



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

**“SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE NAGUMO POR
EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS”**

Trabajo de Integración Curricular

Tipo: Proyecto de Investigación

Presentado para optar al grado académico de:

MATEMÁTICA

AUTORAS: DANIELA SOFIA ANDRADE ANDRADE
DELIA ESTEFANIA RUIZ LUNA

DIRECTOR: Ing. ALEX EDUARDO POZO VALDIVIEZO Msc.

Riobamba – Ecuador

2023

©2023, Daniela Sofia Andrade Andrade & Delia Estefania Ruiz Luna.

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo la cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho de Autor.

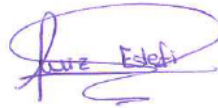
Yo, DANIELA SOFIA ANDRADE ANDRADE & DELIA ESTEFANIA RUIZ LUNA, declaramos que el presente Trabajo de Integración Curricular es de nuestra autoría y los resultados del mismo son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autoras asumimos la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este Trabajo de Integración Curricular; El patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 28 de abril de 2023






Daniela Sofia Andrade Andrade
060477786-2



Delia Estefania Ruiz Luna
060584622-9

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO
FACULTAD DE CIENCIAS
CARRERA MATEMÁTICA

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: el Trabajo de Integración Curricular; Tipo: Proyecto de Investigación. “**SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE NAGUMO POR EL MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS**”, realizado por las señoritas: **DANIELA SOFIA ANDRADE ANDRADE & DELIA ESTEFANIA RUIZ LUNA**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	FIRMA	FECHA
Ing. Maria José Mendoza Salazar, Mgs. PRESIDENTE DEL TRIBUNAL	 _____	2023-04-28
Ing. Alex Eduardo Pozo Valdiviezo, Mgs. DIRECTOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR	 _____	2023-04-28
Dr. Franklin Marcelo Coronel Maji, Mgs. ASESOR DEL TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR	 _____	2023-04-28

DEDICATORIA

Dedico el presente trabajo a mi mamá Teresa Luna que me ha brindado todo su amor, apoyo y me ha dado el mayor ejemplo de lucha, perseverancia y paciencia siendo estos los ingredientes perfectos para cumplir este logro. A mi hermana Katherine Ruiz que ha estado para mí en todo momento y a mi papá Ricardo Ruiz que desde el cielo me dio la fuerza para culminar esta etapa universitaria.

Estefania

A mis madre Paulina Andrade y mi padre Gustavo Andrade que su amor y sabiduría han hecho posible este logro, gracias por simplemente quererme sin ninguna condición. A mi hermana Sara que será siempre mi otra mitad, y a todos mis amigos, compañeros y profesores que me acompañaron en este viaje.

Sofia

AGRADECIMIENTO

Quiero agradecer a mi mamá y mi hermana que son el soporte de mi vida, gracias por estar conmigo en este camino y ayudarme a alcanzar mi sueño que hoy es una realidad. A mi familia que ha estado presente en mis logros así como también apoyandome en las adversidades, a mis angelitos que fueron pilar fundamental en mi vida y que hoy me dan la fortaleza para seguir, y a mis amigos que hicieron que este camino sea mas llevadero.

Estefania

Agradezco a mis padres que fueron mi principal apoyo, gracias por criarme y enseñarme a ser un grandioso ser humano, es ahora cuando apenas logro comprender que todo lo que han hecho por mi ha sido por amor y me ha permitido cumplir mi objetivo, a mi hermana que jamas me dejo sola, a mis amigos que me apoyaron y me permitieron desconectar cuando lo necesitaba y a mis profesores que con su enseñanza lograron posible este trabajo.

Sofía

Así mismo agradecemos al Ing. Eduardo Pozo, por compartir su conocimiento, por su apoyo y paciencia a lo largo de la elaboración de este trabajo.

TABLA DE CONTENIDOS

ÍNDICE DE TABLAS	ix
ÍNDICE DE ILUSTRACIONES	ix
ÍNDICE DE ANEXOS	xi
RESUMEN	xii
ABSTRACT	xiii
INTRODUCCIÓN	1

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	2
1.1. Planteamiento del problema	2
1.2. Objetivos	2
1.2.1. <i>Objetivo general</i>	2
1.2.2. <i>Objetivos específicos</i>	3
1.3. Justificación	3

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO	4
2.1. Herramientas de base	5
2.1.1. <i>Diferenciación Numérica</i>	5
2.1.1.1. <i>Aproximación de la primera derivada</i>	5
2.1.1.2. <i>Derivadas de orden superior</i>	12
2.1.2. <i>Álgebra Matricial</i>	18
2.1.2.1. <i>Tipos de Matrices</i>	18
2.1.2.2. <i>Criterios de invertibilidad</i>	22
2.1.3. <i>Sistemas de Ecuaciones</i>	26
2.1.4. <i>Soluciones de tipo onda viajera</i>	28
2.1.5. <i>Existencia y Unicidad</i>	29
2.1.6. <i>Método de diferencias finitas</i>	32
2.1.6.1. <i>Problemas con valores en la frontera 1D</i>	33

2.1.6.2.	<i>Consistencia, Estabilidad y Convergencia</i>	35
2.1.7.	<i>Discretización de diferencias finitas</i>	43
2.1.7.1.	<i>Fórmulas de primer orden</i>	43
2.1.7.2.	<i>Fórmulas de segundo orden</i>	45

CAPÍTULO III

3.	MARCO METODOLÓGICO	47
3.1.	Enfoque de investigación	47
3.2.	Nivel de investigación	47
3.3.	Diseño de la investigación	47

CAPÍTULO IV

4.	MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS	48
4.1.	Existencia y Unicidad de soluciones de la Ecuación de Nagumo	48
4.2.	Soluciones Exactas de la Ecuación de Nagumo	50
4.3.	Diferencias Finitas para la ecuación de Nagumo	53
4.4.	Consistencia, Estabilidad y Convergencia de las diferencias finitas para la ecuación de Nagumo	60
4.4.1.	<i>Consistencia de los esquemas</i>	60
4.4.2.	<i>Estabilidad de los esquemas</i>	71
4.4.3.	<i>Convergencia de los esquemas</i>	81
4.5.	Simulación Numérica de la Ecuación de Nagumo	83
4.5.1.	<i>Resultados de soluciones reales y numéricas.</i>	83

CAPÍTULO V

5.	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	92
5.1.	Conclusiones	92
5.2.	Recomendaciones	92

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-2: Valores $f'(x_0)$ para cada $h \in [0.1, 0.2)$ con paso de 0.01	11
Tabla 2-2: Valores $f''(x_0)$ para cada $h \in [0.1, 0.2)$ con paso de 0.01	17
Tabla 1-4: Valores $\Delta x = [-10, -6, -2, 2, 6]$	85
Tabla 2-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.0001$ con variación en el tiempo	87
Tabla 3-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.49$ con variación en el tiempo	87
Tabla 4-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.25$ con variación en el tiempo	87
Tabla 5-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.0001$ con variación en el tiempo	91
Tabla 6-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.49$ con variación en el tiempo	91
Tabla 7-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.25$ con variación en el tiempo	91

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1-2: Error de las Fórmulas de primer orden	12
Ilustración 2-2: Error de las Fórmulas de primer orden	17
Ilustración 1-4: Solución numérica vs Solución real 1	84
Ilustración 2-4: Gráficas del error temporal solución real 1	85
Ilustración 3-4: Gráficas del error espacial solución real	86
Ilustración 4-4: Solución numérica vs Solución real 2	88
Ilustración 5-4: Gráficas del error temporal solución real 2	89
Ilustración 6-4: Gráficas del error espacial solución real 2	90

ÍNDICE DE ANEXOS

ANEXO A: ESQUEMA CRANCK-NICOLSON CÓDIGO PYTHON, COMPARACIÓN SOLUCIÓN EXACTA-NUMÉRICA.

ANEXO B: ESQUEMA IMPLÍCITO CÓDIGO PYTHON, ERROR TEMPORAL.

RESUMEN

El presente trabajo de titulación tuvo como objetivo describir la ecuación de Nagumo, sus fundamentos teóricos y su resolución numérica mediante esquemas de diferencias finitas que fueron implementados en Python para identificar el método que aproxima de mejor manera la solución. La investigación documental fue de carácter teórico-práctico debido a que se realizó un análisis sobre: la existencia y unicidad de las soluciones de la ecuación de Nagumo, presentamos dos soluciones reales; los esquemas implícito, explícito, esquema-theta, Cranck-Nicolson, su consistencia, estabilidad y convergencia, a su vez, se hizo la simulación numérica en Python que permitió llevar a cabo la comparación de las soluciones reales con las soluciones numéricas. Se obtuvo como resultados que el esquema implícito, explícito y esquema theta tienen un orden de convergencia lineal en el tiempo y cuadrático en el espacio, mientras que, el esquema Cranck-Nicolson es cuadrático en tiempo y espacio. Gracias al estudio teórico se concluye que las soluciones de la Ecuación de Nagumo existen y son únicas, y a partir de las simulaciones se conoce que cuando la variable α se aproxima a 0 el esquema que más se acerca a la solución real es el de Cranck-Nicolson pero cuando α se aproxima a 0.5 no se puede asegurar que un mismo esquema sea el que converge la solución exacta, en cualquier intervalo temporal o espacial. Recomendamos realizar la lectura completa del capítulo II, puesto que este sentará las bases para el tema principal que son los métodos de diferencias finitas.

Palabras clave: < ECUACIÓN DE NAGUMO>, < ESQUEMA IMPLICITO>, < ESQUEMA EXPLÍCITO>, < ESQUEMA-THETA>, < ESQUEMA CRANCK-NICOLSON>.



0809-DBRA-UPT-2023

ABSTRACT

The aim of this work was to describe the Nagumo equation, its theoretical foundations and its numerical resolution through finite difference schemes that were implemented in Python to identify the method that best approximates the solution. The documentary research was of a theoretical-practical nature because an analysis was carried out on: the existence and uniqueness of the solutions of the Nagumo equation, it was presented two real solutions; the implicit, explicit, theta-scheme, Cranck-Nicolson schemes, their consistency, stability and convergence; at the same time the numerical simulation in Python was carried out, which allowed the comparison of the real solutions with the numerical solutions. It was obtained as results that the implicit, explicit and theta schemes have a linear order of convergence in time and quadratic in space, while the Cranck-Nicolson scheme is quadratic in time and space. Thanks to the study, it is concluded that the solutions of the Nagumo Equation exist and are unique, and from the simulations it is known that when the variable " α " approaches 0 the scheme that is closest to the real solution is that of Cranck - Nicolson, but when " α " approaches 0.5 it cannot be assured that the same scheme is the one that converges to the exact solution, in any temporal or spatial interval. It is recommended to read Chapter II in its entirety, since it will lay the foundations for the main topic of finite difference methods.

Key words: <NAGUMO EQUATIONS>, <IMPLICIT SCHEME>, <EXPLICIT SCHEME>, <THETA-SCHEME>, <CRANCK-NICOLSON SCHEME>.



Dra. Nanci M. Inca Ch. Mgs
0602926719

INTRODUCCIÓN

La neurofisiología describe los fenómenos eléctricos en la fisiología de las células nerviosas. Su objetivo es estudiar los impulsos eléctricos para comprender el funcionamiento del sistema nervioso. Existen diversos modelos para explicar este proceso, uno de los primeros es el de Hodking-Huxley que consiste en un sistema de 4 ecuaciones diferenciales no lineales que describen la dinámica del potencial de membrana de una neurona ante la acción de una corriente aplicada.

Para mejorar la comprensión del fenómeno neuro eléctrico, se plantearon simplificaciones del modelo de Hodking-Huxley, que resultaron en modelos más simples, tal es el caso del sistema de dos ecuaciones FitzHugh-Nagumo (FHN), y más recientemente el modelo de Jin-ichi Nagumo quien propone una sola ecuación.

Nagumo presenta una ecuación diferencial parcial parabólica de segundo orden la cual describe la manera en como un impulso nervioso viaja a lo largo de una neurona. Se conoce que estos impulsos son diferencias de potencial en las neuronas regidas por el transporte de iones de sodio y potasio que viajan con velocidad constante a través de la membrana celular sin generar cambios en su forma o amplitud. Esta actividad neuronal viene dada por estímulos de excitación, que, pueden o no alcanzar cierta intensidad y transmisión hacia el nervio.

En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Ciencias, Carrera de Matemática, los y las estudiantes carecen de documentos en donde se explique cómo a través de la matemática aplicada, podemos solucionar problemas reales existentes en otras ciencias.

Este documento presenta una propuesta de trabajo de titulación cuyo objetivo es describir, en general, el proceso de discretización de ecuaciones diferenciales parciales (EDP) a través de esquemas de diferencias finitas. Adicionalmente se propone discretizar y resolver la ecuación de Nagumo que modela un problema de la Neurofisiología.

CAPÍTULO I

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este primer capítulo expondremos el problema que dió origen a este trabajo de investigación así como también el objetivo general que nos permite visualizar a lo que vamos a llegar y los objetivos específicos que serán los pasos para lograrlo, finalmente la justificación, en donde escribiremos la motivación e importancia de nuestro trabajo de titulación.

1.1. Planteamiento del problema

En base a la experiencia, hemos notado que, en el curso de análisis numérico, no se aborda tópicos como el método de diferencias finitas, y como estos métodos se pueden aplicar en diferentes campos de la ciencia como por ejemplo la neurofisiología. Además, después de realizar una búsqueda bibliográfica en la biblioteca de la ESPOCH, se pudo observar que no se cuenta con un pequeño documento que hable de diferenciación numérica desde sus inicios, y en el que los y las estudiantes de la carrera de matemática como a través de la matemática aplicada podemos solucionar problemas reales de otras ciencias, específicamente Neurofisiología.

Es así como se propone una investigación documental de carácter teórico-práctico de la ecuación de Nagumo que contemple el análisis de existencia y unicidad de soluciones; así como también su resolución numérica a través de métodos en diferencias finitas, para facilitar a los estudiantes de la carrera de Matemática la comprensión de métodos en diferenciación numérica aplicados en ecuaciones de derivadas parciales provenientes de la Neurofisiología.

1.2. Objetivos

1.2.1. *Objetivo general*

Realizar una investigación documental de carácter teórico-práctico sobre la ecuación de Nagumo, sus fundamentos teóricos, y su resolución numérica usando esquemas en diferencias finitas, los cuales serán implementados en Python, para hacer una simulación con un ejemplo particular proveniente de la Neurofisiología, se generará un documento que sirva de guía para entender la aplicación de estos métodos.

1.2.2. *Objetivos específicos*

1. Buscar y seleccionar bibliografía del tópico, a través de la lectura sistemática de libros, artículos y revistas con la finalidad de establecer fuentes apropiadas que sustenten los temas planteados.
2. Explicar brevemente la teoría sobre la existencia y unicidad de solución de la ecuación de Nagumo.
3. Comprender los métodos en diferencias finitas explícito, implícito, Cranck-Nicolson y esquema-theta.
4. Establecer las condiciones de estabilidad, consistencia y convergencia para los esquemas de diferencias finitas que se estudian.
5. Usar el lenguaje Python para la implementación de los métodos de diferencias finitas que aproximen numéricamente la ecuación de Nagumo.
6. Analizar los resultados obtenidos en el lenguaje de programación para verificar la eficacia de cada uno de los esquemas.

1.3. *Justificación*

En la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo, Facultad de Ciencias, carrera de Matemática, hemos notado que no se cuenta con documentos suficientes acerca de: diferenciación numérica desde sus inicios y como a través de la matemática aplicada podemos resolver problemas reales en otras ciencias, en este documento nos centraremos particularmente en la Neurofisiología. Por otra parte como estudiantes hemos evidenciado que en el curso de análisis numérico no se aborda el tópico de diferencias finitas y su aplicación. En este escrito estudiaremos las bases de la diferenciación numérica y su resolución mediante esquemas de diferencias finitas y el análisis de su consistencia, estabilidad y convergencias, y además su simulación numérica en Python que nos permitirá observar gráfica y analíticamente la diferencia de cada método. Es por esto que nuestro trabajo de titulación podrá servir como guía y material complementario para los estudiantes que cursen la cátedra de análisis numérico o aquellos que deseen realizar un estudio en esta línea de investigación.

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

La Neurofisiología se ocupa de cada uno de los aspectos y funciones del sistema nervioso, en particular uno de los problemas mas importantes que se presentan en esta área es el estudio de la transmisión de impulsos nerviosos (García, 2020). En esta sección describiremos algunos modelos, basados en ecuaciones diferenciales parciales que han sido propuestos para este problema.

Para provocar actividad en una neurona es necesaria una cierta cantidad de estímulo conocida como umbral de excitación, si el estímulo inicial no alcanza la intensidad requerida, el nervio no transmite información. Para describir este proceso FitzHugh plantea, en 1961, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x^2} + v(1-v)(v-\alpha) - r \\ \frac{\partial r}{\partial t} = \varepsilon(v-\gamma r). \end{cases} \quad (2.1)$$

Donde $0 < \alpha < 1$ representa el voltaje umbral, v corresponde a la tasa de cambio del potencial de la membrana de la neurona con respecto al tiempo, r la variable de recuperación, t el tiempo y x el espacio.

En 1962, Nagumo presenta una simplificación del modelo anterior simulando el axón de una neurona, cuya función es transferir información desde el cuerpo celular hasta sus botones terminales, como un circuito eléctrico (Carbajal, 1988). De esta manera surge un modelo mas manejable computacionalmente que consiste en una ecuación conocida como la ecuación de Nagumo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + u(1-u)(u-\alpha).$$

En esta ecuación $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$, y u representa la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la membrana celular.

Esta es una ecuación en derivadas parciales (EDP) de tipo parabólico, de segundo orden, la cual será simulada numéricamente a través de los métodos de diferencias finitas, para aproximar la derivada de la función en un punto dado.

2.1. Herramientas de base

En esta sección se presentarán las bases para el desarrollo de los capítulos posteriores. Se utilizará la notación \mathbf{x} para un *vector*, mientras que, $C^k([a, b])$ representa el *conjunto de funciones continuamente diferenciables* hasta orden $k, k \in \mathbb{N}$, $M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ al *conjunto de matrices cuadradas* $n \times n$ con entradas de números reales, $A = (a_{ij})$ una matriz que pertenece a $M_{n \times n}[\mathbb{R}]$, A^T como la *matriz transpuesta*, I que es la *matriz identidad*, A^{-1} la *matriz inversa*, λ que representa un *valor propio*. Y para el estudio de soluciones definimos a u_t como la *primera derivada de u* con respecto al tiempo, mientras que u_{xx} representa a la *segunda derivada de u* con respecto al espacio.

A continuación, se realizará la descripción de diferenciación numérica, álgebra matricial y sistemas de ecuaciones, los cuáles sentarán las bases para el estudio posterior de los esquemas de diferencias finitas.

2.1.1. Diferenciación Numérica

La diferenciación numérica tiene como objetivo calcular una aproximación de la derivada de una función alrededor de un punto. En esta sección, se realizará la deducción de las fórmulas para la aproximación de derivadas (primera y segunda derivadas).

2.1.1.1. Aproximación de la primera derivada

Para el cálculo de la primera derivada $f'(x_0)$ consideramos un punto $x_0 \in]a, b[$ donde f es una función de clase $C^k([a, b])$ con $k \in \mathbb{N}$.

Fórmula progresiva de primer orden

Sea $f \in C^2([a, b])$, consideramos el punto $x_1 = x_0 + h$, con $h > 0$ de tal manera que $h \neq 0$ sea lo suficientemente pequeña tal que se encuentre en el intervalo $[a, b]$.

Consideramos la serie de Taylor, alrededor del punto $x_0 + h$ de la cual tomamos solamente los tres primeros términos. Así,

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} (h)^i \\ &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}hf''(\xi), \quad \text{con } x_0 \leq \xi \leq x_0 + h. \end{aligned}$$

Que conduce a:

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{1}{2}h^2 f''(\xi). \quad (2.2)$$

y así, la *diferencia finita progresiva* es una aproximación de orden 1 de la derivada.

Observamos que en la ecuación (2.2), el error de la aproximación viene dado por $-\frac{h}{2}f''(\xi)$ el cual es un valor desconocido, por lo que para conocer esta cantidad se realiza una acotación a la función, así, para tener una estimación vemos que:

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| = \left| -\frac{h}{2}f''(\xi) \right| = \frac{h}{2}|f''(\xi)|$$

Puesto que $f \in C^2([a, b])$, entonces $|f''(\xi)| \leq \sup_{x \leq \xi \leq x+h} |f''(\xi)|$

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right| \leq \frac{h}{2}M. \quad (2.3)$$

Donde, $M := \sup_{x \leq \xi \leq x+h} |f''(\xi)|$.

Fórmula regresiva de primer orden

Con una función $f \in C^2([a, b])$, consideramos, ahora, el punto $x_1 = x_0 - h$, con $h \neq 0$ sea suficientemente pequeño de tal manera que pertenezca en el intervalo $[a, b]$.

Para calcular esta aproximación, utilizamos la serie de Taylor de f en $x_0 - h$, de la cual se considera los tres primeros términos,

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2}f''(\xi), \quad x - h \leq \xi \leq x$$

Que conduce a la aproximación por una *diferencia finita regresiva* de orden 1 para la derivada

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \frac{h}{2}f''(\xi) \quad (2.4)$$

Podemos mostrar el mismo análisis del error para la diferencia finita regresiva, entonces basta

considerar

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right| = \left| \frac{h}{2} f''(x_0) \right| = \frac{h}{2} |f''(x_0)|$$

Como $f \in C^2([a, b])$, entonces $|f''(\xi)| \leq \sup |f''(\xi)|$ con $x - h \leq \xi \leq x$

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \right| \leq \frac{h}{2} M. \quad (2.5)$$

Con $M := \sup_{x-h \leq \xi \leq x} |f''(\xi)| > 0$.

Por otra parte, que las ecuaciones (2.2) y (2.4) a pesar de guardar gran similitud entre sí, al realizar una comparación podemos notar que con la derivada progresiva se toman valores posteriores a x_0 , es decir, $h > 0$; mientras que, en la derivada regresiva se consideran valores inferiores a x_0 , es decir, $h < 0$. Además, se dice que el error de truncamiento es de orden h^1 , es decir, el error es proporcional al incremento h elevado a la 1-ésima potencia. Entonces, para ambas fórmulas tenemos un error h , es decir un error de orden 1, conocido como error lineal.

Fórmula central de primer orden

Consideramos ahora $f \in C^3([a, b])$, con los puntos $x_0 + h$ y $x_0 - h \in]a, b[$ simétricos con respecto a x , con h distinto de 0.

Utilizando las series de Taylor alrededor de los puntos $x_0 + h$ y $x_0 - h$, hasta el tercer término vemos que

$$\begin{aligned} f(x_0 + h) &= f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_1), \quad x \leq \xi_1 \leq x + h. \\ f(x_0 - h) &= f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0) - \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2), \quad x - h \leq \xi_2 \leq x. \end{aligned}$$

Obtenemos, restando la segunda expresión de la primera, que

$$f(x_0 + h) - f(x_0 - h) = 2hf'(x_0) + \frac{h^3}{6} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)].$$

Lo que nos conduce a

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + \frac{h^2}{12} [f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)]. \quad (2.6)$$

Por el Teorema de Valor Intermedio, arribamos a la *fórmula central de primer orden*.

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + \frac{h^2}{6} f'''(\xi), \quad x-h \leq \xi \leq x+h. \quad (2.7)$$

Para simplificar el término del error, basta observar:

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right| = \left| \frac{h^2}{6} (f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) \right| = \frac{h^2}{6} |f'''(\xi)|$$

Debido a que $f \in C^3([a, b])$, entonces $|f'''(\xi)| \leq \sup_{x-h \leq \xi \leq x+h} |f'''(\xi)|$.

$$\left| f'(x_0) - \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} \right| \leq \frac{h^2}{6} M. \quad (2.8)$$

donde $M := \sup_{x-h \leq \xi \leq x+h} |f'''(\xi)|$.

Al analizar la fórmula vemos que la derivada central, relaciona la derivada progresiva y regresiva, tomando valores posteriores e inferiores a x_0 . Notamos además que llegamos a una fórmula con un error de orden 2, con lo que somos capaces de concluir que el error de truncamiento tiene un comportamiento cuadrático.

Fórmula de los cinco puntos de primer orden

Ahora, sea $f \in C^5([a, b])$ y consideramos los puntos x_0+h , x_0-h , x_0+2h , x_0-2h en el intervalo $]a, b[$ con $h > 0$.

A partir de la serie de Taylor para los puntos x_0+2h , x_0-2h , tenemos que

$$f(x_0+2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) + \frac{4}{3}h^3f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x_0) + \frac{4}{15}h^5f^{(5)}(\xi_1)$$

Con $x \leq \xi \leq x+2h$.

$$f(x_0-2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) - \frac{4}{3}h^3f'''(x_0) + \frac{2}{3}h^4f^{(4)}(x_0) - \frac{4}{15}h^5f^{(5)}(\xi_2)$$

Con $x - 2h \leq \xi \leq x$.

Restando el segundo desarrollo del primero, se sigue que

$$f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h) = -4hf'(x_0) - \frac{8}{3}h^3 f'''(x_0) - \frac{4}{15}h^5 (f^{(5)}(\xi_1) + f^{(5)}(\xi_2)).$$

Por el Teorema del valor intermedio tenemos:

$$f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h) = -4hf'(x_0) - \frac{8}{3}h^3 f'''(x_0) - \frac{8}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_3), \quad x - 2h \leq \xi_3 \leq x + 2h. \quad (2.9)$$

De la misma manera, desarrollamos la serie de Taylor para los puntos $x_0 + h$, $x_0 - h$, así:

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(x_0) - \frac{1}{120}h^5 f^{(5)}(\xi_5).$$

Con $x - h \leq \xi \leq x$.

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(x_0) + \frac{1}{120}h^5 f^{(5)}(\xi_4).$$

Con $x \leq \xi \leq x + h$.

Al restar $f(x_0 - h) - f(x_0 + h)$ vemos que:

$$f(x_0 - h) - f(x_0 + h) = -2hf'(x_0) - \frac{1}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{120}h^5 (f^{(5)}(\xi_4) + f^{(5)}(\xi_5)).$$

Nuevamente por el Teorema del valor intermedio, obtenemos:

$$f(x_0 - h) - f(x_0 + h) = -2hf'(x_0) - \frac{1}{3}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{60}h^5 f^{(5)}(\xi_6), \quad x - h \leq \xi_6 \leq x + h.$$

De donde,

$$f'''(x_0) = -\frac{3f(x_0 - h)}{h^3} + \frac{3f(x_0 + h)}{h^3} - \frac{6f'(x_0)}{h^2} - \frac{h^2 f^{(5)}(\xi_6)}{20}.$$

Luego, reemplazamos $f'''(x_0)$ en la ecuación (2.9), obteniéndose así:

$$\begin{aligned}
 f(x_0 + 2h) - f(x_0 - 2h) &= 4hf'(x_0) - \frac{8}{3}h^3 \left[-\frac{3f(x_0 - h)}{h^3} + \frac{3f(x_0 + h)}{h^3} - \frac{6f'(x_0)}{h^2} - \frac{h^2 f^{(5)}(\xi_6)}{20} \right] \\
 &\quad - \frac{8}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_3) \\
 &= 4hf'(x_0) - 16hf'(x_0) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) + \frac{2}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_6) \\
 &\quad - \frac{8}{15}h^5 f^{(5)}(\xi_3) \\
 &= -12hf'(x_0) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h) - \frac{2}{15}h^5 [4f^{(5)}(\xi_3) - f^{(5)}(\xi_6)].
 \end{aligned}$$

Despejamos $f'(x_0)$

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} [f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h)] - \frac{1}{90}h^4 [4f^{(5)}(\xi_3) - f^{(5)}(\xi_6)].$$

Finalmente, aplicamos el Teorema del valor intermedio y arribamos a *fórmula de los cinco puntos de primer orden*:

$$f'(x_0) = \frac{1}{12h} (f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h)) - \frac{1}{30}h^4 f^{(5)}(\xi) \quad (2.10)$$

Con $x - 2h \leq \xi \leq x + 2h$.

En cuanto al error, es suficiente observar que:

$$\begin{aligned}
 \left| f'(x_0) - \frac{1}{12h} (f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h)) \right| &= \left| -\frac{1}{30}h^4 f^{(5)}(\xi) \right| \\
 &= \frac{1}{30}h^4 |f^{(5)}(\xi)|.
 \end{aligned}$$

Recordando que f es de clase $C^5[(a, b)]$, entonces $|f^{(5)}(\xi)| \leq \sup_{x-2h \leq \xi \leq x+2h} |f^{(5)}(\xi)|$,

$$\left| f'(x_0) - \frac{1}{12h} (f(x_0 - 2h) - f(x_0 + 2h) + 8f(x_0 + h) - 8f(x_0 - h)) \right| \leq \frac{1}{30}h^4 M. \quad (2.11)$$

Con $M := \sup_{x-2h \leq \xi \leq x+2h} |f^{(5)}(\xi)|$.

La fórmula que obtenemos, es en general más precisa que la de la derivada central ya que toma 2

puntos más, es importante además, observar que obtenemos una fórmula con notación de orden 4, con lo que decimos que el error de truncamiento cuando h tiende a 0, se comporta en forma a una ecuación elevada a la cuarta potencia.

Para poder observar de manera clara cómo funciona cada método de derivación numérica para la primera derivada, vamos a dar un ejemplo en el cual compararemos los errores de aproximación que obtenemos:

Ejemplo. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = e^x + x^2$ con $x > 0$ y $x_0 = 2$.

Donde su derivada viene dada por:

$$f'(x) = 2x + e^x.$$

Y evaluando en $x = 2$ obtenemos

$$f'(2) = 2(2) + e^2 = 11.38905.$$

Mientras que la tabla siguiente, muestra las aproximaciones de $f'(2)$, utilizando la diferencia progresiva, regresiva, central y de cinco puntos.

Tabla 1-2: Valores $f'(x_0)$ para cada $h \in [0.1, 0.2)$ con paso de 0.01

h	Fórmula Progresiva	Error	Fórmula Regresiva	Error	Fórmula Central	Error	Fórmula de cinco puntos	Error
0.10	11.8711	0.4821	10.9316	0.4574	11.4014	0.0123	11.38903	0.00002
0.11	11.9208	0.5317	10.8872	0.5019	11.4040	0.0149	11.38902	0.00003
0.12	11.9707	0.5816	10.8429	0.5461	11.4068	0.0177	11.38900	0.00005
0.13	12.0209	0.6318	10.7989	0.5901	11.4099	0.0208	11.38898	0.00007
0.14	12.0713	0.6822	10.7551	0.6339	11.4132	0.0242	11.38896	0.00009
0.15	12.1220	0.7330	10.7116	0.6775	11.4168	0.0277	11.38893	0.00012
0.16	12.1730	0.7840	10.6682	0.7208	11.4206	0.0316	11.38889	0.00016
0.17	12.2243	0.8352	10.6251	0.7639	11.4247	0.0356	11.38885	0.00020
0.18	12.2758	0.8868	10.5822	0.8068	11.4290	0.0400	11.38879	0.00026
0.19	12.3277	0.9386	10.5395	0.8495	11.4336	0.0445	11.38873	0.00032

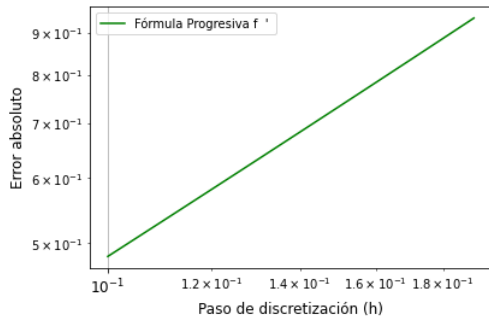
Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

Mediante los resultados obtenidos en la Tabla (1-2:) evidenciamos que la fórmula de los cinco puntos proporciona un valor menor de error, seguida por la fórmula central, luego la fórmula

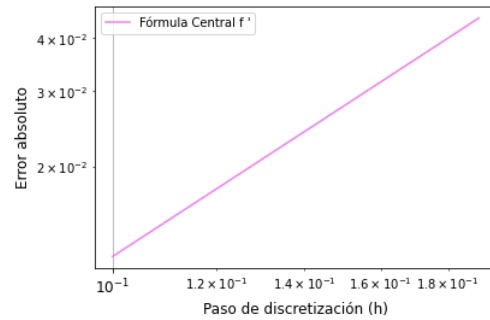
regresiva y finalmente la fórmula progresiva. También, observamos que el error se aproxima a 0 cuando h es suficientemente pequeña.

A continuación mostramos las imágenes del paso de discretización contra el error.



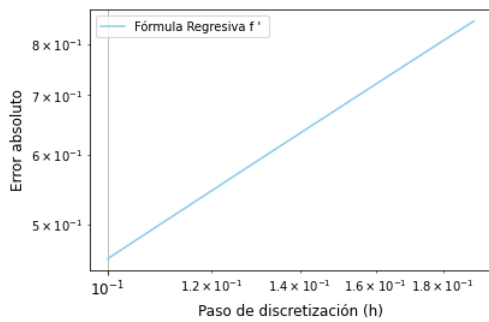
1-2:1

(a) Progresiva



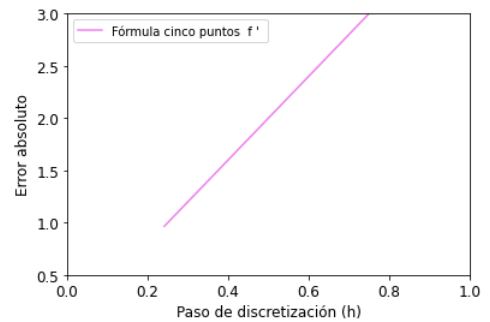
1-2:2

(b) Central



1-2:3

(c) Regresiva



1-2:4

(d) Cinco puntos

Ilustración 1-2: Error de las Fórmulas de primer orden

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

En la Ilustración(1-2:) podemos notar a través del paso de discretización, que fórmula genera una solución numérica que se aproxima de mejor manera a la solución real. Comprobándose en las gráficas que la fórmula que genera menor error es la de cinco puntos (6-4:d), debido a que el error que este presenta es el de menor valor.

2.1.1.2. Derivadas de orden superior

Para aproximar derivadas de orden superior en particular de orden dos, utilizamos más términos en las series de Taylor de la función $f \in C^k([a, b])$, con $k \in \mathbb{N}$. Así, para la segunda derivada, podemos usar los esquemas progresivo, regresivo, central, entre otros.

Fórmula Central de segundo orden

Sea $f \in C^4([a, b])$ y $x_1 = x_0 - h$ y $x_2 = x_0 + h$ para alguna $h \neq 0$ que sea lo suficientemente pequeña de tal manera que se encuentre en el intervalo $[a, b]$.

Mediante un desarrollo de Taylor, tomamos los cuatro primeros términos alrededor de los puntos $x_0 + h$ y $x_0 - h$:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) + \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(\xi_1),$$

Con $x \leq \xi_1 \leq x + h$.

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2 f''(x_0) - \frac{1}{6}h^3 f'''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 f^{(4)}(\xi_2),$$

Con $x - h \leq \xi_2 \leq x$.

Sumando ambas expresiones obtenemos:

$$f(x_0 + h) + f(x_0 - h) = 2f(x_0) + h^2 f''(x_0) + \frac{1}{24}h^4 [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)].$$

Despejando $f''(x_0)$,

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - \frac{1}{24}h^4 [f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2)].$$

Finalmente por el Teorema del Valor Intermedio obtenemos la *fórmula central de segundo orden*, de la forma;

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi), \quad x - h \leq \xi \leq x + h. \quad (2.12)$$

Para analizar la aproximación del error, a partir de la ecuación (2.12) tenemos:

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \right| = \left| -\frac{1}{12}h^2 f^{(4)}(\xi) \right| = \frac{1}{12}h^2 |f^{(4)}(\xi)|.$$

Como f es de clase $C^4([a, b])$, entonces $|f^{(4)}(\xi)| \leq \sup_{x-h \leq \xi \leq x+h} |f^{(4)}(\xi)|$ de donde se tiene que:

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \right| \leq \frac{1}{12}h^2 M, \quad (2.13)$$

De donde, $M := \sup_{x-h \leq \xi \leq x+h} |f^{(4)}(\xi)|$.

Cuando consideramos la fórmula obtenida observamos que la derivada central de segundo orden asocia la derivada regresiva y progresiva; es decir consideramos puntos superiores e inferiores a x_0 . Podemos además, fijarnos en que obtenemos una fórmula con un error de orden 2, así podemos concluir que el error de truncamiento se comporta de forma cuadrática.

Fórmula progresiva de segundo orden

Sea $f \in C^3([a, b])$, tomamos un $x_1 = x_0 + 2h$, tal que $h \neq 0$ sea convenientemente pequeño para que pertenezca en el intervalo $[a, b]$.

Utilizando un desarrollo de Taylor alrededor de $x_0 + 2h$ y $x_0 + h$ obtenemos que:

$$f(x_0 + 2h) = f(x_0) + 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) + \frac{4}{3}h^3f'''(\xi_1), \quad x \leq \xi_1 \leq x + 2h. \quad (2.14)$$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2f''(x_0) + \frac{1}{6}h^3f'''(\xi_2), \quad x \leq \xi_2 \leq x + h.$$

De esta última despejamos $f'(x_0)$,

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{1}{2}hf''(x_0) - \frac{1}{6}h^2f'''(\xi_2).$$

Y al reemplazar en la fórmula (2.14) vemos que:

$$\begin{aligned} f(x_0 + 2h) &= f(x_0) + 2h \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} - \frac{1}{2}hf''(x_0) - \frac{1}{6}h^2f'''(\xi_2) \right] + 2h^2f''(x_0) + \frac{4}{3}h^3f'''(\xi_1) \\ &= f(x_0) + 2f(x_0 + h) - 2f(x_0) - h^2f''(x_0) - \frac{1}{3}h^3f'''(\xi_2) + 2h^2f''(x_0) + \frac{4}{3}h^3f'''(\xi_1). \end{aligned}$$

Agrupando términos y dividiendo para h notamos que:

$$\begin{aligned} h^2f''(x_0) &= f(x_0 + 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 + h) - \frac{1}{3}h^3(4f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)) \\ f''(x_0) &= \frac{f(x_0 + 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 + h)}{h^2} - \frac{1}{3}h(4f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)) \end{aligned}$$

Así, por el Teorema del Valor Intermedio se obtiene

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 + 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 + h)}{h^2} - hf'''(\xi), \quad x \leq \xi \leq x + 2h. \quad (2.15)$$

A partir de la ecuación (2.15) estudiamos el error,

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 + 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 + h)}{h^2} \right| = |-hf'''(x_0)| = h|f'''(x_0)|$$

Puesto que f es de clase $C^3([a, b])$, entonces $|f'''(\xi)| \leq \sup_{x \leq \xi \leq x+2h} |f'''(\xi)|$

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 + 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 + h)}{h^2} \right| \leq hM. \quad (2.16)$$

En donde, $M := \sup_{x-h \leq \xi \leq x+h} |f'''(\xi)|$.

Fórmula regresiva de segundo orden

Con una análisis análogo al anterior, realizamos un desarrollo de Taylor hasta el tercer orden alrededor de $x_0 - 2h$ y $x_0 - h$ y obtenemos lo siguiente:

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2hf'(x_0) + 2h^2f''(x_0) - \frac{4}{3}h^3f'''(\xi_1), \quad x - 2h \leq \xi_1 \leq x. \quad (2.17)$$

$$f(x_0 - h) = f(x_0) - hf'(x_0) + \frac{1}{2}h^2f''(x_0) - \frac{1}{6}h^3f'''(\xi_2), \quad x - h \leq \xi_2 \leq x.$$

Al despejar $f'(x_0)$ de la segunda ecuación, vemos que

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{h} + \frac{1}{2}hf''(x_0) - \frac{f(x_0 - h)}{h} - \frac{1}{6}h^2f'''(\xi_2).$$

Al utilizar la expresión en la fórmula (2.17) tenemos:

$$f(x_0 - 2h) = f(x_0) - 2h \left[\frac{f(x_0)}{h} + \frac{1}{2}hf''(x_0) - \frac{f(x_0 - h)}{h} - \frac{1}{6}h^2f'''(\xi_2) \right] + 2h^2f''(x_0) - \frac{4}{3}h^3f'''(\xi_1)$$

$$f(x_0) - 2f(x_0) - h^2f''(x_0) + 2f(x_0 - h) + \frac{1}{3}h^3f'''(\xi_2) + 2h^2f''(x_0) - \frac{4}{3}h^3f'''(\xi_1).$$

Asociando términos, dividiendo para h y gracias al Teorema de Valor Intermedio arribamos a la expresión de la forma:

$$h^2f''(x_0) = f(x_0) - 2f(x_0 - h) + f(x_0 - 2h) + \frac{1}{3}h^3[4f'''(\xi_1) - f'''(\xi_2)].$$

$$f''(x_0) = \frac{f(x_0 - 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 - h)}{h^2} + hf'''(\xi), \quad x - 2h \leq \xi_2 \leq x. \quad (2.18)$$

Analizamos el error en base a la ecuación (2.18):

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 - 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 - h)}{h^2} \right| = |hf'''(\xi)| = h|f'''(\xi)|.$$

Debido a que f es de clase $C^3([a, b])$, entonces $|f'''(x_0)| \leq \sup_{x-2h \leq \xi \leq x} |f'''(\xi)|$, obteniéndose así la cota del error siguiente:

$$\left| f''(x_0) - \frac{f(x_0 - 2h) + f(x_0) - 2f(x_0 - h)}{h^2} \right| \leq hM. \quad (2.19)$$

con $M := \sup_{x-2h \leq \xi \leq x} |f'''(\xi)|$.

Notemos que aunque comparten gran semejanza entre sí, la derivada progresiva de segundo orden considera valores $2h$ posteriores a x_0 , lo que indica que $h > 0$, mientras que, en la derivada regresiva de segundo orden se toman valores $2h$ inferiores a x_0 es decir $h < 0$. Se puede además observar que las dos fórmulas trabajan con un error de orden 1, es decir, tiene un error lineal.

Con el fin de comparar las derivadas numéricas con la segunda derivada de una función, tomamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Sea la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \cos(\sqrt{x}), x > 0 \text{ y } x_0 = 1.$$

Donde su primera y segunda derivada vienen dadas por:

$$f'(x) = -\frac{\text{sen}(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, \quad f''(x) = -\frac{\cos(\sqrt{x})}{4x} + \frac{\text{sen} \sqrt{x}}{4x^{\frac{3}{2}}}.$$

Evaluando $f''(x_0)$ en $x_0 = 1$ vemos que:

$$f''(1) = -\frac{\cos(\sqrt{1})}{4(1)} + \frac{\text{sen} \sqrt{1}}{4(1)^{\frac{3}{2}}} \approx 0.075292.$$

En la siguiente tabla se muestran valores aproximados de la función $f''(x_0)$, cuando h que representa al paso de discretización $\in [0.1, 0.2)$, por medio de la fórmula progresiva, regresiva y central de segundo orden.

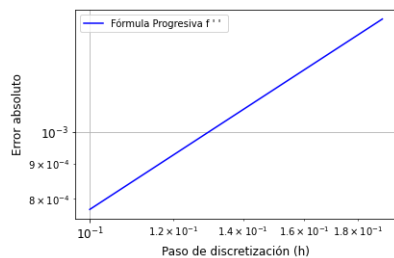
Tabla 2-2: Valores $f''(x_0)$ para cada $h \in [0.1, 0.2]$ con paso de 0.01

h	Fórmula Progresiva	Error	Fórmula Regresiva	Error	Fórmula Central	Error
0.10	0.074520	0.000772	0.076071	0.000779	0.0752926	0.0000005
0.11	0.074443	0.000849	0.076149	0.000857	0.0752927	0.0000006
0.12	0.074366	0.000926	0.076227	0.000935	0.0752928	0.0000007
0.13	0.074290	0.001003	0.076396	0.001014	0.0752930	0.0000008
0.14	0.074213	0.001079	0.076384	0.001092	0.0752931	0.0000009
0.15	0.074136	0.001156	0.076463	0.001171	0.0752932	0.0000011
0.16	0.074060	0.001232	0.076541	0.001249	0.0752934	0.0000012
0.17	0.073983	0.001309	0.076620	0.001328	0.0752935	0.0000014
0.18	0.073907	0.001385	0.076699	0.001406	0.0752937	0.0000015
0.19	0.073831	0.001462	0.076777	0.001485	0.0752939	0.0000017

Fuente: Elaboración propia.

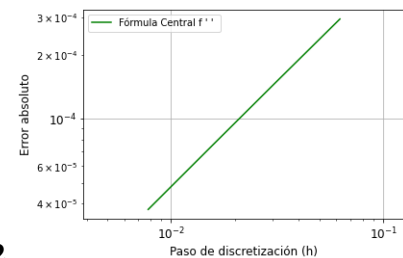
Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

A través de los resultados obtenidos con la Tabla (2-2:) en este ejemplo, se observa que con la fórmula central se obtiene un menor error de cálculo, seguido por la fórmula regresiva y finalmente la fórmula progresiva. Nótese además que en los tres casos el error se acerca a cero, cuando h tiende a cero. A continuación, presentamos las gráficas de paso de paso de discretización contra el error.



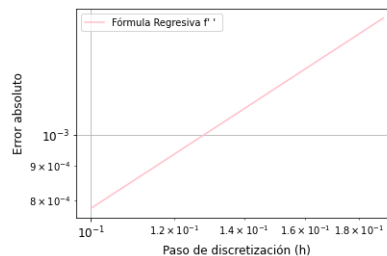
2-2:1

(a) Progresiva



2-2:2

(b) Central



2-2:3

(c) Regresiva

Ilustración 2-2: Error de las Fórmulas de primer orden

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

En cuanto a la aproximación de la solución numérica a la solución real, podemos observar en la Ilustración(2-2:) que la fórmula que tiene un error menor, en efecto es la fórmula central de segundo orden.

Una vez estudiado la diferenciación numérica, damos un paso al estudio del álgebra matricial, la cuál nos servira de guía para los criterios de existencia de solución de un sistema de ecuaciones.

2.1.2. Álgebra Matricial

El Álgebra Matricial, con el propósito de facilitar la resolución de sistemas de ecuaciones, plantea una notación concisa que permita identificar con certeza lo que se desea dar solución y mediante criterios llegar con fluidez a un resultado final. Es así que en esta sección se estudiará diferentes tipos de matrices, criterios de invertibilidad y su relación con sistemas de ecuaciones lineales.

2.1.2.1. Tipos de Matrices

Una matriz cuadrada es un conjunto de números reales, que están dispuestos en n filas por n columnas y se verán dispuestas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (2.20)$$

En donde el vector de la forma $(a_{11} \ a_{12} \ \cdots \ a_{1j} \ \cdots \ a_{1n})$ representa al reglón i , mientras que el vector $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ se denomina columna j . De esta manera conocemos a la componente ij de la matriz A , denotada de la forma a_{ij} que representa al valor del reglón i y la columna j de A .

Definición 2.1. Sea $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$. Decimos que A :

- Es una *matriz tridiagonal* si se cumple que:

$$a_{ij} = 0 \text{ para } |i - j| > 1, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.21)$$

- A es *simétrica* si:

$$A^T = A. \quad (2.22)$$

Es decir, que las columnas y filas de la matriz A coinciden. Por otro lado tenemos la propiedad de antisimetría que nos dice que:

- A es *matriz antisimétrica* si se cumple que:

$$A^T = -A. \quad (2.23)$$

- A es *ortogonal* si se cumple que:

$$AA^T = A^T A = I, \quad (2.24)$$

o a su vez,

$$A^{-1} = A^T. \quad (2.25)$$

Donde I es la *matriz identidad*.

- Por otra parte A es *normal* si:

$$AA^T = A^T A. \quad (2.26)$$

Para ilustrar las definiciones revisadas vamos a ver un ejemplo. En este caso vamos a trabajar con una matriz 3×3 dada en el ejemplo que sigue.

Ejemplo. Sea $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$.

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Sabemos que para obtener A^T simplemente vamos a tener que transformar las filas por columnas vemos que obtenemos:

$$A^T = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Al cumplirse que $A = A^T$ somos capaces de decir que la matriz A es *simétrica*.

Ahora analizaremos el resultado de AA^T

$$AA^T = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 & 20 & 16 \\ 20 & 9 & -20 \\ 16 & -20 & 105 \end{pmatrix}$$

. Y con la evaluación de la multiplicación $A^T A$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 105 & 20 & 16 \\ 20 & 9 & -20 \\ 16 & -20 & 105 \end{pmatrix}.$$

Podemos notar que $AA^T = A^T A$, pero $AA^T = A^T A \neq I$, decimos entonces que A es también *normal*. Concluimos que gracias a las definiciones dadas nuestra matriz A es una matriz simétrica y normal.

Definición 2.2. El rango de A , denotado como $\text{rang}(A)$ se define como el número máximo de filas (o columnas) linealmente independientes entre sí.

Para entender la definición damos el siguiente ejemplo.

Ejemplo. Retomando la matriz del Ejemplo (2.1.2.1.), vamos a hallar el rango de A . Para esto definimos la i -ésima fila como F_i y analizamos cada una de ellas. Entonces:

- F_1 es nuestra fila base.
- F_2 y F_3 , son linealmente independientes, puesto que, $F_2 = \alpha F_1$ y $F_3 = \beta F_1$, no se cumple para ningún $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Por lo tanto, el número máximo de filas linealmente independientes entre sí es 3. De esta forma el $\text{rang}(A) = 3$.

Considerando ahora lo ya revisado, tenemos algunas características que se cumplen para matrices simétricas. Así presentamos las siguientes definiciones.

Definición 2.3. Sea $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$, una matriz simétrica, y \mathbf{x} un vector en \mathbb{R}^n , consideramos que:

- A es *definida positiva* cuando cumple:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0. \quad (2.27)$$

- A es *semi definida positiva* si:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.28)$$

- A es *definida negativa* si se satisface que:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \leq 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (2.29)$$

- A es *semi definida negativa* cuando cumple:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} < 0, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{x} \neq 0. \quad (2.30)$$

Tenemos criterios los cuales consideran la utilización de determinantes, para definir una matriz, uno de ellos es;

Teorema 2.1. *Criterio de Sylvester considerando A y $\det(A)$, entonces,*

- Si $\det(A) > 0$ para $n = 1 \dots m$, entonces A es *definida positiva*.
- Si $(-1)^n \det(A) < 0$ para $n = 1 \dots m$, entonces A es *definida negativa*.

De nuestro Ejemplo (2.1.2.1.) tenemos una matriz $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$ que cumple con ser simétrica, por tanto podemos estudiar como esta definida.

Tenemos que

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Obteniendo el determinante :

$$\det(A) = 10 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 10 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$\det(A) = 10(6) - 2(22) + 1(-5).$$

$$\det(A) = 60 - 44 - 5 = 11.$$

El $\det(A) = 11$, podemos decir que $\det(A) > 0$ entonces nuestra matriz A es definida positiva.

Definición 2.4. Sea $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$, se dice que A

- Es estrictamente diagonal dominante si y solo si:

$$|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.31)$$

- Es diagonalmente dominante si y solo si:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.32)$$

Con el propósito de entender la definición, partimos nuevamente, de la matriz del Ejemplo (2.1.2.1.), para identificar si cumple o no, una de los dos condiciones. Para esto tomaremos cada término de la diagonal de la matriz A y vemos que:

- $|10| > |2| + |1| = 3$. Cumple la primera condición.
- $|1| > |2| + |-2| = 4$. No cumple ninguna condición.
- $|-2| > |1| + |10| = 11$. No cumple ninguna condición.

Como no todas las filas cumplieron una de las condiciones, concluimos que la matriz A no es estrictamente diagonal dominante ni diagonalmente dominante.

En capítulos posteriores se hará uso de las definiciones tales como matriz tridiagonal, simétrica y definida positiva, para probar criterios que ayudarán hablar sobre la existencia de la matriz inversa.

2.1.2.2. Criterios de invertibilidad

Mostraremos, a continuación, algunos criterios sobre la existencia de la matriz inversa y sus múltiples funciones para el estudio de matrices.

Definición 2.5. Una matriz A es *invertible* o *no singular* si existe una matriz A^{-1} de A , tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I. \quad (2.33)$$

donde A^{-1} se denomina matriz inversa de A .

El cálculo de la inversa de una matriz viene dado por $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{Adj}(A)^T$.

A continuación veremos un ejemplo,

Ejemplo. Consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, y vemos que su determinante es:

$$\begin{aligned} \det(A) &= 1[(5)(9) - (8)(4)] - 2[(6)(9) - (7)(4)] + 3[(6)(8) - (7)(5)] \\ &= 1(13) - 2(26) + 3(13) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Al obtener como resultado del determinante cero, no se puede hallar la inversa, pues al reemplazar en la fórmula obtenemos un valor indefinido.

Para dar solución a esta inconsistencia planteamos la siguiente definición.

Definición 2.6. A es una *matriz singular* si y sólo si $\det(A) = 0$.

Entonces en el Ejemplo (2.1.2.2.) la matriz A es una matriz singular.

Proposición 2.1. Si A tiene inversa, la inversa es única.

Demostración. Sean B y C inversos de A , entonces por definición de invertibilidad,

$$AB = BA = I,$$

$$AC = CA = I.$$

Entonces si tomamos B le multiplicamos por la identidad y sustituimos convenientemente tenemos:

$$B = BI = B(AC).$$

Luego, asociamos BA y reemplazamos por la Identidad,

$$B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Por transitividad arribamos a:

$$B = C.$$

Obteniendo que las matrices inversas de A coinciden, lo que indica que A tiene una única matriz inversa. \square

Adicionalmente entre las propiedades más importantes tenemos las siguientes :

Proposición 2.2. Sea $A \in M(\mathbb{R})_{n \times n}$, se tiene que:

- i) A es invertible si A es estrictamente diagonal dominante ó es simétrica y definida positiva.*
- ii) A es ortogonal si y sólo si satisface que A es invertible y $\|A\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.*

Demostración. La demostración detallada de la proposición se encuentra en el libro Análisis Numérico de Hernán Benalcazar, el item *i*) en a la página 333; mientras que, el literal *ii*) esta en las páginas 337 – 338. \square

Por otra parte, a partir de la definición de valores propios se pueden dar resultados análogos a los mencionados en esta sección, por lo que introducimos las siguientes definiciones:

Definición 2.7. Sea A una matriz cuadrada . El número real λ es un valor propio de A si existe un vector \mathbf{x} distinto de cero en \mathbb{R}^n tal que:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{2.34}$$

Todo vector $\mathbf{x} \neq 0$ que satisfaga (2.34) es un vector propio de A , asociado con el valor propio λ .

Definición 2.8. Sea $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$. Entonces λ es un valor propio de A si y sólo si:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = |A - \lambda I| = 0. \tag{2.35}$$

en donde $p(\lambda)$ se lo conoce como polinomio característico de A .

Es decir, los valores propios de A son las soluciones del polinomio característico de A . Además como el polinomio característico es de grado n (puesto que la matriz A es de $n \times n$) por el Teorema Fundamental del Álgebra, tendrá n valores característicos. Podemos relacionar esta definición con

la de ser una matriz singular para facilitar el uso de estos criterios en demostraciones que impliquen a estos conceptos. A continuación mostramos una lista de resultados que son equivalentes.

Proposición 2.3. *Una matriz A es singular si y solo si 0 es un valor propio de A .*

Para comprender la proposición tomamos la matriz del ejemplo (2.1.2.2.) y verificamos que en efecto no es una matriz invertible (singular).

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. y en base a la Definición (2.8) observamos que el polinomio característico es:

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 6 & 5-\lambda & 4 \\ 7 & 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9-\lambda \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 6 & 5-\lambda \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \\ &= -\lambda^3 + 15\lambda^2 + 6\lambda + 11 \\ &= -\lambda(\lambda^2 + 15\lambda - 6) \\ &= -\lambda \left(\lambda - \frac{15 - \sqrt{249}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{15 + \sqrt{249}}{2} \right). \end{aligned}$$

De donde los valores propios son,

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{15 + \sqrt{249}}{2}, \quad \lambda_3 = \frac{15 - \sqrt{249}}{2}.$$

Puesto que el valor propio $\lambda_1 = 0$ gracias a la Proposición (2.3) podemos asegurar que A no es una matriz invertible.

Los valores propios también nos dan una alternativa para indicar si una matriz es definida positiva.

Definición 2.9. Una matriz A es definida positiva si y solo si todos los valores propios de A tienen parte real positiva.

Con el fin de entender este procedimiento, analizaremos una matriz.

Ejemplo. Tomamos la matriz del Ejemplo (2.1.2.1.) y en base a la Definición (2.8):

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 10 - \lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -2 & 10 - \lambda \end{vmatrix} \\
 &= (10 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ -2 & 10 - \lambda \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 10 - \lambda \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 - \lambda \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\
 &= -\lambda^3 + 21\lambda^2 - 111\lambda + 11 \\
 &= -(\lambda - 11)(\lambda^2 - 10\lambda + 1) \\
 &= -(\lambda - 11)(\lambda + (2\sqrt{6} - 5))(\lambda - (2\sqrt{6} + 5)).
 \end{aligned}$$

Luego al igualar esta expresión a 0 obtenemos los siguientes valores:

$$\lambda_1 = 11, \quad \lambda_2 = -2\sqrt{6} + 5, \quad \lambda_3 = 2\sqrt{6} + 5.$$

Queda claro que todos los valores propios de la matriz A son positivos, por tanto hemos comprobado que A es definida positiva.

Teniendo estas definiciones claras, podemos dar un paso al estudio de sistemas de ecuaciones y criterios que permitirán identificar cuando este tiene solución.

2.1.3. *Sistemas de Ecuaciones*

Con el fin de dar solución al análisis de la discretización de la Ecuación de Nagumo que estudiaremos adelante, es necesario comprender los sistemas de ecuaciones lineales y criterios basados en definiciones mencionadas en este documento que ayudan a dar solución al sistema de ecuaciones.

Consideramos el sistema de n ecuaciones con n incógnitas siguiente:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \quad (2.36)$$

Los (a_{ij}) son denominados los coeficientes del sistema (2.36), los x_i son las incognitas (o soluciones) y los b_i forman el segundo miembro.

Al sistema lineal (2.36) está asociado la ecuación matricial:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}. \quad (2.37)$$

donde la matriz A y los vectores \mathbf{x} y \mathbf{b} están definidos por:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \quad (2.38)$$

A continuación, mostramos resultados importantes relacionados entre valores propios e invertibilidad, que serán de ayuda para dar inicio a la solución de un sistema de ecuaciones en donde se espera conseguir un resultado que cumpla el objetivo de dar resultados, es por eso que es necesario identificar si el sistema tiene solución única para dar una respuesta clara y concisa. Para esto damos el siguiente resultado:

Proposición 2.4. *El sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tiene solución única para cada vector \mathbf{b} de $n \times 1$ si y sólo si la matriz A es invertible.*

Ahora, estudiaremos la definición de rango y como está conlleva a comprobar si un sistema de ecuaciones lineal dado de forma matricial tiene solución única.

Proposición 2.5. *Sea $A \in M_{n \times n}[\mathbb{R}]$, \mathbf{x}, \mathbf{b} vectores, tenemos:*

- El sistema lineal $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tiene una solución única si y sólo si $\text{rang}(A) = n$.
- El sistema homogéneo $A\mathbf{x} = 0$ de n ecuaciones lineales con n incógnitas tiene una solución no trivial si y sólo si $\text{rang}(A) < n$.

La proposición vista de otra manera indica que si el $\text{rang}(A) = n$, entonces el sistema lineal tendrá n valores que satisfagan a este. Y además decimos que se tiene solución trivial cuando el vector \mathbf{x} da como respuesta $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, entonces se dice solución no trivial cuando se obtiene valores diferentes.

Teorema 2.2. Para que el sistema (2.37) admita una y sólo una solución es necesario y suficiente que $\det(A) \neq 0$. En este caso la matriz A es invertible y la única solución está dada por $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Cuando un sistema admite una solución única entonces tenemos un solo punto de cruce que nos ayuda a obtener mejor eficacia al momento de analizarlo, las proposiciones vistas y el completo entendimiento de estas nos serán de gran utilidad al momento de estudiar la ecuación de Nagumo.

2.1.4. Soluciones de tipo onda viajera

Para obtener las soluciones teóricas de la Ecuación de Nagumo es necesario comentar acerca de las soluciones de onda viajera, estas se adquieren a partir de resolver un modelo correspondiente a un sistema específico.

Para obtener las soluciones numéricas de las Ecuación de Nagumo es necesario recordar que esta ecuación describe los impulsos eléctricos presentes en las fibras nerviosas y esto nos direcciona a considerar las soluciones teóricas de esta ecuación como funciones periódicas que se desplazan a una velocidad constante sin ninguna restricción. A este tipo de funciones se las denomina soluciones de onda viajera que consecuentemente nos lleva a la siguiente definición

Definición 2.10. Las soluciones de onda viajera son expresiones de la forma:

$$u(x, t) = U(z) + c. \quad (2.39)$$

Donde $U(z)$ es una función de n - variables, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ representa al dominio espacial mientras que t es el temporal, y la velocidad de onda es determinado como c .

Denominamos onda estacionaria en el caso en que $c = 0$, este tipo de ondas no se propagan, es

decir es el resultado de superponer una onda sobre otra, con la particularidad de que dichas ondas tiene las mismas características pero con diferente dirección.

Definición 2.11. Se presentan los diferentes tipos de onda:

1. *Frente de onda* es aquella onda en donde existen los límites como:

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} U(z) = u_l \quad \lim_{z \rightarrow +\infty} U(z) = u_r$$

con $u_l \neq u_r$.

2. *Onda de pulso* es aquella en donde $u_l = u_r$, son iguales.

3. *Onda espacialmente periódica* si la onda exhibe periodicidad con $U(z + F) = U(z)$ con $F > 0$

Es así como de acuerdo a los parámetros que se cumplan podemos conocer el tipo de onda con la cuál estamos tratando. En lo que resta del documento, $U(z)$ será una función unidimensional y además denotaremos a $\lim_{z \rightarrow -\infty} U(z)$ como $U(-\infty)$ y a $\lim_{z \rightarrow +\infty} U(z)$ como $U(\infty)$.

2.1.5. Existencia y Unicidad

Aquí comentaremos la existencia y unicidad de soluciones para la ecuación de Nagumo. En cuanto a la existencia, nos referimos a establecer parámetros que permitan encontrar una solución de problemas con valores iniciales. En cambio, cuando hablamos de unicidad decimos que la solución encontrada es única, es decir para la existencia y unicidad de soluciones es suficiente hacer ver que una ecuación tendrá soluciones bajo ciertas condiciones y estas serán únicas. Para esto hay que notar que la Ecuación de Nagumo es un caso particular de la ecuación de reacción-difusión (Xinfu y Jong-Shenq, 2005: pp.62-84), siguiente:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + f(u). \quad (2.40)$$

En la cual analizaremos la existencia y unicidad de soluciones que están definidas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Según la naturaleza de la función $f(u)$ se obtendrán modelos matemáticos diferentes, por ejemplo, si tomamos $f(u) = u(1 - u)(\alpha - u)$ con $\alpha = \frac{1}{2}$, se obtiene la ecuación de Allen-Cahn.

La ecuación (2.40) en modelos biológicos suele ser escrita como:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial v^2}{\partial x^2} + g(v), \quad g(v) = f(1 - v).$$

donde $v = 1 - u$ representa la densidad de población. Tomamos como referencia el modelo KPP que corresponde al crecimiento logístico: $g(v) = v(1 - v)$ dicho de otra forma, $f(u) = g(1 - u) = u(1 - u)$.

Si asumimos que $f(0) = f(1) = 0 < f'(0)$, en donde la condición $f'(0) > 0$ (es decir $g'(1) < 0$), tendremos que el estado estacionario homogéneo $u = 0$ (es decir $u = 1$) es estable. Al hablar de estado estacionario homogéneo nos referimos a que los parámetros en estudio no varían a través del tiempo.

Por otra parte cuando $u = 0$ y $u = 1$ suceden dos casos diferentes en las soluciones, cuando $f'(1) > 0$ (es decir $u \equiv 1$) es un estado estacionario estable, por tanto existirá competencia entre dos puntos estables; cuando u se aproxime a 1 y donde u se aproxime a 0. Mientras que cuando $f'(1) < 0$, (es decir $u \equiv 1$), es un estado estacionario inestable, es decir, la región donde u se aproxime a 1 se contrae y donde u se aproxime a cero se expande.

Por otra parte, las interacciones de estados constantes se describen de mejor manera mediante ondas viajeras, dado que estas son ejemplos de soluciones que están definidas para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Ahora suponemos que $u \equiv 0$ es mas estable que $u \equiv 1$. Entonces, para verificar que (2.40) tiene al menos una onda viajera de velocidad positiva creciente, consideramos $u(x, t) = U(x - ct)$ donde c y U satisfacen:

$$\begin{cases} U \in C^2(\mathbb{R}), & c > 0, & U' > 0 \in \mathbb{R}, \\ U''(z) + cU'(z) = f(U(z)) & \forall z \in \mathbb{R}, \\ U(-\infty) = 0, & U(\infty) = 1, & U(0) = \theta \in (0, 1). \end{cases} \quad (2.41)$$

Entonces, cuando $f'(1) > 0$, el sistema tendrá una solución, en cambio, cuando $f'(1) < 0$ el sistema admitirá infinitas soluciones.

Por otro lado, en (Xinfu y Jong-Shenq, 2003: pp.123-146), se obtiene la unicidad de soluciones enteras bajo las siguientes condiciones:

Existen constantes $d > 0$ y $T \in \mathbb{R}$ y funciones $l(\cdot) = f'(1) > 0$ y $r(\cdot) = f'(1) < 0$ tal que para todo $t \leq T$ se tiene:

$$\begin{cases} u(x, t) \leq \alpha_0 & \forall x \in]-\infty, l(t)] \cup [r(t), \infty[, \\ u(x, t) \geq \beta_0 & \forall x \in [\min\{l(t) + d, r(t) - d\}, \max\{l(t) + d, r(t) - d\}], \end{cases} \quad (2.42)$$

en donde α_0 y β_0 son constantes que satisfacen:

$$f \neq 0 \quad \text{en }]0, \alpha_0] \cup]\beta_0, 1[. \quad (2.43)$$

Teniendo esto en cuenta, procedemos a presentar de manera formal los resultados que garantizan la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Nagumo (4.1).

Teorema 2.3. *Existencia.* Si $f \in C^2(\mathbb{R})$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$ y el sistema (2.41) admita una solución (c, U) . Entonces (2.40) tiene una solución $u = V$ definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisface:

$$\begin{cases} V(x, t) = V(-x, t), & V_t(x, t) < cV_x(x, t) < 0 \quad \forall x > 0, t \in \mathbb{R}, \\ V(x, t + h(t)) < U(x - ct)U(-ct - x) < V(x, t - h(t)) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t < 0, \end{cases} \quad (2.44)$$

donde $h(t) = M[1 - U(c|t|)]$ con M una constante positiva.

Demostración. La demostración de este teorema se la encuentra en el artículo Existence and uniqueness of entire solutions for a reaction–diffusion equation de Xinfu Chena, Jong-Shenq Guob, en la página 76. □

Este teorema nos indica que una vez obtenido que el sistema resultante al hacer el estudio de las ondas viajeras, presenta una solución, dicho resultando sucede en todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, que cumplen las condiciones mencionadas.

Conociendo que en la ecuación existe una solución, lo siguiente es hacer ver que esta sea única, para lo cual nos ayudamos del siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Unicidad.* Bajo las condiciones del Teorema 2.3. Si V es una solución definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no trivial de la ecuación (2.40) y de (2.42) entonces para algún $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ se cumple:

$$u(x, t) = V(x_0 + x, t_0 + t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2. \quad (2.45)$$

Demostración. La demostración de este teorema se la encuentra en el artículo Existence and uniqueness of entire solutions for a reaction–diffusion equation de Xinfu Chena, Jong-Shenq Guob, en la página 82. □

Este teorema indica que una vez conocida la solución de la ecuación, es suficiente hacer ver que esta es única en puntos específicos de la región.

Una vez estudiado la existencia y unicidad de soluciones de onda viajera, hablaremos de las soluciones aproximadas de la ecuación de Nagumo 4.1, para esto revisamos el método de diferencias finitas.

2.1.6. Método de diferencias finitas

Haremos una breve exposición sobre como la diferenciación numérica nos permite aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias y ecuaciones en derivadas parciales. A su vez presentamos resultados referente a las normas que serán de utilidad en este capítulo.

Definición 2.12. Toda función

$$g : \begin{cases} \tau(n) & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x_j & \longrightarrow g(x_j) = y_j \end{cases},$$

se llama función reticular, la cual se escribirá como sigue $\mathbf{g} = (g(x_0), \dots, g(x_n))$ o bien $\mathbf{g} = (y_0, \dots, y_n)$. Donde $\tau(n) = \{x_j = jh | j = 0, 1, \dots, n\}$ es el conjunto de nodos de $[0, L]$.

Además, denotamos con V_h al conjunto de todas las funciones reticulares definidas en $\tau(n)$. Con las operaciones de funciones: adición y producto por escalares, V_h espacio vectorial de dimensión $n + 1$. Denotamos con $V_0 = \{g \in V_h | g(0) = g(L) = 0\}$.

Se define las siguientes normas:

$$\|g\|_{\infty} \text{ para la norma infinito en donde } \|g\|_{\infty} = \max_{i=1, \dots, n-1} |g(x_i)|.$$

$$\|g\|_2 \text{ para la norma 2 donde } \|g\|_2 = \left[\sum_{i=1}^{n-1} h g^2(x_i) \right]^{1/2}.$$

$$\|g\|_{1,2} \text{ para la norma 1,2 donde } \|g\|_{1,2} = \left[\sum_{i=0}^{n-1} h \left(\frac{g(x_{i+1}) - g(x_i)}{h} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

A continuación, presentamos un resultado en el cual se indica que las normas 2, infinito y 1,2 son equivalentes.

Teorema 2.5. Para todo $f \in V_0$ verificamos que

$$L^{1/2} \|f\|_2 \leq \|f\|_{\infty} \leq L^{1/2} \|f\|_{1,2}.$$

La demostración detallada del teorema se encuentra en el libro *Análisis Numérico* de Hernán Benalcazar, páginas 546 – 547.

2.1.6.1. Problemas con valores en la frontera 1D

El método de diferencias finitas, uno de los primeros métodos en ser implementados para la resolución numérica permite discretizar ecuaciones diferenciales ordinarias como en derivadas parciales para problemas unidimensionales, bidimensionales y tridimensionales, hace que sea posible un tratamiento más simple de la ecuación.

Se iniciará definiendo los operadores en diferencias finitas, que posteriormente serán aplicados en problemas con valores de fronteras 1d. Ahora se considera la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{du^2}{dx^2} + qu = f \quad \text{sobre }]0, L[, \quad L > 0 \quad (2.46)$$

con $L > 0, q, f \in C([0, L])$ dados de tal manera que $p(x) \geq \alpha > 0 \quad \forall x \in [0, L]$, y $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, L]$.

Con el fin de comprender de forma correcta la idea de consistencia, convergencia y estabilidad se modelará un problema en el cual se supondrá que se tiene el conocimiento de existencia, unicidad y regularidad de la solución, y se considerarán las siguientes condiciones de frontera:

1. Condiciones de frontera de Dirichlet: $u(0) = a_0, \quad u(L) = a_1$
2. Condiciones de frontera de Neumann: $u'(0) = a, \quad u'(L) = b$
3. Condiciones de frontera mixtas: $u'(0) + \alpha u(0) = a \quad u'(L) + \beta u(L) = b$
4. Condiciones de frontera periódicas: $u(0) = u(L), \quad u'(0) = u'(L)$. Para lo cual las funciones p, q, r, f se extienden periódicamente, conservando la continuidad por todo \mathbb{R} , con:

$$\begin{aligned} u(x+L) &= u(x) & \forall x \in \mathbb{R} \\ u'(x+L) &= u'(x) & \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Nuestro interés es aproximar numéricamente el siguiente problema con valores en la frontera:

$$\text{hallar } u \in C^2([0, L]) \text{ solución de } \begin{cases} -u'' + qu = f & \text{sobre }]0, L[\\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases}, \quad (2.47)$$

donde $f, q \in C([0, L])$ con $q(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, L]$.

Mediante este problema pondremos en marcha el método de diferencias finitas. Sean $n \in \mathbb{Z}^+$, $h = \frac{L}{n}$ y $x_j = jh$, $i = 0, 1, \dots, n$. Ponemos $\tau(n) = x_i = ih \quad |i = 0, 1, \dots, n$, y por la fórmula central de segundo orden decimos que:

$$u''(x_i) = \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + r_h(x_i), \quad \text{con } i = 1, \dots, n-1$$

Y con la discretización obtenemos que

$$\begin{cases} -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + q(x_i)u(x_i) + r_h(x_i) = f(x_i), & i = 1, \dots, n-1 \\ u(0) = 0, \quad u(L) = 0 \end{cases}$$

Desconocemos $u(x_i)$ lo que necesitaremos es que

$$r_h(x_i) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Nuestro esquema numérico es :

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + q(x_i)u_i & i = 1, \dots, n-1, \\ u_0 = 0, \quad u_n = 0 \end{cases}$$

Lo cual denota con u_i a la aproximación $u(x_i)$ y asumiendo $r_h(x_i) \simeq 0$, y luego para $i = 1$ tenemos que

$$\left[\frac{2}{h^2} + q(x_1) \right] u_1 - \frac{1}{h^2} u_2 = f(x_1).$$

Mientras que para $1 < i < n-1$,

$$-\frac{1}{h^2} u_{i-1} + \left[\frac{2}{h^2} + q(x_i) \right] u_i - \frac{1}{h^2} u_{i+1} = f(x_i).$$

Y con valores de $i = n-1$

$$-\frac{1}{h^2} u_{n-2} + \left[\frac{2}{h^2} + q(x_{n-1}) \right] u_{n-1} = f(x_{n-1}).$$

La ecuación escrita de forma matricial será $A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}$, donde la matriz A_h es de $(n-1) \times (n-1)$ tridiagonal, simétrica, una vez que demos que es definida positiva diremos que el sistema de ecuaciones tiene una única solución $\mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^{n-1}$ mientras que en forma matricial estarán escritas de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{h^2} + q(x_1) & -\frac{1}{h^2} & 0 & \cdots & 0 \\ -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q(x_2) & -\frac{1}{h^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{1}{h^2} \\ 0 & \cdots & \cdots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2} + q(x_{n-1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-2} \\ u_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_{n-2}) \\ f(x_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

En donde el vector dado por $\mathbf{u}_h = (u_1, \dots, u_{n-1})^T$, y el de $\mathbf{b} = (f(x_1), \dots, f(x_{n-1}))^T$ mientras que $A_h = (a_{ij}(h))$ con

$$a_{ii}(h) = \frac{2}{h^2} + q(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

$$a_{i-1i}(h) = a_{i+1i}(h) = -\frac{1}{h^2}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

2.1.6.2. Consistencia, Estabilidad y Convergencia

Definimos ya nuestro modelo del problema (2.1.6.1.), lo que haremos ahora es realizar el esquema numérico que aproxima la solución u de la siguiente forma :

$$\begin{cases} -\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + q(x_i)u_i = f(x_i) & i = 1, \dots, n-1, \\ u_0 = u_n = 0. \end{cases} \quad (2.48)$$

Con $h = \frac{L}{n}$ tal que $n \in \mathbb{Z}^+$, para el esquema matricial $\mathbf{u}_h = (u_1, \dots, u_{n-1})^T$ el vector u_h dado de la forma $\mathbf{b} = (f(x_1), \dots, f(x_{n-1}))$, $A_h = (a_{ij}(h))$, la matriz definida de la forma:

$$a_{ii}(h) = \frac{2}{h^2} + q(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

$$a_{i+1i}(h) = a_{i-1i}(h) = -\frac{1}{h^2}, \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Es así como el esquema numérico de forma matricial (2.48) estará escrito de la siguiente forma

$$A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}.$$

Una vez que hemos revisada esta parte, veremos las definición para la consistencia.

Definición 2.13. Sea el vector constituido por la solución exacta en los puntos x_i , $i = 0, \dots, n$. $\mathbf{U}_h = (u(x_0), \dots, u(x_n))^T$ definimos:

$$\mathbf{e}_h = \mathbf{U}_h - \mathbf{u}_h \quad \text{el error sobre la solución numérica .}$$

$$\mathbf{r}_h = A_h \mathbf{U}_h - \mathbf{b} \quad \text{el error de consistencia.}$$

Una vez definidos los errores, podemos dar un paso a las siguientes definiciones.

Definición 2.14. Consistencia: Diremos que un esquema:

1. Es consistente para una norma $\| \cdot \|$ de V_0 , si se cumple que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \| \mathbf{r}_h \| = 0.$$

2. Tiene una consistencia de orden $m > 0$, si existe una constante $c_1 > 0$ independiente del valor de h , tal que:

$$\| \mathbf{r}_h \| \leq c_1 h^m, \quad \forall h > 0.$$

Para entender la definición presentamos el siguiente análisis.

Sea $\mathcal{L} : C^2([0, L]) \rightarrow C^0([0, L])$, el operador diferencial definido por $\mathcal{L}_1 u = -u'' + qu$. Así para $x \in [0, L]$, tenemos $\mathcal{L}_1 u(x) = -u''(x) + q(x)u(x)$. Por otra parte, denotamos con $\mathcal{L}_2 : (]0, L]) : C^0([0, L]) \rightarrow \mathbb{R}$ al operador definido por:

$$\mathcal{L}_2 u(x) = -\frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + q(x)u(x).$$

donde $h > 0, x-h, x+h \in [0, L]$.

Al discretizar con la fórmula central de primer orden (2.7), en donde $\mathcal{L}_1 u(x_i) = f(x_i)$, con $i = 1, \dots, n-1$, obtenemos:

$$\mathcal{L}_2 u(x_i) = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + q(x_i)u(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1$$

Por definición de consistencia, tenemos que el operador \mathcal{L}_2 aproxima al operador diferencial \mathcal{L}_1 cuando $h \rightarrow 0$. Para decir esto de una manera formal, escribimos el siguiente teorema.

Teorema 2.6. *Supongamos que u , solución del sistema, es de clase $C^4([0, L])$. Entonces:*

$$\| \mathbf{r}_h \|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \| u^4 \|_{L^\infty(0, L)} \quad (2.49)$$

$$\| \mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1 \|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \| u^4 \|_{L^\infty(0, L)} \quad (2.50)$$

Demostración. Mostraremos que se tiene la relación: $\|\mathbf{r}_h\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \|u^{iv}\|_{L^\infty(0,L)}$.

Por la definición de \mathbf{r}_h , se tiene:

$$\mathbf{r}_h = A_h \mathbf{U}_h - \mathbf{b}. \quad (2.51)$$

Así,

$$\mathbf{r}_{ih} = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + q(x_i)u(x_i) - f(x_i). \quad (2.52)$$

Por otra parte,

$$-u''(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in]0, L].$$

Al discretizar,

$$-u''(x_i) + q(x_i)u(x_i) = f(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.53)$$

Al restar (2.53) de (2.52), obtenemos:

$$\mathbf{r}_{ih} = u''(x_i) - \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}. \quad (2.54)$$

Ahora, al tomar la fórmula central de segundo orden, obtenemos:

$$\begin{aligned} u''(x_i) &= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} - \frac{1}{12}h^2 u^4(\xi), & x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}, \\ u''(x_i) - \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} &= -\frac{1}{12}h^2 u^4(\xi), & x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}. \end{aligned}$$

De donde,

$$\mathbf{r}_{ih} = -\frac{1}{12}h^2 u^4(\xi), \quad x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}. \quad (2.55)$$

Y a su vez vemos que:

$$|\mathbf{r}_{ih}| \leq \frac{1}{12}h^2 \|u^4(\xi)\|_{L^\infty(0,L)}.$$

Al tomar la norma infinito arribamos a la desigualdad deseada $|r_h|$ y así

$$\|\mathbf{r}_{ih}\|_\infty \leq \frac{1}{12}h^2 \|u^4(\xi)\|_{L^\infty(0,L)}. \quad (2.56)$$

Ahora, para mostrar que $\|\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_1\|_\infty \leq \frac{h^2}{12} \|u^4\|_{L^\infty(0,L)}$, tomamos:

$$\mathcal{L}_1 u(x_i) = -u''(x_i) + q(x_i)u(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1, \quad (2.57)$$

$$\mathcal{L}_2 u(x_i) = -\frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2} + q(x_i)u(x_i), \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (2.58)$$

Así al restar $\mathcal{L}_1 u(x_i)$ de $\mathcal{L}_2 u(x_i)$, obtenemos:

$$\mathcal{L}_2 u(x_i) - \mathcal{L}_1 u(x_i) = u''(x_i) - \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}))}{h^2}. \quad (2.59)$$

Así observamos que, $\mathcal{L}_2 u(x_i) - \mathcal{L}_1 u(x_i) = \mathbf{r}_{ih}$. Por tanto:

$$|\mathcal{L}_2 u(x_i) - \mathcal{L}_1 u(x_i)| \leq \frac{1}{12} h^2 \|u^4(\xi)\|_{L^\infty(0,L)}.$$

Al considerar la norma infinito obtenemos:

$$\|\mathcal{L}_2 u(x_i) - \mathcal{L}_1 u(x_i)\|_\infty \leq \frac{1}{12} h^2 \|u^4(\xi)\|_{L^\infty(0,L)}.$$

□

Este teorema de consistencia muestra que al obtener una solución que sea de clase C^4 , su orden de consistencia sera 2.

Ahora bien, daremos un paso al estudio de la estabilidad, con un concepto que indica las condiciones para que un esquema numérico sea estable.

Definición 2.15. Estabilidad: Sean $\|\cdot\|_{h,1}, \|\cdot\|_{h,2}$, dos normas. Se dice que un esquema numérico es estable con respecto a las normas, si existe una constante $C > 0$ independiente de h , tal que,

$$\|A_h^{-1} \mathbf{u}_h\|_{h,1} \leq C \|\mathbf{u}_h\|_{h,2}, \quad \forall \mathbf{u}_h \in V, \quad \forall h > 0. \quad (2.60)$$

Así mismo, damos la definición para determinar cuando un esquema numérico es convergente.

Definición 2.16. Convergencia: Sean $\|\cdot\|$ una norma en V decimos que:

- El esquema numérico es convergente con respecto de la norma $\|\cdot\|$ si se tiene que $\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{e}_h\| = 0$.

- El esquema numérico tiene un orden de convergencia $p > 0$, si existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que $\|\mathbf{e}_h\| \leq Ch^p, \quad \forall h > 0$.

Ahora planteamos el siguiente teorema, el cual nos ayudará a verificar que la forma matricial de un esquema numérico tiene solución única.

Teorema 2.7. *El sistema de ecuaciones $A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}$ tiene una única solución.*

Demostración. La demostración se la hace en base al esquema numérico (2.48). Para esto probaremos que A_h es invertible, para lo cual mostraremos que es simétrica y definida positiva. Para la simetría basta hacer ver que $A_h = A_h^T$, lo cual es evidente, puesto que por la forma matricial tridiagonal de A_h su transpuesta resulta ser la misma matriz.

En cuanto a ser definida positiva, mostraremos que:

$$\mathbf{u}_h^T A_h \mathbf{u}_h > 0, \quad \forall \mathbf{u}_h \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad \mathbf{u}_h \neq \mathbf{0}. \quad (2.61)$$

Entonces, si $\mathbf{u}_h = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n-1}, u_0 = u_n = 0$, tenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T A \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^{n-1} u_i \cdot \sum_{i=1}^{n-1} -\frac{u_{i-1}}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + q(x_i) \right) u_i - \frac{u_{i+1}}{h^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} u_i \cdot \left(-\frac{u_{i-1}}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + q(x_i) \right) u_i - \frac{u_{i+1}}{h^2} \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} u_i \left(-\frac{u_{i-1}}{h^2} + \frac{2}{h^2} u_i + q(x_i) u_i - \frac{u_{i+1}}{h^2} \right). \end{aligned}$$

Agrupamos términos convenientemente y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^T A \mathbf{u} &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{h^2} u_i (-u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2 \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i (u_i - u_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n-1} u_i (u_{i+1} - u_i) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2. \end{aligned}$$

Reescribimos la sumatoria del primer término,

$$\mathbf{u}^T A_h \mathbf{u} = \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^{n-2} u_{i+1} (-u_{i+1} - u_i) - \sum_{i=1}^{n-1} u_i (u_{i+1} - u_i) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2.$$

Puesto que $u_0 = u_n = 0$, vemos que

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} &= \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1} (-u_{i+1} - u_i) - \sum_{i=10}^{n-1} u_i (u_{i+1} - u_i) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2 \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1} (-u_{i+1} - u_i) - u_i (u_{i+1} - u_i) \right) + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2 \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} u_{i+1}^2 - 2u_i u_{i+1} + u_i^2 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2 \\
&= \frac{1}{h^2} \left(\sum_{i=0}^{n-1} (u_{i+1} - u_i)^2 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2.
\end{aligned}$$

Al reescribir nuevamente el primer término y por definición de norma, se sigue que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} &= \frac{1}{h} \left(\sum_{i=0}^{n-1} h \left(\frac{u_{i+1} - u_i}{h} \right)^2 \right) + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2 \\
&= \frac{1}{h} \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} q(x_i) u_i^2 \\
&\geq \frac{1}{h} \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Así $\mathbf{u}^T \mathbf{A} \mathbf{u} \geq \frac{1}{h} \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2$, $\forall \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\mathbf{u} \neq 0$. Con lo cual la matriz A_h esta definida positiva.

Finalmente por la Proposición (2.2) hemos obtenido que A es invertible, y por el Teorema (2.4) se obtiene que el sistema $A_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}$ tiene una única solución. \square

En cuanto al estudio de la estabilidad, este depende de la norma bajo la cual se trabaje, y existen criterios que permiten hacer este análisis y verificar cuando un esquema numérico es estable de una manera rápida y eficaz, tal es el caso del siguiente teorema.

Teorema 2.8. Para todo $\mathbf{u}_h \in V_0$, se cumple $\|A_h^{-1} \mathbf{u}_h\|_{1,2} \leq \|\mathbf{u}_h\|_2$, lo que indica estabilidad con respecto a las normas $\|\cdot\|_{1,2}$ y $\|\cdot\|_2$.

Demostración. Probaremos que para todo $\mathbf{u} \in V$, es decir que la norma de \mathbf{u} es la norma $\|\cdot\|_{1,2}$.

Definimos la matriz $B_{n-1 \times n-1} = (b_{ij})_{n-1 \times n-1}$ dada por:

$$\begin{aligned}
b_{ii} &= \frac{2}{h^2}, \quad i = 1, \dots, n-1, \\
b_{i,i-1} = b_{i-1,i} &= -\frac{1}{h^2}, \quad i = 2, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Luego observamos que:

$$\begin{aligned} h\mathbf{u}^T B\mathbf{u} &= h \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i \cdot \left(-\frac{u_{i-1}}{h^2} + \frac{2}{h^2}u_i - \frac{u_{i+1}}{h^2} \right) \right) \\ &= h \left(\frac{1}{h^2} \sum_{i=1}^{n-1} u_i \cdot (u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) \right). \end{aligned}$$

De donde por definición de norma $\|\cdot\|_{1,2}$ se sigue que:

$$h\mathbf{u}^T B\mathbf{u} = h \left(\sum_{i=1}^{n-1} u_i \cdot (u_{i-1} + 2u_i - u_{i+1}) \right) = h \left(\frac{1}{h} \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2 \right) = \|\mathbf{u}\|_{1,2}^2.$$

Obteniendo así que la norma de \mathbf{u} se encuentra en el espacio normado definido.

Ahora probaremos que $\|A_h^{-1}\mathbf{u}_h\|_{1,2} \leq \|\mathbf{u}\|_2$. Sea $\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{u}$, de donde $\mathbf{u} = A\mathbf{v}$, Además, $C = \text{diag}(q(x_1), \dots, q(x_n))$ y obtenemos, $A = B + C$. Tomamos:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^T \mathbf{u} &= \mathbf{v}^T \\ &= \mathbf{v}^T (B + C)\mathbf{v} = (\mathbf{v}^T B + \mathbf{v}^T C)\mathbf{v} = \mathbf{v}^T B\mathbf{v} + \mathbf{v}^T C\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Por la norma $\|\cdot\|_{1,2}$ tenemos que:

$$\mathbf{v}^T \mathbf{u} = \frac{1}{h} \|\mathbf{v}\|_{1,2}^2 + \mathbf{v}^T C\mathbf{v}.$$

Multiplicamos por h y haciendo uso de las propiedades de norma vemos que,

$$h\mathbf{v}^T \mathbf{u} = \|\mathbf{v}\|_{1,2}^2 + h\mathbf{v}^T C\mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|_{1,2}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} hq(x_i)v_i^2 \geq 0.$$

Por otro lado, al aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz, obtenemos:

$$h\mathbf{v}^T \mathbf{u} \leq \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{u}\|_2.$$

Además se tiene,

$$\|\mathbf{v}\|_{1,2}^2 \leq \|\mathbf{v}\|_{1,2}^2 + \sum_{i=1}^{n-1} hq(x_i)v_i^2 \leq \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{u}\|_2.$$

Por propiedades de norma tenemos, que $\|\mathbf{v}\|_2 \leq \|\mathbf{v}\|_{1,2}$, así:

$$\|\mathbf{v}\|_{1,2}^2 \leq \|\mathbf{v}\|_2 \|\mathbf{u}\|_2 \leq \|\mathbf{v}\|_{1,2} \|\mathbf{u}\|_2.$$

De donde,

$$\|\mathbf{v}\|_{1,2} \leq \|\mathbf{u}\|_2.$$

Finalmente, al reemplazar \mathbf{v} obtenemos,

$$\|A_h^{-1} \mathbf{u}_h\|_{1,2} \leq \|\mathbf{u}_h\|_2.$$

□

Análogamente podemos estudiar la estabilidad mediante la siguiente definición:

Definición 2.17. (Estabilidad de Von Neuman). Denominamos condición de estabilidad de Von Neuman a la desigualdad

$$|A(k)| \leq 1 \quad \text{para todo los } k \in \mathbb{Z},$$

donde $A(k) = u(x)e^{2i\pi x}$ representa la amplificación.

Si la condición se satisface (con posibles restricciones para Δx y Δt) el esquema es estable para la norma L^2 , de lo contrario se dice inestable. Para complementar este estudio se establecerá una condición necesaria para la convergencia al resolver ciertas ecuaciones diferenciales parciales numéricamente mediante el método de diferencias finitas.

Definición 2.18. La condición de Courant-Friedrichs-Lewy: Es una condición que permite establecer que, dada una discretización espacial, no se debe tomar un paso de tiempo mayor que alguna cantidad computable.

Se debe tener en cuenta que si no se elige de manera adecuada los pasos de discretización espacial y temporal, el esquema puede no converger.

Definición 2.19. Un esquema numérico se dice convergente si es consistente y estable.

Se ha probado que el esquema numérico $A_h \mathbf{U}_h = \mathbf{B}$ es consistente bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$, y a su vez que es estable bajo las normas $\|\cdot\|_{1,2}$ y $\|\cdot\|_2$, por tanto a partir de la definición (2.19), se dice que el esquema numérico es convergente.

Ahora bien, lo que se desea hacer a continuación es realizar el estudio de la estabilidad, consistencia y convergencia de los esquemas explícito, implícito, theta y Crank-Nicolson que aproximan la ecuación de Nagumo.

2.1.7. Discretización de diferencias finitas

Para la obtención de esquemas de métodos de diferencias finitas, vamos a realizar la discretización, que es el proceso de representar la solución por su valor en un conjunto discreto de puntos de la malla. La principal finalidad de la discretización es realizar una correcta adecuación para la evaluación numérica y facilitar su implementación en el ordenador.

Esta sección estará dedicada al estudio de los esquemas de diferencias finitas: explícito, implícito, esquema - theta y Crank Nicolson.

Nuestro primer paso es definir los pasos de discretización espacial, Δx , y de discretización temporal, Δt .

Definimos además como **Coordenada discreta** $(t_n, x_j) = (n \Delta t, j \Delta x)$ para $n \geq 0$, $j \in \mathbb{Z}$, a la **solución discreta en u_j^n** : $u(t_n, x_j)$, y la **solución exacta**: $u(t, x)$, $h = \Delta t$, cuando derivamos respecto a la variable temporal, $h = \Delta x$, cuando derivamos respecto al espacio.

2.1.7.1. Fórmulas de primer orden

Vamos a empezar con fórmulas de primer orden, las cuales derivaremos con respecto al tiempo. El análisis de esta fórmula será el mismo que se utilizará para todas:

Fórmula central de primer orden

Por un desarrollo de Taylor alrededor del punto $(t + \Delta t)$ y $(t - \Delta t)$, tenemos que la solución exacta que viene dada como:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t - \Delta t, x)}{2 \Delta t} + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u(\xi_t, x)}{\partial t^3}, \quad t - \Delta t < \xi_t < t + \Delta t$$

Mientras que la solución discreta donde $u_j^n = u(t_n, x_j)$, es:

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2 \Delta t} + \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \frac{\partial u^3(\xi_t^n, x_j)}{\partial t^3}. \quad (2.62)$$

Lo que a su vez es:

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2 \Delta t}. \quad (2.63)$$

Fórmula progresiva de primer orden

Por un desarrollo de Taylor alrededor del punto $t + \Delta t$, tenemos la fórmula progresiva de primer orden respecto a la variable t dada por

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial u^2(\xi_t, x)}{\partial t^2}, \quad t < \xi_t < t + \Delta t.$$

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial t} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial u^2(\xi_t^n, x_j)}{\partial t^2}, \quad (2.64)$$

lo que indica,

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}. \quad (2.65)$$

Fórmula regresiva de primer orden

Por un desarrollo de Taylor alrededor del punto $t - \Delta t$, Tenemos la fórmula regresiva de primer orden respecto a la variable t , dada por

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(t, x)}{\partial t} &= \frac{u(t, x) - u(t - \Delta t, x)}{\Delta t} + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial u^2(\xi_t, x)}{\partial t^2}, \quad t - \Delta t < \xi_t < t, \\ \frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial t} &= \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial u^2(\xi_t^n, x_j)}{\partial t^2}. \end{aligned} \quad (2.66)$$

De donde,

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial t} \approx \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t}. \quad (2.67)$$

2.1.7.2. Fórmulas de segundo orden

Ahora estudiaremos las fórmulas de segundo orden, las cuales derivaremos con respecto al espacio.

Fórmula central de segundo orden

La deducción para esta fórmula será el mismo que se utilizará para las demás: A partir de un desarrollo de Taylor alrededor de los puntos $(x + \Delta x)$ y $(x - \Delta x)$, obtenemos la fórmula central de segundo orden dada por:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) + u(t, x - \Delta x)}{\Delta x^2} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4(t, \xi_x)}{\partial x^4}.$$

Con $x - \Delta x < \xi_x < x + \Delta x$.

Siendo esta la solución exacta, mientras que la solución discreta donde $u_j^n = u(t_n, x_j)$, nos da:

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4(t_n, \xi_{xj})}{\partial x^4}. \quad (2.68)$$

De donde,

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.69)$$

Fórmula progresiva de segundo orden

A partir de un desarrollo de Taylor alrededor de los puntos $x + \Delta x$ y $x + 2\Delta x$, obtenemos la fórmula progresiva de segundo orden dada por:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{u(t, x + 2\Delta x) + u(t, x) - 2u(t, x + \Delta x)}{\Delta x^2} - \Delta x \frac{\partial u^3(t, \xi_x)}{\partial x^3}.$$

Con $x < \xi_x < x + \Delta x$ y $u_j^n = u(t_n, x_j)$, nos da:

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{j+2}^n + u_j^n - 2u_{j+1}^n}{\Delta x^2} - \Delta x \frac{\partial u^3(t_n, \xi_{xj})}{\partial x^3}. \quad (2.70)$$

Lo cual es:

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+2}^n + u_j^n - 2u_{j+1}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.71)$$

Fórmula regresiva de segundo orden

A partir de un desarrollo de Taylor alrededor de los punto $x - \Delta x$ y $x - 2 \Delta x$, obtenemos la fórmula regresiva de segundo orden dada por:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial x^2} = \frac{u(t, x - 2 \Delta x) + u(t, x) - 2u(t, x - \Delta x)}{\Delta x^2} + \Delta x \frac{\partial u^3(t, \xi_x)}{\partial x^3}.$$

Con $x - \Delta x < \xi_x < x$ y $u_j^n = u(t_n, x_j)$, nos da:

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial x^2} = \frac{u_{j-2}^n + u_j^n - 2u_{j-1}^n}{\Delta x^2} + \Delta x \frac{\partial u^3(t_n, \xi_{x,j})}{\partial x^3}. \quad (2.72)$$

De donde:

$$\frac{\partial u(t_n, x_j)}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j-2}^n + u_j^n - 2u_{j-1}^n}{\Delta x^2}. \quad (2.73)$$

Lo revisado en este capítulo permitirá hacer el estudio de existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Nagumo, además las deducciones realizadas nos permitirán hallar los esquemas explícito, implícito, theta, Crank-Nicolson de la ecuación de Nagumo, y hacer el estudio de consistencia, estabilidad y convergencia de los esquemas.

CAPÍTULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo se enfocará en describir los fundamentos que justifican la metodología de este trabajo de investigación. En este documento consideramos principalmente la revisión bibliográfica de fuentes secundarias, para el entendimiento y descripción de los métodos en diferencias finitas; los cuales serán implementados en Python para la resolución de problemas concretos de la bibliografía, a fin de validar la eficacia de las implementaciones, lo que nos orienta a una metodología con un diseño de tipo documental con un enfoque cualitativo y nivel descriptivo.

3.1. Enfoque de investigación

La presente investigación se realizó bajo un enfoque cualitativo debido a que para su desarrollo no se utilizaron medidas numéricas, ni se impone en general la prueba de hipótesis como algo necesario para el proceso investigativo. El objetivo principal es la interpretación de los hechos y entender las bases teóricas que conllevan a la simulación numérica de la ecuación de Nagumo.

3.2. Nivel de investigación

Este trabajo de titulación tiene un nivel de investigación descriptivo puesto que se realiza el análisis y deducción e interpretación minuciosa de los métodos de diferencias finitas con la finalidad de encontrar aproximaciones numéricas de la ecuación de Nagumo.

3.3. Diseño de la investigación

La investigación consta de un diseño de tipo documental, debido a que se consideró la revisión bibliográfica de fuentes secundarias las cuales fueron recolectadas de documentos relacionados a tópicos de diferenciación numérica, métodos de diferencias finitas, ondas viajeras, consistencia, estabilidad y convergencia de esquemas numéricos, entre otros. La información se obtuvo principalmente de: libros, tesis, artículos, y demás. Para la redacción del documento se realizó un estudio teórico-práctico que considera el análisis detallado de los métodos de diferencias finitas para la resolución numérica de la ecuación de Nagumo, los cuales serán implementados en Python.

CAPÍTULO IV

4. MARCO DE ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

La ecuación de Nagumo es una ecuación de tipo no lineal de reacción y difusión, que nos facilita un modelo de transmisión de impulsos nerviosos, esta dada de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + u(1-u)(u-\alpha). \quad (4.1)$$

Con $0 < \alpha < \frac{1}{2}, x \in \mathbb{R}, t \geq 0$, y donde u representa la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la membrana celular.

Con base en las referencias teóricas propuestas vamos a realizar el estudio tanto de existencia y unicidad, como de estabilidad consistencia y convergencia de la Ecuación de Nagumo.

Existen diferentes lenguajes de programación que permiten implementar métodos en diferencias finitas como Phyton que gracias a su sintaxis amigable, código abierto y gráficas claras ha sido utilizado con éxito para resolver distintas aplicaciones que se modelan con ecuaciones diferenciales. Una vez realizado el estudio analítico se realizará la simulación en Python, en donde podremos analizar los resultados que los diferentes esquemas: explícito, implícito, esquema-theta y Cranck-Nicolson nos arrojan sobre la ecuación de Nagumo.

4.1. Existencia y Unicidad de soluciones de la Ecuación de Nagumo

Para el estudio de la existencia y unicidad de soluciones de la ecuación de Nagumo, observemos que la ecuación (4.1) puede ser escrita como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + u(1-u)(u-\alpha). \quad (4.2)$$

la cual es un caso particular de (2.40), donde $f(u) = u(1-u)(\alpha-u)$ con $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

Ahora bien, recapitulando lo mencionado en la sección de existencia y unicidad (2.1.5.), al realizar un análisis análogo de la ecuación de Nagumo con las condiciones homogéneas de Dirichlet, podemos afirmar que la Ecuación de Nagumo tiene soluciones exactas y estas son únicas.

Por un lado, tenemos que en la ecuación de Nagumo, $f(u) \in C^3(\mathbb{R})$, además se cumple que:

$$f(0) = 0(1-0)(\alpha \cdot 0) = 0, \quad (4.3)$$

$$f(1) = 1(1-1)(\alpha - 1) = 0. \quad (4.4)$$

A su vez la derivada de f viene dada por:

$$f'(u) = (1-2u)(\alpha - u) + (u - u^2). \quad (4.5)$$

Al evaluar la derivada en los puntos 0 y 1 vemos que:

$$f'(0) = (1-0)(\alpha - 0) + (0 - 0^2) = \alpha. \quad (4.6)$$

Puesto que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, se tiene que $f'(0) > 0$. Por otro lado observamos que

$$f'(1) = (1-2)(\alpha - 1) + (1 - 1^2) = 1 - \alpha. \quad (4.7)$$

Por tanto $f'(1) > 0$, lo que implica que el sistema (2.41) admita la existencia de una solución (c, U) . Entonces se cumplen las condiciones del Teorema (2.3) lo que implica que la ecuación de Nagumo con condiciones de Dirichlet no homogénea admite una solución $u = V$ que esta definida para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisface:

$$\begin{aligned} V(x, t) &= V(-x, t), \quad V_t(x, t) < cV_x(x, t) < 0 \quad \forall x > 0, t \in \mathbb{R}, \\ V(x, t + h(t)) &< U(x - ct)U(-ct - x) < V(x, t - h(t)) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t < 0, \end{aligned}$$

donde $h(t) = M[1 - U(c|t|)]$ con M una constante positiva.

Por otra parte, V es una solución no trivial, debido a que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, lo que hara que la solución sea distinto de cero. Es así como se cumplen las condiciones del Teorema (2.4), y obtenemos que para algún $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^2$ se cumple que:

$$u(x, t) = V(x_0 + x, t_0 + t) \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2.$$

Es decir la solución es única.

Los teoremas muestran que las soluciones de la ecuación de Nagumo existen y son únicas. Es decir, para cada solución aproximada, los valores existentes son únicos.

4.2. Soluciones Exactas de la Ecuación de Nagumo

Con la finalidad de comparar las soluciones analíticas con las numéricas de los esquemas de diferencias finitas de la ecuación de Nagumo, vamos a explicar como obtener una solución exacta de tipo onda viajera puesto que se conoce que esta ecuación tiene una resolución de frente de onda. Partimos entonces de la ecuación de Nagumo dada por:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + u(1-u)(u-\alpha). \quad (4.8)$$

Donde $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$ y $T \geq 0$ con condiciones de frontera donde $U(-\infty) \rightarrow 1$ $U(\infty) \rightarrow 0$. Una solución de onda viajera, viene dada de la forma:

$$u(x,t) = U(z). \quad (4.9)$$

Donde $z = x - ct$, reemplazando (4.9) en (4.8), obtenemos

$$-cU' = U'' + U(1-U)(U-\alpha). \quad (4.10)$$

La cual es una EDO de segundo orden dada por

$$U' = kU(1-U), \quad k \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Al diferenciar la ecuación conseguimos que :

$$U'' = kU' - 2kUU'. \quad (4.12)$$

Al sustituir (4.11):

$$U'' = k^2U(1-U) - 2k^2U^2(1-U).$$

Reemplazando (4.11) y (4.12) en (4.10), nos da:

$$-ckU(1-U) = k^2U(1-U) - 2k^2U^2(1-U) + U(1-U)(U-\alpha).$$

Factorizamos:

$$\begin{aligned}
ckU - ckU^2 + k^2U - 3k^2U^2 + 2k^2U^3 + U^2 - Ua + U^3 + U^2a &= 0 \\
(2k^2 - 1)U^3 + (-ck - 3k^2 + a + 1)U^2 + (ck + k^2 - a)U &= 0
\end{aligned}$$

Para que la EDO propuesta en la ecuación (4.11) satisfaga la (4.12) vamos a igualar los coeficientes de U , U^2 y U^3 a 0 :

Para U^3

$$\begin{aligned}
(2k^2 - 1) &= 0 \\
k &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

Para U^2

$$\begin{aligned}
(-ck - 3k^2 + a + 1) &= 0 \\
c &= k(2a - 1)
\end{aligned}$$

Para U

$$\begin{aligned}
(ck + k^2 - a) &= 0 \\
c &= k(2a - 1)
\end{aligned}$$

De donde obtenemos las siguientes relaciones

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c = k(2a - 1).$$

Para hallar la solución de la EDO (4.10), lo haremos mediante la EDO (4.11), para encontrar una solución para la Ecuación de Nagumo (4.8). Puesto que la ecuación EDO es separable, podemos integrarla, de modo que:

$$\int \frac{dU}{U(1-U)} = \int k dz.$$

Resolviendo la integral de la igualdad.

$$\ln(U) - \ln(U - 1) = kz + s$$

En donde s representa una constante de integración; con la finalidad de prevenir una discontinuidad vamos a definir el término $(1 - U)$ con $0 < U < 1$, entonces:

$$\begin{aligned}
 \ln(U) - \ln(1 - U) &= kz + s \\
 e^{\ln(U) - \ln(1 - U)} &= e^{kz + s} \\
 e^{\ln\left(\frac{U}{1 - U}\right)} &= e^{kz + s} \\
 \frac{U}{1 - U} &= e^{kz + s} \\
 U &= (1 - U)e^{kz + s} \\
 U &= \frac{e^{kz + s}}{1 + e^{kz + s}} = 1 - \frac{1}{1 + e^{kz + s}}.
 \end{aligned}$$

Y así:

$$u(x, t) = 1 - \frac{1}{1 + e^{k(x - ct) + s}}. \quad (4.13)$$

Con lo cual hemos encontrado una solución exacta para la ecuación (4.11). Es esta entonces una solución de la ecuación de Nagumo, como mencionamos tenemos la condición de que $U(-\infty) = 1$, $U(\infty) = 0$ y podemos decir que la onda resultante se propagará hacia el lado derecho del dominio espacial, con respecto al tiempo.

Existe además otra solución proporcionada por Kawahara y Tanaka en el año de 1983, en el artículo “Interactions of Traveling fronts: An exact solution of al nonlinear diffusion equation” páginas 311-314, la cual intenta describir las interacciones de las ondas de difusión no lineales aplicando el método directo de solución exacta de una ecuación que viene dada de la siguiente forma:

$$u(x, t) = \frac{Ae^{\Gamma_1} + \alpha Be^{\Gamma_2}}{Ae^{\Gamma_1} + Be^{\Gamma_2} + 1}. \quad (4.14)$$

Para la (4.14) se toman los valores de:

$$\Gamma_1 = \frac{\pm\sqrt{2}x + (1 - 2\alpha)t}{2} \quad \Gamma_2 = \frac{\pm\sqrt{2}\alpha x + \alpha(\alpha - 2)t}{2}$$

Notemos que tenemos valores positivos y negativos para Γ_1 y Γ_2 , esto se debe a que la ecuación de Nagumo, tiene dos soluciones de onda viajeras de difusión, con valor positivo para la onda viajera derecha y valor negativo para la onda viajera izquierda. Consideramos la condición inicial de la

forma:

$$u_0(x) = \frac{e^{\sqrt{2}x/2} + \alpha e^{\sqrt{2}\alpha x/2}}{e^{\sqrt{2}x/2} + e^{\sqrt{2}\alpha x/2} + 1}. \quad (4.15)$$

Es así como se obtiene una solución exacta de la ecuación de Nagumo.

4.3. Diferencias Finitas para la ecuación de Nagumo

A partir del estudio de la discretización de las derivadas parciales primeras y segundas podemos hallar los esquemas Explícito, Implícito, θ -theta y Cranck-Nicholson para la obtención de soluciones aproximadas para la ecuación de Nagumo dada por:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u^2}{\partial x^2} + u(1-u)(u-\alpha) \quad \text{en } \Omega =]0, L[\times]0, T[, \quad \text{con } T > 0, \\ u(0, t) = u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{array} \right. \quad (4.16)$$

donde, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, $x \in [0, L]$, $t \geq 0$, y u representa la diferencia de potencial entre el interior y el exterior de la membrana celular. Teniendo esto en cuenta obtenemos los siguientes esquemas.

Esquema Explícito

Tomando la fórmula progresiva de primer orden (2.65) y central de segundo orden (2.69), y reemplazando en la primera ecuación del sistema (4.16) obtenemos:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Entonces el esquema explícito viene expresado como:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_0^n = u_n^n = 0. \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Si consideramos $s = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, evidentemente podemos reescribir de manera equivalente (4.17) bajo la forma:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) \\ u_j^n + s(u_{j+1}^n) + s(u_{j-1}^n) - 2s(u_j^n) &= u_j^{n+1} - \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha). \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{cases} s(u_{j-1}^n) + u_j^n(1-2s) + s(u_{j+1}^n) = u_j^{n+1} - \Delta t u_j^n(1-u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_0^n = u_n^n = 0. \end{cases}$$

Para $j = 1$:

$$\begin{aligned} s(u_0^n) + u_1^n(1-2s) + s(u_2^n) &= u_1^{n+1} - \Delta t u_1^n(1-u_1^n)(u_1^n - \alpha), \\ u_1^n(1-2s) + s(u_2^n) &= u_1^{n+1} - \Delta t u_1^n(1-u_1^n)(u_1^n - \alpha). \end{aligned}$$

Mientras tanto para $1 < j < n-1$:

$$s(u_{j-1}^n) + u_j^n(1-2s) + s(u_{j+1}^n) = u_j^{n+1} - \Delta t u_j^n(1-u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Y para $j = n-1$ tenemos:

$$\begin{aligned} s(u_{n-2}^n) + u_{n-1}^n(1-2s) + s(u_n^n) &= u_{n-1}^{n+1} - \Delta t u_{n-1}^n(1-u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha), \\ s(u_{n-2}^n) + u_{n-1}^n(1-2s) &= u_{n-1}^{n+1} - \Delta t u_{n-1}^n(1-u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha). \end{aligned}$$

A partir de las ultimas dos expresiones vemos que (4.17) se reescribe de manera equivalente bajo el sistema de ecuaciones $A\mathbf{U} = \mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1-2s & s & 0 & \cdots & 0 \\ s & 1-2s & s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & s \\ 0 & \cdots & \cdots & s & 1-2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{n-2}^n \\ u_{n-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{n+1} - \Delta t u_1^n(1-u_1^n)(u_1^n - \alpha) \\ u_2^{n+1} - \Delta t u_2^n(1-u_2^n)(u_2^n - \alpha) \\ \vdots \\ u_{n-2}^{n+1} - \Delta t u_{n-2}^n(1-u_{n-2}^n)(u_{n-2}^n - \alpha) \\ u_{n-1}^{n+1} - \Delta t u_{n-1}^n(1-u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha) \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

Esquema Implícito

Considerando las fórmulas regresivas de primer orden (2.67) y central de segundo orden (2.69), y reemplazandolas en la primera ecuación (4.16) vemos que:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1-u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Podemos reescribir el esquema de la forma,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Así obtenemos el esquema numérico implícito es:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_0^n = u_n^n = 0. \end{cases} \quad (4.19)$$

Si consideramos $s = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$, evidentemente podemos reescribir de manera equivalente (4.19) bajo la forma:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= s(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}) + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) \\ u_j^{n+1}(1 + 2s) - s(u_{j+1}^{n+1}) + s(u_{j-1}^{n+1}) &= \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) + u_j^n \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{cases} -s(u_{j-1}^{n+1}) + u_j^{n+1}(1 + 2s) - s(u_{j+1}^{n+1}) = u_j^n + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_0^n = u_n^n = 0. \end{cases}$$

Reemplazamos en el sistema para $j = 1$ y tomando en cuenta llas condiciones vemos que:

$$\begin{aligned} -s(u_0^{n+1}) + u_1^{n+1}(1 + 2s) - s(u_2^{n+1}) &= u_1^n + \Delta t u_1^n(1 - u_1^n)(u_1^n - \alpha), \\ u_1^{n+1}(1 + 2s) - s(u_2^{n+1}) &= u_1^n + \Delta t u_1^n(1 - u_1^n)(u_1^n - \alpha). \end{aligned}$$

Mientras tanto para $1 < j < n - 1$:

$$-s(u_{j-1}^{n+1}) + u_j^{n+1}(1 + 2s) - s(u_{j+1}^{n+1}) = u_j^n + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Y para $j = n - 1$ tenemos:

$$\begin{aligned} -s(u_{n-2}^{n+1}) + u_{n-1}^{n+1}(1 + 2s) - s(u_n^{n+1}) &= u_{n-1}^n + \Delta t u_{n-1}^n(1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha), \\ -s(u_{n-2}^{n+1}) + u_{n-1}^{n+1}(1 + 2s) &= u_{n-1}^n + \Delta t u_{n-1}^n(1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha). \end{aligned}$$

A partir de las ultimas dos expresiones vemos que (4.19) se reescribe de manera equivalente bajo el

sistema de ecuaciones $AU = B$,

$$\begin{pmatrix} 1+2s & -s & 0 & \cdots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -s \\ 0 & \cdots & \cdots & -s & 1+2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{n-2}^n \\ u_{n-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n + \Delta t u_1^n (1 - u_1^n)(u_1^n - \alpha) \\ u_2^n + \Delta t u_2^n (1 - u_2^n)(u_2^n - \alpha) \\ \vdots \\ u_{n-2}^n + \Delta t u_{n-2}^n (1 - u_{n-2}^n)(u_{n-2}^n - \alpha) \\ u_{n-1}^n + \Delta t u_{n-1}^n (1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha) \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

Esquema Theta

Este esquema se obtiene al realizar una combinación convexa, es decir, para $\theta \in [0, 1]$,

$$\theta u + (1 - \theta)v = 0,$$

en donde u representa el esquema explícito, mientras que v representa el esquema implícito.

Entonces al sustituir obtenemos,

$$\begin{aligned} 0 = & \left(-\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) \right) \theta + \\ & (1 - \theta) \left(-\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

De donde tenemos:

$$\begin{aligned} 0 = & -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \theta + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta + u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) \theta - \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} \\ & + u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) + \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{\Delta t} \theta - \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} \theta - u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) \theta. \end{aligned}$$

Al reducir términos obtenemos:

$$0 = \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta - \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Dejamos el término $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ y obtenemos:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) + u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Mientras tanto para $1 < j < n - 1$:

$$-s(1 - \theta)u_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1} [1 + 2s(1 - \theta)] - s(1 - \theta)u_{j+1}^{n+1} = s\theta u_{j-1}^n + u_j^n (1 - 2s\theta) + s\theta u_{j+1}^n + \Delta t u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Y para $j = n - 1$ tenemos:

$$-s(1 - \theta)u_{n-2}^{n+1} + u_{n-1}^n [1 + 2s(1 - \theta)] - s(1 - \theta)u_n^{n+1} = s\theta u_{n-2}^n + u_{n-1}^n (1 - 2s\theta) + s\theta u_n^n + \Delta t u_{n-1}^n (1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha).$$

Gracias a la condición $u_0^n = u_n^n = 0$ vemos que:

$$-s(1 - \theta)u_{n-2}^{n+1} + u_{n-1}^n [1 + 2s(1 - \theta)] = s\theta u_{n-2}^n + u_{n-1}^n (1 - 2s\theta) + \Delta t u_{n-1}^n (1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha).$$

A partir de las ultimas dos expresiones vemos que (4.22) se reescribe de manera equivalente bajo el sistema de ecuaciones $\mathbf{AU} = \mathbf{B}$:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2s(1 - \theta) & -s(1 - \theta) & 0 & \cdots & 0 \\ -s(1 - \theta) & 1 + 2s(1 - \theta) & -s(1 - \theta) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -s(1 - \theta) \\ 0 & \cdots & \cdots & -s(1 - \theta) & 1 + 2s(1 - \theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{n-2}^n \\ u_{n-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n (1 - 2s\theta) + s\theta u_2^n + \Delta t u_1^n (1 - u_1^n)(u_1^n - \alpha) \\ s\theta u_1^n + u_2^n (1 - 2s\theta) + s\theta u_3^n + \Delta t u_2^n (1 - u_2^n)(u_2^n - \alpha) \\ \vdots \\ s\theta u_{n-3}^n + u_{n-2}^n (1 - 2s\theta) + s\theta u_{n-1}^n + \Delta t u_{n-2}^n (1 - u_{n-2}^n)(u_{n-2}^n - \alpha) \\ s\theta u_{n-2}^n + u_{n-1}^n (1 - 2s\theta) + \Delta t u_{n-1}^n (1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha) \end{pmatrix}. \quad (4.24)$$

Esquema Crank-Nicolson

Este esquema es el resultado de sumar el esquema explícito e implícito y a su vez resulta ser un caso particular del esquema theta cuando $\theta = \frac{1}{2}$. Notemos que:

$$2 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + 2u_j^n (1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Dividimos la expresión entre 2 y vemos que:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Obteniéndose el esquema Cranck-Nicolson:

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_0^n = u_n^n = 0. \end{cases} \quad (4.25)$$

Si consideramos $s = \frac{\Delta t}{2\Delta x^2}$, evidentemente podemos reescribir de manera equivalente (4.25) bajo la forma:

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} - u_j^n &= s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) + s(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}) + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_j^{n+1} - s(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}) &= u_j^n + s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ -su_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1}(1 + 2s) - su_{j+1}^{n+1} &= su_{j-1}^n + u_j^n(1 - 2s) + su_{j+1}^n + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha). \end{aligned}$$

Lo que implica:

$$\begin{cases} -su_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1}(1 + 2s) - su_{j+1}^{n+1} = su_{j-1}^n + u_j^n(1 - 2s) + su_{j+1}^n + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_0^n = u_n^n = 0. \end{cases}$$

Para $j = 1$:

$$-su_0^{n+1} + u_1^{n+1}(1 + 2s) - su_2^{n+1} = su_0^n + u_1^n(1 - 2s) + su_2^n + \Delta t u_1^n(1 - u_1^n)(u_1^n - \alpha).$$

Por la condición $u_0^n = u_n^n = 0$ vemos que:

$$u_1^{n+1}(1 + 2s) - su_2^{n+1} = u_1^n(1 - 2s) + su_2^n + \Delta t u_1^n(1 - u_1^n)(u_1^n - \alpha).$$

Mientras tanto para $1 < j < n - 1$:

$$-su_{j-1}^{n+1} + u_j^{n+1}(1 + 2s) - su_{j+1}^{n+1} = su_{j-1}^n + u_j^n(1 - 2s) + su_{j+1}^n + \Delta t u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Y para $j = n - 1$ tenemos:

$$-su_{n-2}^{n+1} + u_{n-1}^{n+1}(1 + 2s) - su_n^{n+1} = su_{n-2}^n + u_{n-1}^n(1 - 2s) + su_n^n + \Delta t u_{n-1}^n(1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha).$$

Por la condición $u_0^n = u_n^n = 0$ se tiene:

$$-su_{n-2}^{n+1} + u_{n-1}^n (1 + 2s) = su_{n-2}^n + u_{n-1}^n (1 - 2s) + \Delta t u_{n-1}^n (1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha).$$

A partir de las ultimas dos expresiones vemos que (4.25) se reescribe de manera equivalente bajo el sistema de ecuaciones $AU = B$,

$$\begin{pmatrix} 1+2s & -s & 0 & \cdots & 0 \\ -s & 1+2s & -s & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -s \\ 0 & \cdots & \cdots & -s & 1+2s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ \vdots \\ u_{n-2}^n \\ u_{n-1}^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^n (1 - 2s) + su_2^n + \Delta t u_1^n (1 - u_1^n)(u_1^n - \alpha) \\ su_1^n + u_2^n (1 - 2s) + su_3^n + \Delta t u_2^n (1 - u_2^n)(u_2^n - \alpha) \\ \vdots \\ su_{n-3}^n + u_{n-2}^n (1 - 2s) + su_{n-1}^n + \Delta t u_{n-2}^n (1 - u_{n-2}^n)(u_{n-2}^n - \alpha) \\ su_{n-2}^n + u_{n-1}^n (1 - 2s) + \Delta t u_{n-1}^n (1 - u_{n-1}^n)(u_{n-1}^n - \alpha). \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

Es fácil de verificar que los esquemas explícito (4.17), implícito (4.19), theta (4.23) y Crank Nicolson (4.25) están efectivamente bien definidos, en otras palabras, que podemos calcular los valores u_j^{n+1} con base en los valores u_j^n ; en realidad se debe invertir las matrices tridiagonales (4.18), (4.20),(4.24) (4.26) de tamaño $N \times N$.

4.4. Consistencia, Estabilidad y Convergencia de las diferencias finitas para la ecuación de Nagumo

Para que un método numérico sea eficiente, básicamente se debe hacer ver que a medida que $\Delta t, \Delta x$ tienden a cero, sus soluciones se aproximen a la solución de la ecuación, si esto sucede, se dice que el esquema es convergente, para verificar esto realizamos el estudio de **consistencia y estabilidad** de cada uno de los métodos.

4.4.1. Consistencia de los esquemas

Los esquemas numéricos a ser estudiados son: Explícito, Implícito, Theta y Crank-Nicholson, para este análisis examinaremos la equivalencia matricial $AU = B$ obtenida.

Esquema Explícito

Probaremos que el esquema explícito de la ecuación de Nagumo es un esquema consistente y para ello tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.1. *El esquema explícito es consistente bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Para esto estudiaremos el residuo

$$r_{\Delta t, \Delta x} = \mathbf{AU} - \mathbf{B}.$$

Considerando la ecuación (4.17) vemos que:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha),$$

y a su vez,

$$\frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - 2\frac{u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Agrupando al lado izquierdo los términos que contienen solamente el superíndice n obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - 2\frac{u_j^n}{\Delta x^2} &= \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} - u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_j^n \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{2}{\Delta x^2} \right) + \frac{u_{j+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^n}{\Delta x^2} &= \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} - u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha). \end{aligned}$$

Por lo tanto, se arriba a:

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = u_j^n \left(-\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2} \right) - \frac{u_{j+1}^n}{\Delta x^2} - \frac{u_{j-1}^n}{\Delta x^2} - u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) - \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t}. \quad (4.27)$$

Por otra parte, de acuerdo a la discretización a la fórmula progresiva de primer orden (2.64) y central de segundo orden (2.68); en la ecuación de Nagumo (4.16) obtenemos, el esquema explícito con error:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_t, n, x_j) = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t_n, \xi_x, j) + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha). \quad (4.28)$$

Despejamos $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t,n,xj}) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}). \quad (4.29)$$

Igualamos a cero:

$$0 = -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t,n,xj}) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}). \quad (4.30)$$

Entonces ahora al restar (4.27) y (4.30) tenemos:

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) - \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t,n,xj}).$$

Ahora notemos que:

$$|r_{n\Delta t, j\Delta x}| = \left| \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) - \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t,n,xj}) \right| \leq \left| \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right| + \left| \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t,n,xj}) \right|.$$

Puesto que u es de clase C^4 en espacio y C^2 en tiempo, tomamos supremo:

$$\begin{aligned} \sup_{n,j \in \mathbb{Z}^+} |r_{n\Delta t, j\Delta x}| &\leq \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left(\left| \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right| + \left| \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t,n,xj}) \right| \right) \\ &\leq \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right| + \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t,n,xj}) \right|. \end{aligned}$$

Luego tenemos que:

$$\|r_{\Delta t, \Delta x}\|_{\infty} \leq \frac{1}{12}(\Delta x)^2 M_1 + \frac{1}{2}\Delta t M_2,$$

$$\text{donde } M_1 = \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right| \text{ y } M_2 = \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t,n,xj}) \right|.$$

Al tomar límite cuando $\Delta t, \Delta x$ tiende a cero se observa que:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|r_{\Delta t, \Delta x}\|_{\infty} \leq \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{12}(\Delta x)^2 M_1 + \frac{1}{2}\Delta t M_2 \right) = 0.$$

Así vemos que;

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|r_{\Delta t, \Delta x}\|_{\infty} = 0.$$

Por tanto tenemos que el esquema explícito es consistente de orden $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$. \square

Esquema Implícito

Probaremos que el esquema implícito de la ecuación de Nagumo es un esquema consistente y para ello tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2. *El esquema implícito es consistente bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Por definición de consistencia vemos que,

$$r_{\Delta t, \Delta x} = \mathbf{AU} - \mathbf{B}.$$

Consecuentemente,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{u_j^n}{\Delta t} &= \frac{u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} - 2\frac{u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} + 2\frac{u_j^{n+1}}{\Delta x^2} &= \frac{u_j^n}{\Delta t} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha), \\ u_j^{n+1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2} \right) - \frac{u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} &= \frac{u_j^n}{\Delta t} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha). \end{aligned}$$

Por tanto:

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = u_j^{n+1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2} \right) - \frac{u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{u_j^n}{\Delta t} - u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha). \quad (4.31)$$

A su vez, basándose en la discretización de las fórmulas regresivas de primer orden (2.66) y central de segundo orden (2.68), vemos que el esquema implícito con error se expresa como sigue:

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\Delta t} + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, x_j) = \frac{u_{j-1}^n + u_{j+1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha). \quad (4.32)$$

Podemos reescribir el esquema de la forma,

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} &= \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \\ &\quad - \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, x_j). \end{aligned}$$

Igualamos a cero y vemos que:

$$0 = -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) - \frac{1}{2}(\Delta x) \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) - \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, xj). \quad (4.33)$$

Restamos (4.31) y (4.33) :

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, xj) + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}).$$

Luego,

$$|r_{n\Delta t, j\Delta x}| = \left| \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, xj) + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right| \leq \left| \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, xj) \right| + \left| \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right|.$$

Ahora, debido a que las derivadas parciales son acotadas (u es de clase C^4 en espacio y C^2 en tiempo) obtenemos la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \sup_{n, j \in \mathbb{Z}^+} |r_{n\Delta t, j\Delta x}| &\leq \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left(\left| \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, xj) \right| + \left| \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{2}\Delta t \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, xj) \right| + (\Delta x)^2 \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{1}{12} \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right|. \end{aligned}$$

Así pues

$$\|r_{n\Delta t, j\Delta x}\|_\infty \leq \frac{1}{2}\Delta t M_1 + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 M_2.$$

$$\text{donde } M_1 = \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{tn}, xj) \right| \text{ y } M_2 = \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right|.$$

Tomamos limite cuando $\Delta t, \Delta x$ tienden a cero:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|r_{n\Delta t, j\Delta x}\|_\infty \leq \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2}\Delta t M_1 + \frac{1}{12}(\Delta x)^2 M_2 \right) = 0.$$

Lo que implica:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|r_{n\Delta t, j\Delta x}\|_\infty = 0.$$

Por tanto el esquema numérico implícito es consistente de orden $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$. □

Esquema Theta

Probaremos que el esquema theta de la ecuación de Nagumo es un esquema consistente y para ello tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3. *El esquema theta es consistente bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Partimos de la definición de consistencia y vemos que,

$$r_{\Delta t, \Delta x} = \mathbf{A}\mathbf{U} - \mathbf{B}.$$

A partir de (4.24) observamos que,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) + u_j^n (1 - u_j^n) (u_j^n - \alpha).$$

Reescribimos la igualdad:

$$\frac{u_j^{n+1}}{\Delta t} - \frac{u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) - \frac{u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) + 2 \frac{u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) = \frac{u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \theta + \frac{u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \theta - 2 \frac{u_j^n}{\Delta x^2} \theta + u_j^n (1 - u_j^n) (u_j^n - \alpha) + \frac{u_j^n}{\Delta t}.$$

Asociamos términos:

$$u_j^{n+1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2} (1 - \theta) \right) - \frac{u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) - \frac{u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) = u_j^n \left(\frac{1}{\Delta t} - \frac{2}{\Delta x^2} \theta \right) + \frac{u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \theta - \frac{u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \theta + u_j^n (1 - u_j^n) (u_j^n - \alpha).$$

Obteniendo así el sistema matricial $A_{\Delta t, \Delta x} \mathbf{U}_{\Delta t, \Delta x} = \mathbf{B}$, por lo que:

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = u_j^{n+1} \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2} (1 - \theta) \right) - \frac{u_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) - \frac{u_{j+1}^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) - u_j^n \left(\frac{1}{\Delta t} + \frac{2}{\Delta x^2} \theta \right) - \frac{u_{j-1}^n}{\Delta x^2} \theta + \frac{u_{j+1}^n}{\Delta x^2} \theta - u_j^n (1 - u_j^n) (u_j^n - \alpha). \quad (4.34)$$

Ahora vamos a realizar una combinación convexa, es decir, para $\theta \in [0, 1]$ decimos que $\theta u + (1 - \theta)v = 0$, en donde u representa el esquema explícito con error (4.28), mientras que v representa el esquema implícito con error (4.32).

Al momento de sustituir obtenemos,

$$\begin{aligned}
0 = & \left(-\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) + \frac{1}{2}\Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t n, x j}) \right. \\
& \left. - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t n, \xi_{x j}) \right) \theta + (1 - \theta) \left(-\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} \right. \\
& \left. + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t n, \xi_{x j}) - \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t n, x j}) \right). \tag{4.35}
\end{aligned}$$

Y reducir los términos arribamos a :

$$\begin{aligned}
0 = & \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta - \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) \\
& + \Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t n, x j}) \left(\theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t n, \xi_{x j}).
\end{aligned}$$

Depejamos $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t}$ y obtenemos:

$$\begin{aligned}
\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = & \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) \\
& + \Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t n, x j}) \left(\theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t n, \xi_{x j}).
\end{aligned}$$

Igualamos a cero y tenemos:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) \\
& + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha) + \Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t n, x j}) \left(\theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t n, \xi_{x j}). \tag{4.36}
\end{aligned}$$

Ahora al restar (4.34) y (4.36), obtenemos:

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = \Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t n, x j}) \left(\theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t n, \xi_{x j}).$$

A continuación percibimos que,

$$\begin{aligned}
|r_{n\Delta t, j\Delta x}| = & \left| \Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t n, x j}) \left(\theta - \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t n, \xi_{x j}) \right| \\
\leq & \left| \Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_{t n, x j}) \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \frac{1}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t n, \xi_{x j}) \right|.
\end{aligned}$$

En su turno, al ser las derivadas parciales (u de clase C^4 en espacio y C^2 en tiempo), notamos que:

$$\begin{aligned} \sup_{n,j} |r_{n\Delta t, j\Delta x}| &\leq \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left(\left| \Delta t \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_t, x_j) \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t_n, \xi_{xj}) \right| \right) \\ &\leq \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2} \right) \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_t, x_j) \right| + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t_n, \xi_{xj}) \right|. \end{aligned}$$

Arribando así a la estimación siguiente:

$$\|r_{n\Delta t, j\Delta x}\| \leq \Delta t \left(\theta - \frac{1}{2} \right) M_1 + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 M_2.$$

$$\text{donde } M_1 = \sup_{1 < j, n < j-1, n-1} \left| \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_t, x_j) \right| \text{ y } M_2 = \sup_{1 < j, n < j-1, n-1} \left| \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(t_n, \xi_{xj}) \right|.$$

Tomamos limite cuando $\Delta t, \Delta x$ tienden a cero,

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|r_{n\Delta t, j\Delta x}\| \leq \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\Delta t \left(\theta - \frac{1}{2} \right) M_1 + \frac{1}{12} (\Delta x)^2 M_2 \right) = 0.$$

Lo que implica:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|r_{n\Delta t, j\Delta x}\| = 0.$$

Lo que indica que el esquema theta es consistente de orden $\mathcal{O}(\Delta t + (\Delta x)^2)$. □

4. Esquema de Crank-Nicolson

Teorema 4.4. *El esquema Crank-Nicolson es consistente bajo la norma $\|\cdot\|_\infty$.*

Demostración. Probaremos que el esquema de Crank-Nicolson de la ecuación de Nagumo es un esquema consistente y para ello tenemos el siguiente resultado:

Partimos de la definición de consistencia (2.14) y vemos que,

$$r_{\Delta t, \Delta x} = \mathbf{A}\mathbf{U} - \mathbf{B}.$$

Tomando la ecuación (4.26) del esquema Crank-Nicolson, tenemos que,

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} + u_j^n (1 - u_j^n) (u_j^n - \alpha). \quad (4.37)$$

Por otra parte, la ecuación de Nagumo viene dada de la forma:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x^2} + u(1-u)(u-\alpha), \quad (4.38)$$

$$0 = -\frac{\partial u}{\partial t}(tn, xj) + \frac{\partial u}{\partial x^2}(tn, xj) + u_i^n(1-u_i^n)(u_i^n - \alpha). \quad (4.39)$$

Al restar obtenemos,

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{\partial u}{\partial t}(tn, xj) - \frac{\partial u}{\partial x^2}(tn, xj). \quad (4.40)$$

Ahora, por el desarrollo de Taylor de cuarto orden alrededor del punto $(t + \Delta t, x)$ tenemos,

$$u(t + \Delta t, x) = u(t) + \Delta t \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) + \frac{1}{6}(\Delta t)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\xi_t, x).$$

con $t < \xi_t < t + \Delta t$. Que conduce a:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t)}{\Delta t} - \frac{1}{2}(\Delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) - \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\xi_t, x). \quad (4.41)$$

En donde:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(tn, xj) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{2}(\Delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(tn, xj) - \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\xi_{tn}, xj). \quad (4.42)$$

De manera análoga para el punto $(t - \Delta t, x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(tn, xj) = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{2}(\Delta t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(tn, xj) - \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\xi_{tn}, xj). \quad (4.43)$$

Sumamos (4.42) y (4.43) obteniéndose la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial u}{\partial t}(tn, xj) &= 2 \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{3}(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\xi_{tn}, xj) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(tn, xj) &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(\xi_{tn}, xj). \end{aligned} \quad (4.44)$$

Ahora tomamos el desarrollo de Taylor de cuarto orden, alrededor de los puntos $(t, x + \Delta x)$ y

$(t, x + 2\Delta x)$:

$$u(t, x + \Delta x) = u(t, x) + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + \frac{1}{2}(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{1}{6}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) + \frac{1}{24}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x1}).$$

con $x < \xi_{x1} < x + \Delta x$ De donde:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) = \frac{u(t, x + \Delta x) - u(t, x)}{\Delta x} - \frac{1}{2}(\Delta x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - \frac{1}{6}(\Delta x)^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) - \frac{1}{24}(\Delta x)^3 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x1}). \quad (4.45)$$

con $x < \xi_{x1} < x + \Delta x$

$$u(t, x + 2\Delta x) = u(t, x) + 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(t, x) + 2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{4}{3}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) + \frac{2}{3}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x2}). \quad (4.46)$$

Con $x + 2\Delta x < \xi_{x2} < x$.

Reemplazamos (4.45) en (4.46) y obtenemos:

$$\begin{aligned} u(t, x + 2\Delta x) &= u(t, x) + 2u(t, x + \Delta x) - 2u(t, x) - (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) - \frac{1}{3}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) \\ &\quad - \frac{1}{12}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x1}) + 2(\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + \frac{4}{3}(\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) \\ &\quad + \frac{2}{3}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x2}). \\ u(t, x + 2\Delta x) &= 2u(t, x + \Delta x) - u(t, x) + (\Delta x)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) + (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) \\ &\quad + \frac{1}{3}(\Delta x)^4 \left(2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x1}) - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x2}) \right). \end{aligned}$$

Despejamos $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x)$ y tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= \frac{u(t, x + 2\Delta x) + u(t, x) - 2u(t, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} - (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) \\ &\quad - \frac{1}{3}(\Delta x)^4 \left(2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x1}) - \frac{1}{4} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_{x2}) \right). \end{aligned}$$

Por el teorema del valor intermedio tenemos:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) = \frac{u(t, x + 2\Delta x) + u(t, x) - 2u(t, x + \Delta x)}{(\Delta x)^2} - (\Delta x)^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(t, x) - \frac{7}{12}(\Delta x)^4 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(t, \xi_x) \quad x \leq \xi_x \leq x + 2\Delta x.$$

En donde:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}(tn, xj) = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} - \Delta x \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(tn, xj) - \frac{7}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}). \quad (4.47)$$

con $x_j < \xi_{xj} < x_{j+2}$.

De manera análoga encontramos la solución discreta alrededor del punto $x - 2\Delta x$, obteniendo:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2}(tn, x_j) = \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + \Delta x \frac{\partial u^3}{\partial x^3}(\xi_t n, \xi_{xj}) - \frac{7}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}). \quad (4.48)$$

con $x_{j-2} < \xi_{xj} < x_j$.

Al sumar (4.47) y (4.48) vemos que:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial u}{\partial x^2}(tn, x_j) &= \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} - \frac{7}{6}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \\ \frac{\partial u}{\partial x^2}(tn, x_j) &= \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} - \frac{7}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Sustituyendo (4.44) y (4.49) en (4.40): vemos que:

$$\begin{aligned} r_{n\Delta t, j\Delta x} &= -\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} \\ &\quad + \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} - \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial u^3}{\partial t^3}(\xi_t n, x_j) - \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} \\ &\quad - \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} + \frac{7}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}). \end{aligned} \quad (4.50)$$

De donde,

$$r_{n\Delta t, j\Delta x} = -\frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial u^3}{\partial t^3}(\xi_t n, x_j) + \frac{7}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}).$$

A su vez, vemos que:

$$\begin{aligned} |r_{n\Delta t, j\Delta x}| &= \left| -\frac{1}{6}(\Delta t)^2 \frac{\partial u^3}{\partial t^3}(\xi_t n, \xi_{xj}) + \frac{7}{12}(\Delta x)^2 \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(\xi_t n, \xi_{xj}) \right| \\ &\leq \frac{1}{6}(\Delta t)^2 \left| \frac{\partial u^3}{\partial t^3}(\xi_t n, x_j) \right| + \frac{7}{12}(\Delta x)^2 \left| \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_{xj}) \right| \end{aligned}$$

Puesto que las derivadas parciales son acotadas (u es de clase C^3 en tiempo y de clase C^4 en espacio), arribamos a:

$$\begin{aligned} \sup_{n,j} |r_{n\Delta t, j\Delta x}| &\leq \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left(\frac{1}{6} (\Delta t)^2 \left| \frac{\partial u^3}{\partial t^3}(\xi_t n, x_j) \right| + \frac{7}{12} (\Delta x)^2 \left| \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_x j) \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{6} (\Delta t)^2 \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^3}{\partial t^3}(\xi_t n, x_j) \right| + \frac{7}{12} (\Delta x)^2 \sup_{1 < n, j < n-1, j-1} \left| \frac{\partial u^4}{\partial x^4}(tn, \xi_x j) \right|. \end{aligned}$$

Consecutivamente se obtiene que:

$$\|r_{n\Delta t, j\Delta x}\|_\infty \leq \frac{1}{6} (\Delta t)^2 M_1 + \frac{7}{12} (\Delta x)^2 M_2,$$

$$\text{donde } M_1 = \sup_{1 < j, n < j-1, n-1} \left| \frac{\partial u^3}{\partial x^3}(tn, \xi_x j) \right| \text{ y } M_2 = \sup_{1 < j, n < j-1, n-1} \left| \frac{\partial u^2}{\partial t^2}(\xi_t n, x_j) \right|.$$

Tomamos limite haciendo tender $\Delta t, \Delta$ a cero y vemos que:

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|r_{n\Delta t, j\Delta x}\|_\infty \leq \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} (\Delta t)^2 M_1 + \frac{7}{12} (\Delta x)^2 M_2 \right) = 0.$$

Lo que implica,

$$\lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \|r_{n\Delta t, j\Delta x}\|_\infty = 0.$$

Por tanto el esquema de Cranck-Nicholson es consistente de orden $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$. □

4.4.2. Estabilidad de los esquemas

La estabilidad de un método numérico tiene que ver con la manera en que los errores se propagan a lo largo del algoritmo. Es decir en el momento en que un método converge, lo más deseable es que en los resultados que se obtengan, los niveles de error se disminuyan en la forma más rápida posible. En otras palabras la estabilidad asegura exactitud del método, vamos a verificar la estabilidad para una norma L^2 , debido a que esta utiliza una herramienta de mayor facilidad denominada el análisis de Fourier la cual reduce la complejidad de la ecuación.

Asumiremos que las condiciones de contorno para la ecuación de Nagumo son condiciones de contorno periódicas que se escriben de la forma $u(t, x+1) = u(t, x)$ para todo $x \in [0, 1]$ y todo $t \geq 0$. A cada vector $u^n = (u_j^n)_{0 \leq j \leq N}$ asociamos una función u_j^n constante por tramos, de periodo 1 y definida en $[0, 1]$ por:

$$u^n(x) = u_i^n \quad \text{si} \quad x_{j-1/2} < x < x_{j+1/2},$$

con $x_{j+1/2} = (j + 1/2) \Delta x$ con $0 \leq j \leq N$. La función $u^n(x)$ pertenece a $L^2(0, 1)$, ahora el análisis de Fourier de toda función en $L^2(0, 1)$ puede ser descompuesta como una suma de Fourier de la forma:

$$u^n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \check{u}^n(k) e^{2i\pi kx}.$$

Con un seguimiento ponemos los modos de Fourier que representan una onda que oscila sinusoidalmente (curva que representa gráficamente la función seno) en el esquema de la forma:

$$u_j^n = A(k)^n \exp(2i\pi kx_j), \quad \text{con } x_j = j \Delta x,$$

y deducimos el valor del factor de amplificación $A(k)$. Por el momento, nos restringimos al caso escalar, es decir, $A(k)$ es un número complejo en \mathbb{C} .

Linealidad de la ecuación

Antes de empezar nuestro análisis de los esquemas de diferencias finitas para la ecuación de Nagumo, vamos a tener en cuenta que todos tienen en común el término $u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha)$ el cual tiene grado 3, vamos a linealizarlo ya que nos permite estudiar fácilmente la estabilidad de los esquemas.

Para ello notemos que

$$f(u) = u(1 - u)(u - \alpha),$$

$$f(u) = (u - u^2)(u - \alpha) = u^2 - u\alpha - u^3 + u^2\alpha.$$

Primero vamos a estudiar la función f en el punto $u = 0$

$$f(0) = 0(1 - 0)(0 - \alpha) = 0.$$

Donde f' viene dada por

$$f' = 2u - \alpha - 3u^2 + 2u \quad f'(0) = -\alpha.$$

Y finalmente la función linealizada se expresa como:

$$f(u) \approx f(u_0) + f'(u_0)(u - u_0) \approx 0 - \alpha(u - 0).$$

$$f(u) \approx -\alpha u. \tag{4.51}$$

Una vez linealizado el término $u(1-u)(u-\alpha)$ procedemos al estudio de la estabilidad de los esquemas.

Teorema 4.5. *El Esquema Explícito es estable para la norma L^2*

Demostración. Partimos de (4.17):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Reescribiendo nuestra ecuación explícita, con nuestra función linealizada (4.51) decimos que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} - \alpha u_j^n.$$

A su vez,

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} - \Delta t \alpha u_j^n.$$

Y ahora reemplazando $s = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$ y dejando a un lado de la igualdad el término u_j^{n+1} se tiene que

$$u_j^{n+1} = u_j^n + s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) - \Delta t \alpha u_j^n.$$

Observamos a su vez que:

$$u_j^{n+1} = u_j^n(1 - 2s) + s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \Delta t \alpha u_j^n.$$

Como $u_j^n = \check{u}^n(k)e^{2i\pi kx_j}$, entonces al reemplazar en la expresión anterior arribamos a:

$$\check{u}^{n+1}(k)e^{2i\pi kx} = \check{u}^n(k)e^{2i\pi kx}(1 - 2s) + s(\check{u}^n(k)e^{2i\pi k(x+\Delta x)} + \check{u}^n(k)e^{2i\pi k(x-\Delta x)}) - \Delta t \alpha \check{u}^n(k)e^{2i\pi kx}.$$

Así vemos que:

$$\check{u}^{n+1}(k) = \check{u}^n(k) + s\check{u}^n(k)(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) - \Delta t \alpha \check{u}^n(k) = \check{u}^n(k)(1 + s(e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x}) - \Delta t \alpha).$$

Utilizando la identidad $\text{sen}(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$, vemos que:

$$\text{sen}^2(x) = -\frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2). \quad (4.52)$$

Con lo cual tenemos entonces que

$$\check{u}^{n+1}(k) = \check{u}^n(k)(1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t),$$

y

$$\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)} = (1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t).$$

Así el valor de $A(k)$ viene dado por:

$$A(k) = (1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t),$$

El coeficiente de Fourier $\check{u}^n(k)$ para $k \in \mathbb{Z}$ está acotado cuando n tiende al infinito y si solo si el factor de amplificación satisface $|A(k)| \leq 1$, es decir,

$$|(1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t)| \leq 1.$$

Al mismo tiempo

$$-1 \leq (1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t) \leq 1$$

$$-2 \leq -4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t \leq 0$$

$$0 \leq 4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\pi k \Delta x) + \alpha \Delta t \leq 2.$$

Lo que conduce a ver que

$$4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\pi k \Delta x) + \alpha \Delta t \leq 2,$$

Como sabemos $\text{sen}^2(\pi k \Delta x) \leq 1$ y con esto para que la desigualdad precedente se mantengan debemos tener que:

$$4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} + \alpha \Delta t \leq 2.$$

De este modo apreciamos que

$$4\Delta t \leq \Delta x^2(2 - \alpha \Delta t).$$

Entonces decimos que el método explícito es estable, bajo la condición CFL de $\frac{4\Delta t}{(2 - \alpha \Delta t)} \leq (\Delta x)^2$. \square

Teorema 4.6. Para la norma L^2 el Esquema Implícito es estable.

Demostración. Tomando la ecuación (4.19) ,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} + u_j^n(1 - u_j^n)(u_j^n - \alpha).$$

Tomando lo realizado para el esquema explícito y reescribiendo con la forma lineal 4.51 tenemos que:

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} - u_j^n \alpha,$$

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} - \Delta t \alpha u_j^n.$$

Reemplazando a s como $s = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$u_j^{n+1}(1 + 2s) = u_j^n + s(u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) - \Delta t \alpha u_j^n.$$

Con $u_j^n = \check{u}^n(k)e^{(2i\pi kx)}$ observamos que:

$$\check{u}^{n+1}(k)e^{(2i\pi kx)}(1 + 2s) = \check{u}^n(k)e^{(2i\pi kx)} + s(\check{u}^{n+1}(k)e^{(2i\pi k(x+\Delta x))} + \check{u}^{n+1}(k)e^{(2i\pi k(x-\Delta x))}) - \Delta t \alpha \check{u}^n(k)e^{(2i\pi kx)}.$$

Escribiendo a un lado de la igualdad valores de \check{u} con $n + 1$ y al otro valores de \check{u} con n , obtenemos que :

$$\check{u}^{n+1}(k)e^{(2i\pi kx)}(1 + 2s) - s(\check{u}^{n+1}(k)e^{(2i\pi k(x+\Delta x))} + \check{u}^{n+1}(k)e^{(2i\pi k(x-\Delta x))}) = \check{u}^n(k)e^{(2i\pi kx)} - \Delta t \alpha \check{u}^n(k)e^{(2i\pi kx)}.$$

De esta forma vemos que:

$$\check{u}^{n+1}(k)(1 + 2s) - s(\check{u}^{n+1}(k)e^{(2i\pi k\Delta x)} + \check{u}^{n+1}(k)e^{(-2i\pi k\Delta x)}) = \check{u}^n(k) - \Delta t \alpha \check{u}^n(k).$$

Sacando factor común $\check{u}^{n+1}(k)$ al lado derecho y $\check{u}^n(k)$ al lado izquierdo:

$$\check{u}^{n+1}(k)[(1 + 2s) - s(e^{(2i\pi k\Delta x)} + e^{-2i\pi k\Delta x})] = \check{u}^n(k)(1 - \Delta t \alpha).$$

Nuestra expresión de la forma $\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)}$

$$\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)} = \frac{1 - \Delta t \alpha}{(1 + 2s) - s(e^{2i\pi k \Delta x} + e^{-2i\pi k \Delta x})}.$$

Que puede ser escrito de la forma:

$$\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)} = \frac{1 - \Delta t \alpha}{1 - s(e^{2i\pi k \Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k \Delta x})}.$$

Por la igualdad de seno que llegamos a 4.52 tenemos que

$$\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)} = \frac{1 - \Delta t \alpha}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)},$$

De donde obtenemos el valor de $A(k)$ definido como

$$A(k) = \frac{1 - \Delta t \alpha}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)}.$$

Para $k \in \mathbb{Z}$ el coeficiente de Fourier $\check{u}^n(k)$ esta acotado y tiende al infinito si y solo si, el factor de amplificación se cumple bajo la condición de $|A(k)| \leq 1$, , de esta forma:

$$|A(k)| = \left| \frac{1 - \Delta t \alpha}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} \right| \leq 1.$$

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned} -1 &\leq \frac{(1 - \Delta t \alpha)}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} \leq 1 \\ -2 &\leq \frac{1 - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} - 1 \leq 0 \\ 0 &\leq 1 - \frac{1 - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} \leq 2. \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1 - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} &\leq 2 \\ -\frac{1 - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} &\leq 1, \\ \alpha \Delta t - 1 &\leq 1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x), \\ -4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) &\leq 2 - \alpha \Delta t. \end{aligned}$$

Como tenemos la igualdad de $s = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$ y ordenandola :

$$-4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(\pi k \Delta x) \leq 2 - \alpha \Delta t.$$

Como conocemos la identidad $\sin^2(\pi k \Delta x) \leq 1$

$$\begin{aligned} -4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} &\leq 2 - \alpha \Delta t, \\ -4 \Delta t &\leq (\Delta x)^2 (2 - \alpha \Delta t). \end{aligned}$$

Asi decimos que el esquema implícito es estable bajo CFL de $-\frac{4\Delta t}{(2 - \alpha \Delta t)} \leq (\Delta x)^2$. □

Teorema 4.7. *El Esquema-theta para la norma L^2 es estable.*

Demostración. Partiendo de la ecuación (4.22)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) + u_j^n (1 - u_j^n) (u_j^n - \alpha)$$

Y reescribiendo con linealidad(4.51):

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) - u_j^n \alpha$$

Siguiendo lo realizado en los dos esquemas anteriores tenemos que

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{\Delta x^2} \theta + \Delta t \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{\Delta x^2} (1 - \theta) - \Delta t u_j^n \alpha$$

$$u_j^{n+1} - u_j^{\{n\}} = s (u_{\{j-1\}}^{n+1} + u_{\{j+1\}}^{n+1} - 2u_{\{j\}}^{n+1}) (1 - \theta) + s (u_{\{j+1\}}^n + u_{\{j-1\}}^n - 2u_{\{j\}}^n) \theta - \Delta t u_j^n \alpha.$$

$$u_j^{n+1} - s (u_{\{j-1\}}^{n+1} + u_{\{j+1\}}^{n+1} - 2u_{\{j\}}^{n+1}) (1 - \theta) = s (u_{\{j+1\}}^n + u_{\{j-1\}}^n - 2u_{\{j\}}^n) \theta + u_j^{\{n\}} - \Delta t u_j^n \alpha.$$

Como $u_j^n = \check{u}^n(k) e^{(2i\pi k x)}$ vemos que

$$\check{u}^{n+1}(k) e^{(2i\pi k x)} - s (\check{u}^{n+1}(k) e^{(2i\pi k(x+\Delta x))} + \check{u}^{n+1}(k) e^{(2i\pi k(x-\Delta x))} - 2\check{u}^{n+1}(k) e^{(2i\pi k x)}) (1 - \theta) =$$

$$s (\check{u}^n(k) e^{(2i\pi k(x+\Delta x))} + \check{u}^n(k) e^{(2i\pi k(x-\Delta x))} - 2\check{u}^n(k) e^{(2i\pi k x)}) \theta + \check{u}^n(k) e^{(2i\pi k x)} - \Delta t \alpha \check{u}^n(k) e^{(2i\pi k x)}.$$

Ahora sacando de todas las ecuaciones el $e^{(2i\pi kx)}$

$$\begin{aligned} \check{u}^{n+1}(k) - s \left(\check{u}^{n+1}(k) e^{(2i\pi k\Delta x)} + \check{u}^{n+1}(k) e^{(-2i\pi k\Delta x)} - 2\check{u}^{n+1}(k) \right) (1 - \theta) = \\ s \left(\check{u}^n(k) e^{(2i\pi k\Delta x)} + \check{u}^n(k) e^{(-2i\pi k\Delta x)} - 2\check{u}^n(k) \right) \alpha + \check{u}^n(k) - \Delta t \alpha \check{u}^n(k). \end{aligned}$$

Con factor comun de $\check{u}^{n+1}(k)$ al lado izquierdo y $\check{u}^n(k)$ al lado derecho:

$$\check{u}^{n+1}(k) - s\check{u}^{n+1}(k) \left(e^{(2i\pi k\Delta x)} + e^{(-2i\pi k\Delta x)} - 2 \right) (1 - \theta) = s\check{u}^n(k) \left(e^{(2i\pi k\Delta x)} + e^{(-2i\pi k\Delta x)} - 2 \right) \theta + \check{u}^n(k) - \Delta t \alpha \check{u}^n(k).$$

Nuevamente con factor común obtenemos que

$$\check{u}^{n+1}(k) \left[1 - s \left(e^{(2i\pi k\Delta x)} + e^{(-2i\pi k\Delta x)} - 2 \right) (1 - \theta) \right] = \check{u}^n(k) \left[s \left(e^{(2i\pi k\Delta x)} + e^{(-2i\pi k\Delta x)} - 2 \right) \theta + 1 - \Delta t \alpha \right]$$

Tenemos entonces la igualdad del seno 4.52 podemos decir que:

$$\check{u}^{n+1}(k) \left[1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) (1 - \theta) \right] = \check{u}^n(k) \left[-4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) \theta + 1 - \Delta t \alpha \right].$$

De la expresión con $A(k) = \frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)}$

$$\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)} = \frac{1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) \theta - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) (1 - \theta)}.$$

Definimos el valor de $A(k)$ como:

$$A(k) = \frac{1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) \theta - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) (1 - \theta)}$$

El $\check{u}^n(k)$ coeficiente de Fourier para todo $k \in \mathbb{Z}$ cumple con ser acotado cuando n tiende al infinito si y solo si el factor de amplificación cumple la desigualdad $|A(k)| \leq 1$, es decir

$$\left| \frac{1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) \theta - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) (1 - \theta)} \right| \leq 1$$

Ahora vamos a tener que por propiedades de valor absoluto :

$$\begin{aligned} -1 \leq \frac{1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) \theta - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) (1 - \theta)} \leq 1, \\ -2 \leq \frac{1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) \theta - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) (1 - \theta)} - 1 \leq 0, \end{aligned}$$

$$0 \leq 1 - \frac{1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) \theta - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) (1 - \theta)} \leq 2.$$

Entonces:

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) \theta - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) (1 - \theta)} &\leq 2 \\ -\frac{1 - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) \theta - \alpha \Delta t}{1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) (1 - \theta)} &\leq 1 \\ -1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) \theta + \alpha \Delta t &\leq 1 + 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) (1 - \theta). \end{aligned}$$

Agrupamos términos:

$$4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) \theta - 4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) (1 - \theta) \leq 2 - \alpha \Delta t$$

$$4s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) (2\theta - 1) \leq 2 - \alpha \Delta t.$$

Al reemplazar $s = \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$:

$$4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \text{sen}^2(\pi k \Delta x) (2\theta - 1) \leq 2 - \alpha \Delta t.$$

Puesto que $\text{sen}^2(\pi k \Delta x) \leq 1$:

$$4 \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (2\theta - 1) \leq 2 - \alpha \Delta t.$$

Y vemos que:

$$4\Delta t (2\theta - 1) \leq (\Delta x)^2 (2 - \alpha \Delta t).$$

Así se cumple que el esquema-theta es estable bajo la CFL $\frac{4\Delta t}{(2 - \alpha \Delta t)} (2\theta - 1) \leq (\Delta x)^2$ □

Teorema 4.8. *El esquema Cranck-Nicolson es estable bajo la norma L^2 .*

Demostración. Partiendo de la ecuación (4.25),

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} + u_j^n (1 - u_j^n) (u_j^n - \alpha).$$

Y escribiendo la expresión linealizada (4.51) obtenemos que

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} = \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} - u_j^n \alpha.$$

Multiplicando la expresión por Δt

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \Delta t \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n}{2\Delta x^2} + \Delta t \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}}{2\Delta x^2} - u_j^n \alpha \Delta t.$$

Reemplazando $s = \frac{\Delta t}{\Delta x^2}$

$$u_j^{n+1} - u_j^n = \frac{1}{2}s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) + \frac{1}{2}s(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}) - u_j^n \alpha \Delta t.$$

Escribiendo a un lado de la igualdad $n + 1$ y al otro los n

$$u_j^{n+1} - \frac{1}{2}s(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1}) = u_j^n + \frac{1}{2}s(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n - 2u_j^n) - u_j^n \alpha \Delta t.$$

Con $u_j^n = \check{u}^n(k)e^{2i\pi kx}$

$$\begin{aligned} \check{u}^{n+1}(k)e^{2i\pi kx} - \frac{1}{2}s(\check{u}^{n+1}(k)e^{2i\pi k(x-\Delta x)} + \check{u}^{n+1}(k)e^{2i\pi k(x+\Delta x)} - 2\check{u}^{n+1}(k)e^{2i\pi kx}) &= \check{u}^n(k)e^{2i\pi kx} \\ + \frac{1}{2}s(\check{u}^n(k)e^{2i\pi k(x+\Delta x)} + \check{u}^n(k)e^{2i\pi k(x-\Delta x)} - 2\check{u}^n(k)e^{2i\pi kx}) - \check{u}^n(k)e^{2i\pi kx} &\alpha \Delta t. \end{aligned}$$

Ahora sacando de toda la expresión $e^{2i\pi kx}$, de esta forma:

$$\begin{aligned} \check{u}^{n+1}(k) - \frac{1}{2}s(\check{u}^{n+1}(k)e^{-2i\pi k\Delta x} + \check{u}^{n+1}(k)e^{2i\pi k\Delta x} - 2\check{u}^{n+1}(k)) &= \check{u}^n(k) + \\ \frac{1}{2}s(\check{u}^n(k)e^{2i\pi k\Delta x} + \check{u}^n(k)e^{-2i\pi k\Delta x} - 2\check{u}^n(k)) - \check{u}^n(k) &\alpha \Delta t. \end{aligned}$$

Con factor común al lado derecho de $\check{u}^{n+1}(k)$ y al lado izquierdo de la igualdad de $\check{u}^n(k)$

$$\check{u}^{n+1}(k) \left[1 - \frac{1}{2}s(e^{-2i\pi k\Delta x} + e^{2i\pi k\Delta x} - 2) \right] = \check{u}^n(k) \left[1 + \frac{1}{2}s(e^{2i\pi k\Delta x} + e^{-2i\pi k\Delta x} - 2) - \alpha \Delta t \right].$$

La expresión con $\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)}$

$$\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)} = \frac{1 + \frac{1}{2}s(e^{2i\pi k\Delta x} + e^{-2i\pi k\Delta x} - 2) - \alpha \Delta t}{1 - \frac{1}{2}s(e^{-2i\pi k\Delta x} + e^{2i\pi k\Delta x} - 2)}.$$

Con la igualdad de 4.52 del seno decimos que

$$\frac{\check{u}^{n+1}(k)}{\check{u}^n(k)} = \frac{1 - 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k\Delta x) - \alpha \Delta t}{1 + 2s \cdot \text{sin}^2(\pi k\Delta x)}.$$

De donde obtenemos el valor de $A(k)$

$$A(k) = \frac{1 - 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t}{1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)}.$$

Para $k \in \mathbb{Z}$, el coeficiente de Fourier $\check{y}^n(k)$ esta acotado cuando n tiende al infinito si y solo si el factor de amplificación satisface $|A(k)| \leq 1$, entonces

$$|A(k)| = \left| \frac{1 - 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t}{1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} \right| \leq 1.$$

Por propiedades de valor absoluto obtenemos que

$$-1 \leq \frac{1 - 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t}{1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} \leq 1.$$

Podemos tener entonces

$$\begin{aligned} -2 &\leq \frac{1 - 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t}{1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} - 1 \leq 0, \\ 0 &\leq 1 - \frac{1 - 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t}{1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} \leq 2, \end{aligned}$$

De donde,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1 - 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t}{1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} &\leq 2, \\ -\frac{1 - 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) - \alpha \Delta t}{1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x)} &\leq 1, \\ -1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x) + \alpha \Delta t &\leq 1 + 2s \cdot \text{sen}^2(\pi k \Delta x). \end{aligned}$$

Agrupamos términos:

$$\alpha \Delta t \leq 2.$$

Asi decimos que el esquema Crank-Nicolson es estable para la CFL $\alpha \Delta t \leq 2$. □

4.4.3. Convergencia de los esquemas

Cuando nos referimos a la convergencia de un método numérico afirmamos que mientras mayor sea el número de iteraciones obtendremos una mejor aproximación a la solución exacta. Para estudiar la convergencia de nuestros esquemas de diferencias finitas, vamos a utilizar el Teorema de

Lax que empíricamente afirma que si el esquema es consistente y estable entonces es convergente, es decir la solución numérica esta cerca de la solución exacta.

Teorema 4.9. *El esquema explícito es convergente.*

Demostración. Sabemos que el esquema explícito es consistente por (4.1) para la norma $\| \cdot \|_\infty$ y estable por (4.5) en $\| \cdot \|_2$ bajo la condición CFL $4\Delta t \leq (\Delta x)^2(2 - \alpha\Delta t)$. Por ende, el esquema es convergente, es decir:

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\sup_{t_n \leq T} \| e^n \| \right) = 0.$$

Donde e representa el vector error definido por la componente $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$. El esquema tiene un orden de convergencia $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + \Delta x)$. \square

Teorema 4.10. *El esquema implícito es convergente.*

Demostración. Es de nuestro conocimiento que el esquema implícito es consistente por (4.2) para la norma $\| \cdot \|_\infty$ y estable por (4.6) en $\| \cdot \|_2$, esto bajo la condición CFL $-4\Delta t \leq \Delta x^2(2 - \alpha\Delta t)$. Por ende, el esquema es convergente, es decir:

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\sup_{t_n \leq T} \| e^n \| \right) = 0.$$

Para e que representa el vector error definido por la componente $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$, donde el esquema tiene un orden de convergencia $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + \Delta x)$. \square

Teorema 4.11. *El esquema-theta es convergente.*

Demostración. Sabemos que el esquema-theta es consistente por (4.3) para la norma $\| \cdot \|_\infty$ y estable por (4.7) en $\| \cdot \|_2$ bajo la condición CFL $4\Delta t(2\theta - 1) \leq (\Delta x)^2(2 - \alpha\Delta t)$. Por ende, el esquema es convergente, es decir:

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\sup_{t_n \leq T} \| e^n \| \right) = 0.$$

Donde e representa el vector error definido por la componente $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$. Además esquema tiene un orden de convergencia $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + \Delta x)$. \square

Teorema 4.12. *El esquema Cranck-Nicolson es convergente.*

Demostración. El esquema Cranck-Nicolson es consistente por (4.4) para la norma $\| \cdot \|_\infty$ y estable por (4.8) en $\| \cdot \|_2$ bajo la condición CFL $\alpha \Delta t \leq 2$. Por ende, el esquema es convergente, es decir:

$$\forall T > 0, \quad \lim_{\Delta t, \Delta x \rightarrow 0} \left(\sup_{t_n \leq T} \| e^n \| \right) = 0.$$

Con e que representa el vector error definido por la componente $e_j^n = u_j^n - u(t_n, x_j)$. El esquema tiene un orden de convergencia $\mathcal{O}((\Delta t)^2 + (\Delta x)^2)$. \square

Conseguimos así la convergencia para cada uno de los métodos de diferencias finitas que hemos utilizado al realizar nuestro estudio de la Ecuación de Nagumo.

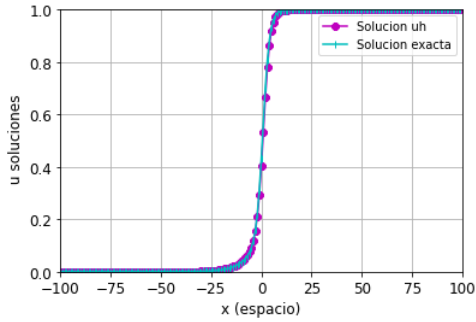
4.5. Simulación Numérica de la Ecuación de Nagumo

Realizar una simulación numérica nos permite observar el comportamiento de la ecuación de Nagumo discretizada en cada uno de los esquemas: explícito, implícito, esquema-theta y Cranck-Nicolson.

En este capítulo con la finalidad de conocer el esquema de diferencias finitas que mejor simule la ecuación de Nagumo, compararemos los errores que se obtienen de la solución real y numérica mediante gráficas de: soluciones u vs espacio Δx , espacio Δx vs error y tiempo Δt vs error. Además mostraremos resultados que se obtienen al variar arbitrariamente parámetros de la ecuación.

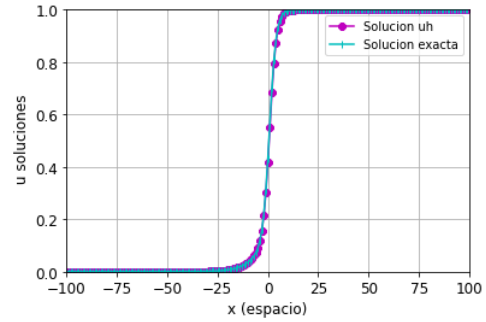
4.5.1. Resultados de soluciones reales y numéricas.

A continuación mostramos gráficas de los esquemas explícito, implícito, theta y cranck-Nicolson, en donde se puede observar los resultados arrojados con la solución numérica y las solución real (4.15). Para esto consideramos: $L = 100$, el número de particiones $N = 200$, y $\alpha = 0.25$, así:



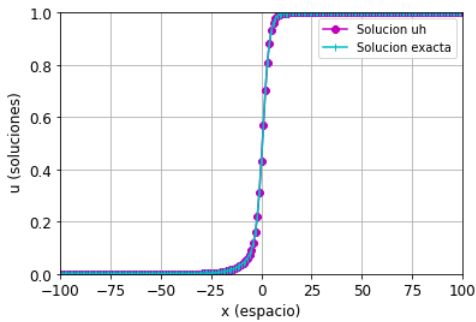
1-4:1

(a) Explícito



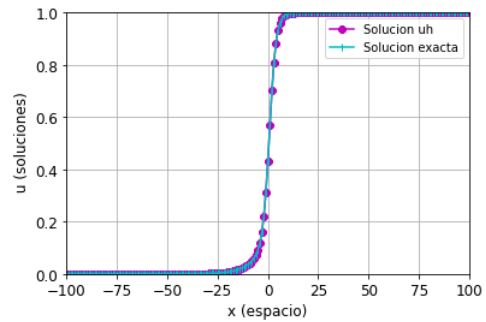
1-4:2

(b) Implícito



1-4:3

(c) Esquema-Theta



1-4:4

(d) Cranck-Nicolson

Ilustración 1-4: Solución numérica vs Solución real 1

Fuente: Elaboración propia.
Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

En las Ilustración(1-4:) presentadas podemos evidenciar que las simulaciones numéricas, en efecto generan respuestas similares, sin embargo si se observa detenidamente se puede notar que el esquema que presenta un error mínimo es el esquema theta, esto se da debido al valor que tomo el parametro $\theta = 0.9$, pues mientras este se acerque mas a 1 se obtendrán mejores resultados, pero si θ toma valores que se aproximen a 0 el valor que este esquema presente sera mayor; seguido de este, se encuentra Cranck-Nicolson, pues este presenta una mínima diferencia con la solución real; luego encontramos que en cuanto al error, le sigue el esquema Implícito, finalmente el esquema Explicito.

En la tabla siguiente mostraremos los resultados de las soluciones reales vs la numérica de la Ecuación de Nagumo. Trabajamos con las mismas condiciones y parametros para los 4 esquemas, lo que nos permitirá la obtención del error, el cual lo estudiaremos en L^2 .

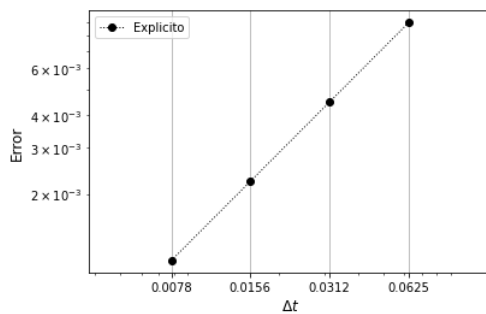
Tabla 1-4: Valores $\Delta x = [-10, -6, -2, 2, 6]$

Intervalo espacial	$\Delta x = -10$	$\Delta x = -6$	$\Delta x = -2$	$\Delta x = 2$	$\Delta x = 6$
Solución real	0.03553555	0.07240477	0.22093874	0.70101261	0.96079219
Esquema Implícito	0.000000	0.07232174	0.21903623	0.70414087	1.00000
Error	3.5535532e-02	8.30269283e-05	1.90250203e-03	3.12825668e-03	3.92078086e-02
Esquema Explícito	0.0000000	0.07627129	0.21176922	0.66195673	1.00000
Error	0.03553555	0.00386651	0.00916951	0.03905588	0.0392078
Esquema-Theta	0.0000000	0.07273677	0.2188826	0.70405752	1.00000
Error	0.03553555	0.000332	0.00205614	0.0030449	0.0392078
Cranck-Nicolson	0.03715359	0.07417803	0.21521757	0.68365115	0.95691042
Error	0.00161803	0.00177326	0.00572117	0.01736146	0.00388178

Fuente: Elaboración propia.

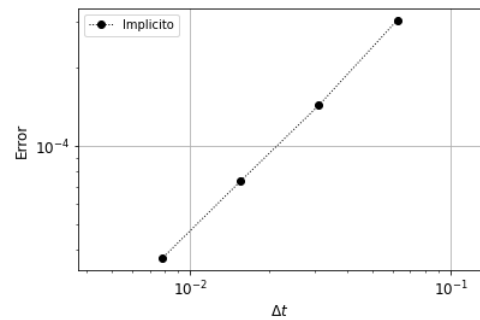
Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

Como podemos observar en la Ilustración(1-4:) el esquema Cranck-Nicolson es el que menor error presenta con respecto a los demás. Para verificar que la convergencia del error es correcta, presentamos las gráficas del tiempo vs el error de cada una de los métodos utilizados.



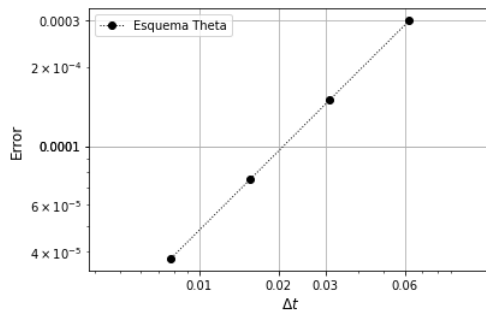
2-4:1

(a) Explícito



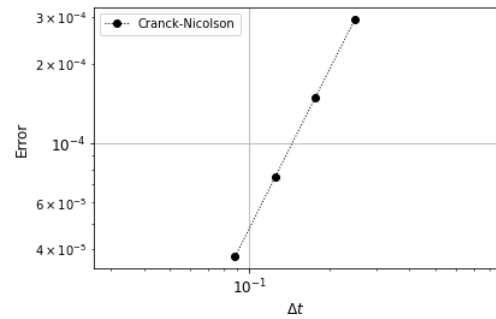
2-4:2

(b) Implícito



2-4:3

(c) Esquema-Theta



2-4:4

(d) Cranck-Nicolson

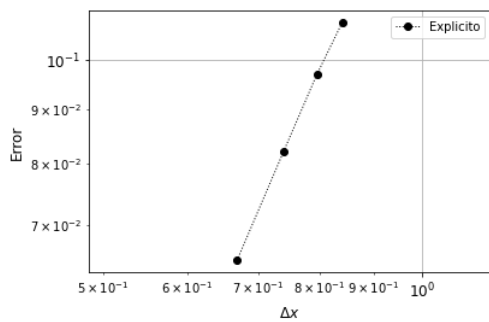
Ilustración 2-4: Gráficas del error temporal solución real 1

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

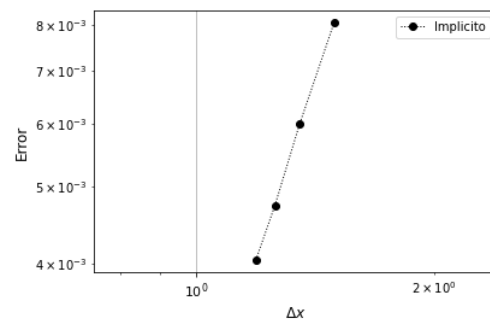
Tal como se puede ver en la Ilustración(2-4:), el esquema que presenta un error cuadrático, es decir con pendiente $m = 2$ es el esquema Cranck-Nicolson, lo que indica que este esquema converge de mayor manera a la solución real, en cambio los otros esquemas: explícito, implícito y esquema theta cuentan con una pendiente igual a 1 lo que muestra que convergen de manera similar hacia la solución exacta.

De manera análoga, mostramos las gráficas del error con respecto al espacio, en donde observaremos el orden de convergencia de cada uno de los esquemas y su comportamiento.



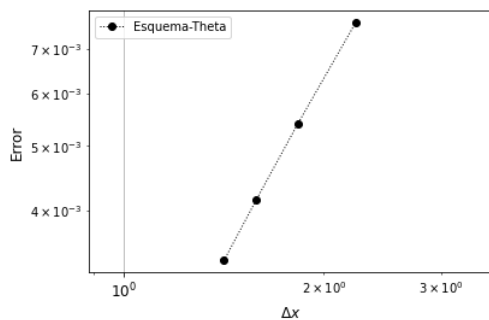
3-4:.1

(a) Explícito



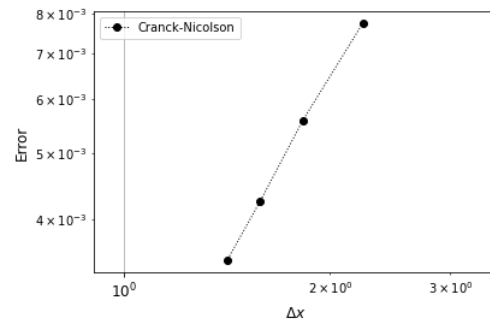
3-4:.2

(b) Implícito



3-4:.3

(c) Esquema-Theta



3-4:.4

(d) Cranck-Nicolson

Ilustración 3-4: Gráficas del error espacial solución real

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

En la Ilustración(3-4:) podemos verificar que en efecto el espacio converge de forma cuadrática para todos los esquemas, lo que indica que en cuanto al incremento del espacio no existe diferencia, mas sin embargo los puntos del error que se generan son diferentes debido a la matriz que los genera.

Para la solución (4.14) vamos a realizar una comparación mediante 3 tablas en la cuales podremos observar la variación que obtenemos del error calculado por la norma L^∞ en cada esquema de diferencias finitas según los parametros que tome α en determinados intervalos temporales , como

conocemos para la Ecuación de Nagumo $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ por lo que tomaremos valores que se aproximan a 0, 1 y cuando toma el punto medio de sus intervalos.

Empezamos con la tabulación de $\alpha = 0.0001$, y valores de $\Delta t = [1, 0.5, 0.25, 0.125]$

Tabla 2-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.0001$ con variación en el tiempo

Valores Δt	Esquema Explícito	Esquema Implícito	Esquema-Theta	Esquema Cranck-Nicolson
$\Delta t = 1$	0.026127531250424185	0.02502352562030008	0.023564334008787602	0.021198668285364652
$\Delta t = 0.5$	0.01149990454742722	0.008992921181370739	0.008572987986920577	0.007917563678163875
$\Delta t = 0.25$	0.005633817096808724	0.003461036248597893	0.003348335773973421	0.0031760375730675583
$\Delta t = 0.125$	0.0027968301853646627	0.0014529594000994295	0.0014238143733577568	0.0013797019938527333

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

Ahora realizaremos la tabulación cuando $\alpha = 0.49$, e igualmente que en la tabla anterior variamos los valores de $\Delta t = [1, 0.5, 0.25, 0.125]$

Tabla 3-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.49$ con variación en el tiempo

Valores Δt	Esquema Explícito	Esquema Implícito	Esquema Theta	Esquema Cranck-Nicolson
$\Delta t = 1$	0.006428089884866361	0.002116169470746776	0.002110418651491641	0.002344161153565172
$\Delta t = 0.5$	0.0028608256830492396	0.0004999433875677584	0.0006582053415810085	0.0010378871554774793
$\Delta t = 0.25$	0.001387593371962037	0.00038895567734653635	0.0004569843973296628	0.0005633783345034837
$\Delta t = 0.125$	0.0006853813368525974	0.00024975644452640555	0.0002681076023508533	0.0002962510664669127

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

Finalmente tenemos la tabulación cuando $\alpha = 0.25$, y $\Delta t = [1, 0.5, 0.25, 0.125]$

Tabla 4-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.25$ con variación en el tiempo

Valores Δt	Esquema Explícito	Esquema Implícito	Esquema Theta	Esquema Cranck-Nicolson
$\Delta t = 1$	0.01653830113482624	0.011941266653373694	0.011197347721468298	0.010006228839431586
$\Delta t = 0.5$	0.007424049749206163	0.004206827481646247	0.003997812049663818	0.0036743793990644535
$\Delta t = 0.25$	0.0036334460153971126	0.0016077343597196703	0.0015525400015020119	0.001468602857577106
$\Delta t = 0.125$	0.001801819321864062	0.000673382323471583	0.0006592474772925683	0.0006379174072966842

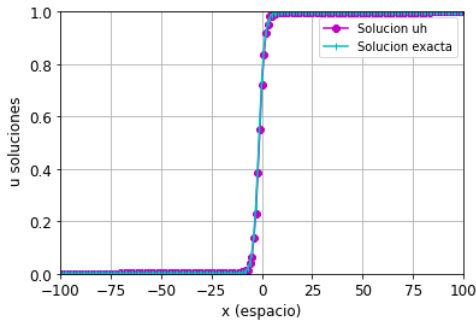
Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

Observando los datos obtenidos en la Tablas (2-4:),(3-4:),(4-4:) al variar el valor de α podemos notar que el valor del error cambia, puesto que mientras α se aproxime a 0.5 (ver Tabla 3-4:) los valores del error son minimos para todos los esquemas, seguidos por cuando $\alpha = 0.25$ (ver Tabla 4-4:) y cuando α se aproxima a 0 (ver Tabla 2-4:) el error incrementa. Es esencial además observar como el valor de esta variable afecta de manera significativa al momento de definir cual es el esquema que mejor funciona para la Ecuación de Nagumo, mientras α se mantiene en valor menores o iguales 0.25 el esquema Cranck-Nicolson sigue siendo el que menor error presenta, pero

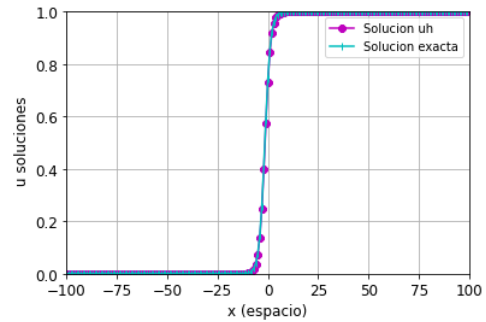
cuando α se aproxima a 0.5 el Esquema-Theta es el que tiene un error pequeño.

Con el mismo razonamiento realizamos el análisis para la solución exacta (4.13), y la solución numérica, obteniendo las siguientes gráficas:



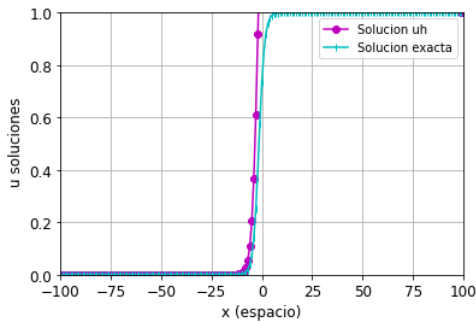
4-4:1

(a) Explícito



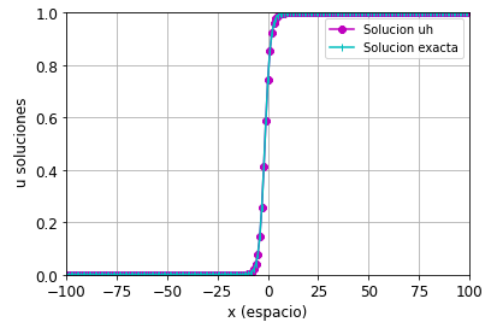
4-4:2

(b) Implícito



4-4:3

(c) Esquema-Theta



4-4:4

(d) Cranck-Nicolson

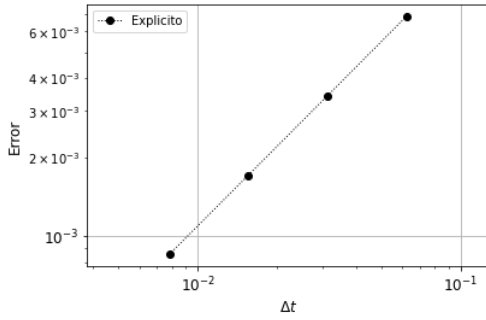
Ilustración 4-4: Solución numérica vs Solución real 2

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

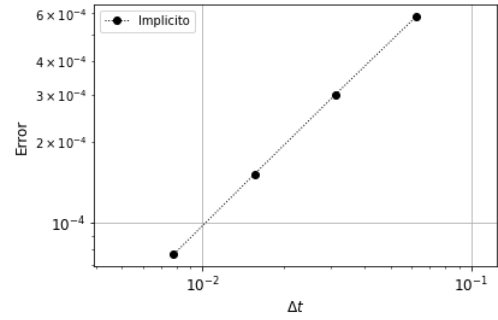
Para esta solución real, observamos en la Ilustración(4-4:) que la solución numérica varía, pues el esquema Cranck-Nicolson es el que presenta menor error, esto debido a la convergencia del tiempo y el espacio que resultan ser cuadráticos; seguido de este se encuentra el esquema implícito, luego el esquema explícito y finalmente el esquema theta el cual al tomar $\theta = 0.4$ se obtuvo un error mayor, si se realiza un cambio en este parámetro podemos evidenciar que el error cambia, sin embargo no llega a ser menor que el de Cranck-Nicolson.

En cuanto a la convergencia del tiempo, el comportamiento es el mismo, puesto que el error de convergencia se conserva tal como se observa en las gráficas siguientes:



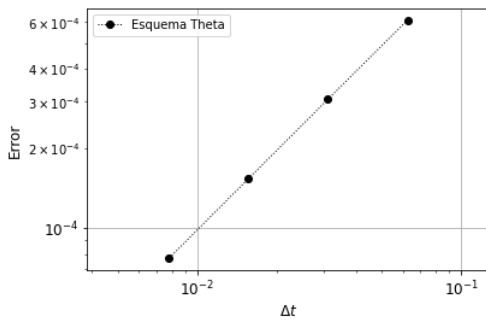
5-4:1

(a) Explícito



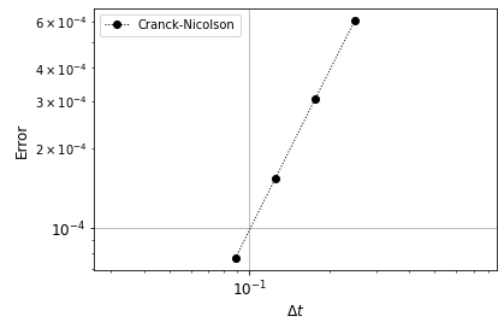
5-4:2

(b) Implícito



5-4:3

(c) Esquema-Theta



5-4:4

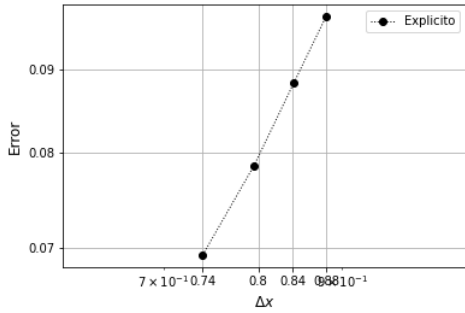
(d) Crank-Nicolson

Ilustración 5-4: Gráficas del error temporal solución real 2

Fuente: Elaboración propia.
Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

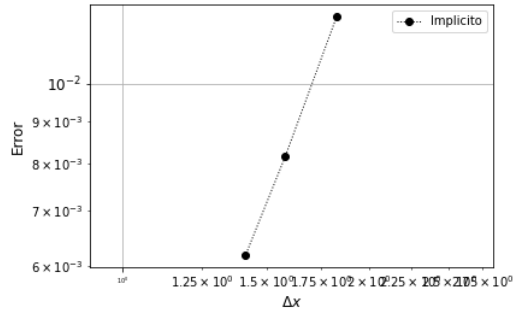
La Ilustración(5-4:) muestra que el comportamiento de las soluciones numéricas para converger hacia la solución exacta sigue siendo el mismo, sin importar la solución real que se de para su análisis.

De igual manera sucede con el espacio, como podemos ver en las figuras:



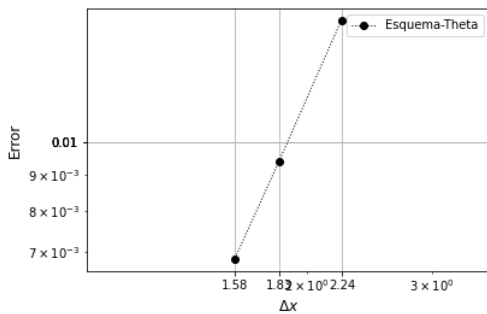
6-4:1

(a) Explícito



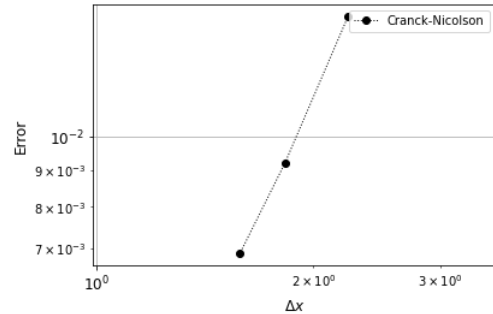
6-4:2

(b) Implícito



6-4:3

(c) Esquema-Theta



6-4:4

(d) Crank-Nicolson

Ilustración 6-4: Gráficas del error espacial solución real 2

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

Nuevamente, en la Ilustración(6-4:) observamos que todos los esquemas convergen a la solución exacta con la misma rapidez, debido a que su orden de convergencia respecto al espacio es cuadrático, es decir de orden 2. Lo que diferencia a una solución exacta de otra es el error que llega a presentar, aunque este es mínimo, es suficiente para identificar que solución trabaja de mejor manera para la ecuación de Nagumo.

Vamos ahora a estudiar como la solución exacta (4.13) se comporta en determinados intervalos temporales cuando variamos el valor de α para esto realizaremos una comparación mediante 3 tablas en la cuales α tomará valores que se aproximan a 0 , 1 y cuando toma el punto medio de sus intervalos.

Iniciamos con la tabulación de $\alpha = 0.0001$, y valores de $\Delta t = [2, 1, 0.5]$

Tabla 5-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.0001$ con variación en el tiempo

Valores Δt	Esquema Explícito	Esquema Implícito	Esquema-Theta	Esquema Cranck-Nicolson
$\Delta t = 2$	0.6686154727205798	0.06202891175410852	0.05672152084006843	0.04739169831273826
$\Delta t = 1$	0.24812957868793364	0.023567016555056497	0.021777546797913938	0.01880896619301403
$\Delta t = 0.5$	0.11881655090510085	0.008427066973844821	0.007887945292469944	0.007030783850032363

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

A continuación tenemos la tabulación de $\alpha = 0.49$ y valores de $\Delta t = [2, 1, 0.5]$

Tabla 6-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.49$ con variación en el tiempo

Valores Δt	Esquema Explícito	Esquema Implícito	Esquema-Theta	Esquema Cranck-Nicolson
$\Delta t = 2$	0.06849392812888035	0.008663344445063892	0.009799229637487472	0.012113708123109967
$\Delta t = 1$	0.0409539243541609	0.00605229387095918	0.006560854161075325	0.007501879096709629
$\Delta t = 0.5$	0.009336897570178526	0.003749801641154238	0.003938024544252849	0.004259353933974475

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

Ahora tenemos la tabulación de $\alpha = 0.25$ y valores de $\Delta t = [2, 1, 0.5]$

Tabla 7-4: Valores del error cuando $\alpha = 0.25$ con variación en el tiempo

Valores Δt	Esquema Explícito	Esquema Implícito	Esquema-Theta	Esquema Cranck-Nicolson
$\Delta t = 2$	0.35889122637697657	0.03443237878876193	0.032191328193281965	0.028385179132846217
$\Delta t = 1$	0.13668270133742466	0.013214967125424026	0.012512311001559862	0.011388258263325235
$\Delta t = 0.5$	0.05710528573699969	0.005338299802730984	0.005141605171761154	0.004838413650909146

Fuente: Elaboración propia.

Realizado por: Andrade, Daniela, & Ruiz, Delia, 2023.

Mediante los datos obtenidos en las Tablas (5-4:), (6-4:), (7-4:) podemos observar que el valor del error varía dependiendo de α , teniendo así que los esquemas presentan un menor error cuando α se aproxima a 0.5 (ver Tabla 6-4:), seguido de $\alpha = 0.25$ (ver Tabla 7-4:), para finalmente con $\alpha = 0.0001$ obtener un error mayor en todos los esquemas (ver Tabla 5-4:). Además es importante notar como el valor de α es relevante al elegir el método que mejor trabaje para esta solución exacta de la Ecuación de Nagumo, cuando $\alpha \leq 0.25$ el esquema que menor error presenta es el Esquema de Cranck-Nicolson, y cuando α se aproxima a 0.5 el esquema con el cual disminuye el error es el Implícito.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

1. Al estudiar las soluciones de la ecuación de Nagumo hemos encontrado que estas existen y son únicas, además estudiamos 2 soluciones exactas, las cuales nos permitieron realizar las comparaciones de cada uno de los esquemas.
2. Tras analizar los esquemas de diferencias finitas, podemos concluir que a partir del Esquema-Theta cuando $\theta = 0$ obtenemos el Esquema Implícito, cuando $\theta = 1$ conseguimos el Esquema Explícito y finalmente con $\theta = \frac{1}{2}$ llegamos al Esquema Crank-Nicolson.
3. Una vez estudiado los esquemas numéricos su consistencia, estabilidad y convergencia hemos obtenido que el orden de convergencia en los esquemas explícito, implícito y esquema theta son de forma lineal en el tiempo y cuadráticos en el espacio, mientras que el esquema Crank-Nicolson es cuadrático en el tiempo y en el espacio, es decir este último esquema nos genera error más pequeño puesto que se aproxima rápidamente a la solución exacta.
4. Mediante las tablas que hemos realizado logramos observar que al trabajar con los mismos parámetros para las 2 soluciones exactas que tenemos de la ecuación de Nagumo, la de Kawahara y Tanaka (4.14) es la que menor error presenta. Notamos además que para ambas soluciones cuando el valor de α se aproxima a 0 el esquema que simula de mejor manera la ecuación es el de Crank-Nicolson, mientras que cuando α se aproxima a 0.5 el valor del error mínimo es variante entre los esquemas, es decir que no es posible tener certeza de que un mismo esquema converga hacia la solución exacta en cualquier intervalo espacial o temporal esto sucede debido al CFL de cada esquema y como este se encuentra ligado al valor de α .

5.2. Recomendaciones

1. Puesto que este trabajo de titulación se enfoca en el análisis y deducción de los métodos de diferenciación numérica y la aplicación de estos en un caso particular recordamos se ponga a disposición este documento tanto a docentes como estudiantes de la ESPOCH para que sea posible incluir este tópico en el curso de análisis numérico.

2. Para facilitar la comprensión del documento, se recomienda empezar la lectura con el capítulo de preliminares puesto que sentará las bases para el tema principal que son los método de diferencias finitas.
3. Tomando como referencia este trabajo, se puede realizar el mismo estudio con una ecuación diferente que modele algún otro caso de la vida real que se pretenda resolver.

BIBLIOGRAFÍA

ACHOURI, R. Trvaelling wave solutions(Tesis)(Maestría). University of Manchester, Facultad de Ciencias e Ingenieria, Escuela de Matemática. Manchester,Reino Unido.2016.

ALLAIRE, G. *Numerical analysis and optimization: an introduction to mathematical modelling and numerical simulation* OUP Oxford, 2007.

BASHIER, E. *Practical Numerical and Scientific Computing with MATLAB and Python*. New York-USA:CRC Press, 2020.

BENALCAZAR, H. *Análisis Numérico* [en línea]. Quito-Ecuador , 2007.

BURDEN,R. et al. *Análisis numérico*[en línea]. 2002.[Consulta: 30 Mayo 2022].Disponible en: <https://evflores.files.wordpress.com/2014/02/analisis-numerico-richard-l-burden-7ma.pdf>

CARBAJAL, E. *Existencia y Estabilidad de Pulsos Viajeros en la Ecuación de FitzHugh-Nagumo*. México D.F: Universidad Nacional Autonoma de México, 1988.

EVANS, L. *Partial differential equations*[en línea]. California - USA :American Mathematical Soc, 2010. [Consulta: 30 Mayo 2022]. Disponible en: <https://acortar.link/AEGzO8>

FITZHUGH, R. *Mathematical models of threshold phenomena in the nerve membrane*. [en línea]. 17. Maryland - USA: The bulletin of mathematical biophysics, 1955. [Consulta: 15 Junio 2022]. Disponible en: https://math.mit.edu/~dunkel/Teach/18.S995_2017F/paper_suggestions/fitzhugh.pdf

GARCIA, G. Numerical Simulation of the Nagumo Equation by Finite Difference Method [en línea] (Tesis).(Maestría) Texas A& M University, Texas, USA. 2020.[Consulta: 15 Junio 2022]. Disponible en: <https://rio.tamtu.edu/etds/50/>

GARCÍA ,L. et al. Las matemáticas en la transmisión del impulso nervioso [en línea] (Tesis).(Maestría) Universidad de Valladolid, Valladolid, España. 2016. [Consulta: 15 Junio 2022]. Disponible en: <https://uvadoc.uva.es/handle/10324/19058>

HODGKIN, A; HUXLEY A; & KATZ B.“Measurement of current-voltage relations in the membrane of the giant axon of Loligo”. *The Journal of physiology* [en línea]. vol. 116, nº 4 (1952),(Inglaterra) pp.424-448. [Consulta: 15 Junio 2022]. Disponible en: <https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC1392219/pdf/jphysiol01447-0057.pdf>

IÓRIO, V. *EDP Un curso de graduación* . Lima-Perú: Universidad Nacional de Ingeniería (IMCA), 1999.

KAWAHARA, T; & TANAKA, M. “Interactions of Traveling fronts: An exact solution of al nonlinear diffusion equation”. *Physics Letters*, vol 97,n°8(1983), (Japón) pp.311-314.

PÉREZ , E. Simulación numérica de modelos de ecuaciones diferenciales en Neurociencia [en línea] (Tesis).(Maestría) Universidad de Sevilla, Sevilla, España. 2020. [Consulta: 15 Junio 2022]. Disponible en: <https://idus.us.es/handle/11441/115148>

XINFU, Ch; & JONG-SHENQ, G. “Uniqueness and existence of traveling waves for discretequasilinear monostable dynamics”. *Mathematische Annalen*,n°1(2003), (Japón) pp.123-146.

XINFU, Ch; & JONG-SHENQ, G. “Existence and uniqueness of entire solutions for a reaction–diffusion equation”. *Journal of Differential Equations* [en línea], 2005, (USA) 212(1), pp.62-84. [Consulta: 30 Mayo 2022]. Disponible en: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022039604004413>



ANEXOS

ANEXO A: ESQUEMA CRANCK-NICOLSON CÓDIGO PYTHON, COMPARACIÓN
SOLUCIÓN EXACTA-NUMÉRICA.

ESQUEMA CRANCK-NICOLSON PARA LA ECUACIÓN DE NAGUMO

```
'Cranck-Nicolson'  
'Grafica de la solución exacta y la solución numérica'  
  
import sympy as sp  
import numpy as np  
import itertools  
import numpy.linalg as l  
import matplotlib.pyplot as plt  
  
L = 1000 #Define el intervalo  
alpha = .25 #Parametro de la Ecuación de Nagumo  $0 < \alpha < 1/2$   
t1p = 2 #Iteraciones  
N = 600 #Numero de particiones  
dx =2*(L/N) #Paso del espacio  
#print(dx)  
dt=0.5 #Paso del tiempo  
#print(dt)  
CFL=alpha*dt/2 #Condición de Estabilidad  
print('El CFL es',CFL)  
r = dt/((dx**2)*2) #Sustitución para la matriz  
x = np.arange(-L,L,dx) #Intervalo del espacio  
n2=N+1  
u0 = np.zeros(N)  
t=0  
  
# Solucion exacta (Kawahara y Takana)  
gamma1=(np.sqrt(2)*(x))/(2) + (0.5- alpha)*(t)  
gamma2=(np.sqrt(2)*(alpha*x))/2 + (alpha*(alpha-2))*(t/2)  
u0[0:n2]=(np.exp(gamma1)+(alpha*np.exp(gamma2)))/(np.exp(gamma1)+np.exp(gamma2)+1)  
u1=u0  
error = np.zeros(N)  
t _ interval = np.zeros(N)  
  
# Solucion numerica  
for j in range(1,t1p)  
  
#Matriz A
```

```

A=np.diag(list(itertools.chain([1], ((2*r)+1)*np.ones(N-2), [1]))) + np.diag(list(itertools.chain((-r)
*np.ones(N-2), [0]), -1) + np.diag(list(itertools.chain([0], (-r)*np.ones(N-2))), 1)
# Vector b
F=((1-2*r)*u1)+r*(np.append(0,u1[0:(N-1)])+np.append(u1[1:N],1))+ dt*((u1)*(1-u1)*(u1-alpha))
#Condiciones iniciales
F[0]=0
F[N-1]=1
uh=np.linalg.solve(A,F)
u1=uh
#Calculo del error con la norma infinito
tf=j*(dt)
gamma1=(np.sqrt(2)*(x))/(2) + (0.5- alpha)*(tf)
gamma2=(np.sqrt(2)*(alpha*x))/2 + (alpha*(alpha-2))*((tf)/2)
ue=(np.exp(gamma1)+(alpha*np.exp(gamma2)))/(np.exp(gamma1)+np.exp(gamma2)+1)
uexacta=ue
error[j]=l.norm(uexacta-uh)
print((l.norm(ue-uh,np.inf)))

'Grafica de la solucion exacta vs la solucion numerica'
fig=plt.figure()
plt.plot(x,uh,'m8-', label='Solucion uh')
plt.plot(x,ue,'cl-', label='Solucion exacta')
plt.xlabel('x (espacio)', fontsize = 12)
plt.ylabel(' u (soluciones)', fontsize = 12)
plt.xticks(fontsize = 12)
plt.yticks(fontsize = 12)
plt.axis([-L,L,0,1])
plt.grid(True)
plt.legend()
plt.show()

```

ANEXO B: ESQUEMA IMPLÍCITO CÓDIGO PYTHON, ERROR TEMPORAL.

ESQUEMA IMPLÍCITO PARA LA ECUACIÓN DE NAGUMO

'Esquema Implícito'

'Programación para las grafica del error temporal'

'Mediante variaciones en Δt se grafican valores del error en L^∞ ' `import sympy as sp`

`import numpy as np`

`import itertools`

`import numpy.linalg as l`

`import matplotlib.pyplot as plt`

`L = 800 #Define el intervalo`

`alpha = .25 #Parametro de la Ecuación de Nagumo $0 < \alpha < 1/2$`

`tlp = 2 #Iteraciones`

`N = 750 #Numero de particiones`

`dx =2*(L/N) #Paso del espacio`

`dt=0.5 #Paso del tiempo`

'El dt toma valores de [0.0625,0.0312,0.0156,0.0078]'

`print(dt) #Impresiones del valor dt`

`CFL=-((4*dt)/((dx**2)*(2-alpha*dt))) #Condición de Estabilidad del Esquema Implicito`

`print('El CFL es',CFL)`

`r = dt/((dx**2)*2) #Sustitución para la matriz`

`x = np.arange(-L,L,dx) #Intervalo del espacio`

`n2=N+1`

`u0 = np.zeros(N)`

`t=0`

`# Solucion exacta (Kawahara y Takana)`

`gamma1=(np.sqrt(2)*(x))/(2) + (0.5- alpha)*(t)`

`gamma2=(np.sqrt(2)*(alpha*x))/2 + (alpha*(alpha-2))*(t/2)`

`u0[0:n2]=(np.exp(gamma1)+(alpha*np.exp(gamma2)))/(np.exp(gamma1)+np.exp(gamma2)+1)`

`u1=u0`

`error = np.zeros(N)`

`t _ interval = np.zeros(N)`

`for j in range(1,tlp)`

`A=np.diag(list(itertools.chain([1], ((2*r)+1)*np.ones(N-2), [1]))) + np.diag(list(itertools.chain((-r)*np.ones(N-2), [0]), -1) + np.diag(list(itertools.chain([0], (-r)*np.ones(N-2))), 1)`

```

F=u1+ dt* ((u1)*(1-u1)*(u1-alpha))
F[0]=0
F[N-1]=1
uh=np.linalg.solve(A,F)
u1=uh
#Calculo del error con la norma infinito
tf=j*(dt)
gamma1=(np.sqrt(2)*(x))/(2) + (0.5- alpha)*(tf)
gamma2=(np.sqrt(2)*(alpha*x))/2 + (alpha*(alpha-2))*((tf)/2)
ue=(np.exp(gamma1)+(alpha*np.exp(gamma2)))/(np.exp(gamma1)+np.exp(gamma2)+1)
uexacta=ue
error[j]=l.norm(uexacta-uh)
print((l.norm(ue-uh,np.inf))) #Valor del error  $L^\infty$ 

```

'Grafica para el error temporal'

'Para esta gráfica se van almacenando los valores dt en un vector y el error en otro'

'Vector de los valor dt'

```
dt_v=[0.0625,0.0312,0.0156,0.0078]
```

'Vector de los errores'

```
error_t=[0.00030330199894496035,0.00014306443078726527,7.332784733926623e-05,3.712019058998983e-05]
```

'Grafica:'

```

fig=plt.figure()
plt.loglog(dt_v,error_t, color='k', ls=':', lw=1, marker='o')
plt.plot(x,ue,'cl-',label='Solucion exacta')
plt.xlabel(r'$ \Delta t $', fontsize = 12)
plt.ylabel(r'Error', fontsize = 12)
plt.xticks(fontsize = 12)
plt.yticks(fontsize = 12)
plt.axis('equal')
plt.grid(True)
plt.legend(['Implicito'])
plt.show()

```



esPOCH

**Dirección de Bibliotecas y
Recursos del Aprendizaje**

**UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y
DOCUMENTAL**

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 16 / 05 / 2023

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: Daniela Sofia Andrade Andrade Delia Estefania Ruiz Luna
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Facultad: Ciencias
Carrera: Matemática
Título a optar: Matemática
f. responsable: Ing. Cristhian Fernando Castillo Ruiz

