k = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} \\
&\Longrightarrow y-k = \pm\frac{b}{a}(b) \\
&\Longrightarrow y-k = \pm\frac{b^2}{a}.
\end{aligned}$$

Es decir, que las rectas $y - k = \dfrac{b^2}{a}$ y $y - k = \dfrac{-b^2}{a}$ cortan con la hipérbola al nivel de

Figura 31. Hipérbola con centro $C(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

donde se encuentran los focos, por lo que se puede deducir que la longitud de los lados rectos son $\overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a}$ y $\overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$.

Por otro lado, para encontrar la ecuación de la directriz se utiliza la expresión que se halló al realizar la demostración de la ecuación de la hipérbola para este caso

$$a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = c(x-h)-a^2.$$

Luego, se multiplica $\dfrac{1}{a}$ en cada lado de la igualdad y se factoriza

$$\begin{aligned}
&\left(a\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}\right)\left(\frac{1}{a}\right) = (c(x-h)-a^2)\left(\frac{1}{a}\right)\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = \frac{c(x-h)}{a} - \frac{1}{a}\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = \frac{c}{a}\left((x-h)-\frac{a^2}{c}\right).
\end{aligned}$$

Donde se deduce que $\sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2}$ es la distancia del punto $P(x,y)$ hacia el foco $F((h+c),0)$ y $\dfrac{c}{a}\left((x-h)-\dfrac{a^2}{c}\right)$ es la distancia entre el punto $P(x,y)$ y la directriz de la hipérbola. Por lo que $\dfrac{c}{a}$ es una constante entonces

$$\begin{aligned}(x-h)-\frac{a^2}{c}=0 &\Longrightarrow x-h=\pm\frac{a^2}{c}\\ &\Longrightarrow x=h\pm\frac{a^2}{c}.\end{aligned}$$

Así, se obtiene la ecuación de la directriz.

Finalmente, para obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola se utiliza la ecuación (1.22)

$$y-k=\pm\frac{b}{a}\sqrt{(x-h)^2-a^2}.$$

Luego, multiplicamos $\dfrac{(x-h)^2}{(x-h)^2}$ dentro de la raíz

$$\begin{aligned}y-k=\pm\frac{b}{a}\sqrt{\frac{(x-h)^2}{(x-h)^2}(x-h)^2-a^2} &\Longrightarrow y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\sqrt{\frac{1}{(x-h)^2}((x-h)^2-a^2)}\\ &\Longrightarrow y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\sqrt{\frac{(x-h)^2}{(x-h)^2}-\frac{a^2}{(x-h)^2}}\\ &\Longrightarrow y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\sqrt{1-\frac{a^2}{(x-h)^2}}.\end{aligned}$$

Se sabe que para determinar las asíntotas de una curva es importante conocer el comportamiento de las variables de la ecuación en estudio. En este caso, saber cuál es el comportamiento de y, cada vez que se le da valores más grandes a la variable x. Por lo que, si un punto de la hipérbola se mueve a lo largo de la curva, de tal manera que x aumente sin límite se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a^2}{(x-h)^2}=0.$$

Así, se obtiene que

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)\sqrt{1-0}\Longrightarrow y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h).$$

Por lo que las ecuaciones de las asíntota de la hipérbola son $y-k=\dfrac{b}{a}(x-h)$ y $y-k=-\dfrac{b}{a}(x-h)$.

En resumen, se tiene que:

- Centro $\rightarrow$ $C(h,k)$
- Focos $\rightarrow$ $F_1(h-c,k),\ F_2(h+c,k)$
- Vértices $\rightarrow$ $V_1(h-a,k),\ V_2(h+a,k)$
- Eje focal $\rightarrow$ $y=k$
- Eje normal $\rightarrow$ $x=h$
- Directrices $\rightarrow x = h+\dfrac{a^2}{c}, x = h-\dfrac{a^2}{c}$
- Longitud de los lados rectos $\rightarrow \overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a},\ \overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$
- Lados rectos $\rightarrow$ $L_1:\ x=h-c,\ L_2:\ x=h+c$
- $B_1(h,k+b)$ y $B_2(h,k-b)$
- Excentricidad $\rightarrow e = \dfrac{c}{a}$
- Asíntotas $\rightarrow y-k = \dfrac{b}{a}(x-h), y-k = -\dfrac{b}{a}(x-h)$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la parábola cuyas asíntotas son las rectas $L_1:\ 2x+y-3=0$ $L_2:\ y-2x+1=0$, sabiendo que la curva pasa por el punto $(4,6)$.

La intersección de las dos asíntotas es el centro de la hipérbola, por lo que se tiene

$$y-2x+1=0 \Longrightarrow y=2x-1,$$

se reemplaza en L_1

$$\begin{aligned} 2x+y-3=0 &\Longrightarrow 2x+2x-1-3=0 \\ &\Longrightarrow 4x-4=0 \\ &\Longrightarrow x=1. \end{aligned}$$

Ahora, se reemplaza $x=1$ en $y=2x-1$, donde se obtiene $y=1$. Por lo que el centro de la hipérbola es $C(1,1)$.

Luego, se toma la recta L_1 y se modifica hasta obtener la ecuación de la forma determinada de la asíntota $y-k=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$

$$\begin{aligned}2x+y-3=0 &\Longrightarrow y=3-2x\\ &\Longrightarrow y=2+1-2x\\ &\Longrightarrow y-1=-2x+2\\ &\Longrightarrow y-1=-2(x-1).\end{aligned}$$

De este modo, se deduce que $\pm\dfrac{b}{a}=-2$, pues así

$$\begin{aligned}\pm\frac{b}{a}=-2 &\Longrightarrow \left(\pm\frac{b}{a}\right)^2=(-2)^2\\ &\Longrightarrow \frac{b^2}{a^2}=4\\ &\Longrightarrow b^2=4a^2.\end{aligned}$$

Ahora, reemplazamos los datos en la ecuación de la hipérbola $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$,

$$\begin{aligned}\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1 &\Longrightarrow \frac{(4-1)^2}{a^2}-\frac{(6-1)^2}{b^2}=1\\ &\Longrightarrow \frac{9}{a^2}-\frac{25}{b^2}=1\\ &\Longrightarrow 9b^2-25a^2=a^2b^2\\ &\Longrightarrow 9(4a^2)-25a^2=a^2(4a^2)\\ &\Longrightarrow 36a^2-25a^2=4a^4\\ &\Longrightarrow 11a^2=4a^4\\ &\Longrightarrow a^2=\frac{11}{4}\end{aligned}$$

Luego se reemplaza a^2 en $b^2=4a^2$,

$$\begin{aligned}b^2=4a^2 &\Longrightarrow b^2=4\left(\frac{11}{4}\right)\\ &\Longrightarrow b^2=11.\end{aligned}$$

Por lo que la ecuación de la hipérbola es

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{11}{4}}-\frac{(y-1)^2}{11}=1.$$

Ecuación de la hipérbola con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje y

Teorema 1.4.4: Ecuación de la hipérbola con centro $C(h,k)$

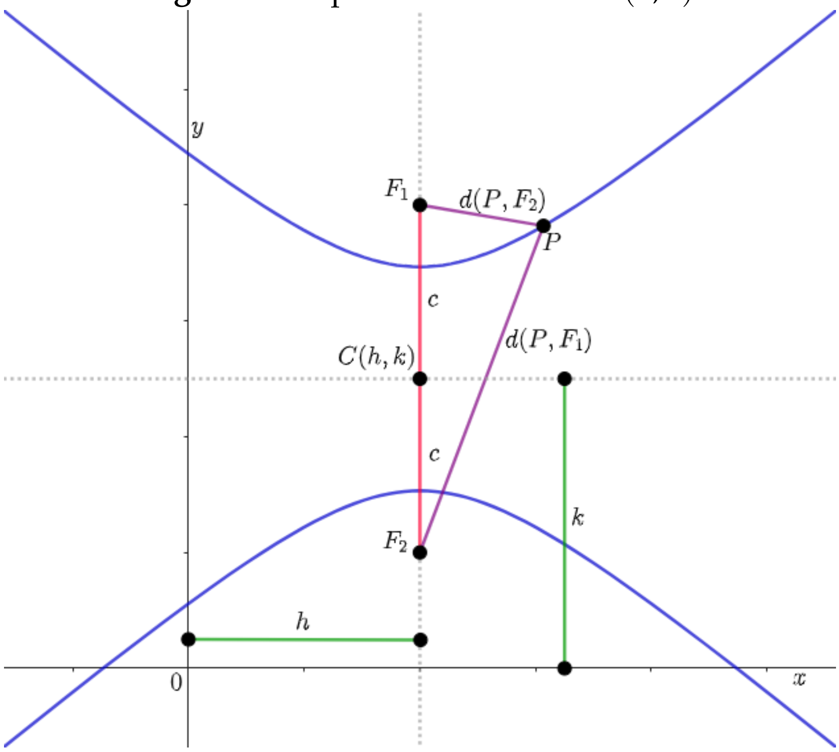
Sea $a, b \in \mathbb{R}$ y (h,k), $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. La ecuación de la elipse con centro $C(h,k)$ y el eje focal paralelo al eje y es de la forma:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1.$$

Demostración:

Consideremos la gráfica de una hipérbola, donde el punto $P(x,y)$ está en la hipérbola, $C(h,k)$ es el centro y sus focos F_1 y F_2 están en el eje y.

Figura 32. Hipérbola con centro $C(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

Entonces usando la definición de elipse se tiene

$$d(P,F_1) - d(d,F_2) = -2a.$$

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, en este caso entre los puntos

$P(x,y)$, $F_1(h,k-c)$ y $F_2(h,k+c)$ se tiene:

$$\begin{aligned}
&d(P,F_1) - d(P,F_2) = -2a \\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} = -2a \\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2} = -2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}.
\end{aligned}$$

Luego, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad se obtiene

$$\begin{aligned}
&\left(\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k-c))^2}\right)^2 = \left(-2a - \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}\right)^2 \\
&\Longrightarrow (x-h)^2 + (y-(k-c))^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
&+ (x-h)^2 + (y-(k+c))^2.
\end{aligned}$$

Se sigue desarrollando la igualdad,

$$\begin{aligned}
&x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2y(k-c) + (k-c)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
&x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2y(k+c) + (k+c)^2 \\
&\Longrightarrow x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + 2yc + k^2 - 2kc + c^2 = 4a^2 \\
&- 4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} + x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk - 2yc + k^2 + 2kc + c^2 \\
&\Longrightarrow 2yc + 2yc - 2kc - 2kc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
&\Longrightarrow 4yc - 4kc - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}.
\end{aligned}$$

Ahora se multiplica a cada lado de la igualdad por $\dfrac{1}{4}$

$$\begin{aligned}
&(4yc - 4kc - 4a^2)\left(\frac{1}{4}\right) = \left(-4a\sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) \\
&\Longrightarrow yc - kc - a^2 = -a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} \\
&\Longrightarrow c(y-k) - a^2 = -a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}.
\end{aligned}$$

Nuevamenete se eleva al cuadrado a ambos lados de la igualdad y se sigue resolviendo

$$\begin{aligned}
&(c(y-k) - a^2)^2 = \left(-a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}\right)^2 \\
&\Longrightarrow c^2(y-k)^2 - 2ca^2(y-k) + a^4 = a^2((x-h)^2 + (y-(k+c))^2)
\end{aligned}$$

$$\Longrightarrow c^2(y^2-2yk+k^2)-2cya^2+2ca^2k+a^4=a^2(x^2-2xh+h^2+y^2-2y(k+c)+(k+c)^2)$$
$$\Longrightarrow c^2y^2-2c^2yk+c^2k^2-2ca^2y+2ca^2k+a^4=a^2(x^2-2xh+h^2+y^2-2yk-2yc+k^2$$
$$+2kc+c^2)$$
$$\Longrightarrow c^2y^2-2c^2yk+c^2k^2-2ca^2y+2ca^2k+a^4=a^2x^2-2a^2xh+a^2h^2+a^2y^2-2a^2yk-2a^2yc$$
$$+a^2k^2+2a^2kc+a^2c^2$$
$$\Longrightarrow c^2y^2-2c^2yk+c^2k^2-2ca^2y+2ca^2k+a^4-a^2x^2+2a^2xh-a^2h^2-a^2y^2+2a^2yk+2a^2yc$$
$$-a^2k^2-2a^2kc-a^2c^2=0$$
$$\Longrightarrow y(c^2y-2c^2k-a^2y+2a^2k)+c^2k^2+a^2(a^2-x^2+2xh-h^2-k^2-c^2)=0$$
$$\Longrightarrow y(y(c^2-a^2)-2k(c^2-a^2))+c^2k^2+a^2(a^2-c^2-x^2+2xh-h^2-k^2)=0$$
$$\Longrightarrow y(y(c^2-a^2)-2k(c^2-a^2))+c^2k^2-a^2(c^2-a^2+x^2-2xh+h^2+k^2)=0.$$

Se reemplaza $b^2=c^2-a^2$, donde se tiene

$$y(y(b^2)-2k(b^2))+c^2k^2-a^2(b^2+x^2-2xh+h^2+k^2)=0$$
$$\Longrightarrow y^2b^2-2kb^2y+c^2k^2-a^2b^2-a^2x^2+2a^2xh-a^2h^2-a^2k^2=0.$$

También se reemplaza $c^2=a^2-b^2$ y se continúa desarrollando la igualdad

$$y^2b^2-2kb^2y+(a^2+b^2)k^2-a^2b^2-a^2x^2+2a^2xh-a^2h^2-a^2k^2=0$$
$$\Longrightarrow y^2b^2-2kb^2y+a^2k^2+b^2k^2-a^2b^2-a^2x^2+2a^2xh-a^2h^2-a^2k^2=0$$
$$\Longrightarrow y^2b^2-2kb^2y+b^2k^2-a^2b^2-a^2x^2+2a^2xh-a^2h^2=0.$$

Se multiplica $\dfrac{1}{a^2b^2}$ a cada lado de la igualdad

$$(y^2b^2-2kb^2y+b^2k^2-a^2b^2-a^2x^2+2a^2xh-a^2h^2)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)=(0)\left(\frac{1}{a^2b^2}\right)$$
$$\Longrightarrow \frac{y^2}{a^2}-\frac{2ky}{a^2}+\frac{k^2}{a^2}-1-\frac{x^2}{b^2}+\frac{2xh}{b^2}-\frac{h^2}{b^2}=0$$
$$\Longrightarrow \frac{y^2}{a^2}-\frac{2ky}{a^2}+\frac{k^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}+\frac{2xh}{b^2}-\frac{h^2}{b^2}=1.$$

Se simplifica, donde se tiene

$$\frac{y^2-2ky+k^2}{a^2}-\frac{x^2-2xh+h^2}{b^2}=1.$$

Finalmente, se factoriza

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$$

Por lo que se obtiene la ecuación de la hipérbola. ■

Al factorizar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen y con eje focal el eje x se tiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow y - k = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (x-h)^2}. \tag{1.23}$$

Donde se deduce que x puede tomar todos los valores de $\mathbb{R}$, es decir que la ecuación (1.23) puede ser utilizada para todo $x \in \mathbb{R}$.

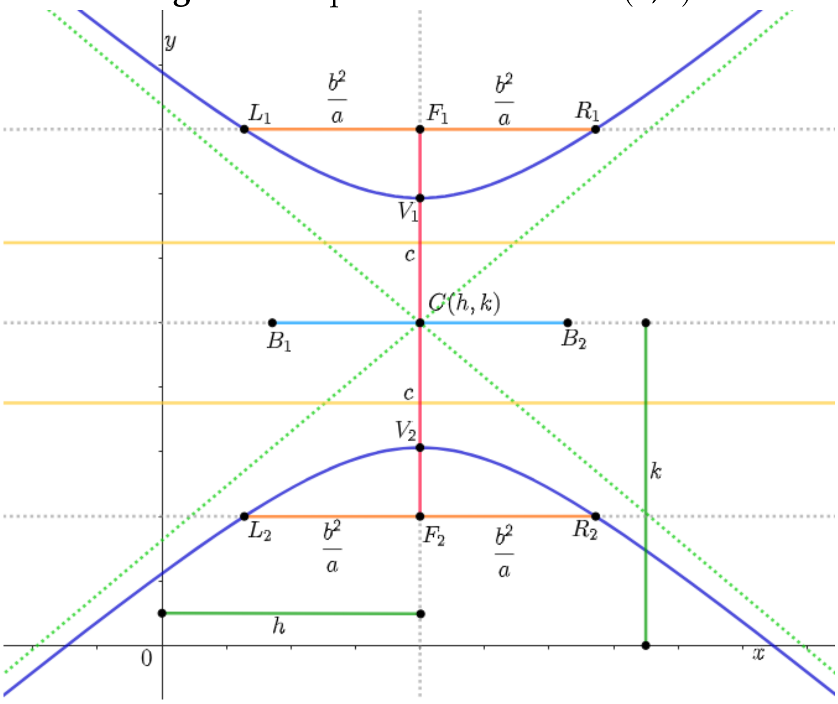
Análogamente, si se factoriza la ecuación de la hipérbola, se tiene

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow x - h = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(y-k)^2 - a^2}. \tag{1.24}$$

Por lo que la ecuació (1.24) puede ser utilizada cuando $y \leq k - a$ y $y \geq k + a$.

Con la siguiente gráfica, se puede visualizar las ecuaciones y elementos que se obtienen en este caso:

Figura 33. Hipérbola con centro $C(h,k)$



Fuente: Elaboración propia

Si se toma la coordenada del foco $y = k - c$ y se reemplaza en (1.24)

$$x - h = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(y-k)^2 - a^2} \Longrightarrow x - h = \pm\frac{b}{a}\sqrt{c^2 - a^2}.$$

Luego, se vuelve a reemplazar $b^2 = c^2 - a^2$

$$x - h = \pm\frac{b}{a}\sqrt{b^2} \Longrightarrow x - h = \pm\frac{b^2}{a}.$$

Es decir, que las rectas $x - h = \dfrac{b^2}{a}$ y $x - h = \dfrac{-b^2}{a}$ cortan con la hipérbola al nivel de donde se encuentran los focos, por lo que se puede deducir que la longitud de los lados rectos son $\overline{L_1R_1} = 2\dfrac{b^2}{a}$ y $\overline{L_2R_2} = 2\dfrac{b^2}{a}$.

Por otro lado, para encontrar la ecuación de la directriz se utiliza la expresión que se halló al realizar la demostración de la ecuación de la hipérbola para este caso

$$-a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} = c(y-k) - a^2.$$

Luego, se multiplica $-\dfrac{1}{a}$ en cada lado de la igualdad y se factoriza

$$\begin{aligned}
&\left(-a\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}\right)\left(-\frac{1}{a}\right) = c(y-k) - a^2\left(-\frac{1}{a}\right)\\
&\Longrightarrow \sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2} = \frac{c}{a}\left(-(y-k) - \frac{a^2}{c}\right).
\end{aligned}$$

Donde se deduce que $\sqrt{(x-h)^2 + (y-(k+c))^2}$ es la distancia del punto $P(x,y)$ hacia el foco $F(0,(k+c))$ y $\dfrac{c}{a}\left(-(y-k) - \dfrac{a^2}{c}\right)$ es la distancia entre el punto $P(x,y)$ y la directriz de la hipérbola. Por lo que $\dfrac{c}{a}$ es una constante entonces

$$-(y-k) - \frac{a^2}{c} = 0 \Longrightarrow y = k \pm \frac{a^2}{c}.$$

Así, se obtiene la ecuación de la directriz.

Finalmente, para obtener las ecuaciones de las asíntotas de la hipérbola se utiliza la ecuación (1.23)

$$y - k = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 + (x-h)^2}.$$

Luego, multiplicamos $\dfrac{(x-h)^2}{(x-h)^2}$ dentro de la raíz

$$y - k = \pm\frac{a}{b}\sqrt{\frac{(x-h)^2}{(x-h)^2}b^2 + (x-h)^2} \Longrightarrow y - k = \pm\frac{a}{b}(x-h)\sqrt{\frac{1}{(x-h)^2}(b^2 + (x-h)^2)}$$

$$\Longrightarrow y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)\sqrt{\frac{b^2}{(x-h)^2}+\frac{(x-h)^2}{(x-h)^2}}$$
$$\Longrightarrow y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)\sqrt{\frac{b^2}{(x-h)^2}+1}.$$

Se sabe que para determinar las asíntotas de una curva es importante conocer el comportamiento de las variables de la ecuación en estudio. En este caso, saber cuál es el comportamiento de y, cada vez que se le da valores más grandes a la variable x. Por lo que, si un punto de la hipérbola se mueve a lo largo de la curva, de tal manera que x aumente sin límite se tiene que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{b^2}{(x-h)^2}=0.$$

Así, se obtiene que

$$y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h)\sqrt{0+1}\Longrightarrow y-k=\pm\frac{a}{b}(x-h).$$

Por lo que las ecuaciones de las asíntota de la hipérbola son $y-k=\frac{a}{b}(x-h)$ y $y-k=-\frac{a}{b}(x-h)$.

En resumen, se tiene que:

- Centro $\rightarrow\ C(h,k)$
- Focos $\rightarrow\ F_1(h,k-c),\ F_2(h,k+c)$
- Vértices $\rightarrow\ V_1(h,k-a),\ V_2(h,k+a)$
- Eje focal $\rightarrow\ x=h$
- Eje normal $\rightarrow\ y=k$
- Directrices $\rightarrow y=k+\dfrac{a^2}{c}, y=k-\dfrac{a^2}{c}$
- Longitud de los lados rectos $\rightarrow \overline{L_1R_1}=2\dfrac{b^2}{a},\ \overline{L_2R_2}=2\dfrac{b^2}{a}$
- Lados rectos $\rightarrow\ L_1:\ y=k-c,\ L_2:\ y=k+c$
- $B_1(h+b,k)$ y $B_2(h-b,k)$
- Excentricidad $\rightarrow e=\dfrac{c}{a}$
- Asíntotas $\rightarrow y-k=\dfrac{a}{b}(x-h), y-k=-\dfrac{a}{b}(x-h)$

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la hipérbola si la distancia del eje focal es 14, uno de sus focos es $F(1,-2)$ y uno de sus vértices es $V(1,0)$.

Por los puntos que se conoce se puede identificar que la hipérbola tiene su eje focal paralelo al eje y. El cual la ecuación es $\dfrac{(y-k)^2}{a^2} - \dfrac{(x-h)^2}{b^2} = 1$. Además, se conoce que $F_1(h, k-c)$ y $F_2(h, k+c)$, donde se toma F_2 y se igual con el punto del foco antes dado, donde se obtiene $h = 1$ y $k - c = -2$. Luego se conoce que $2c = 14$, que equivale a $c = 7$. Así, se reemplaza c en la igualdad $k - c = -2$,

$$
\begin{aligned}
k - c = -2 &\Longrightarrow k - 7 = -2 \\
&\Longrightarrow k = 5.
\end{aligned}
$$

Por lo que el centro de la hipérbola es $C(h,k) = C(1,5)$. Ahora, se conoce que los vértices de la hipérbola se definen $V_1(h, k-a)$ y $V_2(h, k+a)$, que en este caso igualamos V_2 con el punto dado. En el que se tiene $h = 1$ y $k + a = 0$, si reemplazamos los datos se obtien

$$
\begin{aligned}
k + a = 0 &\Longrightarrow a = -k \\
&\Longrightarrow a = -5.
\end{aligned}
$$

Con $a = -5$ y $c = 7$, se reemplaza en $b^2 = c^2 - a^2$

$$
\begin{aligned}
b^2 = c^2 - a^2 &\Longrightarrow b^2 = (-7)^2 - (-5)^2 \\
&\Longrightarrow b^2 = 49 - 25 \\
&\Longrightarrow b^2 = 24.
\end{aligned}
$$

De este modo, se reemplaza los valores de a^2, b^2, h y k en la ecuación de la hipérbola

$$
\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \frac{(y-5)^2}{25} - \frac{(x-1)^2}{24} = 1.
$$

Ecuación general de la hipérbola

Teorema 1.4.5: Ecuación general de la hipérbola

Si los coeficientes A y C tienen diferente signo, la ecuación

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0.$$

representa una hipérbola con su eje focal paralelo al eje de coordenadas, o bien puede ser un par de rectas que se cortan.

Demostración: La demostración puede ser encontrada en Lehmann (1989). ■

Ejemplo:

Determinar si la siguiente ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ pertenece a una ecuación de una hipérbola, y en el caso que lo sea, encontrar su forma ordinaria, su centro y focos.

Debido a que la ecuación tiene los coeficientes con diferentes signos, se puede afirmar que la ecuación $9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0$ pertenece a una hipérbola. De este modo, se va a determinar la forma ordinaria de la ecuación. Primero se ordena la ecuación y se completa los cuadrados

$$
\begin{aligned}
9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0 &\Longrightarrow 9x^2 - 54x - 4y^2 + 8y + 113 = 0 \\
&\Longrightarrow 9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113 \\
&\Longrightarrow 9\left(x^2 - 6x + \frac{(-6)^2}{4}\right) - 4(y^2 - 2y + \frac{(-2)^2}{4}) = -113 + 81 - 4 \\
&\Longrightarrow 9\left(x^2 - 6x + \frac{36}{4}\right) - 4(y^2 - 2y + \frac{4}{4}) = -113 + 81 - 4 \\
&\Longrightarrow 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36 \\
&\Longrightarrow -\frac{9}{36}(x-3)^2 + \frac{4}{36}(y-1)^2 = \frac{-36}{-36} \\
&\Longrightarrow \frac{1}{9}(y-1)^2 - \frac{1}{4}(x-3)^2 = 1 \\
&\Longrightarrow \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1.
\end{aligned}
$$

Así, se obtiene la ecuación de la hipérbola de forma ordinaria. De igual manera, se deduce directamente que el centro de la hipérbola es $C(3, 1)$, donde su eje focal es paralelo al eje y. Además, se sabe que $a^2 = 9$ y $b^2 = 4$, por lo que al reemplazar en $c^2 = a^2 + b^2$, se tiene

$$
\begin{aligned}
c^2 = a^2 + b^2 &\Longrightarrow c^2 = 9 + 4 \\
&\Longrightarrow c = \sqrt{9+4} \\
&\Longrightarrow c = \sqrt{13}.
\end{aligned}
$$

Así, se obtiene los focos de la hipérbola $F_1(h, k - c)$ y $F_2(h, k + c)$. Los cuales son $F_1(3, 1 + \sqrt{13})$ y $F_2(3, 1 - \sqrt{13})$.

Capítulo 2

Aspectos elementales de los problemas matemáticos y su resolución

2.1. Problema

2.1.1. Definición de problema

Dentro de la vida cotidiana se puede encontrar varias circunstancias en las que un problema puede originar soluciones óptimas para mejorar una situación. Así, un problema puede estar involucrado en diferentes aspectos de la vida cotidiana, donde este depende del contexto de cada persona. Según Farooq (1980) "un problema suele indicar un desafío, cuya solución se requiere estudio e investigación" (p. 14). Este esfuerzo impacta muchas veces que un problema sea tomado desde una perspectiva negativa, lo que conduce a malas interpretaciones, pero en varios ámbitos de la vida real puede ser una ayuda para encontrar nuevas formas de obtener resultados a base de datos o experiencias cotidianas.

En este sentido, varias ramas de las ciencias estudian la realidad, donde aparecen problemas de distintos saberes como, problemas: filosóficos, químicos, físicos, matemáticos, en relaciones laborales, entre otros. Pues así, visto desde un criterio científico, se busca obtener una explicación válida y acertada a problemas a través de métodos de investigación. De este modo, la importacia de la existencia de un problema, normalmente puede originar una investigación, lo que puede generar nuevos conocimientos.

Al respecto en la literatura científica se pueden encontrar diferentes clasificaciones para los problemas, por ejemplo, por un lado Daros (2002) clasifica los problemas de la siguiente manera:

a) Problema de comprensión: el cual requiere de una explicación concreta y acertada ante datos no coherentes, es decir, se enfoca al conocimiento.

b) Problema de explicación: este problema se enfoca en detallar la razón de las cosas, es decir, generalmente se conoce el efecto pero no la causa o viceversa.

c) Problema de realización o funcionamiento: se relaciona a la parte técnica del problema, es decir, a los procedimientos que se necesitan para resolverlo.

Así mismo, otra clasificación que menciona Daros (2002) es como catalogar un problema con respecto a su dificultad:

a) Psicológica: es una dificultad en la que no se tiene los conocimientos necesarios para afrontar el problema, principalmente depende del punto de vista del sujeto.

b) Lógica: es una dificultad vista desde una falta de coherencia en lo que se encuentra estudiando.

c) Real: es una dificultad propia que falla en la realidad.

En este sentido, el problema es una manera de cuestionar, es decir, realizar preguntas acerca de la causa o efecto de varias situaciones. Por lo que, un problema conlleva a esperar que suceda algo, encontrar soluciones o formas de abordarlo, añadiendo análisis previos o una teoría. Además, un problema conlleva a explorar varias situaciones y encontrar una solución óptima.

2.1.2. Definición de problema enfocado a Matemática

El definir que es problema dentro del contexto matemático amplia el horizonte de posibilidades para enfocarlo a varias ramas de la matemática. Pues un problema en matemática, puede ser entendido como una dificultad al momento de realizar alguna actividad en el aprendizaje de un tema en específico, o también puede ser relacionado a un ejercicio matemático, como por ejemplo, resolver una ecuación de segundo grado. En este sentido, un problema es cualquier tarea o actividad para la que los alumnos no tienen reglas o métodos prescritos o memorizados, ni existe una percepción por parte de los alumnos de que exista un método de solución específico correcto (Hiebert *et al.*, 1997).

Dentro de los aspectos que engloba un problema en el ámbito académico, es que estos problemas pueden llegar a ser irrelevantes para la enseñanza de los estudiantes, tal como lo meciona Pozo (1994) "... es más, lo que para nosotros puede ser un problema relevante y significativo, puede resultar trivial o carecer de sentido para nuestros alumnos" (p. 4). Esto debido a que en la enseñanza de varios temas de matemática es importante seleccionar que problemas son óptimos y adecuados, ya que así, una de las finalidades de tener un problema, es que los estudiantes aprendan a encontrar sus propios recursos y formas de solucionarlo o resolverlo. Es por eso que, los problemas planteados en el aula de clases deben de ser útiles para que los estudiantes logren desarrollar estas destrezas.

Por tal razón, Pozo (1994) indica que en el ámbito académico también se pueden diferenciar los problemas de carácter deductivo o de carácter inductivo, teniendo en cuenta los razonamientos que debe emplear el estudiante. En tal sentido, a continuación se menciona un ejemplo de cada tipo de problema mencionado anteriormente.

a) Problema deductivo: Desarollar una demostración a una proposición matemática. Es decir, realizando pruebas hasta obtener el resultado deseado.

b) Problema inductivo: Establecer características físicas de un objeto con respecto a su movimiento. Es decir, inferir con respecto a lo que se observa.

Otra importante clasificación que presenta Pozo (1994) son los problemas bien definidos y mal definidos:

a) Problema bien definido: se refiere si su objetivo ha sido alcanzado con facilidad o no. En otras palabras, si un problema está bien planteado, su solución será obtenida fácilmente. Por ejemplo, la suma de dos números pares es un número par.

b) Problema mal definido: hace referencia a que si las instrucciones a seguir para determinar la solución al problema son poco claras o mal formuladas. En otras palabras, si un problema matemático es descrito de forma ambigua, los datos del problema no serán de gran ayuda para resolver el problema. Por ejemplo, si se resta un número grande con un número pequeño, el resultado no se puede saber, ya que no se tiene más datos.

Es importante señalar que debido a que en este trabajo de investigación existe la necesidad de que los estudiantes adquieran conocimientos sólidos relacionados a Geometría Analítica, se puede decir que lo que engloba esta situación es un problema de comprensión, puesto que algunos aprendices no suelen adquirir un aprendizaje significativo y debido a esto, no logran un desarrollo de una visión geométrica que les ayude a su desempeñó académico.

2.2. Resolución de problema

2.2.1. Definición de resolución de problema

La resolución de problemas ha sido un tema de un amplio estudio, donde se ha evidenciado como se han desarrollado técnicas para implementarlas dentro del ámbito de la ciencia. Debido a lo cual, la resolución de problemas es un área que fomenta el aprendizaje de cualquier tema en específico, aumentando la obtención de nuevos conocimientos.

Entre los pioneros que introdujeron la resolución de problemas, se encuentra René Descartes (1596-1650), que escribió el libro *Discurso del método para conducir bien la propia razón y buscar la verdad en las ciencias*, donde propone las primeras reglas para abordar los problemas. Pues, su método consistía en, no aceptar todo como verdadero, seccionar el problemas en varias partes, ejecutar lo sencillo del problema y luego lo complicado, y finalmente, realizar todas las revisiones necesarias para verificar el resultado. Además, él comentó que somos capaces de encontrar nuestro propio método para resolver problemas.

Así, Piñeiro *et al.* (2015) menciona que "en el desarrollo de la historia del hombre, se ha visto como la resolución de problemas es una de las actividades intelectuales del hombre" (p. 7). Pues esto, se puede evidenciar en la vida cotidiana los seres humanos, quienes se enfrentan a problemas en los que se requiere un plan o estrategias para abordarlo, tanto en el ámbito personal como profesional. Es decir, la resolución de problemas se puede ver como un procedimiento para afrontar situaciones en las que existen dificultades para resolverlo.

Varios autores definen la resolución de problemas como sigue: Según Skinner (1984) afirma que "la resolución de problemas se define como la estructura o modelo dentro del cual tienen lugar el pensamiento creativo y el aprendizaje" (p. 529). Por otro lado, Iluno *et al.* (2021) mencionan que "la resolución de problemas es un acto deliberado y serio, donde implica el uso de algún método novedoso, pensamiento avanzado y pasos sistemáticos planificados para la adquisición de los objetivos fijados" (p. 29). Y por último, Allen y Graden (2002) definen a la resolución de problemas como un enfoque sistemático para conceptualizar y comprender un problema determinado, diseñar estrategias para resolverlo y evaluar las estrategias aplicadas.

Con respecto a lo anterior, al revisar estas definiciones de resolución de problemas, se observa que el factor principal es sistematizar una serie de pasos para alcanzar los objetivos propuestos, basándose en la creatividad y estrategias novedosas para resolver los problemas planteados. Sin embargo, de las definiciones enunciadas, la de Iluno *et al.* (2021) son los que conceptualizan mejor lo que se realizó en este trabajo de investigación, puesto que se planeó utilizar algunos pasos sistemáticos planificados para resolver problemas contextualizados relacionados con Geometría Analítica.

2.2.2. Definición de resolución de problemas enfocado a Matemática

La Matemática es una ciencia que es considerada un pilar fundamental para el desarrollo de nuevas tecnologías, al igual que puede ser utilizada en varias ramas científicas, como física, química, entre otras. A pesar de ser una ciencia tan importante, es común que su estudio no sea de interés para algunos estudiantes, debido principalmente a la percepción de ser una ciencia de difícil aprendizaje. En esta misma dirección Okereke (2006) señala que la matemática no suele ser enseñada de una manera correcta, por ende provoca una falta de comprensión.

En tal sentido, para mejorar la comprensión de los estudiantes con respecto a temas matemáticos, es común poner en práctica actividades que ayuden a desarrollar su razonamiento, ya sea, el razonamiento lógico, abstracto, númerico, entre otros. Pues así, en la educación matemática la solución de problemas se refiere a las tareas matemáticas que tienen el potencial de proporcionar retos intelectuales para mejorar la comprensión y el desarrollo matemático de los alumnos (Cai y Lester, 2010).

Así mismo, según Piñeiro *et al.* (2015) se refiere a la resolución de problemas "como una línea de investigación consolidada más en la Educación Matemática" (p. 12). Además, la resolución de problemas pueden aplicarse en diferentes áreas, pero en el ámbito matemático la resolución de problemas es una parte fundamental para la enseñanza y aprendizaje de tópicos matemáticos. Al respecto, los estudiantes obtienen conocimientos sólidos que pueden relacionarlo a su entorno cotidiano.

Es importante resaltar que dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, lo fundamental es enseñar a los alumnos a pensar (Pólya, 1962). En este mismo contexto, el estudio de las matemáticas conlleva práctica y sobre todo razonamiento, estableciendo que lo primordial al momento de enseñar matemática es que el estudiante no resuelva problemas de forma automática sin antes reflexionar en cada paso a realizar, sino más bien, encontrar una manera en el cual el estudiante comprenda toda la información recibida en clases. En este sentido, un alumno tendrá un aprendizaje significativo si él aprende a razonar con cada problema matemático resuelto, por ende, la resolución de problemas es una herramienta esencial en el aprendizaje de matemática.

2.2.3. Algunas fases para resolución de problemas en matemática

En la resolución de problemas en matemática, uno de los aspectos más importantes para resolverlos es, visualizar la problemática central y cómo se puede abordarlo. Al respecto, existen varias formas para resolver un problema, en este sentido Iluno Iluno *et al.* (2021) destaca que "es útil desarrollar un marco para pensar en los procesos que intervienen en la resolución de problemas matemáticos" (p. 29). En este sentido, se pueden nombrar las siguientes fases y métodos de algunos autores que han estudiado y definido estrategias para la resolución de problemas. Entre ellos se encuentran los siguientes:

a) **Fases de Pólya (1979)**

   El autor enlista las siguientes fases para la resolución de problemas como sigue:

   - Comprensión del problema: en este fase se debe comprender cuál es la incógnita, cuales son los datos y condiciones, si es posible cumplir con estas condiciones. Además, se debe tener una notación adecuada.
   - Diseño del plan: se debe descubrir que tipos de relaciones existe entre los datos recolectados y la incógnita del problema. Así como, ver si se realciona con un algún otro tipo de problema anterior.
   - Ejecución del plan: se realiza el plan de la resolución y se debe verificar cada paso a realizar.
   - Verificación de la solución obtenida: se comprueba el resultado obtenido y el razonamiento utilizado, y también, se revisa si existía otra forma de resolverlo.

b) **Fases de Mason *et al.* (1992)**

   El autor describe lo siguiente para la resolución de problemas:

   - Abordaje: se realiza una exploración detallada para tener más estrategias de cómo resolver el problema, así pues, si una respuesta falla, entonces podemos escoger otra forma de resolverlo.
   - Ataque: se debe tomar las decisiones correctas para desarrollar la estrategia escogida en la fase de abordaje.
   - Revisión: se permite autocorreciones y posibles generalizaciones del problema.

c) **Método IDEAL de Brandsford y Stein (1986)**

Los autores de este método describen que cada letra pertenece a una fase para resolución de problemas:

- I-Identificación del problema: se indica el problema al se enfrenta.
- D-Definición y representación del problema: se especifica los detalles del problema.
- E-Escoger una estrategía de solución y elaborar un plan: se realiza una búsqueda de alternativas para resolver el problema y detallar
- A-Actuar según el plan: se pone en práctica lo establecido para resolver el problema
- L-Logros, es decir, evaluar lo realizado: se detalla la solución y describir si se realizó lo planeado o tuvo cambios en el proceso de resolución.

d) **Modelo de Guzmán (2006)**

El autor describe el siguiente modelo para la resolución de problemas:

- Familiarización con el problema: se trata de entender la razón del problema, también, se pierde el miedo que puede ocasionar por falta de comprensión, más bien, se trata de abordar el problema con paz y tranquilidad.
- Búsqueda de una o varias estrategias: se realiza un esquema, utilizando un lenguaje apropiado, también se supone si el problema ha sido resuelto o no, y se busca si existe algún problema semejante que ayude a resolver el problema.
- Lleva adelante tu estrategia: se elige las ideas obtenidas de la fase anterior que mejor ayuden a resolver el problema. Sin embargo, siempre estar abierto a buscar nuevas ideas en caso de que no funcione la escogida anteriormente.
- Revisa el proceso y saca consecuencia de él: se examina todo el desarrollo del problema y se analiza por qué ha funcionado, también se debe observar si existe una manera más simple de abordar el problema, luego obtener conclusiones y experiencias para posteriores problemas.

f) **Fases de González (2000)**

A continuación, se describe las siguientes fases del autor:

- Comprensión del problema: En esta fase se realiza una representación icónica del enunciado a través de un dibujo esquemático del mismo, luego una descripción verbal del enunciado dibujado y finalmente, una aproximación a una estrategia de solución.

- Ejecución de la operación: aquí se realiza una manipulación de los datos descritos en el problema y se hace una descripción verbal de los elementos que intervienen en la ejecución de la operación.
- Verificación de los resultados: en esta fase se realiza un análisis de los resultados obtenidos.

Cabe recalcar que uno de los precursores, si no fue el primero, de introducir este tópico fue el matemático húngaro George Pólya (1887-1985), es decir, utilizar la resolución de problemas como un aspecto elemental para el aprendizaje matemático.

Finalmente, luego de enunciar algunas de las fases de varios autores para la resolución de problemas, se observa que se puede aplicar en diferentes áreas de estudio, pero principalmente en matemática, por lo que dentro del contexto que se está abordando en esta investigación, la importancia de la resolución de problemas en matemática es para desarrollar un pensamiento y razonamiento lógico. También que los estudiantes desarrollen una visión geométrica, para obtener un aprendizaje significativo y contextualizado de conceptos de Geometría Analítica, en específico, cónicas.

2.3. Contextualización

En la vida cotidiana se puede encontrar fácilmente formas geométricas, al igual que actividades sencillas que se relacionan con la matemática, como por ejemplo cortar en pedazos uniformes un pastel circular. También en actividades que requieren más conocimiento, es decir lo aprendido en una aula de clases o de forma autónoma, como por ejemplo, calcular el área de un terreno que se desee comprar. Todo lo mencionado anteriormente se refiere a la contextualización en matemática. Es decir, relacionar lo aprendido en clases con la vida real para que el aprendizaje de los estudiantes se fortalezca e incremente en lo aplicado. En este sentido, según Zamora (2013), "la contextualización se define como la conexión entre los conocimientos y las experiencias" (p. 3).

Desde esta perspectiva, los beneficios que se pueden alcanzar con las tareas de contextualización está relacionada con una mayor motivación de los estudiantes, ya que estos ven las formas en que las matemáticas pueden ayudarnos a dar sentido al mundo (Meyer *et al.* 2001). Esto se debe a que las matemáticas se encuentran en varios aspectos de la vida cotidiana, es por eso que al realizar actividades contextualizadas se fortalece la enseñanza y aprendizaje de matemática. Un aspecto importante para realizar la contextualización es enfocar los problemas a un contexto cotidiano. Es decir, los problemas deben tener diferentes tipos de enfoques donde se puedan desarrollar y así, cada estudiante se pueda familiarizar dependiendo de su contexto y entorno. Además, las tareas contextualizadas deberían también enfocarse en que los estudiantes aprendan a través de situaciones experimentales reales, para que así ellos obtengan una mejor comprensión.

Al respecto, Meyer *et al.* (2001) argumenta que la contextualización dentro del aspecto matemático es significativo si cumple con las siguientes características:

a) Apoyar las matemáticas, no saturarlas.

b) Deben ser reales o, al menos, imaginables para el alumno.

c) Deben ser variadas, no repetirse una y otra vez.

d) Deben dar lugar a problemas reales que resolver.

e) Deben tener en cuenta las normas culturales, de género y raciales y no excluir a grupos de estudiantes.

f) Permitir que el alumno elabore un modelo matemático.

Es así que, la contextualización determina una mayor motivación en los estudiantes, y también conlleva a profundizar en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. En concreto, facilita el aprendizaje significativo a través de la utilización de conocimientos en la aplicabilidad. Dentro del área de matemática, algunos aprendices normalmente aprenden temas matemáticos que los enseñan en clase, pero en ocasiones no contextualizan estos temas, por lo que se convierten en tópicos abstractos y difíciles de entender. Pues así, es necesario resaltar que para algunos problemas matematicos pueden resultar complicado su contextualización, no obstante, se puede realizar con una adecuada adaptación, es decir, el profesor como especialista tiene las destrezas y capacidades para encontrar una forma en que el estudiante obtenga un aprendizaje significativo.

Para fortalecer lo anterior, a través de la resolución de problemas Wenglinsky (2002) afirma que “los alumnos aprenden conceptos y luego intentan aplicarlos a diversos problemas, o bien resuelven problemas y luego aprenden los conceptos que subyacen a las soluciones” (p. 5). En este sentido, el autor los clasifica de dos maneras:

a) Aplicaciones: aplicando los conceptos a los problemas.

b) Simulaciones: proporcionando ejemplos o versiones concretas del concepto.

Es así, como los estudiantes logran comprender conceptos matemáticos al utilizarlos en otros contextos como, problemas cotidianos, educativos, entre otros. Al igual que pueden ser en situaciones de la rutina diaria. De este modo, la enseñaza y aprendizaje de la matemática tiene como principal objetivo el desarrollo de una capacidad intelectual para resolver problemas dentro del área de matemática, como al igual en la vida real, es decir, que los conocimientos adquiridos durante el aprendizaje puedan ser generalizados a problemas reales.

Capítulo 3

Tecnologías de la información y comunicación

3.1. Herramienta tecnológica

3.1.1. Definición de herramientas tecnológicas

Las herramientas tecnológicas se han convertido en un pilar fundamental para el progreso y desarrollo de actividades relacionadas que solían tomar tiempo de realizarlas. Por ejemplo, establecer comunicación con personas de otros países. Cabe recalcar que las herramientas tecnológicas han adquirido más popularidad durante los últimos años, pero la época donde más alcance tuvo a nivel mundial fue durante la emergencia sanitaria del covid-19, debido a las restricciones que conllevo esta pandemia, la educación, el trabajo y otras actividades se desarrollaron de manera virtual por lo que la necesidad de utilizar herramientas tecnológicas incrementó. Así pues, Daher *et al.* (2022) mencionan que el uso de herramientas tecnológicas para enseñanza en línea asíncrona y síncrona fue imprescindible.

Según Trejo (2018) "La evolución constante de las herramientas tecnológicas en los últimos años ha impactado considerablemente la forma en la que concebimos la manera de comunicarnos y la forma de acceder a la información en nuestra vida social y académica" (p. 617). Esto debido a que se considera fundamental y en varios casos obligatorio su uso en ciertas instituciones educativas, empresariales, privadas, gubernamentales, entre otras. De la misma manera, el uso cotidiano de las herramientas tecnológicas se ha normalizado debido al uso constante en actividades de nuestro diario vivir.

En este aspecto, se define las herramientas tecnológicas como dispositivos electrónicos, o conjunto de programas en los que se realizan tareas o actividades en una menor cantidad de tiempo y de recursos. Pues así, las herramientas tecnológicas contribuyen a que la información requerida de ciertos tópicos puede ser acertada y confiable.

3.1.2. Definición y características de herramientas tecnológicas educativas

En el ámbito educativo, la generación de nuevas formas de enseñanza y aprendizaje han ido creciendo, es decir que, no se busca solo que el estudiante entienda cierto tópico, sino también, que lo pueda enlazar con otros conocimientos previos para alcanzar un aprendizaje significativo, donde pueda ser utilizado en diferentes quehaceres fuera de área educativa. Pues así, últimamente las herramientas tecnológicas han desempeñado un papel importante en la educación.

Según García *et al.* (2018) las herramientas tecnológicas educativas son desarrolladoras de competencias y habilidades necesarias para el aprendizaje de los estudiantes, ya sea de forma individual o colectiva. En otras palabras, los aprendices tienen lugares virtuales donde pueden desarrollar y mejorar su aprendizaje, así también, conseguir una participación activa de distintos tipos de alumnos.

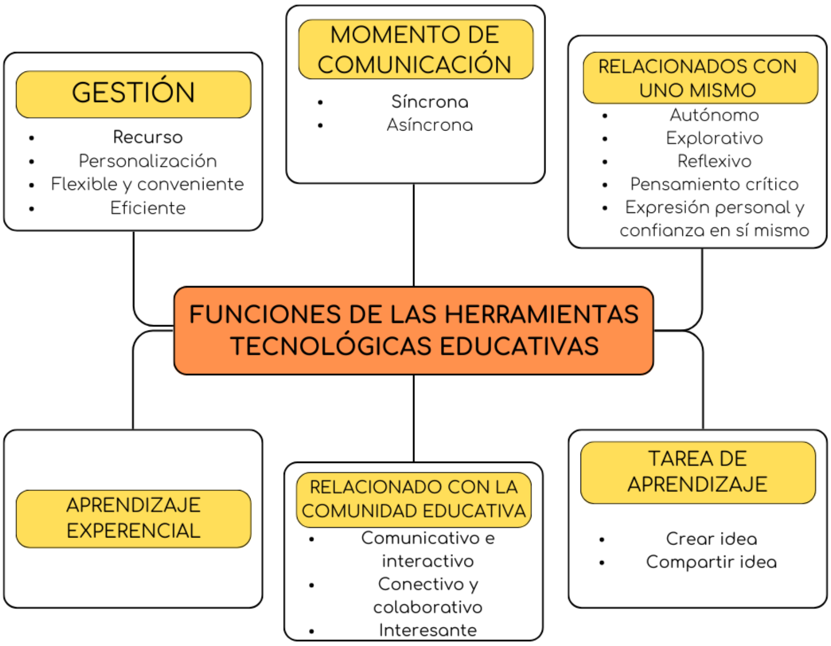
Por otro lado, la educación se ha visto influenciada por las herramientas tecnológicas, ya sea para la enseñanza en centros educativos, como para el aprendizaje autónomo de los aprendices. También, la búsqueda de información científica es más accesible y verificada debido a la gran variedad de herramientas tecnológicas que existen hoy en día. Tal como lo dice Shahid *et al.* (2019) "El impacto de la tecnología en la enseñanza es muy importante porque el uso de herramientas tecnológicas mejora la calidad de la educación" (p. 2).

Las herramientas tecnológicas pueden generar un pensamiento crítico y potenciar la capacidad de resolución de problemas y la creatividad de los alumnos (Shahid et al., 2019). Esto debido a que, se puede utilizar como herramientas que impulsen el desarrollo de nuevas técnicas para afrontar problemas, y así, encontrar soluciones óptimas para estos. También, se promueve el trabajo en equipo entre los aprendices, ya que las facilidades que ofrecen estas herramientas son de gran utilidad para el desempeño y comunicación de nuevas ideas.

Según Bizami (2023) describe las funciones de las herramientas tecnológicas educativas, donde cada función es descrita con características puntuales importantes para la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes o personas interesadas en utilizar dichas herramientas.

En este sentido, las herramientas tecnológicas brindan varias funciones para mejorar

Figura 1. Características de herramientas tecnológicas educativas



Fuente: Adaptado de Bizami *et al.* (2023)

el aprendizaje y de igual manera encontrar nuevas formas de aprender. Pues así, mejorar su rendimiento académico a largo plazo y también en el ámbito laboral. Según Vlieghe (2014), hoy en día el uso de herramientas tecnológicas en la educación y sus notables efectos en el rendimiento de los alumnos supone un gran impulso para los estudiantes en la preparación de su futuro profesional.

3.2. Software

3.2.1. Definición de software

A través del tiempo la tecnología se ha ido desarrollando para mejorar las tareas cotidianas del ser humano. Estas tareas pueden llegar a ser simples o complicadas, dependiendo de las necesidades del individuo. De este modo, los avances tecnológicos han ido evolucionado con respecto a problemas que han existido en diferentes áreas. Pues si hablamos en el área académica, la tecnología ha avanzado exponencialmente, donde se han presentado programas informáticos que han contribuido a obtener una mejor calidad en la educación. Por ende, estos programas se llegan a describir como softwares.

Para diferentes tipos de profesiones como ingenieros, matemáticos, abogados, contadores, comunicadores, médicos y en varias áreas como la educación, la cultura, la medicina, la astronomía, entre otras, el uso de *softwares* ha ido creciendo, al igual que su diversidad. De esta forma, según Prieto (1989) "software es conjunto de programas ejecutables por el ordenador, es decir, todas las materias relacionadas con la construcción y uso de los programas" (p. 2). Así, los navegadores *web*, programas en línea, juegos, entre otros, son *softwares* que permiten al usuario interactuar de manera fácil y cómodo con la información reflejada en el dispositivo electrónico, tratando de ser accesible y confiable.

3.2.2. Definición y características de software educativo

La educación proporciona herramientas sólidas para adquirir nuevos conocimientos que mejoren la calidad de aprendizaje de los alumnos, es por esto que, la constante búsqueda de encontrar formas ideales para mejorar la enseñanza. Así, los *softwares* educativos podrían contribuir en lo antes descrito.

Es conocido que al emplear la palabra educativo en cualquier contexto, este tendrá un enfoque hacia la educación. En este caso, el *software* educativo considera programas informáticos enfocados a la enseñanza y aprendizaje de los alumnos en el área de la educación.

Según Gros (2000) "la calidad del *software* está determinada no sólo por los aspectos técnicos del producto sino por el diseño pedagógico y los materiales de soporte" (p. 5). En otras palabras, el *software* escogido para la enseñanza y aprendizaje de cierto tópico, va a depender de las funciones óptimas que este proporcione. Además, el *software* educativo a usar se debe adaptar a las necesidades del aprendiz.

Vidal (2010) define *software* educativo como "programa computacional cuyas características estructurales y funcionales sirvan de apoyo al proceso de enseñar, aprender y administrar, o el que está destinado a la enseñanza y el autoaprendizaje y además permite el desarrollo de ciertas habilidades cognitivas" (p. 97). Como sigue, los *softwares* educativos pueden proporcionar facilidades para la enseñanza y aprendizaje.

Marqués (1996) menciona las siguientes características de *softwares* educativos:

a) Finalidad didáctica: capacidad para la enseñanza y aprendizaje de cualquier tópico requerido.

b) Utilizan el ordenador: los estudiantes utilizan como soporte para actividades que ellos proponen.

c) Son interactivos: permite un diálogo e intercambio inmediato de información entre el estudiante y el computador.

d) Individualizan el trabajo: se adaptan al ritmo de trabajo y actividades de las actuaciones del estudiante.

e) Son fáciles de usar: no es necesario tener conocimientos amplios en electrónica, solo se debe tener en cuenta los requerimientos necesarios de cada programa.

En concreto, Marqués (1996) recalca que "los programas suelen incluir elementos para captar la atención de los alumnos, mantener su interés y, cuando sea necesario, focalizarlo hacia los aspectos más importantes de las actividades" (p. 12). Pues así, el *software* educativo es una herramienta importante para atraer la atención de los estudiantes y promover la autonomía de ellos para mejorar su aprendizaje, donde obtengan una formación personalizada y que los programas se adapten a las necesidades de ellos.

3.3. Algunas herramientas tecnológicas y softwares matemáticos libres

El uso de *softwares* y herramientas tecnológicas educativas puede conllevar dificultades ya sea por sus características, pero uno de los problemas que se puede presentar al utilizar estas herramientas es que no son de libre acceso, es decir, se debe dar una cantidad de dinero para poder utilizar todas las funciones que ofrece. Existen programas en los que llegan a ser de libre acceso, pero no se pueden aprovechar al máximo todas sus funciones por las restricciones del programa, debido a que su uso es gratuito solo para ciertas actividades.

Del mismo modo, la investigación de docentes y estudiantes dentro una institución educativa puede estar condicionada por la falta de recursos, pues así, esto puede originar una falta de interés en el estudio de nuevas áreas. Según Ledesma (2004) la falta de recursos económicos puede representar un problema o limitación para actividades de investigación en instituciones. Además, menciona que esta limitación es común en países latinoamericanos, especialmente en áreas como universidades, ministerios, dependencias de ayuntamientos, centros de salud, entre otros.

En este mismo contexto, Ledesma (2004) menciona que "hoy en día el investigador dispone de varios recursos gratuitos, con menor difusión que el *software* comercial, pero que pueden ser utilizados en reemplazo de este último cuando no se dispone de recursos financieros suficientes para su adquisición" (p. 117). Pues, un *software* gratuito se refiere a programas informáticos en lo que se pueden obtener todas las funciones que ofrece sin ningún costo económico.

Por lo que, el desarrollo de *softwares* gratuitos representa una gran oportunidad para instituciones que tengan recursos económicos limitados que deseen realizar investigaciones que requieran la utilización de herramientas tecnológicas. De este modo, según Ledesma (2004) dice que "en el último tiempo, las herramientas informáticas gratuitas han evolucionado considerablemente, pudiendo incluso llegar a superar en ciertos aspectos a los productos comerciales" (p. 116).

En este sentido, luego de haber descrito las características importantes que deben tener las herramientas tecnológicas y *softwares* educativos, nos enfocamos en utilizar programas que satisfagan las funciones requeridas para la investigación a realizar, y sobre todo que cumplan la principal característica de que se encuentren disponibles de forma gratuita en el Internet. Por lo que se enlista los siguientes programas:

- GeoGebra

  Figura 2. Logo de GeoGebra

  Fuente: GeoGebra

  Es un *software* matemático enfocado para todos los niveles educativos, donde ofrece funciones didácticas para aprender geometría, álgebra, entre otros. En la siguiente sección se detallará algunas características de este *software*.

- Desmos

  Figura 3. Logo de Desmos

  Fuente: Desmos

  Es una calculadora gráfica científica donde se puede realizar gráficas de funciones matemáticas, entre otras operaciones. Pues así, mencionan los creadores que, su objetivo es ofrecer oportunidades de que la gente aprenda matemática, ya que no se han dado el estímulo o herramientas necesarias para desarrollar habilidades matemáticas. Principalmente, priorizan la equidad y la accesibilidad.

  Para más información acerca de Desmos acceder al sitio web: https://www.desmos.com/?lang=es

- Descartes

Figura 4. Logo de Descartes

Fuente: Descartes

Es una herramienta tecnológica de autor que permite elaborar recursos didácticos interactivos que se pueden unificar con contenidos realizados en HTML. A pesar de que puede parecer una aplicación donde solo existen imégenes animadas, en realidad se pueden interactuar con ellas.

Para más información acerca de Descartes acceder al sitio web: https://reddescartes.org/web/ejemplos.html

- Symbolab

Figura 5. Logo de Symbolab

Fuente: Symbolab

Es una herramienta tecnológica educativa enfocado a matemática, donde se puede realizar operaciones matemáticas avanzadas, al igual que graficar datos matemáticos. Además, el objetivo que propone esta herramienta es hacer que el contenido científico sea universalmente accesible mediante la expansión del espacio de búsqueda de datos en notaciones científicas, expresiones, ecuaciones y fórmulas.

Para más información acerca de Symbolab acceder al sitio web: https://es.symbolab.com/

Finalmente, luego de haber descrito estos programas matemáticos y debido al estudio que se realiza en esta investigación, nos enfocaremos solamente en utilizar GeoGebra.

3.3.1. GeoGebra

El creador de GeoGebra es Markus Hohenwarter. Él creo este *software* en el año 2001, mientras realizaba su tesis de maestría en la Universidad de Salzburgo.

Se define como un *software* matemático dinámico, donde se encuentran funciones dirigidas a realizar gráficas geométricas, utilizando álgebra, hojas de cálculo, entre otros. Pues, este *software* puede ser descargado en la computadora para utilizarlo sin ninguna conexión a Internet, al igual, que puede ser utilizado como una plataforma en línea, en el cual, se puede trabajar con varios recursos gratuitos. También, una de la herramientas importantes que ofrece este *software* es la plataforma de colaboración GeoGebra *Classroom* donde se puede monitorear el progreso de los estudiantes en tiempo real.

Las características que ofrece GeoGebra son:

- Aplicaciones de Geometría, Álgebra y Álgebra computacional.
- Presenta una interfaz intuitiva y ágil al momento de utilizar sus aplicaciones.
- Herramienta de autoría para crear recursos de aprendizaje interactivos como páginas *web*.
- Se puede utilizar en diferentes partes del mundo, debido a su disponibilidad en varios idiomas.
- *software* de código abierto libre y disponible para usos no comerciales.

GeoGebra es un *software* que contiene varias aplicaciones, donde su utilidad fomenta que los estudiantes tengan un aprendizaje interactivo, con el cual, pueden resolver problemas matemáticos, uniendo las herramientas para graficar objetos geométricos, con la utilización de datos algebraicos, en un entorno de fácil uso y visualización. Igualmente, apoya la educación en Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas (STEM) y las innovaciones en la enseñanza y el aprendizaje en todo el mundo.

Arteaga *et al.* (2019) mencionan las siguientes ventajas de GeoGebra:

- Ofrece herramientas para un aprendizaje autonomo o grupal.
- Busca el desarrollo de la creatividad.
- El alumno aprende de manera fácil.
- Se adapta al tiempo que necesite el alumno para aprender.
- Incorpora elementos novedosos para atraer la atención de los alumnos.

- Accede a utilizar técnicas para resolver problemas, como por ejemplo, la generalización, inducción, entre otros.

Desde su creación, GeoGebra ha tenido 9 versiones, las cuales son:

- Versión 1.0: disponible en febrero de 2002, en los idiomas de inglés y alemán. Lo que se podía utilizar era puntos, vectores, ángulos y secciones cónicas.
- Versión 2.0: disponible desde 9 de enero de 2004 y disponía con los mismo idiomas de la anterior versión. Se podía realizar graficaciones y se agregó la utilización de funciones en x, funciones hiperbólicas, derivadas y integrales.
- Versión 3.0: disponible desde 22 de marzo de 2008 y por primera vez, el *software* puede ser utilizado en 39 idiomas, entre ellos el español. Se agregó la utilización de polígonos regulares, curvas paramétricas, funciones por partes y nuevos recursos como área, pendiente, longitud, perímetro y la posibilidad de insertar texto y fórmulas de LaTeX.
- Versión 3.2: disponible desde 3 de junio de 2009, en 45 idiomas. Se pone a disposición la vista de hoja de cálculo, compás, inversión, cónicas, colores para los gráficos, comandos gráficos y funciones estadísticas, al igual que la utilización de matrices y números complejos.
- Versión 4.0: disponible desde 20 de octubre de 2011, en 50 idiomas. Pone a disposición nuevos recursos como análisis de datos, cálculo de probabilidades, inspección de funciones; polígonos rígidos, polilíneas. Además, se pude utilizar desigualdades, inecuaciones, ecuaciones implícitas y funciones de varias variables y logaritmos. Dentro de los nuevos recursos añadidos, lo novedoso fue GeoGebraTube, pues en esta aplicación, se puede compartir hojas dinámicas en línea.
- Versión 4.2: disponible desde 3 de diciembre de 2012. Se agrega una vista algebraica CAS, es decir, un sistema algebraico computacional, aparte de todas las funciones ya antes disponibles.
- Versión 4.4: estaba disponible desde 1 de diciembre de 2013. Se agrega nuevos recursos para GeoGebraTube, al igual que nuevos comandos.
- Versión 5.0: actualmente se utiliza esta versión. Pone a disposición la vista gráfica 3D, soporte para funciones de 2 variables, y con ello, gráficas como esfera, pirámide, cilindro y cono. Además, se agrega una ventana para Python.
- Versión 6.0: actualmente se utiliza esta versión. Se añade la versión de GeoGebra en HTML5.

Para más información acerca de GeoGebra acceder al sitio web: https://www.geogebra.org/?lang=es

Capítulo 4

Algunas aplicaciones para la resolución de problemas

4.1. Fases propuestas para la resolución de problemas

Los conocimientos adquiridos en clases, se pueden aplicar a problemas relevantes o convenientes para los estudiantes, de tal manera que puedan comprender conceptos y procedimientos matemáticos, pues, una manera para aprender tópicos relacionados a esta ciencia es resolviendo problemas matemáticos.

Segun Cockcroft (1999) dice que "la resolución de problemas sirve como medio para desarrollar el pensamiento matemático como herramienta para la vida diaria ". Pues se busca que el aprendizaje de la matemática, además de ser utilizado en el ámbito académico, también sea utilizado de una manera eficiente, es decir, facilitar tareas diarias de la vida cotidiana o fuera de clases, para que asi los estudiantes aprendan a relacionar temas matemáticos con su entorno.

Así, dentro del contexto en el que se esta estudiando, se desea que los estudiantes obtengan un procedimiento nuevo para obtener un aprendizaje significativo. Por lo que nos enfocamos en las siguientes fases para la resolución de problemas las cuales se define como sigue:

F1) Lectura y comprensión del problema

En esta fase se indica todos los aspectos más importantes que ayudará a resolver el problema. Es decir, cómo podemos iniciar y abordarlo, y qué es lo que se quiere alcanzar al resolverlo, también se debe identificar la hipótesis y tesis, para poder encontrar una solución óptima. Cabe recalcar que se realiza una representación mental del problema, es decir, relacionarlo con algún problema que se haya resuelto anteriormente y encontrar aspectos similares que ayuden a abordar el problema actual.

Debido a que nuestro estudio se enfoca en Geometría particularmente cónicas, los aspectos a tomar en cuenta al resolver un problema geométrico, deben estar relacionados a la Geometría, para que así sea más fácil encontrar una solución. Para iniciar a resolver este problema geométrico debemos distinguir los aspectos más importantes del problema.

F2) Indagación de herramientas matemáticas para la solución

En esta fase se debe tomar en cuenta que herramientas matemáticas se tiene al alcance e identificar cuales se debe tener para desarrollar la solución del problema. La búsqueda de estas herramientas se puede realizar en libros matemáticos que estén relacionados al problema, o en la Internet, considerando que la información obtenida sea de fácil entendimiento.

En problemas geométricos, las herramientas matemáticas a tener en cuenta deben estar relacionados a Geometría, al igual que su búsqueda, deben ser en libros de Geometría. Se debe establecer que proposiciones, definiciones o teoremas de geometría que ya se conocen. En otras palabras, si los datos geométricos que nos ofrece el problema son suficientes para resolverlo o si es necesario buscar información adicional para abordarlo.

F3) Aplicación de herramientas matemáticas seleccionadas para resolver el problema

En esta fase se debe aplicar toda la información que se ha obtenido en las anteriores fases, es decir, encontrar la manera más óptima de emplear y manipular todas las herramientas matemáticas antes adquiridas. Luego se debe describir todo la información importante de una forma ordenada y correcta.

En el problema geométrico, se debe considerar las herramientas geométricas que se van a aplicar. Encontrando una manera eficiente de construir una solución coherente, que se adapte a lo establecido en la fase 1, es decir, con todas las herramientas que se consideró en la fase 2 llegar a encontrar y concluir la tesis identificada.

F4) Examinación del resultado obtenido

En esta fase se realiza una observación detallada del procedimiento ejecutado, de este modo, se revisa si no se realizó ningún tipo de error que pueda alterar el resultado final. Se debe recordar la información de la fase 1, es decir, lo que se quería alcanzar al resolverlo y a donde se quería llegar. Para así, efectuar una examinación sea más eficiente.

Dentro del problema geométrico que se resuelve, la examinación del resultado obtenido es esencial para verificar y analizar si el procedimiento que se ha realizado para la solución fue óptimo y también, identificar si ayudó a resolver el problema geométrico.

F5) Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados

En esta fase se analiza y revisa los resultados obtenidos a través de la implementación de herramientas tecnológicas, para así visualizar los resultados obtenidos, y los estudiantes logren de manera progresiva mejorar su forma de resolver problemas matemáticos de mayor dificultad.

Para verificar la solución obtenida del problema geométrico, es implementando herramientas tecnológicas, en este caso, se va a utilizar es GeoGebra, debido a su funcionalidad y sus características didácticas para demostrar figuras geométricas, en específico, cónicas. Puesto que es de gran ayuda para visualizar los resultados obtenidos y es más fácil detectar algún error, en caso de que exista.

F6) Conclusión de la solución del problema

En esta última fase se debe indicar todo el proceso realizado, que herramientas matemáticas se utilizó y como se verificó el problema, se describe todos los datos obtenidos de todas las anteriores fases y concluimos que resultado se obtuvo.

De igual manera se realizará para la resolución del problema geométrico. Se muestra las herramientas matemáticas geométricas utilizadas para el procedimiento y obtención de resultados. Además, se describe cómo se comprobó la solución y cuál fue la herramienta tecnológica utilizada para la verificación, en este caso, sería GeoGebra. Por último, se describe las conclusiones obtenidas.

Para finalizar, se resalta que esta propuesta se origina a partir de la revisión bibliográfica que se ha realizado, teniendo en cuenta que la parte innovadora de estas fases es la implementación del uso de herramientas tecnológicas. El enfoque que se desea obtener es que los temas aprendidos con estas fases también sean incluidos en la vida real.

4.2. Resolución de problemas enfocados a Geometría Analítica: Cónicas

En esta sección se abordará problemas contextualizados en los que se resolverán utilizando las seis fases propuestas para la resolución de problemas. Por lo que, a modo de ejemplificación, se presentan los siguientes casos que ayudarán a ilustrar esta propuesta y que sirva de apoyo en el proceso de aprendizaje de los estudiantes con respecto a cónicas.

4.2.1. Problemas contextualizados de la circunferencia

Problema 4.2.1: Localización de posible epicentro de un sismo

Al producirse un terremoto, existen las ondas de choque que se generan después de los fuertes movimientos terrestres. Para detectar estas ondas se utilizan los sismógrafos digitales portátiles y autónomos (SDPA). Pues bien, digamos que se generó un sismo, en donde se despliegan los SDPA a 4 kilómetros (km) al oeste y 6 km al sur de un pueblo, para identificar las ondas posteriores al movimiento telúrico. En este momento, estos aparatos detectan otro movimiento a 24 km de distancia. Detallar las posibles localizaciones del epicentro del sismo.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema

En primer instancia, se debe detectar cuál es la tesis del problema. Es decir, lo que nos pide el problema es, cuál es el posible epicentro del sismo. Además, se puede identificar la información que proporcioa el enunciado:

- El primer SDPA se encuentra a 4 km al oeste.
- El segundo SDPA se encuentra a 6 km al oeste.
- Entre los dos aparatos registran otro movimiento a 24 km de distancia.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución

En esta fase, se debe buscar que otras herramientas matemáticas pueden ayudar a resolver el problema, al igual que, encontrar nuevos razonamientos con la información anterior.

- Un terremoto forma un patrón de ondas de choque, llamado círculos concéntricos.
- Círculos concéntricos son aquellos círculos que tienen el mismo centro.
- Debido a que los dos aparatos registran un movimiento a 24 km, no se sabe con exactitud en que punto cardinal se generó este movimiento.
- La ecuación de la circunferencia fuera del origen del plano cartesiano es $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, con centro de la circunferencia (h,k).

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema

En esta fase, se aplica toda la información y herramientas matemáticas obtenidas.

Debido a que el primer SDPA se encuentra a 4 km al oeste, y el segundo SDPA se encuenra a 6km al sur, esto representa un punto en el plano $(-4,-6)$. Luego, como un terremoto forma ondas llamadas círculos concéntricos, se deduce que el centro de estas ondas es el punto $C(-4,-6)$.

Además, como estos dos aparatos registraron otro movimiento a 24 km de distancia, sin saber en que punto cardinal sucedió, se infiere que el sismo pudo haberse producido 24 km a la redonda, es decir, que el radio (r) es igual a 24.

Ahora, utilizaremos la ecuación de la circunferencia, con centro (h,k),

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2.$$

Como $r=24$ y el centro es $C(-4,-6)$, entonces se tiene que $h=-4$ y $k=-6$, luego estos datos se reemplazan en la ecuación antes dada.

$$\begin{aligned}(x-(-4))^2+(y-(-6))^2&=24^2\\(x+4)^2+(y+6)^2&=576\end{aligned}$$

Donde se obtiene la circunferencia $C_1:\ (x+4)^2+(y+3)^2=576$.

Fase 4

Examinación del resultado obtenido

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados

En esta fase, utilizaremos el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados

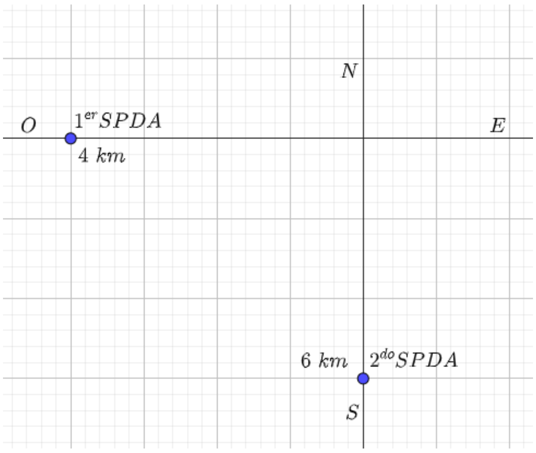


Figura 4.1: Se observa donde se ubican los dos aparatos SDPA.

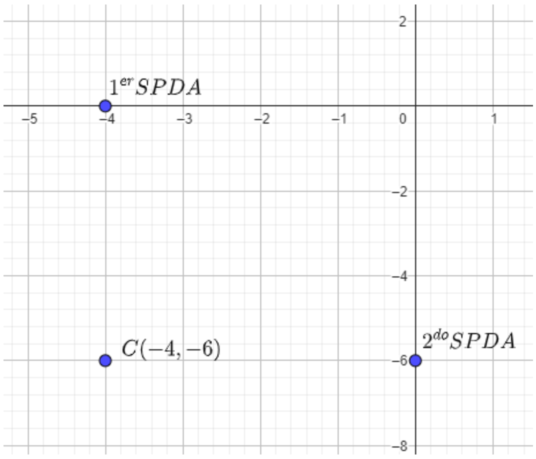


Figura 4.2: Se observa donde se ubica el centro de la circunferencia.

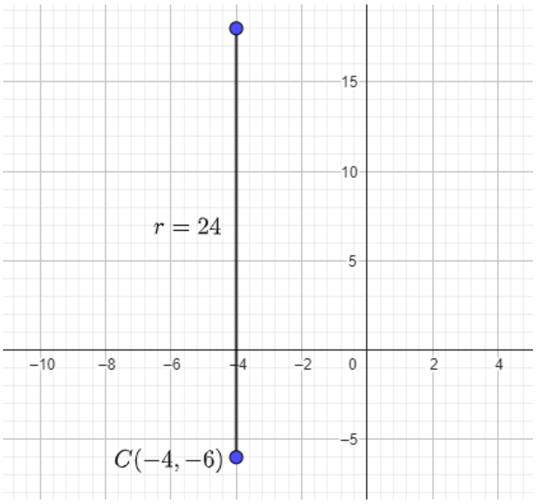


Figura 4.3: Se observa cuál es el radio de la circunferencia y el posible epicentro del sismo.

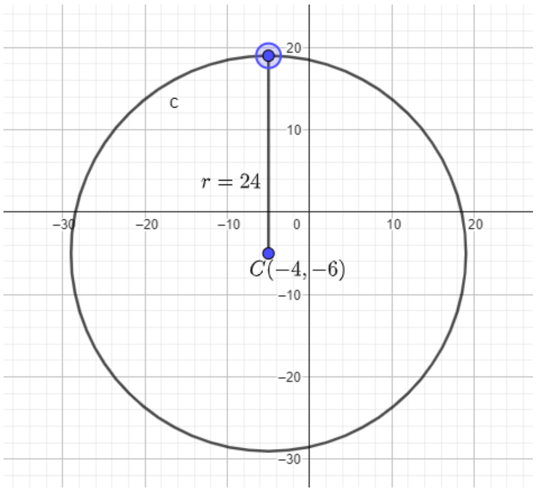


Figura 4.4: La circunferencia obtenida C_1 con centro $(-4,-6)$.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema

Los dos aparatos SDPA se desplegaron a 4 kilómetros al oeste y 6 kilómetros al sur de un pueblo, respectivamente, debido a que los dos aparatos registraron un movimiento telúrico a 24 km al mismo tiempo, se deduce que estos se encontraban en el punto $(-4,-6)$ y su radio es $r = 24$. Por lo que las posibles localizaciones del epicentro del sismo está representada por la circunferencia $(x+4)^2 + (y+3)^2 = 576$.

Problema 4.2.2: Órbita del módulo de mando del Apolo 8

El Apolo 8 fue la primera nave tripulada que se puso en órbita sobre la superficie lunar a una altitud promedio de 185 kilómetros (km). Determina una ecuación que represente la órbita del módulo de mando del Apolo 8 si el radio de la Luna es de 1740 km. Supón que el centro de la luna es el origen.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema

Como punto inicial, se desea encontrar la ecuación que represente la órbita del módulo de mando del Apolo 8. Además, el enunciado nos ofrece la siguiente información:

- La nave orbitó alrededor de la Luna a una altitud de 185 km.
- El radio de la luna es 1740 km.
- Por la naturaleza del problema, el centro de la Luna está en el origen del plano cartesiano.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución

Se busca que otras herramientas matemáticas ayudaría a resolver el problema:

- La ecuación de la circunferencia en el origen $x^2 + y^2 = r^2$.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema

Debido a que la nave estaba orbitando a 185 km de altura de la Luna, y además, el radio de la Luna es 1740 km, entonces se tiene los siguientes datos: $A = 185$ y $R_L = 1740$. Luego, se realiza lo siguiente:

$$A + R_L = 185 + 1740 = 1925\ km.$$

Por lo que el radio de la órbita es 1925 km, r=1925 km. Este dato se reemplaza en la ecuación de la circunferencia en el origen.

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= r^2 \\ x^2 + y^2 &= 1925^2. \end{aligned}$$

Donde se obtiene la circunferencia $C_1 :\ x^2 + y^2 = 1925^2$.

Fase 4

Examinación del resultado obtenido

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados

En esta fase, utilizaremos el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

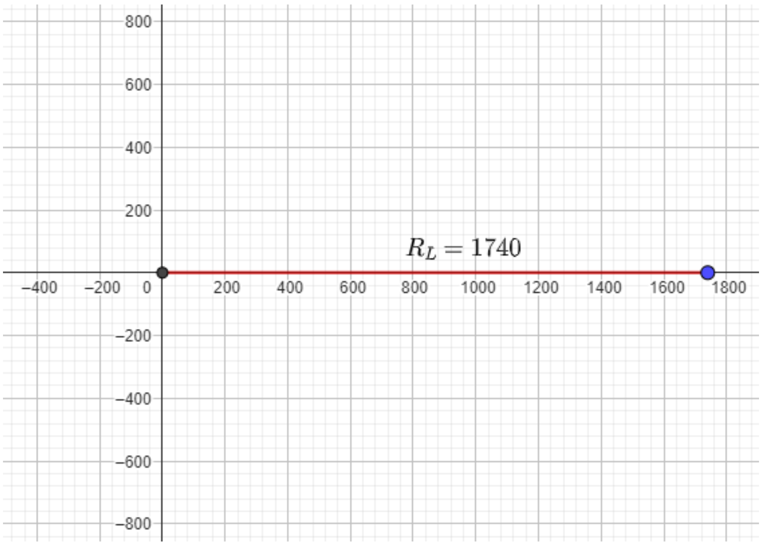


Figura 4.5: Se observa el radio de la Luna.

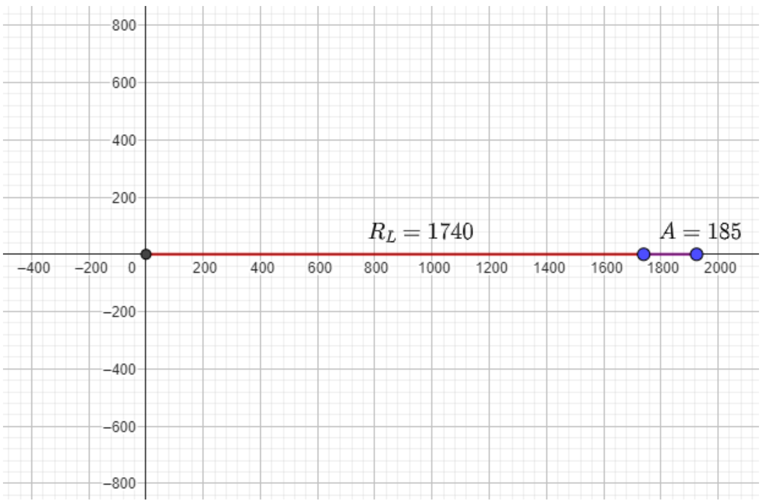


Figura 4.6: Se observa a que altitud orbitaba la nave con respecto a la Luna.

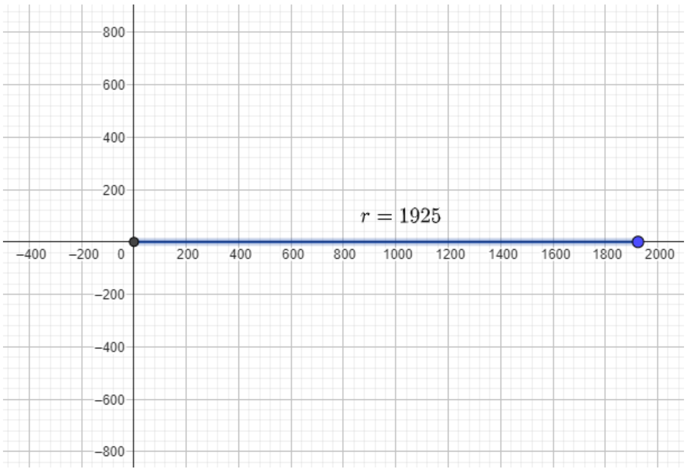


Figura 4.7: Se observa el radio de la orbita en la que la nave estaba.

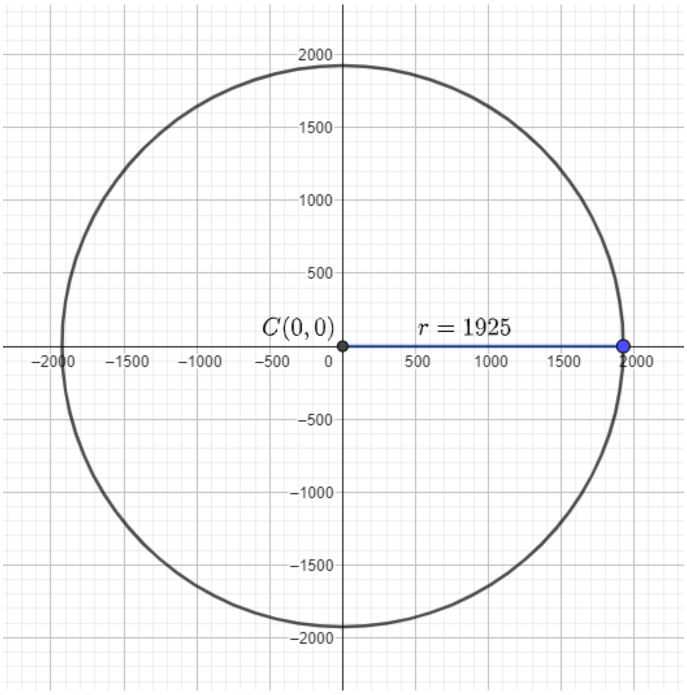


Figura 4.8: La circunferencia obtenida C_1 con centro $(0,0)$.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema

El radio de la Luna es de 1740 km y la altitud en la que se encuentra la nave es de 185 km, por lo que el radio de la circunferencia que representa la órbita es de 1925 km. Es así que, la circunferencia que representa la órbita es $x^2 + y^2 = 1925^2$, es decir, $x^2 + y^2 = 3705625$.

Problema 4.2.3: Irrigación de cosechas

Un método de irrigación de cosechas, conocido como sistema de pivote central, hace girar el tubo de un aspersor en el centro del campo que se va a regar. Supón que un granjero coloca una de estas unidades en el centro de una parcela cuadrada de tierra de 54 metros (m) por lado. Con el centro de esta parcela en el origen, el irrigador envía el agua lo suficientemente lejos para llegar a un punto localizado en $(15, 20)$. Encuentre una ecuación que represente los puntos más alejados a los que puede llegar el agua y el área de la tierra que recibe el agua directamente. También, deducir cuál es posible porcentaje de la parcela que no recibe agua directamente.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema

Principalmente, se desea encontrar la ecuación que represente los puntos más alejados a los que puede llegar el agua, el área de la tierra que recibe el agua directamente y calcular el porcentaje de tierra donde no recibe agua. También, se tiene la siguiente información:

- El método de irrigación, es un sistema de pivote central.
- La parcela es cuadrada, donde cada lado mide 54 m.
- El agua llega lo más lejos a través del irrigador a un punto $P(15, 20)$.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución

Se describe otras herramientas matemáticas:

- La ecuación de la circunferencia en el origen $C_1 : \ x^2 + y^2 = r^2$.
- El área de un circulo $A_{ci} = \pi r^2$.
- El área de un cuadrado $A_{cu} = l^2$.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema

Se sabe que el centro de la parcela se encuentra en el origen, además los lados de la parcela miden 54 m. También, se sabe que el irrigador gira, por lo que riega agua de forma circular. Así, se puede deducir que el $P \in C_1$. Debido a que

$P(15,20) \in x^2+y^2=r^2$ se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= r^2 \\ 15^2+20^2 &= r^2 \\ \sqrt{15^2+20^2} &= r \\ r &= 25. \end{aligned}$$

Por lo que la ecuación de la circunferencia es,

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= 25^2 \\ x^2+y^2 &= 625. \end{aligned}$$

Luego, se obtiene el área del círculo donde se irriga el agua,

$$\begin{aligned} A_{ci} &= \pi r^2 \\ A_{ci} &= \pi(25)^2 \\ A_{ci} &= 625\pi \\ A_{ci} &= 1963,49. \end{aligned}$$

Para calcular el porcentaje donde no se irriga agua, se calcula lo siguiente,

$$\begin{aligned} A_{cu} &= l^2 \\ A_{cu} &= (54)^2 \\ A_{cu} &= 2916. \end{aligned}$$

Luego, se resta el área del círculo que se irriga agua y del cuadrado de la parcela.

$$\begin{aligned} A_{cu} - A_{ci} &= 2916 - 1963,49 \\ A_{cu} - A_{ci} &= 952,51. \end{aligned}$$

Luego, se realiza una regla de tres para obtener el porcentaje (P), donde se tiene que,

$$P = \frac{952,51 \times 100}{2916} = 32,66\,\%.$$

Fase 4

Examinación del resultado obtenido

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados

Se utiliza GeoGebra para revisar los resultados.

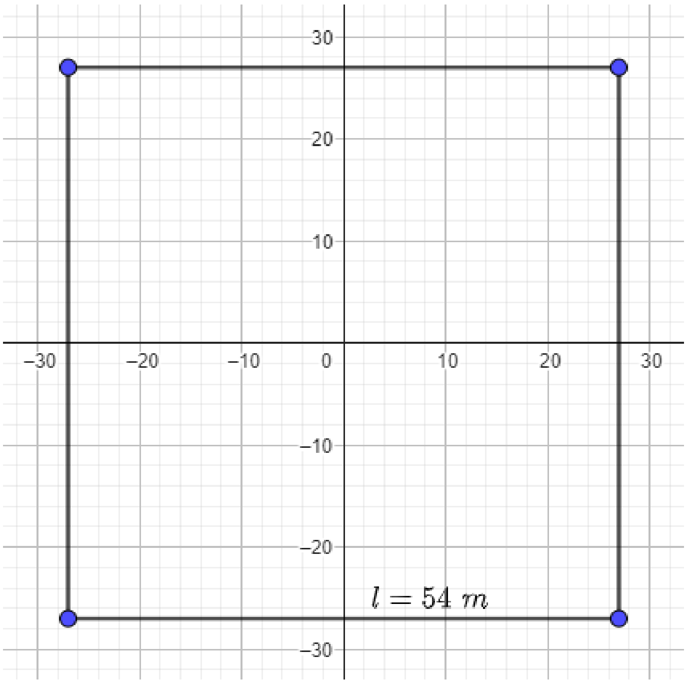


Figura 4.9: Se observa la forma de la parcela, con lados de 54 m.

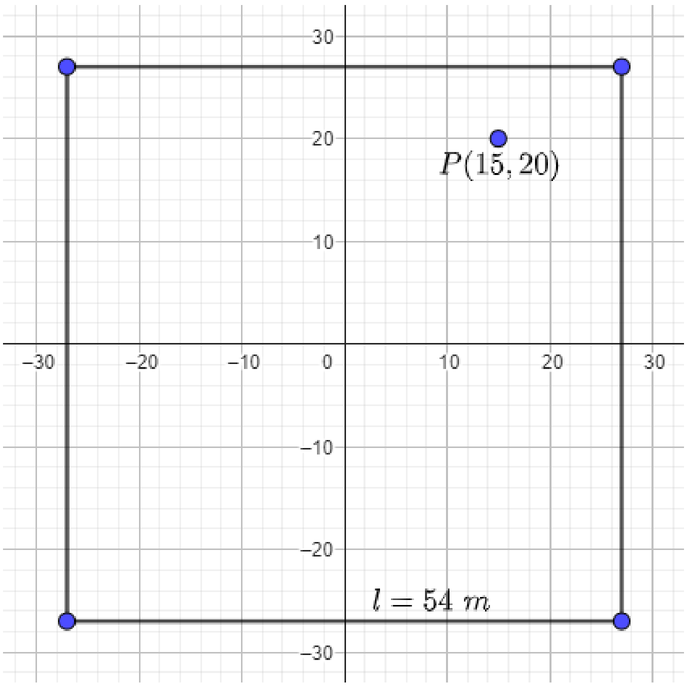


Figura 4.10: Se observa el punto más alejado donde llega el agua a través del irrigador.

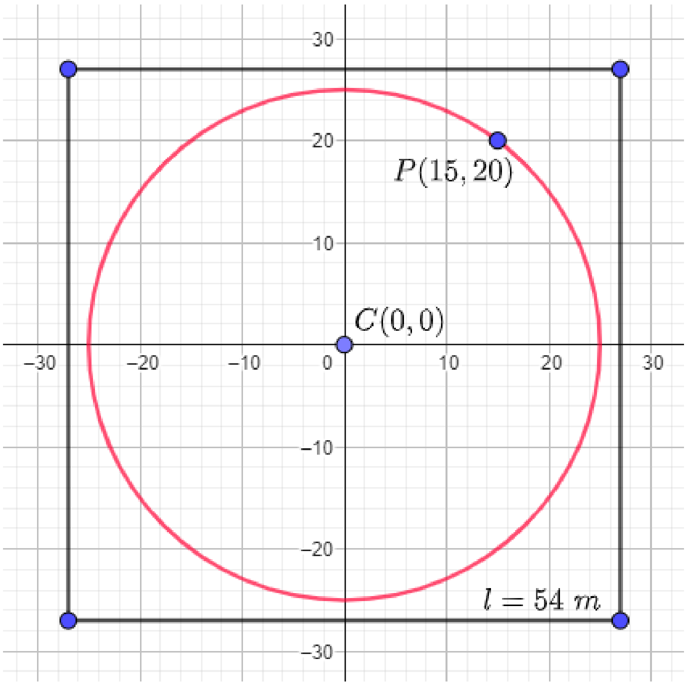


Figura 4.11: La circunferencia obtenida con centro $(0, 0)$, que representa los puntos más alejados a donde llega el agua.

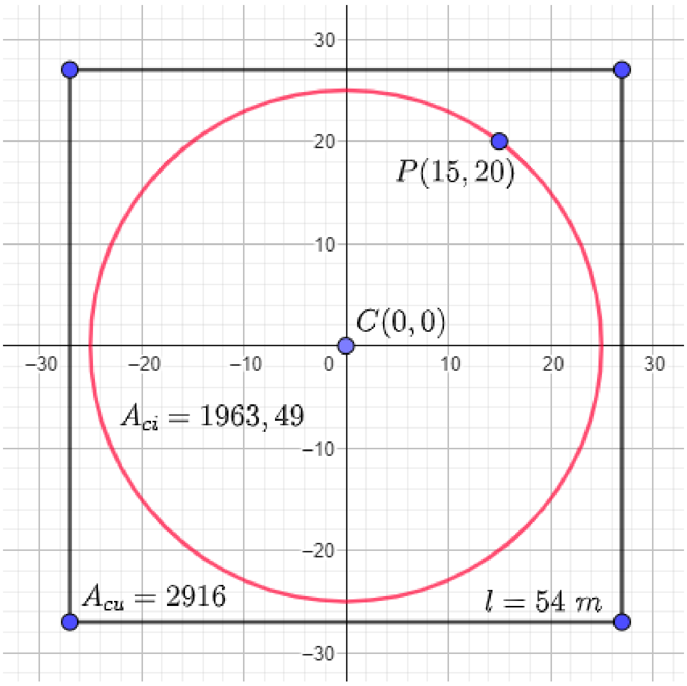


Figura 4.12: Se observa el área del círculo donde llega el agua directamente, al igual que el área de la parcela y los sectores donde no llega agua desde el irrigador que se encuentra en el centro.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema

Se concluyé que como el método de irrigación es un sistema de pivote central, la forma de irrigar el agua es de forma circular. Además, se coloca el irrigador en el centro de la parcela, por lo que la ecuación que represente los puntos más alejados a donde llegar el agua va ser $x^2 + y^2 = 625$, ya que el centro de la circunferencia es el origen $C(0,0)$. Luego, se determina que el área de la tierra que recibe el agua directamente del irrigador es $1963,49$. Finalmente, se determina que el posible porcentaje de la parcela que no recibe agua por el irrigador es 32,66 %.

4.2.2. Problemas contextualizados de la parábola

Problema 4.2.4: Altura de un cable del puente colgante

Los extremos del cable de un puente de suspensión están a 1000 metros (m) de distancia y a 100 metros sobre el piso de la vía horizontal, mientras que el centro del cable está a nivel del piso. Encontrar la altura de otra torre sobre el piso a una distancia de 300 metros de la base de la torre de amarre en los extremos del puente, suponiendo que el cable resiste una carga de igual peso en distancias horizontales iguales.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

Principalmente, se desea encontrar la altura del cable sobre el piso a una distancia de 300 metros de la base de la torre de amarre en los extremos del puente. Además, se obtiene la siguiente información:

- La distancia entre los extremos, los cuales se denominaran t_1 y t_2, del puente es de 1000 m.
- La altura de los extremos del puente es de 100 m.
- El centro del cable del puente en suspensión está a nivel del piso.
- La distancia desde la base de torre de amarre en dirección al centro del puente es de 300 m.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Las otras herramientas matemáticas que pueden ayudar a resolver el problema son:

- El puente en suspensión se refiere a que forma una parábola que se abre hacia arriba.

- El centro del cable del puente está a nivel del piso, lo que quiere decir que el vértice de la parábola está en el origen del plano cartesiano.
- La ecuación de la parábola con vértice en el origen es $x^2 = 4py$.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

Para la resolución del problema nos vamos a referir a parábola, en vez de puente. Por lo que tomando los datos, se sabe que la altura de la torre de amarre de la parábola es de 100 m, además que la distancia a la que se encuentra la torre desde el vértice de la parábola que está en el origen es de 500 m. Es decir,

$$\begin{aligned}\overline{t_1t_2} &= 1000\\ \frac{\overline{t_1t_2}}{2} &= 500.\end{aligned}$$

Esto debido a que las cargas del puente se distribuyen de forma simétrica desde el vértice del puente.

Lo que se puede deducir es que, como la torre de amarre tiene una altura de 100 m y se encuentra a una distancia de 500 m, la parábola pasa por el punto $P(500, 100)$. Así, se sustituye en lo que sigue,

$$\begin{aligned}x^2 &= 4py\\ (500)^2 &= 4p(100)\\ 250000 &= 4p(100)\\ 4p &= \frac{250000}{100}\\ 4p &= 2500\\ p &= 625.\end{aligned}$$

Donde se obtiene la ecuación de la parábola, $x^2 = 2500y$.

Luego, se sabe que la distancia desde la base de torre de amarre en dirección al centro del puente es de 300 m, lo que equivale a lo siguiente,

$$\begin{aligned}\frac{\overline{t_1t_2}}{2} - 300 &= 500 - 300\\ \frac{\overline{t_1t_2}}{2} - 300 &= 200.\end{aligned}$$

Es decir, $x = 200$ y como se desea encontrar la altura de la torre de amarre si está a

200 m desde el vértice de la parábola, vamos a encontrar el valor de y, sabiendo que $p = 625$,

$$
\begin{aligned}
x^2 &= 4py \\
(200)^2 &= 4(625)y \\
40000 &= 2500y \\
y &= \frac{40000}{2500} \\
y &= 16.
\end{aligned}
$$

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

En esta fase, utilizaremos el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

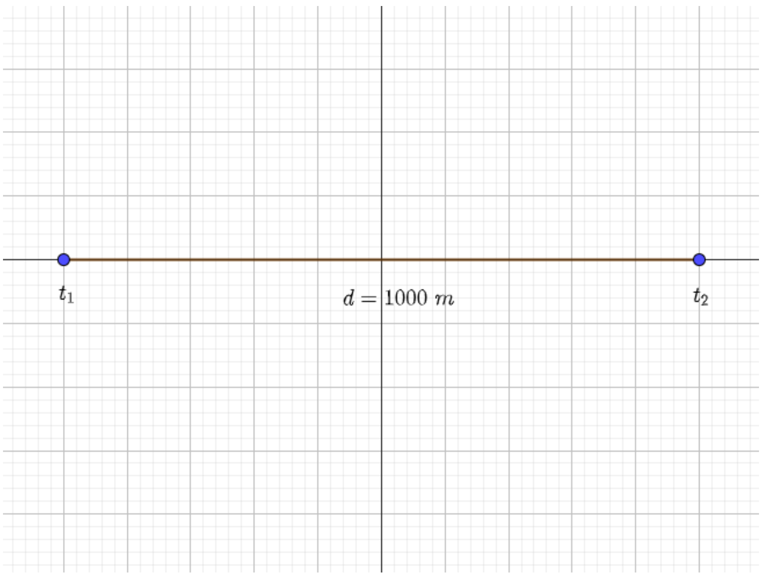


Figura 4.13: Se observa la distancia en la torre 1 y la torre 2 de amarre.

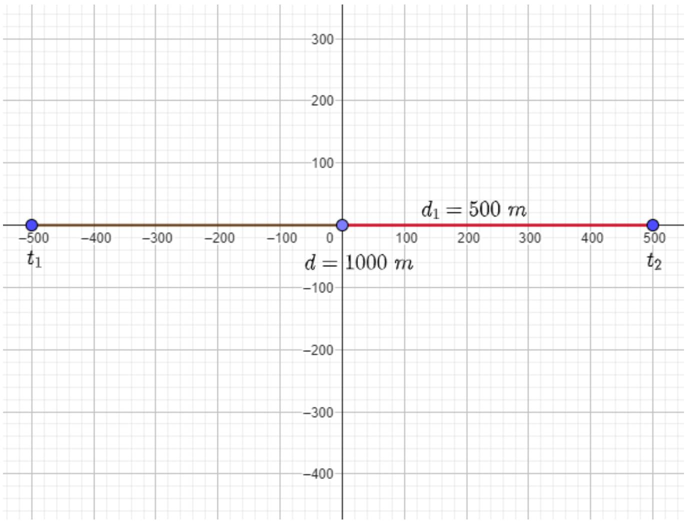


Figura 4.14: Se observa la distancia desde el origen del plano hasta la torre 2.

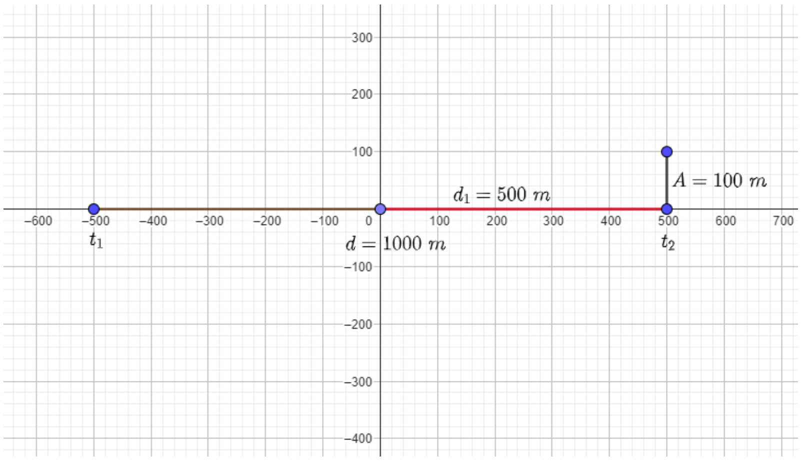


Figura 4.15: Se observa la altura de la torre 2.

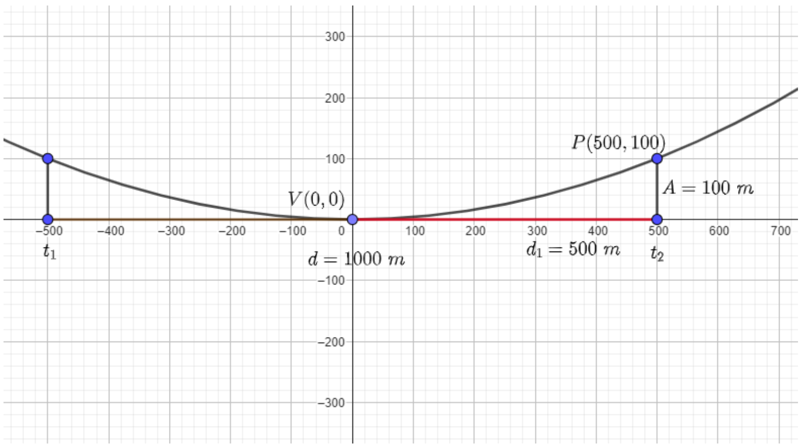


Figura 4.16: Se observa la torre 2 de amarre que sostiene el cable del puente, es decir que la parábola pasa por el punto $(500, 100)$.

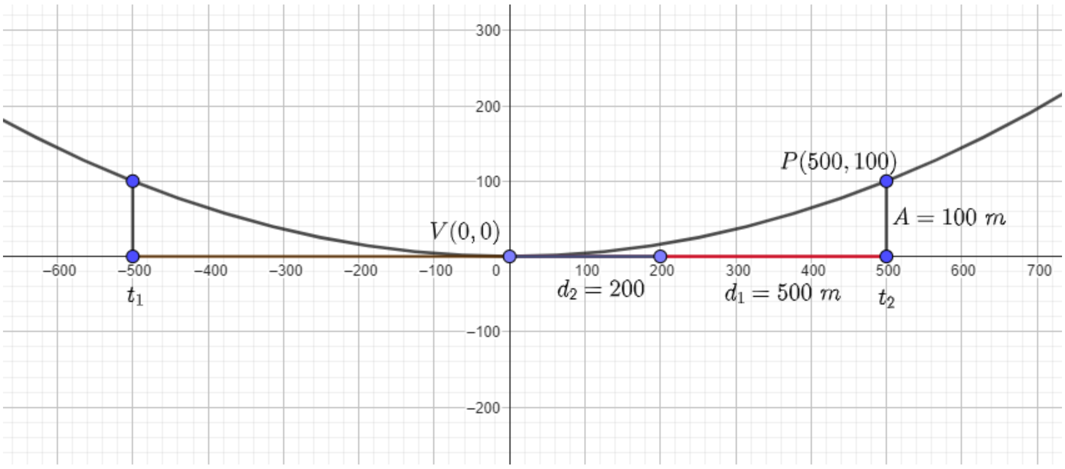


Figura 4.17: Se observa la distancia de 200 m, desde el origen del plano hacia donse se encontraría posiblemente la otra torre.

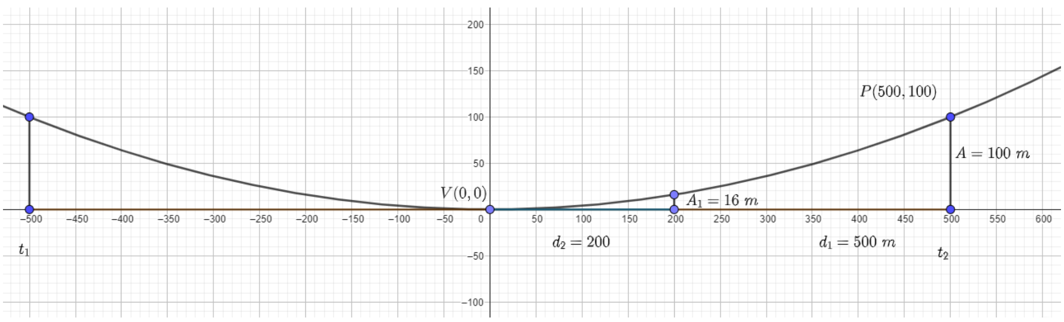


Figura 4.18: Se observa la altura de la otra torre que sontendría el cable del puente.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

Se concluyé que como la distancia desde el vértice de la parábola a la torre 2 es de 500 m, la otra distancia hacia la otra posble torre desde el vertice es de 200 m. De tal manera que la ecuación que representa a este puente de suspensión es de una parábola $x^2 = 2500y$. Pues así, se calcula la altura de la otra torre de amarre, es decir se obtiene el valor de y. Finalmente, la altura de la torre de amarre del puente de suspensión, donde el cable resiste una carga de igual peso en distancias horizontales iguales es de 16 m.

Problema 4.2.5: Profundidad del espejo parábolico Odeillo

Al sur de Francia se ubica el horno solar Odeillo, donde utiliza una serie de 63 espejos planos, dispuestos sobre terrazas artificiales de una ladera, para reflejar los rayos solares sobre un gran espejo parabólica. Estos espejos controlados por computadora se inclinan para seguir el Sol y asegurar que sus rayos se reflejen siempre hacia el espejo parabólico central. A su vez, este espejo refleja los rayos solares hacia el punto focal donde se monta un horno sobre una torre. La energía concentrada genera temperaturas de hasta $6870°F$. Si el ancho del espejo parábolico Odeillo es de 138 pies y el horno se ubica a 58 pies del centro del espejo, ¿Qué tan profundo es el espejo?.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

En primer instancia, se desea encontrar la profundidad del espejo parabólico Odeillo. Es así que el ejercicio nos brinda la siguiente informació:

- El horno se encuentra en el punto focal del espejo parabólico.
- El ancho del espejo parabólico Odeillo 138 pies.
- El horno se ubica a 58 pies del centro del espejo.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Se describe otras herramientas matemáticas tales como:

- La ecuación de la parábola con vértice en el origen y que se abre a la derecha es $y^2 = 4px$.
- p es la distancia desde el vértice al foco de la parábola o también llamada longitud focal.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

El espejo parabólico se abre hacia la derecha, o en dirección la horno de calor. Además, se asume en el vértice del espejo parábolico se encuentra en el origen. Por lo que utilizamos la ecacion de la parábola con vértice en el origen y que se abre a la derecha $y^2 = 4px$. Otro dato importante es el horno se ubica a 58 pies del centro del espejo, es decir que la distancia desde el vértice al foco de la parábola es de 58 pies, donde se define $p = 58$.Tomando estos datos reemplazamos p en la ecuación, como sigue,

$$\begin{aligned} y^2 &= 4px \\ y^2 &= 4(58)x \\ y^2 &= 232x. \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene la ecuación del espejo parabólico.

Luego, para encontrar la profundidad del espejo debemos calcular la distancia de x. Donde se sabe que el ancho del espejo parabólico (A) es de 138 pies. Pues así, se calcula la distancia del ancho del espejo desde el vértice de la parábola hasta uno de los bordes,

$$\begin{aligned} \frac{A}{2} &= \frac{138}{2} \\ &= 69. \end{aligned}$$

Así se obtiene que $y = 69$. De esta manera, se reemplaza en la siguiente ecuación del espejo parabólico,

$$\begin{aligned} y^2 &= 232x \\ (69)^2 &= 232x \\ 4761 &= 232x \\ x &= \frac{4761}{232} \\ x &\approx 20,5. \end{aligned}$$

La profundidad aproximada del espejo es de 20,5 pies.

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

Se utiliza el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

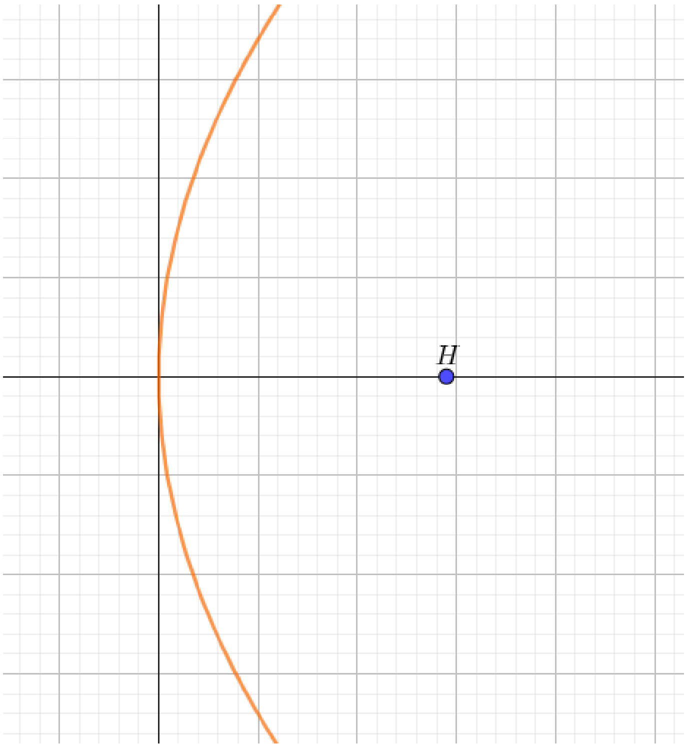


Figura 4.19: Se observa como se vería el espejo parabólico y donde se encontraría el horno posiblemente.

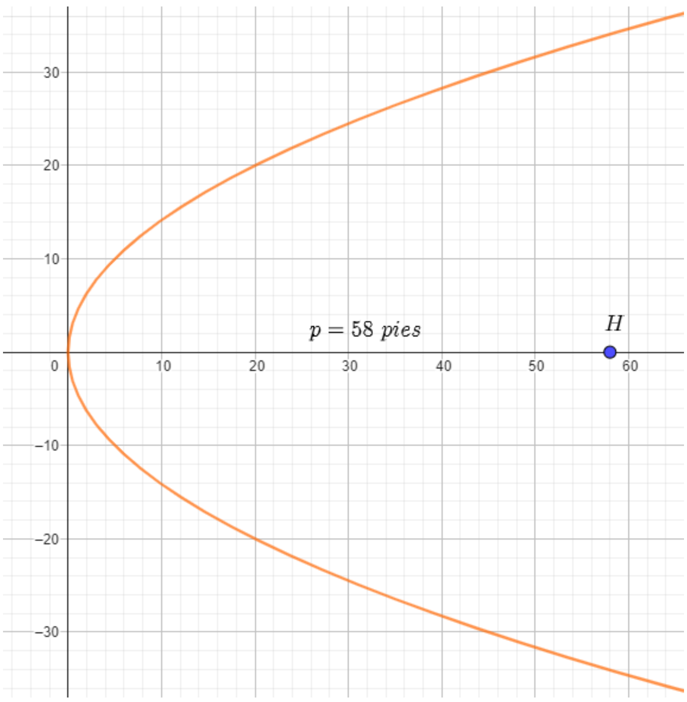


Figura 4.20: Se observa la distancia desde el horno hasta el centro del espejo parabólico que es de 58 pies.

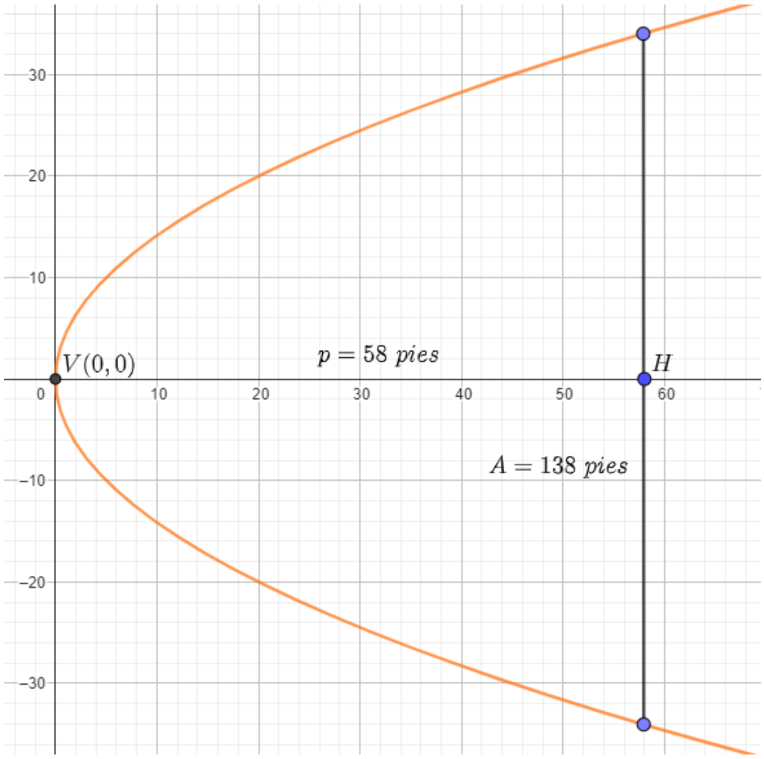


Figura 4.21: Se observa el ancho del espejo parabólico que es de 138 pies.

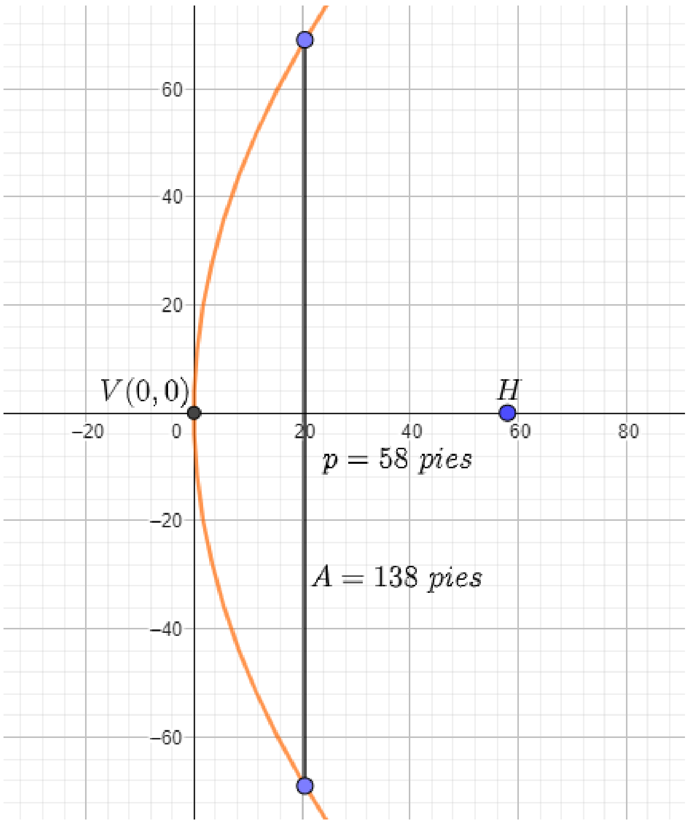


Figura 4.22: Se observa la forma real del espejo parabólico $y^2 = 232x$.

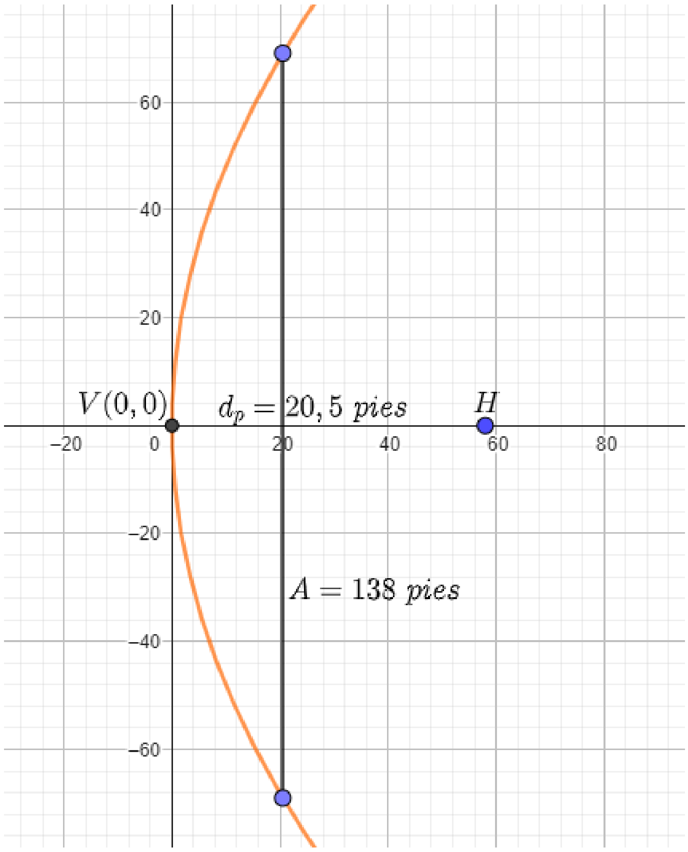


Figura 4.23: Se observa la profundidad del espejo parabólico que es 20,5 pies.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

Se obtuvo que la ecuación parabólica que describe el espejo parabólico Odeillo es $y^2 = 232x$, debido a que su longitud focal es de 58 pies y el ancho del espejo de de 138 pies. De igual manera, con los datos obtenidos la profundidad del espejo parabólico es de 20,5 pies.

Problema 4.2.6: Altura máxima del vuelo de una vae espacial

La nave KC-135A de la NASA vuela en arcos parabólicos para simular la ingravidez que experimentan los astronautas en el espacio. La nave comienza su ascenso a 24000 pies, y durante éste, toda la tripulación experimenta 2g (el doble de la atracción de la gravedad terrestre). Cuando la nave se acerca a su altura máxima, se detienen los motores y se deja que el vehículo espacial caiga libremente a un ángulo determinado con precisión. La gravedad cero se consigue durante 25 segundos cuando el plano alcanza la parte superior de la parábola y empieza su descenso. Después de este periodo se reduce la velocidad de los motores para sacar a la nave del vuelo en picada. Si la altura de la nave (y) en función del tiempo en segundos (x) se modela mediante la ecuación $x^2 - 65x + 0,11y - 2683,75 = 0$, ¿cuál es la altura máxima que alcanza la nave durante su vuelo parabólico?.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

Lo que se desea encontrar es la altura máxima que alcanza la nave durante el vuelo parabólico. Luego, la información que se tiene es:

- El eje y representa la altura de la nave.
- El eje x representa el tiempo en segundos.
- Se tiene la ecuación que modela el vuelo de la nave en $x^2 - 65x + 0,11y - 2683,75 = 0$.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Se describe otras herramientas matemáticas que ayudarán a resolver el problema:

- La ecuación de la parábola con vértice fuera del origen con el eje focal paralelo al eje y es $(x-h)^2 = 4p(y-k)$, donde se describe el vértice como $V(h,k)$, también llamada ecuación de la formal normal.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

Se sabe que la ecuación que modela el vuelo de la nave es $x^2 - 65x + 0,11y - 2683,75 = 0$, donde x y y representan el tiempo en segundo y la altura, respectivamente. De esta manera, escribiremos la ecuación en su forma normal, donde realizamos lo que sigue,

$$\begin{aligned}
x^2 - 65x + 0,11y - 2683,75 &= 0 \\
x^2 - 65x &= -0,11y + 2683,75 \\
x^2 - 65x + (\frac{65}{2})^2 &= -0,11y + 2683,75 + (\frac{65}{2})^2 \\
x^2 - 65x + 1056,25 &= -0,11y + 2683,75 + 1056,25 \\
(x - 32,5)^2 &= -0,11y + 3740 \\
(x - 32,5)^2 &= -0,11(y - 34000).
\end{aligned}$$

Donde se obtiene que la ecuación de la parábola $(x - 32,5)^2 = -0,11(y - 34000)$ y el vértice (h, k) es $(32{,}5; 34000)$.

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

Se utiliza el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

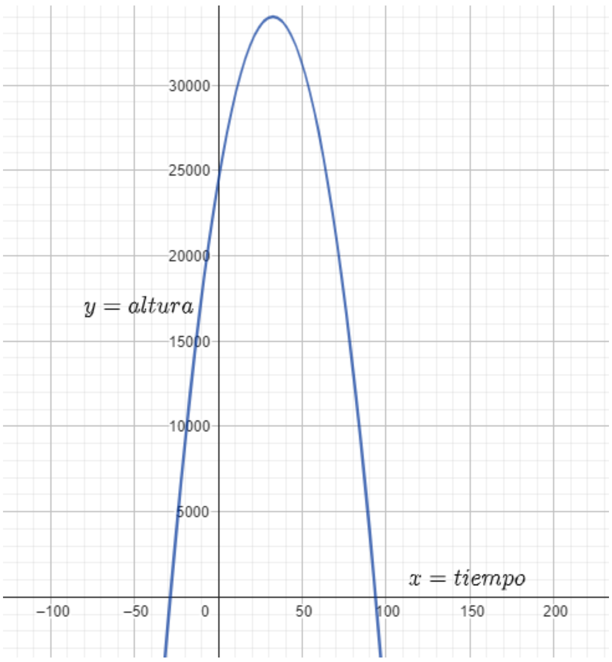


Figura 4.24: Se observa cómo la ecuación $x^2 - 65x + 0,11y - 2683,75 = 0$ modela el vuelo parabólico de la nave.

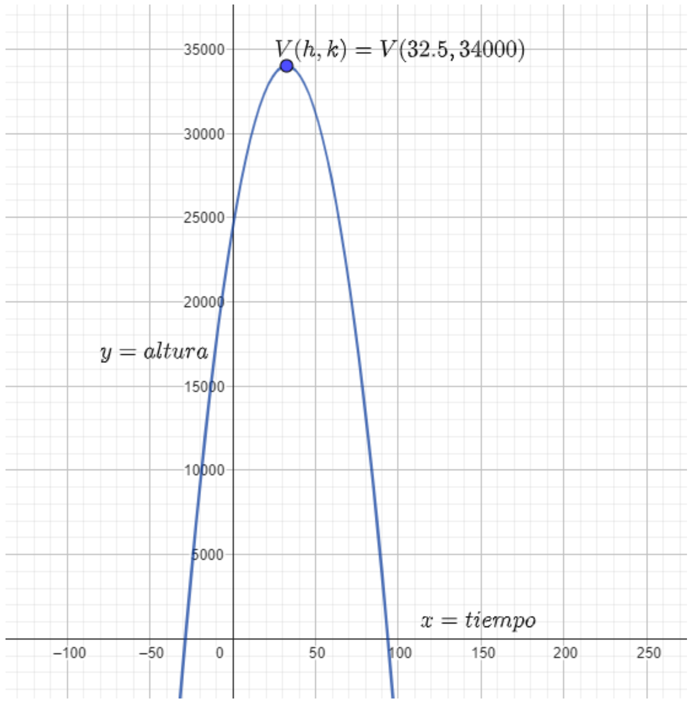


Figura 4.25: Se observa el vértice de la parábola, es decir el punto máximo de vuelo.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

Se tiene que la ecuación general que modela el huelo parabólico es $x^2 - 65x + 0,11y - 2683,75 = 0$, donde luego se obtuvo la ecuación de la forma normal $(x - 32,5)^2 = -0,11(y - 34000)$ que se abre para abajo. Se realizó este procedimiento para encontrar el vértice $V(h,k)$ de la parábola que se origina en el vuelo de la nave. Debido a que al obtener el vértice se obtiene el punto máximo del vuelo que es $((32{,}5; 34000))$. De este modo, se sabe que eje x representa el tiempo en segundos y el eje y la altura, es decir que el vuelo alcanza su altura maxima de 34000 pies a los 32,5 segundos de haber empezado el vuelo parabólico.

4.2.3. Problemas contextualizados de la elipse

Problema 4.2.7: Método para eliminar una piedra en el riñón

La herramienta médica llamada *lithotripter* o en español "triturador de piedras", es utilizada varias veces por los médicos para eliminar piedras en el riñón. Se trata de un dispositivo que utiliza ondas de choque de ultra alta frecuencia que se mueven por el agua para romper la piedra. Después de aplicar rayos X a una paciente para localizar y medir las piedra con precisión, el *lithotripter* se coloca de modo que las ondas de choque reflejen la superficie interna del tubo elíptico y rompan la piedra. Supongamos que el reflector de un *lithotripter* móvil mide 24 centímetros (cm) de ancho y 24 cm de profundidad. ¿A qué distancia, hasta la centésima de centímetro más cercana, de la piedra en el riñón del paciente debe situarse el emisor de ondas de choque?.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

Lo que principalmente se desea encontrar es la distancia donde se debe situar el aparato para poder eliminar la piedra del riñón. De esta manera, el problema nos da la siguiente información:

- El reflector de un *lithotripter* móvil mide 24 cm de ancho y 24 cm de profundidad.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Se describen las otras herramientas metemáticas que ayudarán a resolver el problema:

- El reflector al tener forma elíptica tiene dos puntos fijos, es decir focos.
- b describe el semieje menor de la elipse.
- a describe el semieje mayor de la elipse.
- c describe la longitud entre el centro de la elipse hacia uno de los dos puntos focales.
- $2b$ describe el eje menor de la elipse.
- $2c$ describe la longitud entre los dos puntos focales.
- La fórmula $c^2 = a^2 - b^2$ determina la longitud focal de la elipse.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

El reflector de un *lithotripter* es de forma parabólica, el cual emite ondas de choque para desintegrar la piedra del riñón. Pues, para que este procedimiento sea efectivo, el emisor de ondas debe colocarse en un punto focal, mientras que la piedra del riñón debe colocarse en el otro eje focal. Por lo que para determinar la distancia entre los dos puntos focales, se debe encontrar las longitudes de los semiejes mayor y menor.

De este modo, se sabe que la profundidad del reflector es de 24 cm, es decir que el semieje mayor $a = 24$. Así también, se tiene que el reflector mide 24 cm de ancho, es decir que, el eje menor es,

$$\begin{aligned} 2b &= 24 \\ b &= \frac{24}{2} \\ b &= 12. \end{aligned}$$

Por lo que, el semieje menor es $b = 12$. Luego, utilizaremos la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$, por lo que,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= (24)^2 - (12)^2 \\ c^2 &= 576 - 144 \\ c^2 &= 432 \\ c &= \sqrt{432} \\ c &\approx 20{,}8. \end{aligned}$$

Luego, se sabe que $2c$ es la longitud entre los dos puntos focales,

$$\begin{aligned} 2c &= 2(20{,}8) \\ &= 41,6. \end{aligned}$$

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

Se utiliza el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

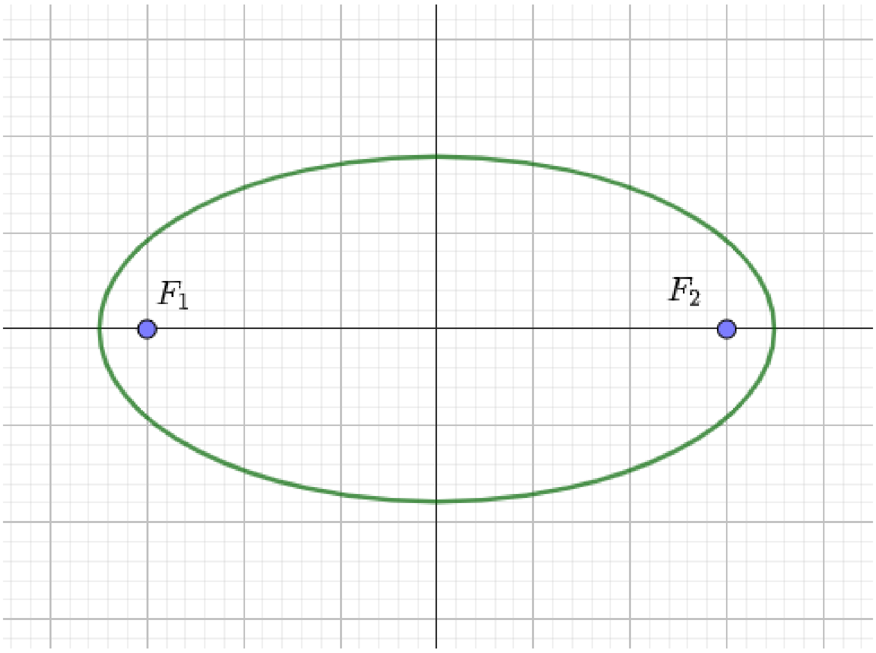


Figura 4.26: Se observa la forma del reflector del *lithotripter*, con sus dos puntos focales. El foco 1 (F_1) representa al emisor de ondas, mientras que el foco 2 (F_2) represemta en que punto debería colocarse la piedra del riñón.

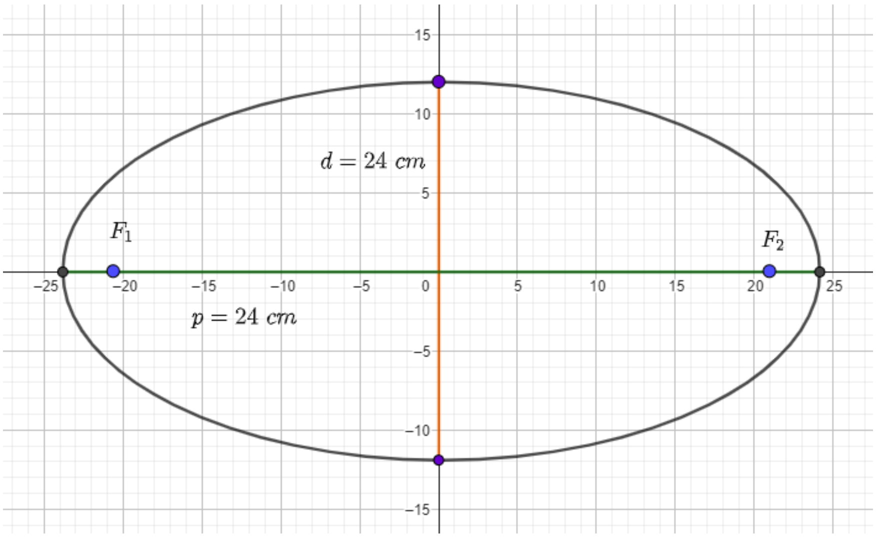


Figura 4.27: Se observa cuál es el ancho $d = 24$ y la profundidad $p = 24$ del reflector del *lithotripter*.

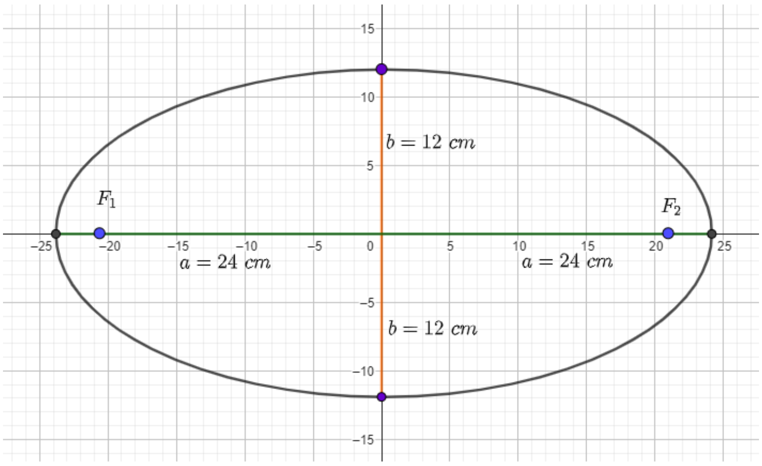


Figura 4.28: Se observa cuánto mide el semieje menor $b = 12$ y el semieje mayor $a = 24$ del reflector.

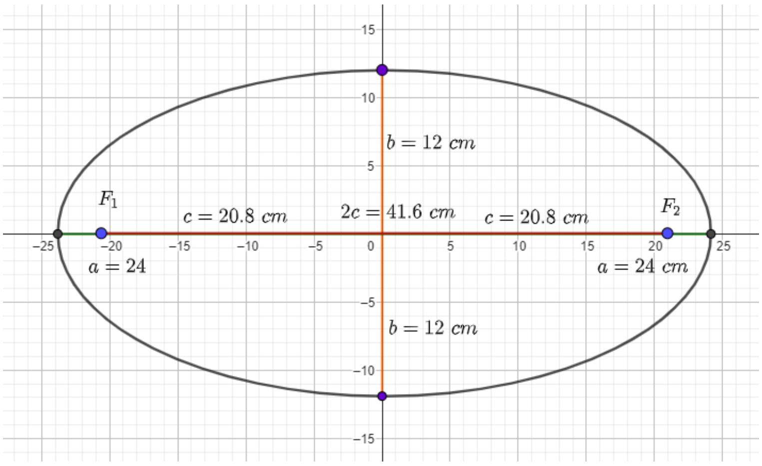


Figura 4.29: Se observa cuál es la distancia entre los dos puntos focales de la elipse, es decir, a qué distancia debería colocarse la piedra del riñón del paciente desde el emisor de ondas.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

Se determinó que la longitud del semieje mayor y menor es $a = 24$ y $b = 12$, respectivamente.Lo que permitió obtener la distancia entre los dos puntos focales $c = 41{,}6$. Es decir, el emisor de ondas de choque debe colocarse a 41.6 cm de distancia de la piedra del riñón del paciente para ser eliminada.

Problema 4.2.8: Distancia del punto más alejado del Sol a Plutón

La órbita de Plutón tiene una excentricidad mayor a las otras órbitas de los nueve planetas del sistema solar. Debido a que su excentricidad es de 0,248. Los astrónomos han determinado que la órbita es de casi 29,646 unidades astronómicas (UA) desde el Sol cuando se encuentra en su punto más próximo a éste (perihelio). La longitud del semieje mayor es cercana a 39,482 UA. Determine la longitud del semieje menor de la órbita y la distancia de Plutón desde el Sol hasta su punto más alejado (afelio).

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

Principalmente se desea encontrar es la distancia de Plutón desde el Sol hasta su punto más alejado (afelio). Así, se tiene la siguiente información que nos ofrece el ejemplo que es:

- La excentricidad de Plutón es de 0,248.
- Desde el Sol hacia la órbita de Plutón es de casi 29,646 UA cuando se encuentran muy cerca (perihelio).
- La longitud del semieje mayor es de casi a 39,482 UA.
- Perihelio es el punto más cercano del Sol hacia Plutón.
- Afelio es el punto más alejado del Sol hacia Plutón.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Se describen las otras herramientas metemáticas que ayudarán a resolver el problema:

- 1 UA es la distancia promedio entr el Sol y la Tierra, equivale aproximadamente 150 millones de kilómetros.
- Por la primera ley sobre el movimiento planetario de Kepler se sabe que los planetas se mueven en órbitas elípticas, uno de cuyos focos es el Sol.
- b describe el semieje menor de la elipse.
- a describe el semieje mayor de la elipse.
- $2a$ describe el eje mayor de la elipse.

- La fórmula $c^2 = a^2 - b^2$ determina la longitud focal de la elipse.
- La fórmula $e = \frac{c}{a}$ determina la excentricidad de la elipse.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

Primero, se va a determinar la longitud del semieje menor, es decir, el valor de b. Para ellos realizamos lo siguiente,

$$\begin{aligned} e &= \frac{c}{a} \\ c &= ea. \end{aligned}$$

Luego, reemplazamos en $c^2 = a^2 - b^2$, donde se tiene

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ (ea)^2 &= a^2 - b^2 \\ e^2a^2 &= a^2 - b^2 \\ e^2a^2 - a^2 &= -b^2 \\ a^2 - e^2a^2 &= b^2 \\ a^2(1 - e^2) &= b^2. \end{aligned}$$

De este modo, para encontrar el valor de b, se realiza,

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2(1 - e^2) \\ b &= \sqrt{a^2(1 - e^2)} \\ b &= \sqrt{(39{,}482)^2(1 - 0{,}248^2)} \\ b &\approx 38{,}249\ UA. \end{aligned}$$

Ahora, se va a determinar la distancia (d) de Plutón desde el Sol hasta su punto más alejado (afelio). Es decir, se debe tomar en cuenta la distancia del eje mayor $(2a)$ y la distancia del sol al perihelio (d_1),

$$\begin{aligned} d &= (2a) - (d_1) \\ d &= 2(39{,}482) - 29{,}646 \\ d &= 78{,}964 - 29{,}646 \\ d &= 49{,}318. \end{aligned}$$

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

Se utiliza el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

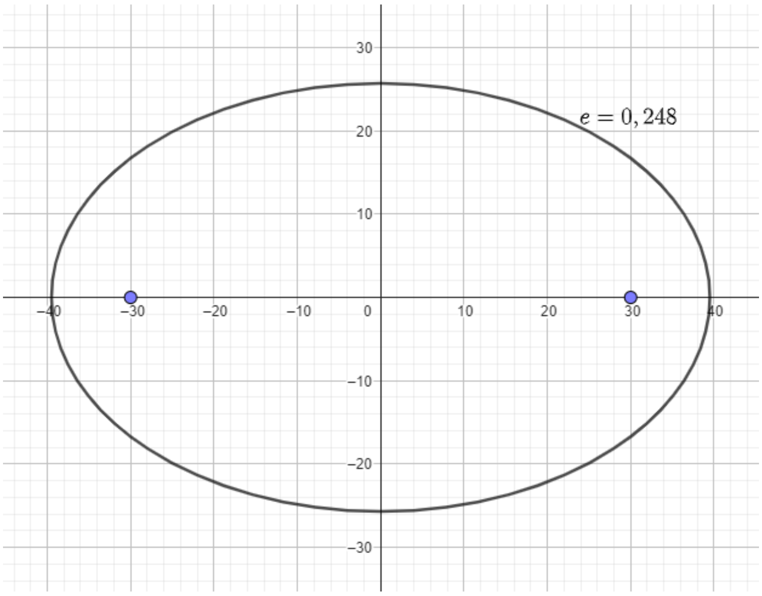


Figura 4.30: Se observa la excentricidad de la órbita de Plutón.

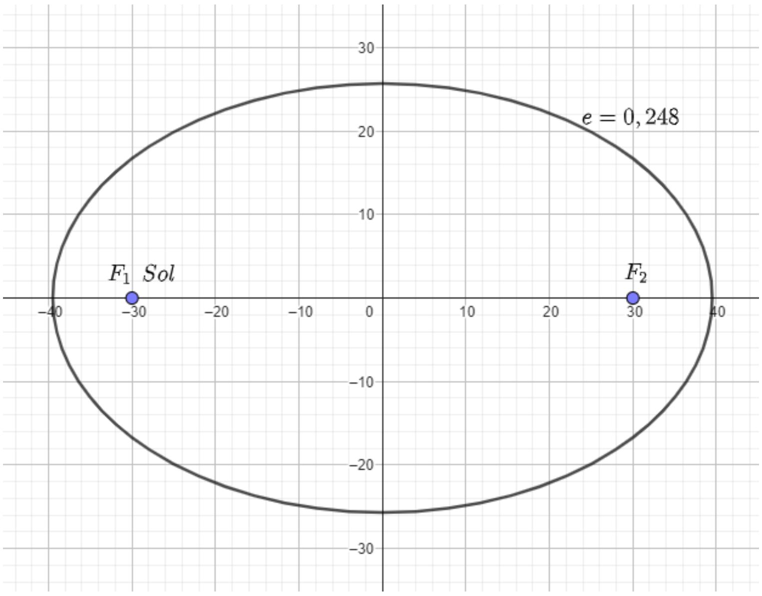


Figura 4.31: Se observa que al tener dos focos la elipse, es decir, la órbita de Plutón, el Sol se ubica en cualquiera de ellos.

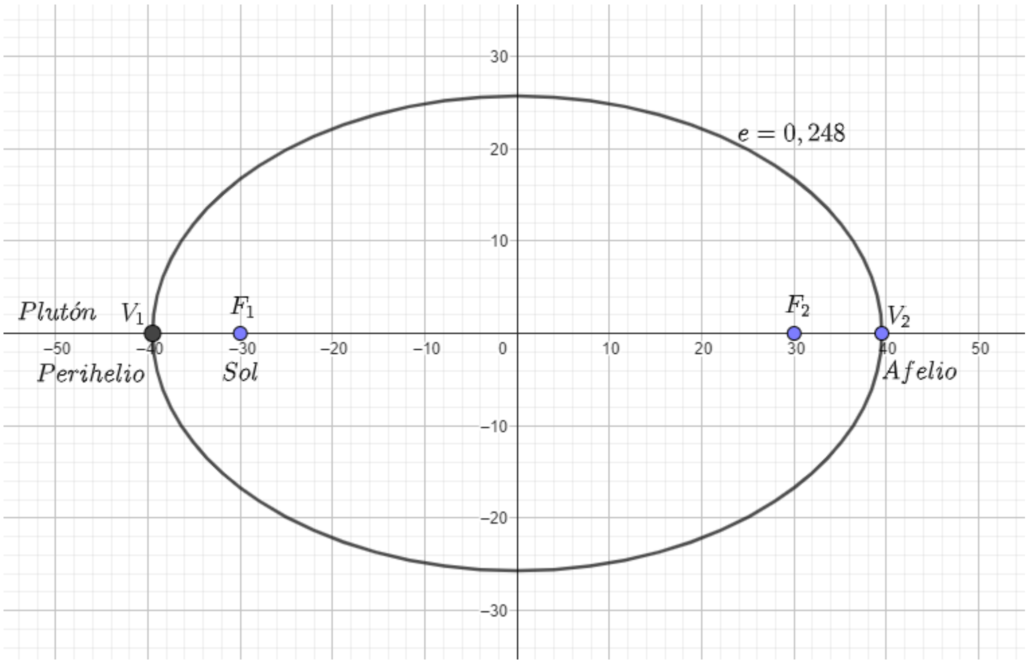


Figura 4.32: Se observa que el Sol se ubica en el foco 1 F_1. Además, Plutón se encuentra en el punto más próximo al Sol, lo que se llama perihelio. Si Plutón estría en el punto más alejado desde donde se encuentra el Sol se llamaría afelio.

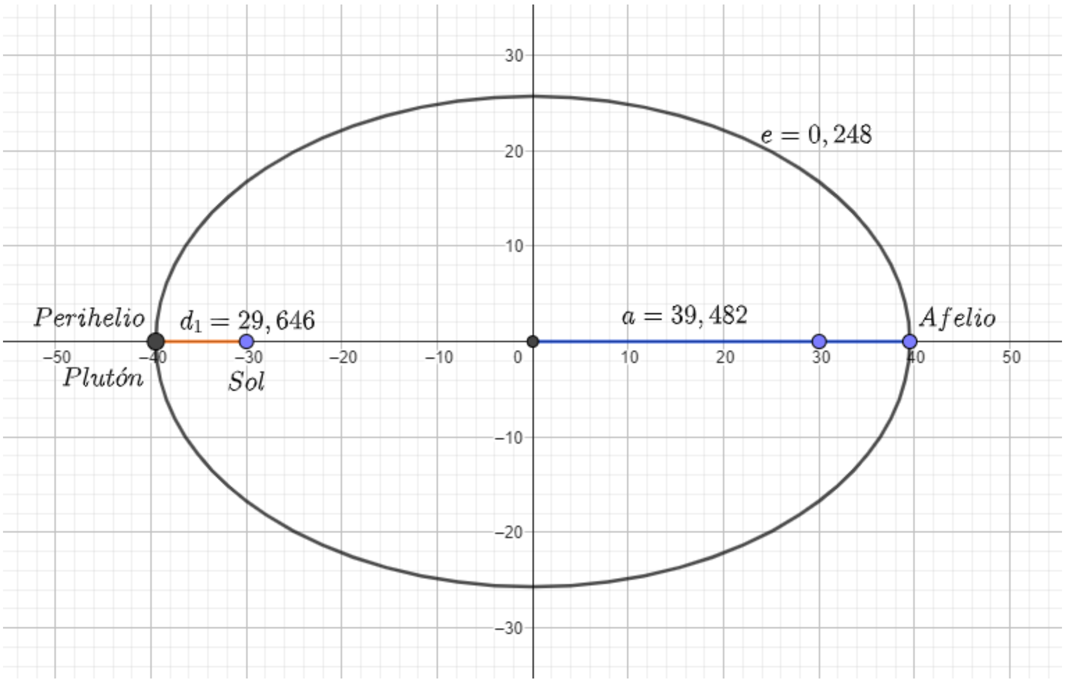


Figura 4.33: Se observa la distancia más cercana desde Plutón al Sol $d_1 = 29{,}646$, llamada perihelio. Así mismo se observa la longitud del semieje mayor $a = 39{,}482$.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

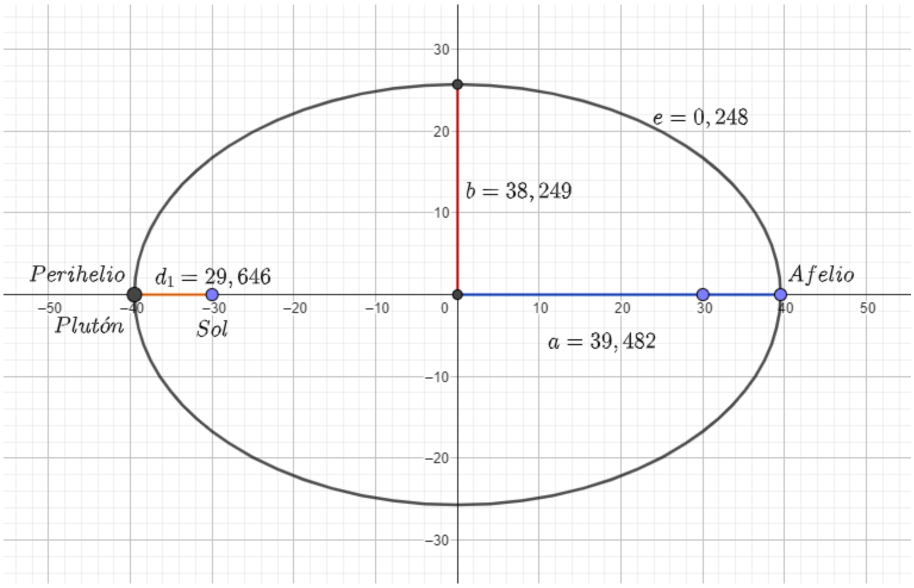


Figura 4.34: Se observa la longitud del semieje menor $b = 38{,}249$.

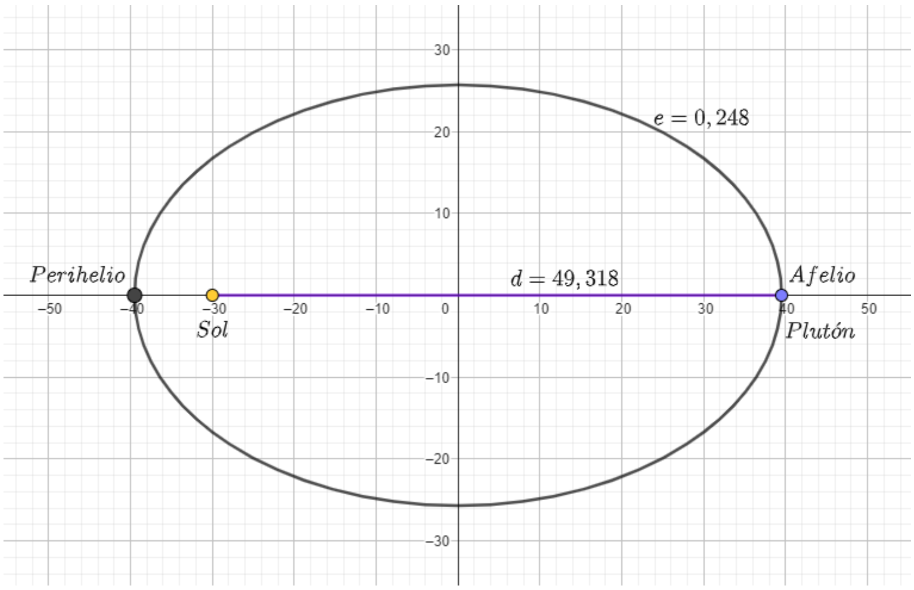


Figura 4.35: Se observa la distancia desde el Sol hacia el punto más alejado donde se encontraría Plutón, es decir en el Afelio. La cual es $d = 49{,}318$.

Se resolvió que la longitud del semieje menor es $b = 38{,}249$ de la órbita de Plutón. De la misma manera, se obtuvo la longitud del eje mayor $2a = 78{,}964$, donde finalmente se determinó que la distancia desde el Sol hacia el punto más alejado donde se encontraría Plutón es $d = 49{,}318\ UA$.

Problema 4.2.9: Lugares importantes de una galería murmurante

Una galería murmurante se diseña utilizando un techo elíptico; opera con base en el principio de que el sonido que se proyecta desde un foco de la elipse se refleja en el techo y regresa al otro foco. El capitolio de Estados Unidos contiene una sala elíptica de este tipo, la cual mide 96 pies de largo, 46 pies de ancho, y su techo se encuentra a casi 23 pies de altura. Se sabe que John Quincy Adams alcanzaba a oír conversaciones sostenidas en la parte opuesta del atril del director al permanecer parado en cierto punto en esta sala. Describe la ecuación que representa la sala, los dos lugares posibles en que Adams podría haber permanecido para oír y cuál era la distancia aproximada que se encontraba Adams del atril.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

Lo que se desea determinar es los dos lugares posibles donde John Quincy Adams debía estar para poder escuchar las conversaciones. Pues así, el problema nos da la siguiente información:

- La sala elíptica mide 96 pies de largo.
- La sala elíptica mide 46 pies de ancho.
- El techo de la sala elíptica mide 23 pies de altura.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Se describen las otras herramientas metemáticas que ayudarán a resolver el problema:

- La ecuación de la elipse con centro en el origen y eje focal en el eje x es $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
- b describe el semieje menor de la elipse.
- a describe el semieje mayor de la elipse.
- $2a$ describe el eje mayor de la elipse.
- $2c$ describe la distancia entre los dos puntos focales.
- Los puntos focales de la elipse se definen como $(-c, 0)$ y $(c, 0)$.
- La fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ determina la longitud focal de la elipse.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

Se sabe la sala elíptica mide 96 pies de largo, es decir que el eje mayor de la elipse es $2a = 96$. Por lo que se tiene,

$$\begin{aligned} 2a &= 96 \\ a &= \frac{96}{2} \\ a &= 48. \end{aligned}$$

Luego, como la altura hacia el techo de sala mide 23 pies, quiere decir que el semieje menor es $b = 23$. De esta manera, se reemplaza los valores de a y b en la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Donde se obtiene que,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{(48)^2} + \frac{y^2}{(23)^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{2304} + \frac{y^2}{529} &= 1. \end{aligned}$$

Ahora tomamos la fórmula $c^2 = a^2 - b^2$ y reemplazamos los valores ya conocidos,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 - b^2 \\ c^2 &= (46)^2 - (23)^2 \\ c^2 &= 2304 - 529 \\ c^2 &= 1775 \\ c &= \sqrt{1775} \\ c &= 42{,}13. \end{aligned}$$

Debido a las indicaciones del problema, sabemos que la elipse que forma la sala se encuentra en el origen del plano cartesiano, por lo que los puntos focales son $F_1 = (-42{,}13; 0)$ y $F_2 = (42{,}13; 0)$. Además, la distancia entre los dos puntos focales es $2c = 84{,}26$.

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

Se utiliza el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

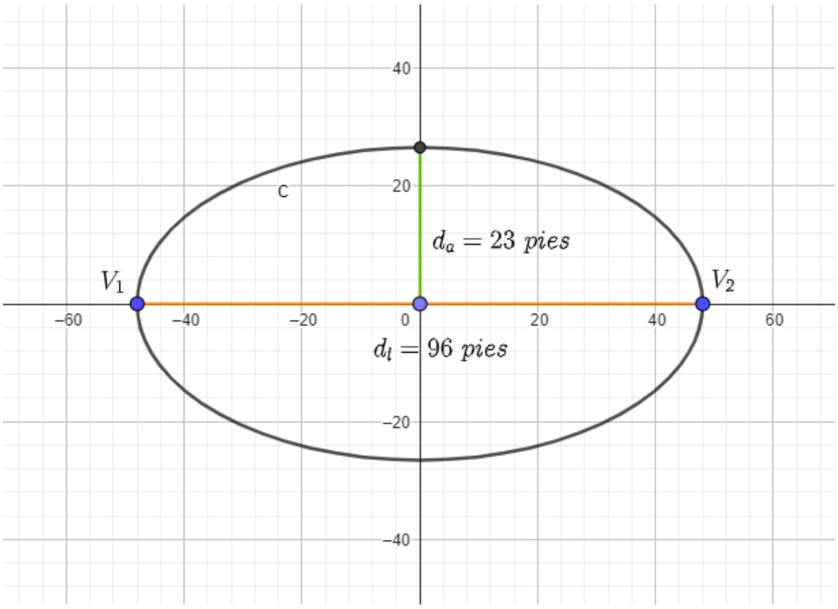


Figura 4.36: Se observa que la sala elíptica posiblemente tendría la forma que se muestra en la figura. Además, que la longitud de 96 pies y la altura de 23 pies desde el piso al techo de la sala elípticala.

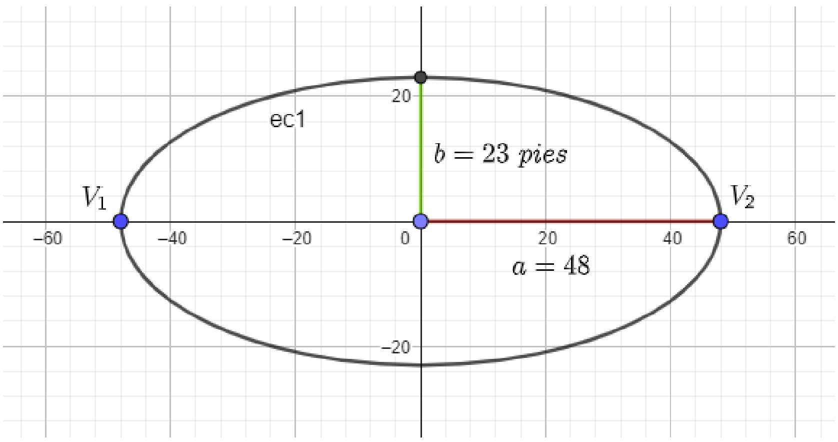


Figura 4.37: Se observa que el semieje mayor a de la sala elíptica es de 48 pies y el semieje menor b es de 23 pies.

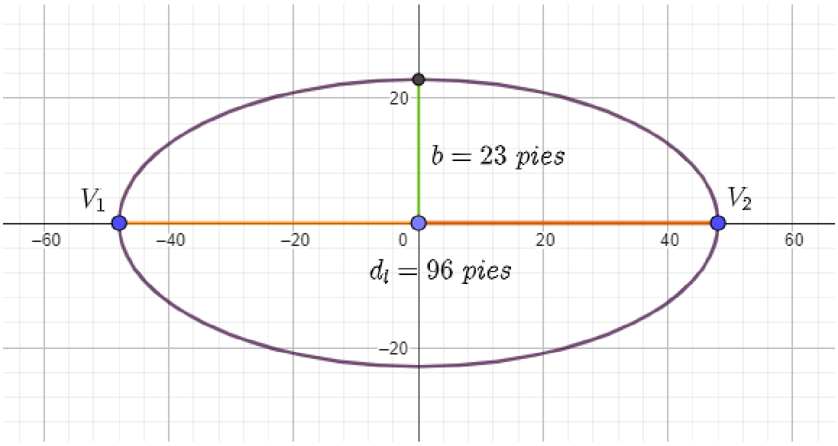


Figura 4.38: Se observa la forma real de la sala elíptica, es decir, que la ecuación que forma esta elipse es $\dfrac{x^2}{2304} + \dfrac{y^2}{529} = 1$.

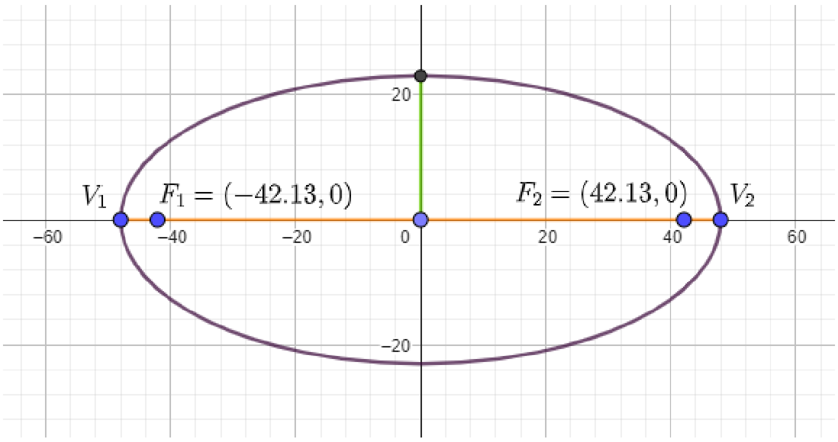


Figura 4.39: Se observa los focos F_1 Y F_2 de la elipse, en otras palabras, los dos puntos importantes de la sala elíptica.

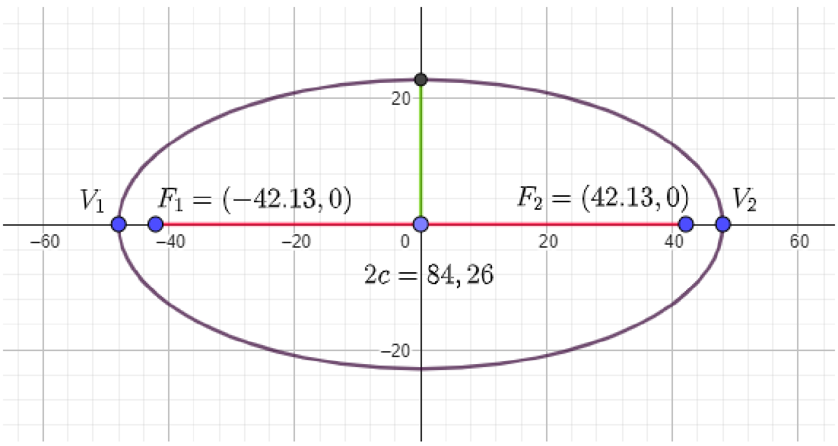


Figura 4.40: Se observa la distancia desde el foco 1 F_1 hacia el foco 2 F_2, la cual es $2c$, donde representa a la distancia que se debe encontrar John del atril.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

Primero, se determinó que el semieje mayor a mide 48 pies. Es decir, que la distancia desde el centro hacia el final de la sala mide 46 pies de largo. Tomando este dato y que b representa la altura hacia el techo de la sala, se obtuvo que $\frac{x^2}{2304} + \frac{y^2}{529} = 1$ es la ecuación que representa la forma de sala elíptica, sabiendo que el centro de sala elíptica se posiciona en el origen del plano cartesiano. Luego, se encontró los puntos focales de la elipse $F_1 = (-42{,}13; 0)$ y $F_2 = (42{,}13; 0)$, los cuales representa los dos lugares donde podía colocar John Quincy Adams para poder oír las conversaciones. Finalmente, se obtuvo el valor de la distancia entre los dos puntos focales $2c$, lo que representa que John Quency Adams se encontraba aproximadamente a 84,26 pies del atril.

4.2.4. Problemas contextualizados de la hipérbola

Problema 4.2.10: Localización exacta de un barco

Desde la Segundo Guerra Mundial, los barcos han usado el sistema LORAN (acrónimo de LOng RAnge Navigation) como un medio de navegación independiente de las condiciones de visibilidad. Dos estaciones, ubicadas a gran distancia, transmiten de manera simultánea ondas de radio a barcos en el mar. Puesto que un barco suele encontrarse más cerca de una estación que de la otra, recibe estas ondas en tiempos un poco diferentes. Al medi la diferencia de tiempo y al conocer la velocidad de las ondas de radio, es posible localizar un barco sobre una cónica cuyos focos son las posiciones de las dos estaciones. Supón que las estaciones LORAN A y B se ubican a 400 millas de distancia a lo largo de una costa recta, con A en dirección oeste respecto de B. Un barco que se aproxima a la costa recibe ondas de radio de las estaciones y es capaz de determinar que se encuentra 100 millas más alejado de la estación A que de la estación B. Determine la ecuación de la hipérbola sobre la que se localiza el barco y las coordenas exactas del barco si éste se encuentra a 60 millas de la costa.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

Principalmente se desea encontrar una ecuación que describa la localización del barco. Por lo que el problema nos brinda la siguiente información:

- Las dos estaciones LORAN A y B se encuentran a 400 millas.
- La estación A se encuentra en dirección oeste respecto de B.
- El barco se encuentra 100 millas más lejos de la estación A que de la B.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Se describen las otras herramientas metemáticas que ayudarán a resolver el problema:

- Se define la hipérbola como sigue $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.
- $2a$ define a la distancia entre los vértices V_1 y V_2 de la hipérbola.
- a define la distancia desde el centro de la hipérbola hacian uno de sus vértices.
- $2c$ define la distancia entre el foco 1 F_1 y el foco 2 F_2.

- La fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ determina una relación entre los elementos a, b y c de la hipérbola.

- La ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal al eje x es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

Debido a que el barco se encuentra 100 millas más alejado de la estación A que de la estación de la B, por lo que la diferencia de las distancias desde el barco hasta cada estación es 100 millas. De este modo, podemos tomar la definición de la hipérbola, donde F_1 es la estación A y F_2 es la estación B, y P representa el barco, es así que,

$$\begin{aligned} |d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= 2a \\ 100 &= 2a \\ a &= \frac{100}{2} \\ a &= 50. \end{aligned}$$

De este modo, los vértices de la hipérbola son $V_1 = (-50, 0)$ y $V_2 = (50, 0)$. Además, como el foco 1 F_1 es la estación A y foco 2 F_2 es la estación B, entonces la distancia entre las dos estaciones es $2c = 400$, lo que se tiene,

$$\begin{aligned} 2c &= 400 \\ c &= \frac{400}{2} \\ c &= 200. \end{aligned}$$

Por lo tanto, se obtiene que $F_1 = (-200, 0)$ y $F_2 = (200, 0)$. Asimismo, se conoce que $c^2 = a^2 + b^2$, donde reemplazamos los valores de a y c para así obtener el valor de b,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ b^2 &= c^2 - a^2 \\ b^2 &= (200)^2 - (50)^2 \\ b^2 &= 40000 - 2500 \\ b^2 &= 37500 \\ b &= \sqrt{37500} \\ b &= 193{,}64. \end{aligned}$$

Como el eje focal o transversal es el eje x, se define la ecuación de la hipérbola como $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, entonces,

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1\\
\frac{x^2}{(50)^2} - \frac{y^2}{37500} &= 1\\
\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{37500} &= 1.
\end{aligned}
$$

Por lo que, la ecuación de la hipérbola es $\dfrac{x^2}{2500} - \dfrac{y^2}{37500} = 1$.

Dado que la ecuación de la hipérbola que se encontró, se sabe que está definida en el origen del plano cartesiano por lo que, si el barco se encuentra a 60 millas de la costa, quiere decir que el barco se encuentra dentro de la recta $y = 60$. Pues teniendo este dato, reemplazamos en la ecuación antes encontrada,

$$
\begin{aligned}
\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{37500} &= 1\\
\frac{x^2}{2500} - \frac{(60)^2}{37500} &= 1\\
\frac{x^2}{2500} - \frac{3600}{37500} &= 1\\
\frac{x^2}{2500} &= \frac{y^2}{37500} + 1\\
\frac{x^2}{2500} &= 1{,}096\\
x^2 &= (1{,}096)(2500)\\
x^2 &= 2740\\
x &= \sqrt{2740}\\
x &= \pm 52{,}34.
\end{aligned}
$$

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

Se utiliza el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

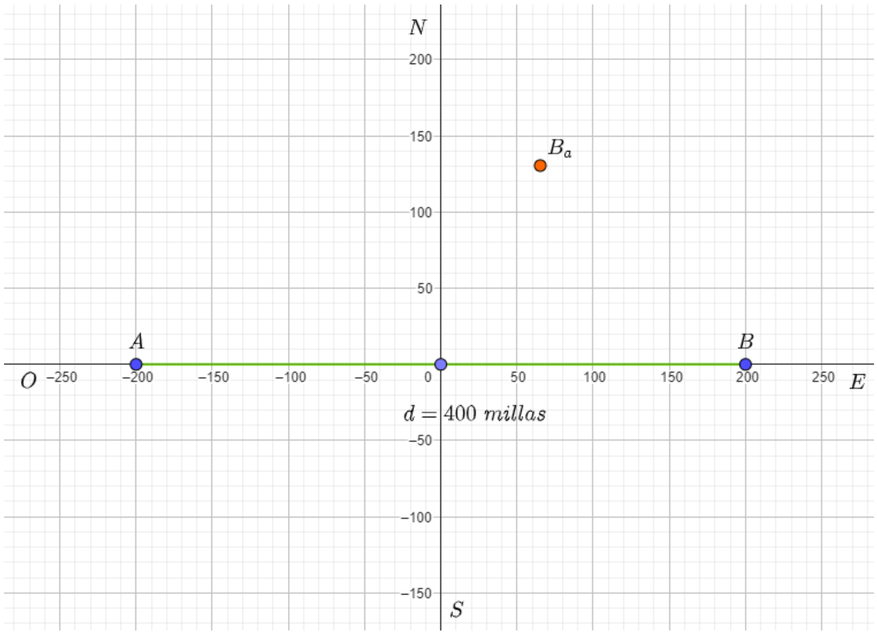


Figura 4.41: Se observa la distancia entre las estaciones LORAN A y B que es de 400 pies, donde la ubicación de las estaciones son consideradas como focos de una hipérbola. Además, de que el barco se ubica 100 millas más alejado que de la estación B.

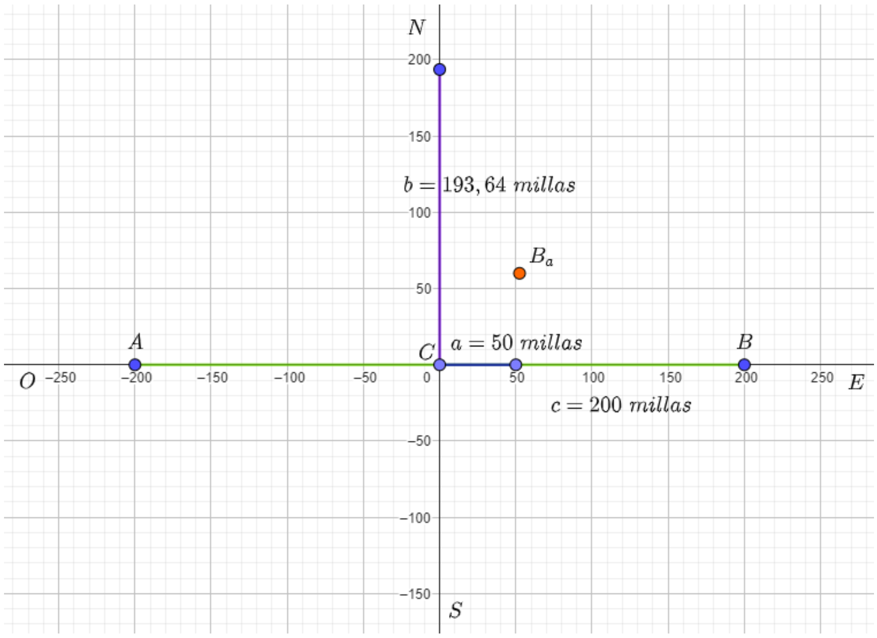


Figura 4.42: Se observa que la distancia desde el centro hacia una de las estaciones se considera como $c = 200$. De igual manera, para la distancia $a = 50$, donde se encontraría uno de los vértices de la hipérbola. Luego, con estos datos se obtuvo $b = 193{,}64$.

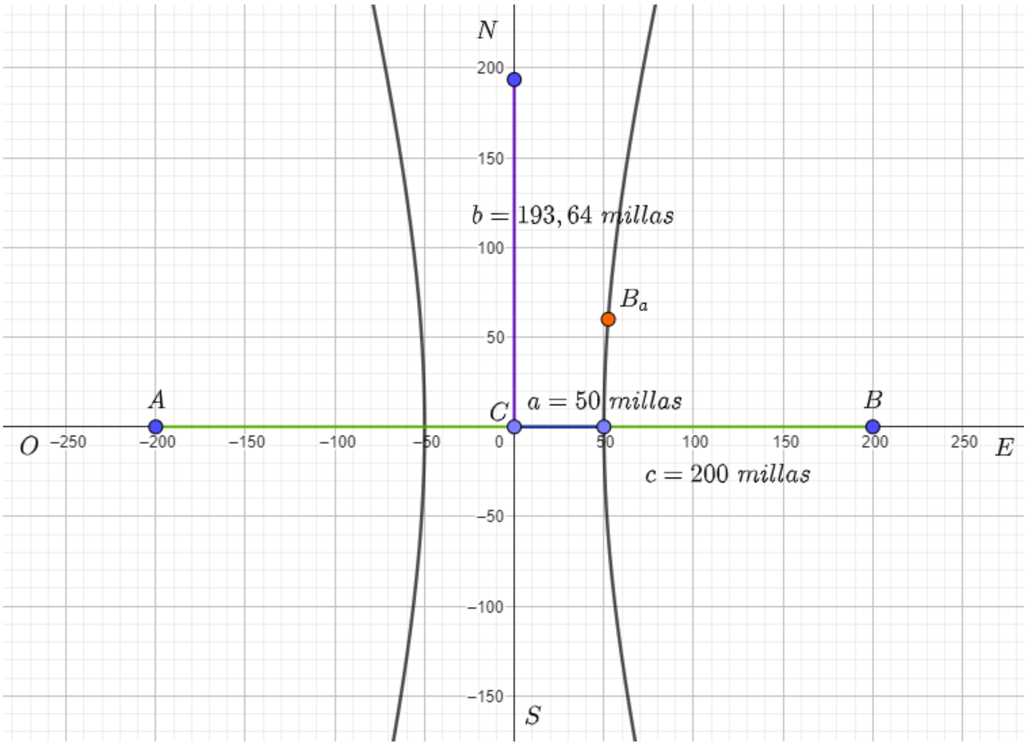


Figura 4.43: Se observa la gráfica de la hipérbola $\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{37500} = 1$ por donde se localizaría el barco con respecto a los datos encontrados.

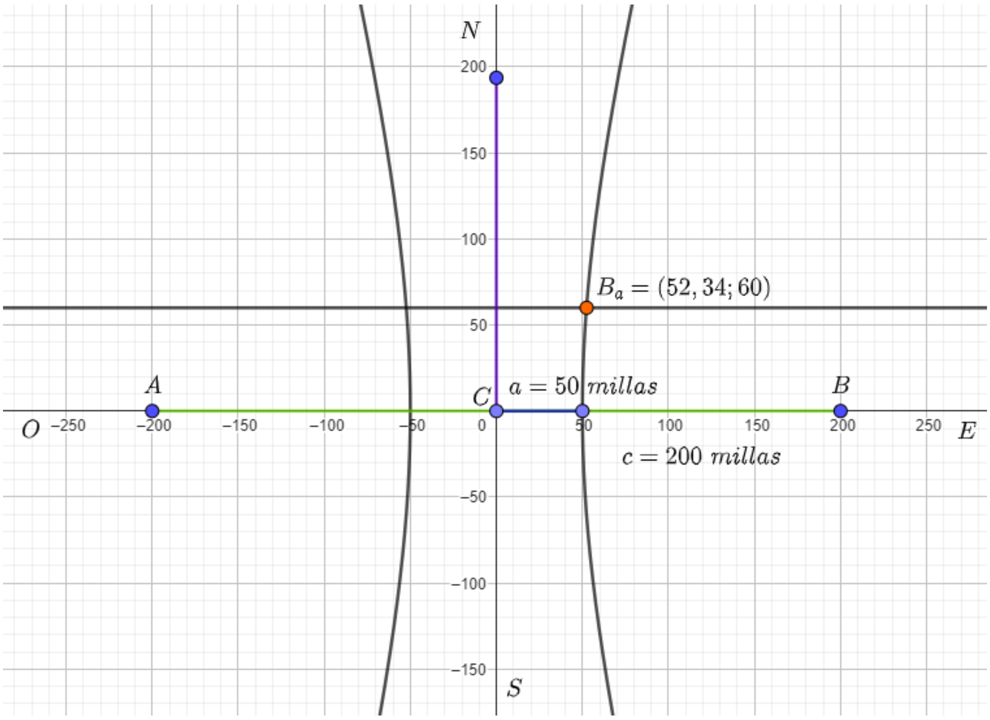


Figura 4.44: Se observa las coordenadas exactas del barco si este se encuentra a 60 millas de la costa, la cual es $(52{,}34, 60)$.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

En primer instancia, se determinó los valores de $a = 50$, $b = 193$ y $c = 200$, donde se pudo obtener la ecuación que determina la localizacón del barco, es decir, la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{2500} - \frac{y^2}{37500} = 1$. Luego, se sabe que el barco se encuentra a 60 millas de la costa, además se encuentra más alejado de la estación A que de la estación B. Es decir, el barco se encuentra dentro del lado positivo del eje x, por lo que tomamos el valor positivo de $x = 52{,}34$. De esta manera, las coordenadas exactas donde se encuentra el barco es $(52{,}34; 60)$.

Problema 4.2.11: Medidas de una torre de enfriamiento nuclear

Una torre de enfriamiento nuclear es un hiperboloide, es decir, una hipérbola girada sobre su eje conjugado. Supón que la hipérbola utilizada para generar el hiperboloide que representó la forma de la torre de enfriamiento tiene una excentricidad de $\frac{5}{3}$. Si la torre de enfiramiento mide 150 pies de ancho en su zona más estrecha, determina una ecuación de la hipérbola utilizada para generar el hiperboloide. Si la torre mide 450 pies de altura, la parte superior está a 100 pies sobre el centro de la hipérbola y la base se ubica a 350 pies abajo del centro, ¿cuál es el radio de la parte superior de la base de torre?.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

En primer instancia, se desea encontrar la ecuación que describa para generar la torre de enfriamiento nuclear y el radio de la parte superior de la base de torre. Tal que la información que se tiene es:

- La hipérbole que genera el hiperboloide de la torre de enfriamiento tiene una excentrticidad de $\frac{5}{3}$.
- El ancho de la torre es de 150 pies en la parte más angosta.
- La altura de la torre es de 450 pies.
- La altura de la torre desde el centro hacia la parte superior de esta es 100 pies.
- La altura de la torre desde el centro hacia la parte inferior de esta es 350 pies.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Se describen las otras herramientas metemáticas que ayudarán a resolver el problema:

- La ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal al eje x es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
- $2a$ define a la distancia entre los vértices V_1 y V_2 de la hipérbola.
- a define la distancia desde el centro de la hipérbola hacia uno de sus vértices.
- $2c$ define la distancia entre el foco F_1 y el foco F_2.
- c define la distancia desde el centro de la hipérbola hacia uno de sus vértices.

- La fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ determina una relación entre los elementos a, b y c de la hipérbola.
- Se define la excentricidad de la hipérbola como $e = \frac{c}{a}$.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

La hipérbola que se utiliza para generar el hiperboloide de la torre tiene una excentricidad de $e = \frac{5}{3}$. Además, se sabe que la excentricidad se define como $e = \frac{c}{a}$, donde se obtiene lo siguiente,

$$\begin{aligned} e &= \frac{5}{3} \\ \frac{c}{a} &= \frac{5}{3} \\ c &= \frac{5}{3}a. \end{aligned}$$

Luego, sabemos que la parte más angosta de la torre de enfriamiento mide 150 pies, es decir que la distancia entre el vértice V_1 y vértice V_2 , dada como $2a = 150$. Por lo que se tiene,

$$\begin{aligned} 2a &= 150 \\ a &= \frac{150}{2} \\ a &= 75. \end{aligned}$$

Reemplazamos el valor de a, como sigue,

$$\begin{aligned} c &= \frac{5}{3}a \\ c &= \frac{5}{3}(75) \\ c &= 125. \end{aligned}$$

Ahora, con los valores a y b encontrados reemplazaremos en la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ para determinar el valor de b^2,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ b^2 &= c^2 - a^2 \\ b^2 &= (125)^2 - (75)^2 \\ b^2 &= 15625 - 5625 \end{aligned}$$

$$b^2 = 10000.$$

Entonces reemplazamos en la ecuación de la hipérbola antes dada,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1\\ \frac{x^2}{(75)^2} - \frac{y^2}{10000} &= 1\\ \frac{x^2}{5625} - \frac{y^2}{10000} &= 1.\end{aligned}$$

Luego, tenemos que la altura de la torre desde el centro hacia la parte superior de esta es de 100 pies, es decir que la parte superior se encuentra dentro de la recta $y = 100$. De esta manera, podemos encontrar los puntos que intersecan con la ecuación de la hipérbola, es decir, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones,

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{5625} - \dfrac{y^2}{10000} = 1 \\ \qquad\qquad y = 100 \end{cases}$$

Donde, se reemplaza y en la ecuación de la hipérbola,

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{5625} - \frac{y^2}{10000} &= 1\\ \frac{x^2}{5625} - \frac{(100)^2}{10000} &= 1\\ \frac{x^2}{5625} - \frac{10000}{10000} &= 1\\ \frac{x^2}{5625} - 1 &= 1\\ \frac{x^2}{5625} &= 2\\ x^2 &= (2)(5625)\\ x^2 &= 11250\\ x^2 &= \sqrt{11250}\\ x &= \pm 106{,}066.\end{aligned}$$

Es decir, que los puntos por donde intersecan $y = 100$ con hipérbola es $P_1(-106{,}066; 100)$ y $P_2(106{,}066;\ 100)$. Observando desde la parte superior, se deduce que se forma una circunferencia con centro en el origen del plano, Por lo que se puede deducir que que el radio de la parte superior de la torre de enfriamiento es $r = 106{,}66$, donde se obtiene la siguiente ecuación,

$$
\begin{aligned}
x^2 + y^2 &= r^2 \\
x^2 + y^2 &= (106{,}066)^2 \\
x^2 + y^2 &= 11249{,}99.
\end{aligned}
$$

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

Se utiliza el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

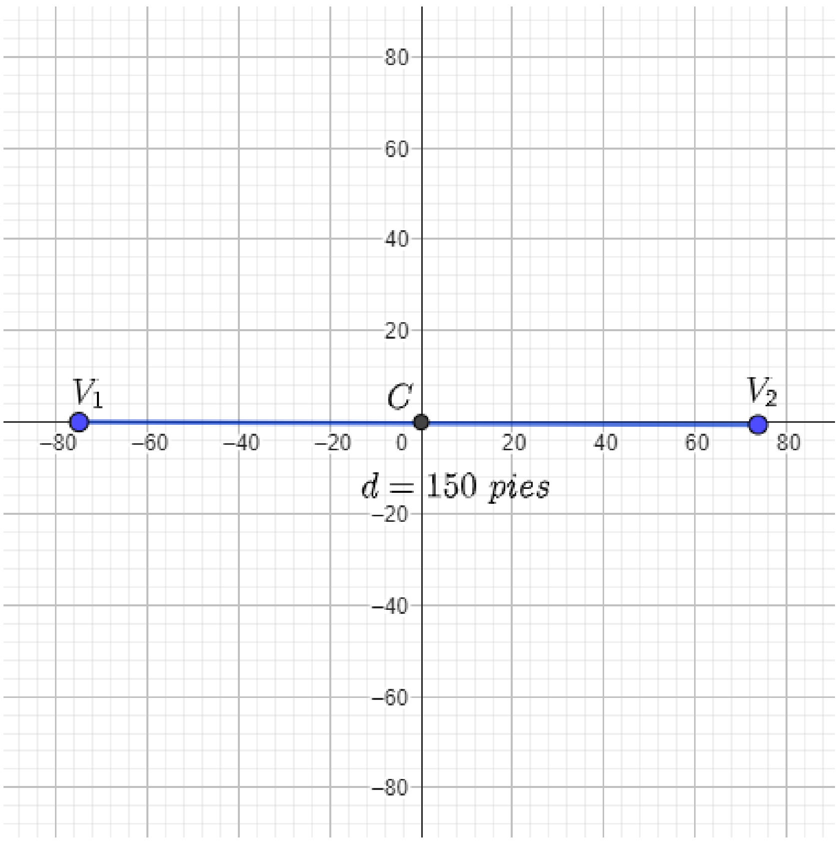


Figura 4.45: Se observa el ancho más angosto de la torre, donde se encuentra los vértices V_1 y V_2 de la hipérbola.

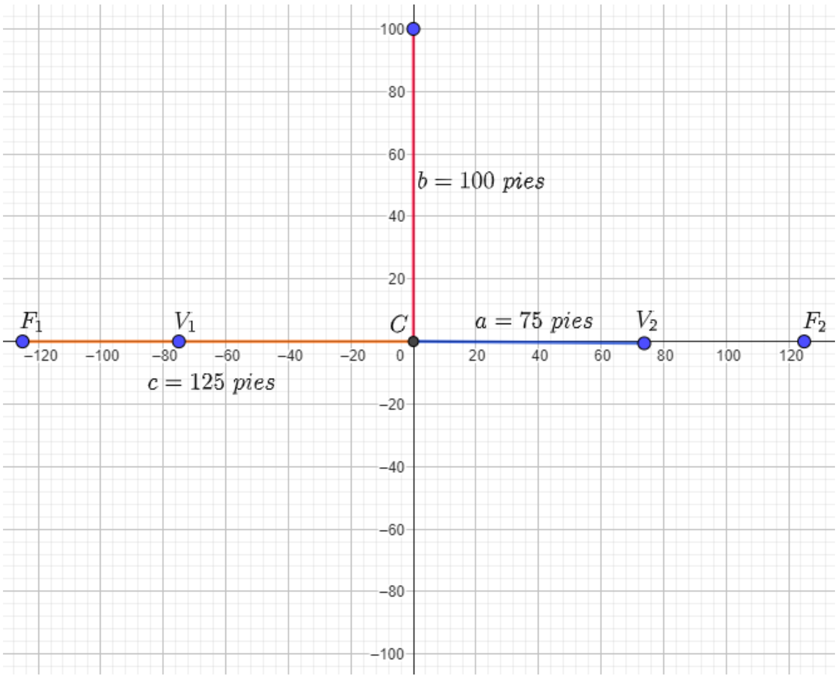


Figura 4.46: Se observa que la distancia desde el centro hacia uno de los focos es $c = 125$. De igual manera, para la distancia $a = 75$, donde se encontraría uno de los vértices de la hipérbola. Luego, con estos datos se obtuvo $b = 100$.

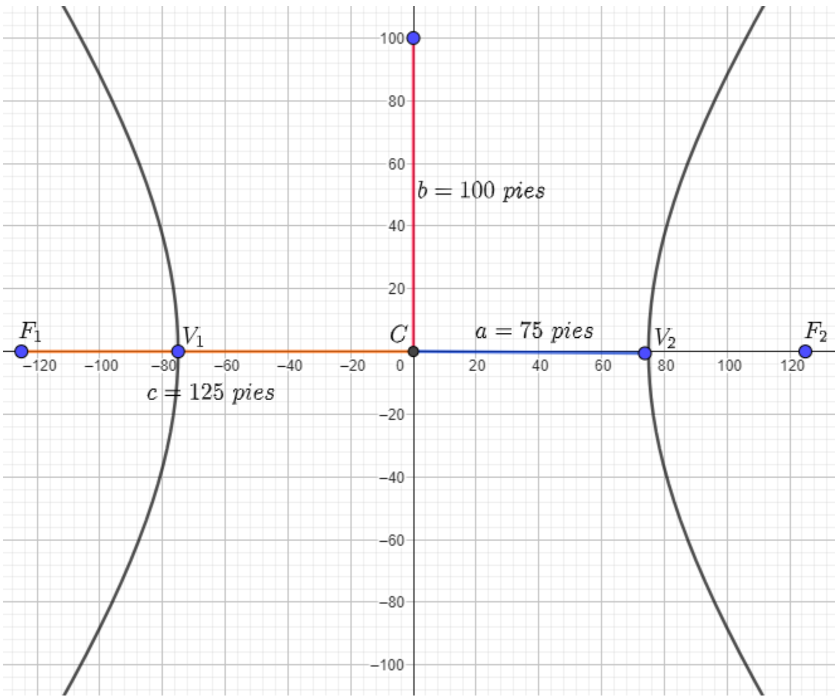


Figura 4.47: Se observa la hipérbola que genera el hiperboloide de la torre de enfriamiento, donde la ecuación es $\dfrac{x^2}{5625} - \dfrac{y^2}{10000} = 1$.

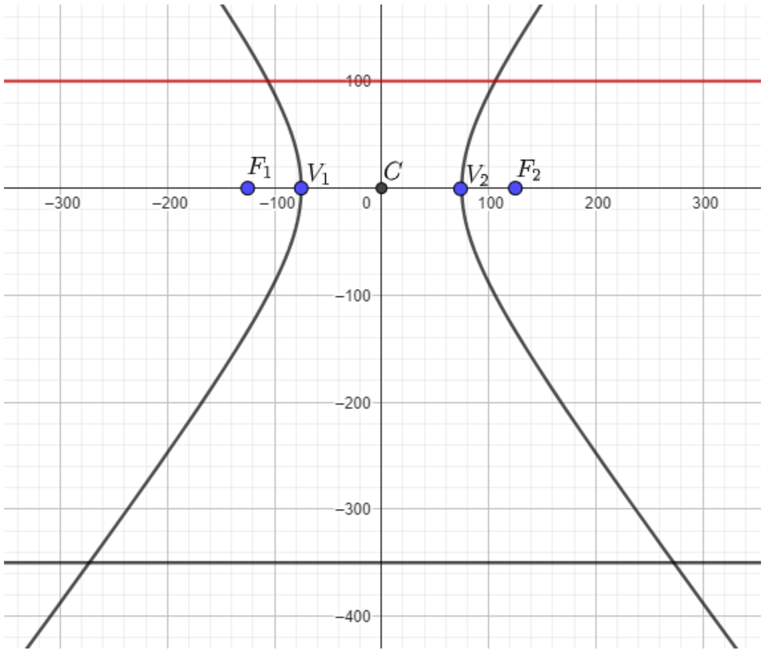


Figura 4.48: Se observa la altura de la torre, donde el centro de esta se ubica en el origen del plano cartesiano. Además, la parte superior se ecuentra a 100 pies del centro, lo cual se representa como $y = 100$, y la base está a 350 pies del centro, es decir, $y = -350$.

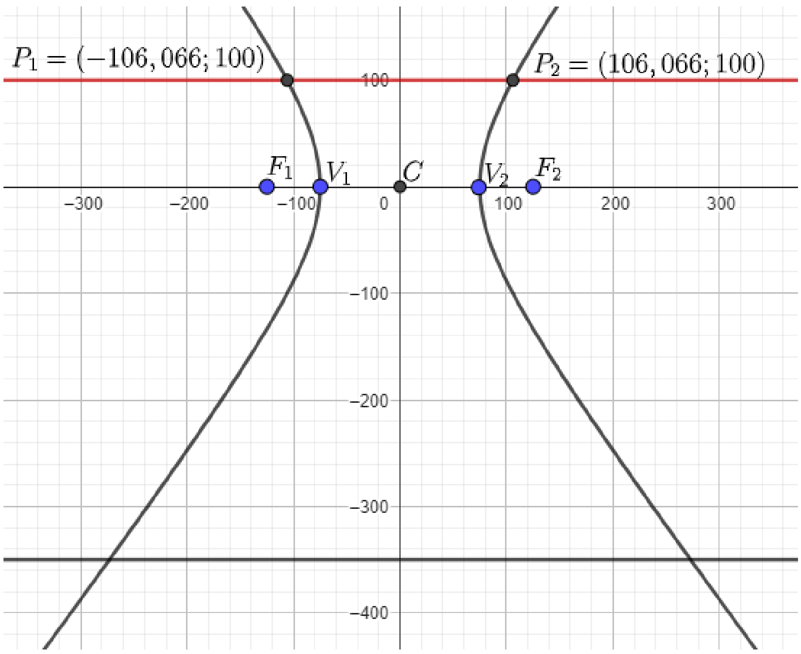


Figura 4.49: Se observa que $y = 100$ interseca con la ecuación de la hipérbola, por lo que se obtiene los siguientes puntos $P_1 = (-106{,}066; 100)$ y $P_2 = (106{,}066; 100)$.

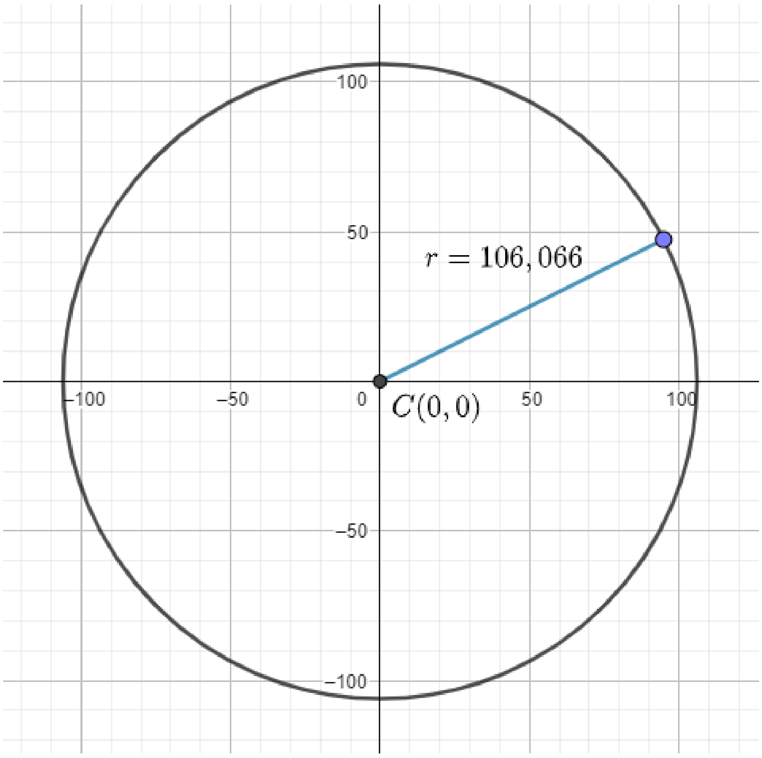


Figura 4.50: Se observa la circunferencia que se forma al observar desde la parte superior al hiperboloide o a la torre de enfriamiento. De este modo, la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = 11249{,}99$ con centro $C(0,0)$ y radio $r = 106{,}066$.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

Se obtuvo la ecuación de la heipérbola que genera el hiperboloide de la torre de enfriamiento, la cual es $\dfrac{x^2}{5625} - \dfrac{y^2}{10000} = 1$, donde se tomó como centro de la hipérbola al origen del plano cartesiano. Luego, se determinó que el radio de la parte superior de la torre de enfriamiento es $r = 106{,}066$, esto debido a que, si se observa al hiperboloide desde la parte superior, se vería una circunferencia. Es decir, que encontramos el radio de la circunferencia que se forma en la parte superior de la torre.

Problema 4.2.12: Posible localización de un rayo

En dos estaciones de guardabosques ubicadas a 4 millas de distancia una de otra se observa un rayo. Un guardabosques en la estación A informa que escuchó el sonido del relámpago dos segundps antes que el guardabosques en la estación B. Si el sonido viaja a 1100 pies por segundo, determina la ecuación de la hipérbola sobre la cual se ubica el rayo. Sitúa las dos estaciones de los guardabosques sobre el eje x con el punto medio entre ellas en el origen. El eje transversal es horizontal.

Fase 1

Lectura y comprensión del problema.

En primer lugar, se desea determinar la ecuación donde se encuentra el rayo. De este modo, el problema nos da la siguiente información:

- Las dos estaciones de guardabosques están a una distancia de 4 millas.
- La estación A escucha el sonido del relámpago 2 segundos antes que la estación B.

Fase 2

Indagación de herramientas matemáticas para la solución.

Se describen las otras herramientas metemáticas que ayudarán a resolver el problema:

- Se define la hipérbola como sigue $|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$.
- La ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje focal al eje x es $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.
- $2a$ define a la distancia entre los vértices V_1 y V_2 de la hipérbola.
- a define la distancia desde el centro de la hipérbola hacia uno de sus vértices.
- $2c$ define la distancia entre el foco F_1 y el foco F_2.
- c define la distancia desde el centro de la hipérbola hacia uno de sus vértices.
- La fórmula $c^2 = a^2 + b^2$ determina una relación entre los elementos a, b y c de la hipérbola.

Fase 3

Aplicación de herramientas matemáticas para resolver el problema.

Se conoce que las dos estaciones se encuentran a una distancia de 4 millas, es decir, que las dos estaciones son los focos de la hiperbola. Por lo que la distancia entre ellas es $2c = 4$, así se tiene que,

$$\begin{aligned} 2c &= 4 \\ c &= \frac{4}{2} \\ c &= 2. \end{aligned}$$

Luego, se sabe que la estación A escucha el sonido del relámpago 2 segundos antes que la estación B. Es decir que la diferencia en el momento que escuchan cada estación se lo puede representar como la definición de la hipérbola, donde P representaría donde se encuentra el rayo,

$$\begin{aligned} |d(P, F_1) - d(P, F_2)| &= 2a \\ 2 &= 2a \\ a &= \frac{2}{2} \\ a &= 1. \end{aligned}$$

Ahora, tomamos los datos obtenidos y reemplazamos en la fórmula $c^2 = a^2 + b^2$, para encontrar el valor de b^2,

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 \\ b^2 &= c^2 - a^2 \\ b^2 &= (2)^2 - (1)^2 \\ b^2 &= 4 - 1 \\ b^2 &= 3. \end{aligned}$$

Así, reemplazamos los valores de a y b en la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$,

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} &= 1 \\ \frac{x^2}{(1)^2} - \frac{y^2}{3} &= 1 \\ \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} &= 1 \end{aligned}$$

$$x^2 - \frac{y^2}{3} = 1.$$

Fase 4

Examinación del resultado obtenido.

En esta fase, se revisa detalladamente el procedimiento realizado.

Fase 5

Uso de herramientas tecnológicas para la verificación de resultados.

Se utiliza el *software* matemático GeoGebra para verificar los resultados.

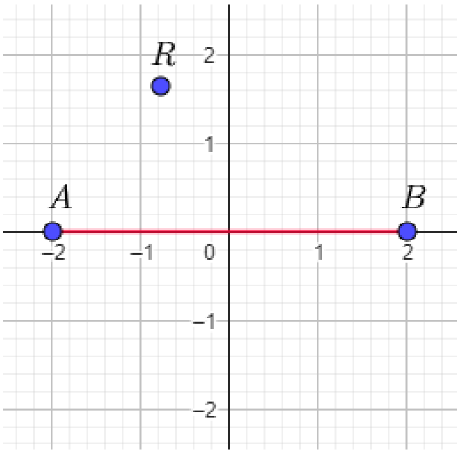


Figura 4.51: Se observa la distancia entre las estaciones A y B que es de 4 millas, donde la ubicación de las estaciones son consideradas como focos de una hipérbola. Además, de que el rayo se puede ubicar cerca de la estación A, ya que se escuchó el relámpago dos segundo antes que de la estación B.

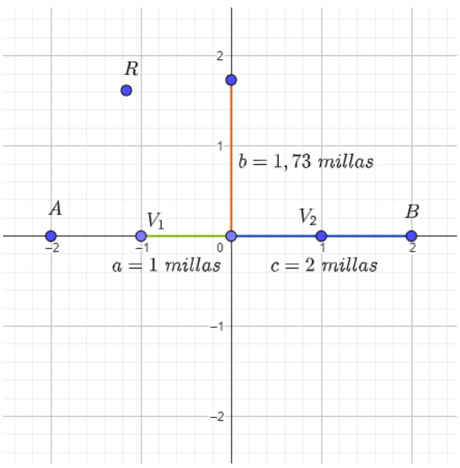


Figura 4.52: Se observa que la distancia desde el centro hacia uno de los focos es $c = 2$. De igual manera, para la distancia $a = 1$, donde se encontraría uno de los vértices de la hipérbola. Luego, con estos datos se obtuvo $b = 1{,}73$.

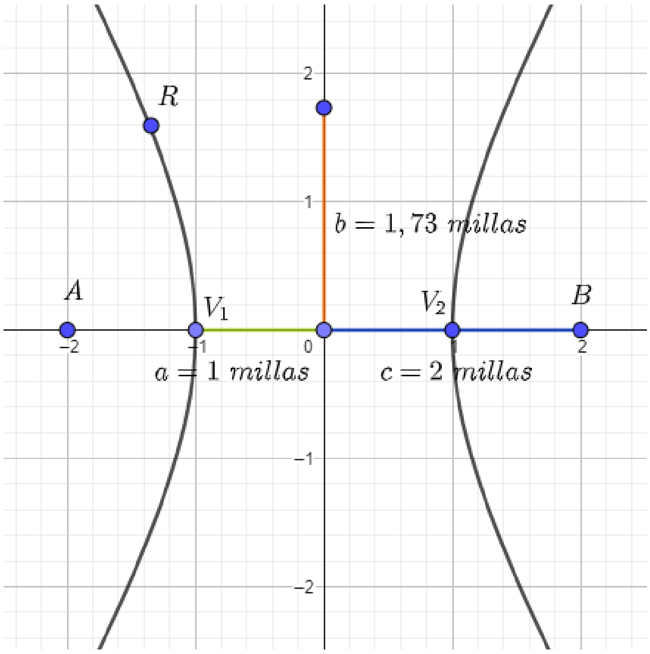


Figura 4.53: Se observa la hipérbola donde se ubicaría el rayo, la cual está descrita por la ecuación $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Fase 6

Conclusión de la solución del problema.

Debido a que las dos estaciones se ubicaron en el eje x y el eje transversal es horizontal, se determinó que la ecuación de la hipérbola donde se podría localizar el rayo es $x^2 - \dfrac{y^2}{3} = 1$.

Bibliografía

AIN, S; et al. "A Review of Technological Tools in Teaching and Learning Computer Science". *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education* [en línea], 2019, 15(11), pp. 1-17. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1305-8223. Disponible en: https://doi.org/10.29333/ejmste/109611

ALLEN, S.; & GTRADEN, J. *Best practices in collaborative problem solving for intervention design. In A. Thomas, & J. Grimes (Eds.), Best practices in school psychology IV*. Washington, DC-USA: National Association of School Psychologists, 2002, pp. 565–582.

ARAY, C.; et al. "La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí". *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)* [en línea], 2019, 4(1), pp. 23-36. [Consulta: 17 febrero 2023]. ISSN 2550-6587. Disponible en: https://doi.org/10.33936/rehuso.v4i1.1622

ARTEAGA, E.; et al. "El Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática". . *Revista Conrado* [en línea], 2019, (Cuba), 15(70), pp. 102-108. [Consulta: 17 febrero 2023]. ISSN 1990-8644. Disponible en: http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado

BAELO, R.; & CANTÓN, I. "Las tecnologías de la información y la comunicación en la educación superior". *Comunicar* [en línea], 2009, (España), 35, pp. 1-12. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1988-3293. Disponible en: http://10.0.15.76/C35-2010-03-09

BENÍTEZ, R.; & ZALDIVAR, F. *Geometría Analítica Plana*. 1^a ed. México: Trillas, 2011.

BIZAMI, N.A; et al. "Innovative pedagogical principles and technological tools capabilities for immersive blended learning: a systematic literature review". *Education and Information Technologies* [en línea], 2023, (Suiza), 28(2), pp. 1373–1425. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1573-7608. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s10639-022-11243-w

BRANSFORD, J,; & STEIN, Barry. *Solución ideal de problemas: guía para mejor pensar, aprender y crear.*. 1^a ed. España: Labor, 1986.

CAI, L.; & LESTER, F. "Why is teaching with problem solving important to student learning". *National Council of Teachers of Mathematics.* [en línea], 2010, (USA), 13(2), pp. 1-6. [Consulta: 15 febrero 2023]. Disponible en: https://inquiringmindsinbermuda.files.wordpress.com/2016/09/why-is-teaching-with-problem-solving-important.pdf

CAMARGO, L.; & ACOSTA, M. "La Geometría, su enseñanza y su aprendizaje". *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, n° 32 (2012), (Colombia) p. 4-8.

COCKCROFT, W. "Techniques of problem solving". *The Mathematical Gazette* [en línea], 1999, (USA), 83(496), pp. 156-157. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 0 8218 0619 X . Disponible en: 10.2307/3618723

DAHER, W; et al. "Elementary Teachers' Development in Using Technological Tools to Engage Students in Online Learning". *European Journal of Educational Research* [en línea], 2022, (USA), 11(2), pp. 1183-1195. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2165-8714. Disponible en: https://doi.org/10.12973/eujer.11.2.1183

DAROS, W. "¿Qué es un marco teórico?". *Enfoques* [en línea], 2002, (México), 14(1), pp. 73-112. [Consulta: 06 abril 2023]. ISSN 1514-6006. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=25914108

FAROOQ, R. A Comparative study of effectiveness of Problem Solving Approach and Traditional Approach of Teaching Social Studies to Secondary Schools Learners (Trabajo de titulación) (doctoral). University of Punjab Lahore, Pakistan. 1980. pp. 14-19.

FERNÁNDEZ, E. "La Geometría para la vida y su enseñanza". *Aibi revista de investigación, administración e ingeniería* [en línea], 2018, (Colombia), 6(1), pp. 33-61. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2346-030x. Disponible en: https://doi.org/10.15649/2346030X.475

FULLER, G.; & TARWATER, D. *Geometría Analítica*. 7^a ed. México: Addison-Wesley Iberoamericana México, 1998, p. 1

GARCÍA, M; et al. "Las Tic en la educación superior, innovaciones y retos / The ICT in higher education, innovations and challenges". *RICSH Revista Iberoamericana De Las Ciencias Sociales Y Humanísticas* [en línea], 2018, 6(12), pp. 299-316. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2395-7972. Disponible en: https://doi.org/10.23913/ricsh.v6i12.135

GONZÁLEZ, T. "Metodología para la enseñanza de las matemáticas a través de la resolución de problemas: un estudio evaluativo". *Revista de Investigación educativa* [en línea], 2000, (España), 18(1), pp. 175-199. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 0212-4068. Disponible en: https://revistas.um.es/rie/article/view/121541

GROS, B. "Del software educativo a educar con software". *Revista Quaderns Digital* [en línea], 2000, (España), 24(1), pp. 440-482. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1575-9393. Disponible en: http://www.quadernsdigitals.net/articuloquaderns.asp?IdArticle=3743

GUERREO, G. *Metodología de la investigación.*. 1^a ed. México: Grupo Editorial Patria, 2014.

GUZMÁN, M. *Para pensar mejor: Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. 2^a ed. España-Madrid: Pirámide, 2006.

HIEBERT, J; et al. *Making sense: Teaching and learning mathematics with understanding*. 1^a ed. Inglaterra: Heinemann, 2007.

HOLLIDAY, B.; et al. *Geometría Analítica con trigonometría*. 1^a ed. México: McGraw-Hill, 2002.

ILLUNO, C; et al. "Exploratory Analysis of Problem Solving Based Learning for Mathematics Skills Acquisition in Tertiary Institutions". *IOSR Journal of Mathematics* [en línea], 2021, 17(2), pp. 28-36. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2319-765X. Disponible en: https://www.iosrjournals.org/iosr-jm/papers/Vol17-issue2/Series-4/E1702042836.pdf

KINDLE, J. *Geometría Analítica*. 1^a ed. España: McGraw Hill, 2007.

LEDESMA, R. "Sistemas estadısticos de propósitos múltiples: una revisión de programas gratuitos". *Metodología de Encuestas* [en línea], 2004, (España), 6(2), pp. 105-117. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1575-7803. Disponible en: http://casus.usal.es/pkp/index.php/MdE/article/view/956/897

LENHMANN, C. *Geometría Analítica*. 1^a ed. México: Editorial Limusa, 1989.

MARQUÉS, P. "El software educativo". *Comunicación educativa y Nuevas Tecnologıas* [en línea], 1996, (España), pp. 119-144. [Consulta: 15 febrero 2023]. Disponible en: https://recursos.salonesvirtuales.com/assets/bloques/educativo_de_pere_MARQUES.pdf

MASON, J; et al. *Pensar matemáticamente*. 1^a ed. Barcelona-Madrid: MEC-Labor, 1992.

MEYER, M; et al. "Innovation in curriculum: Context in mathematics curricula". *National Council of Teachers of Mathematics* [en línea], 2001, 6(9), pp. 522-527. [Consulta: 15 febrero 2023]. Disponible en: https://doi.org/10.5951/MTMS.6.9.0522

OKEREKE, S. "Effects of Prior Knowledge of Application of Mathematics to Carrier Types and Gender on Students Achievement, Interest and Retention". *STAN Proceeding of the 47th Annual Conference.*, (2006), (Nigeria) p. 253-289.

m

PIÑEIRO, J; et al. " ¿Qué es la resolución de problemas?". *Boletín Redipe* [en línea], 2015, 4(2), pp. 6-14. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2256-1536. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/6495/

POLYA, G; et al. *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1979.

POLYA, G. *Mathematical discovery: On understanding, learning and teaching problem solving*. USA: John Wiley & Son, 1962.

POZO, J; et al. *La solución de problemas*. Madrid-España: Santillana, 1994.

PRIETO, A; et al. *Introducción a la Informática*. 3ª ed. España: McGraw-Hill, 1989.

SKINNER, C. *Educational Psychology*. 4ª ed. India: Prentice Hall of India, 1984.

SWOKOWSKI, E.; & COLE, J. *Álgebra y trigonometría con geometría analítica*. 13ª ed. México: CENGAGE Learning, 2009.

TREJO, H. "Herramientas tecnológicas para el diseño de materiales visuales en entornos educativos". *Sincronía* [en línea], 2018, (74), pp. 617-669. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1562-384X. Disponible en: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=513855742031

VASILACHIS, I. "Ontological and Epistemological Foundations of Qualitative Research". *Forum Qualitative Sozialforschung / Forum: Qualitative Social Research* [en línea], 2009, (España), 10(2). [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1438-5627. Disponible en: http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:0114-fqs0902307

VIDAL, M; et al. "Software educativos". *Educ Med Super* [en línea], 2010, 4(1), pp. 97-110. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 0864-2141. Disponible en: http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S0864-21412010000100012&script=sci_arttext&tlng=en

VLIEGHE, J. " Education in an age of digital technologies: Flusser, Stiegler, and Agamben on the idea of the posthistorical". *Philosophy & Technology* [en línea], 2014, 27(4), pp. 519-537. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 2210-5441. Disponible en: https://doi.org/10.1007/s13347-013-0131-x

WENGLINSKY, H. “How schools matter: The link between teacher classroom practices and student academic performance”. *Education Policy Analysis Archives* [en línea], 2002, 10(12), pp. 1-30. [Consulta: 15 febrero 2023]. ISSN 1068-2341. Disponible en: http://epaa.asu.edu/epaa/v10n12/

YUNI, J.; & URBANO, C. *Técnicas para investigar: Recursos metodológicos para la preparación de proyectos de investigación*. 2ª ed. Córdoba-Argentina: Brujas, 2014.

ZAMORA, P. “La contextualización de las matemáticas”. 2013. [Consulta: 20 febrero 2023]. Disponible en: http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/2323/Trabajo.pdf.

UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y DOCUMENTAL

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 21/ 12 / 2023

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: Jessica Esthefania Paredes Morales
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemática
f. Analista de Biblioteca responsable: Ing. Rafael Inty Salto Hidalgo

2139-DBRA-UPT-2023