ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

Implementación de un modelo de enseñanza aprendizaje incorporando software libre para mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales de estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas

CARLOS JULIO CUENCA POMATOCA

Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación, presentado ante el Instituto de Posgrado y Educación Continua de la ESPOCH, como requisito parcial para la obtención del grado de:

MAGÍSTER EN MATEMÁTICA MENCIÓN MODELACIÓN Y DOCENCIA

RIOBAMBA – ECUADOR

Agosto 2022

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DEL TRABAJO DE TITULACIÓN CERTIFICA QUE:

El **Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación**, titulado: Implementación de un modelo de enseñanza aprendizaje incorporando software libre para mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales de estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas, de responsabilidad del Sr. Carlos Julio Cuenca Pomatoca, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Tribunal del trabajo de titulación, en tal virtud el Tribunal autoriza su presentación.

.

Firmado electrónicamente por:
LUIS EDUARDO HIDALGO ALMEIDA

Ing. Luis Eduardo Hidalgo Almeida Ph.D.
PRESIDENTE

WILSON MARCELO ROMAN VARGAS
Firmado digitalmente por WILSON MARCELO ROMAN VARGAS
Fecha: 2022.09.05 16:40:03 -05'00'

Dr. Wilson Marcelo Román Vargas Mag.
DIRECTOR

LOURDES DEL CARMEN ZUNIGA LEMA
Firmado digitalmente por LOURDES DEL CARMEN ZUNIGA LEMA
Fecha: 2022.09.07 16:36:43 -05'00'

Dra. Lourdes del Carmen Zúñiga Lema Mag.
MIEMBRO

Firmado electrónicamente por:
NORMA DEL PILAR BARRENO LAYEDRA

Ing. Norma del Pilar Barreno Layedra Mag.
MIEMBRO

Riobamba, agosto 2022

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, Carlos Julio Cuenca Pomatoca, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuesto en el Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Firmado electrónicamente por:
CARLOS JULIO CUENCA POMATOCA

Carlos Julio Cuenca Pomatoca

No. Cédula 171379756-9

DECLARACIÓN DE AUTENTICIDAD

Yo, Carlos Julio Cuenca Pomatoca, declaro que el presente **Trabajo de Titulación** modalidad **Proyecto de Investigación y Desarrollo,** es de mi autoría y que los resultados del mismo son auténticos y originales. Los textos constantes en el documento que de otra fuente están debidamente citados y referenciados.

Como autor, asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este proyecto de investigación de maestría.

Firmado electrónicamente por:
CARLOS JULIO
CUENCA POMATOCA

Carlos Julio Cuenca Pomatoca

171379756-9

DEDICATORIA

A Dios y María Auxiliadora.

A mi mami Andrea, por su amor incondicional.

A mis amados hijos Anthony, Lisbeth y Tatiana por ser parte indispensable de mi vida y mi razón de ser.

A Carmen, Francisco y mis sobrinos por siempre estar presentes.

Carlos

AGRADECIMIENTO

Al Doctor Marcelo Román por todo el apoyo y dedicación durante todo el proceso de desarrollo de este trabajo.

A la Doctora Lourdes Zuñiga y a la Ing. Norma Barreno cuyo valioso aporte permitió llevar a buen término la presente investigación

A las señoritas y señores estudiantes de la asignatura de Álgebra Lineal de la carrera de Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas que con entusiasmo participaron en el desarrollo del presente trabajo.

Carlos

TABLA DE CONTENIDO

RESUMEN .... **xvi**

ABSTRACT .... **xvii**

CAPÍTULO I **1**

1 INTRODUCCIÓN **1**

1.1 Planteamiento del problema **3**

1.1.1 Situación Problemática ***3***

1.1.2 Formulación del problema ***4***

1.1.3 Preguntas directrices o específicas de la investigación ***4***

1.1.4 Justificación de la investigación ***4***

1.2 Objetivos de la investigación **5**

1.2.1 Objetivo general ***5***

1.2.2 Objetivos específicos ***5***

1.3 Hipótesis **6**

1.3.1 Hipótesis General ***6***

CAPÍTULO II **7**

2 MARCO TEÓRICO **7**

2.1 Antecedentes del problema **7**

2.2 Bases Teóricas **10**

2.2.1 Modelos de enseñanza ***10***

2.2.2 Transformaciones lineales ***12***

2.2.3 Software libre ***19***

2.2.4 Rendimiento académico ***23***

2.3 Marco Conceptual **25**

2.4 Determinación de variables **27**

2.4.1 Variable Independiente: ***27***

2.4.2 Variable dependiente: ***27***

2.5 Operacionalización conceptual de variables. **28**

2.6 Matriz de consistencia **30**

CAPÍTULO III **31**

3 METODOLOGÍA **31**

3.1 Diseño de la investigación **31**

3.1.1 Tipo y Diseño de la investigación ***31***

3.1.2 Método de la investigación ***31***

3.1.3 Enfoque de la investigación ***31***

3.1.4 Alcance investigativo 31
3.2 Población y muestra de estudio 31
3.2.1 Población de estudio 31
3.2.2 Unidad de análisis 31
3.2.3 Selección de la muestra 31
3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de datos 32
3.3.1 Técnica de recolección de datos 32
3.3.2 Instrumentos de recolección de datos 32
3.3.3 Validez y confiabilidad de los instrumentos 33
CAPÍTULO IV 38
4 RESULTADOS Y ANÁLISIS 38
4.1 Análisis e interpretación de los resultados de la evaluación inicial diagnóstica aplicada en la etapa de diagnóstico de la situación actual 38
4.1.1 Resultados de las preguntas especificas 38
4.2 Resumen de los resultados obtenidos en la encuesta aplicada 61
4.2.1 Acerca de la evaluación diagnostica de transformaciones lineales 61
4.2.2 Sobre las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las transformaciones lineales 61
4.2.3 Características para un software libre 61
4.2.4 Familiaridad con software libre matemático 61
4.3 Comprobación de homogeneidad entre grupos de control y experimental 62
4.4 Resultados obtenidos en la prueba objetiva 63
4.4.1 Estadísticos descriptivos de los resultados obtenidos en los grupos experimental y de control 65
4.4.2 Frecuencias e histogramas de los resultados de la prueba objetiva 66
4.5 Contrastación de la hipótesis 67
CAPÍTULO V 70
5 PROPUESTA 70
5.1 Introducción 70
5.2 Justificación 70
5.3 Descripción 71
5.4 Objetivos de la propuesta 71
5.5 Resultados del aprendizaje 72
5.6 Recursos 72
5.6.1 Recursos materiales 72
5.6.2 Recursos humanos 72

5.6.3 Recursos tecnológicos......72
5.7 Inducción sobre Jupyter Notebook 73
5.7.1 ¿Qué es el proyecto jupyter?......73
5.7.2 Funcionamiento 73
5.8 Propuesta didáctica Modelo de enseñanza 75
CONCLUSIONES......79
RECOMENDACIONES......80

BIBLIOGRAFÍA

ANEXOS

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1-2. Operacionalización de variables 28
Tabla 2-2. Operacionalización de variables 29
Tabla 3-2 Matriz de consistencia 30
Tabla 1-3. Validación por juicio de expertos 34
Tabla 2-3. Confiabilidad coeficiente Spearman-Brown 35
Tabla 3-3. Ficha técnica 35
Tabla 4-3. Validación por juicio de expertos 36
Tabla 5-3. Confiabilidad por coeficiente alfa de Cronbach 36
Tabla 6-3. Ficha técnica 37
Tabla 1-4. Diagnóstico, pregunta 1 38
Tabla 2-4. Diagnóstico, pregunta 2 39
Tabla 3-4. Diagnóstico, pregunta 3 40
Tabla 4-4. Diagnóstico, pregunta 4 41
Tabla 5-4. Diagnóstico, pregunta 5 42
Tabla 6-4. Diagnóstico, pregunta 6 43
Tabla 7-4. Diagnóstico, pregunta 7 44
Tabla 8-4. Diagnóstico pregunta 8 45
Tabla 9-4. Diagnóstico, pregunta 9 46
Tabla 10-4. Diagnóstico, pregunta 10 47
Tabla 11-4. Diagnóstico, pregunta 11 48
Tabla 12-4. Diagnóstico, pregunta 12 49
Tabla 13-4. Diagnóstico, pregunta 13 50
Tabla 14-4. Diagnóstico, pregunta 14 51
Tabla 15-4. Diagnóstico, pregunta 15 52
Tabla 16-4. Diagnóstico, pregunta 16 54
Tabla 17-4. Diagnóstico, pregunta 17 56
Tabla 18-4. Diagnóstico, pregunta 18 57
Tabla 19-4. Diagnóstico, pregunta 19 58
Tabla 20-4. Diagnóstico, pregunta 20 59
Tabla 21-4. Diagnóstico, pregunta 21 60
Tabla 22-4. Promedio obtenido por pregunta de diagnóstico 62
Tabla 23-4. Prueba F para varianzas de dos muestras 63
Tabla 24-4. Notas prueba objetiva grupo control 64
Tabla 25-4. Notas prueba objetiva grupo experimental 64

Tabla 26-4. Notas prueba objetiva grupo experimental 65
Tabla 27-4. Tabla de frecuencias grupo experimental 66
Tabla 28-4. Tabla de Frecuencias grupo control 67
Tabla 29-4. Nivel de Confianza...69

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1-2. Modelo 3P. 12
Figura 2-2. Linealidad...14
Figura 3-2. Núcleo o kernel de la transformación lineal...16
Figura 4-2. Representación gráfica de espacio imagen 17
Figura 5-2. Conjunto de transformaciones lineales de V en W 17
Figura 6-2. Composición de transformaciones lineales 18
Figura 7-2. Ícono de Jupyter 20
Figura 8-2. Panel de control jupyter...22
Figura 9-2. Interfaz jupyter notebook...23

ÍNDICE DE GRÁFICOS

Gráfico 1-4. Diagnóstico transformaciones lineales 38
Gráfico 2-4. Diagnóstico transformaciones lineales 39
Gráfico 3-4. Diagnóstico transformaciones lineales 40
Gráfico 4-4. Diagnóstico transformaciones lineales 41
Gráfico 5-4. Diagnóstico transformaciones lineales 42
Gráfico 6-4. Diagnóstico transformaciones lineales 43
Gráfico 7-4. Diagnóstico transformaciones lineales 44
Gráfico 8-4. Diagnóstico transformaciones lineales 45
Gráfico 9-4. Diagnóstico transformaciones lineales 46
Gráfico 10-4. Diagnóstico transformaciones lineales 47
Gráfico 11-4. Diagnóstico transformaciones lineales 48
Gráfico 12-4. Diagnóstico transformaciones lineales 49
Gráfico 13-4. Diagnóstico transformaciones lineales 50
Gráfico 14-4. Diagnóstico transformaciones lineales 51
Gráfico 15-4. Diagnóstico transformaciones lineales 52
Gráfico 16-4. Diagnóstico transformaciones lineales 54
Gráfico 17-4. Diagnóstico transformaciones lineales 56
Gráfico 18-4. Dificultades para el aprendizaje de transformaciones lineales.............................57
Gráfico 19-4. Dificultades para el aprendizaje de transformaciones lineales.............................58
Gráfico 20-4. Características para software libre matemático 59
Gráfico 21-4. Uso de software libre matemático 60
Gráfico 22-4. Gráfico de caja y Bigotes 65
Gráfico 23-4. Histograma grupo experimental 66
Gráfico 24-4. Histograma Grupo control...67

INDICE DE ANEXOS

ANEXO A. Formato de validación de encuestas

ANEXO B. Evaluación diagnóstica

ANEXO C. Encuesta de satisfacción

ANEXO D. Proceso para iniciar con jupyter

ANEXO E. Estudio de las Transformaciones lineales

ANEXO F. Plan de clase

RESUMEN

El objetivo de la presente investigación fue implementar un modelo de enseñanza aprendizaje que incorpore el uso de software libre matemático para mejorar el rendimiento académico en el tema transformaciones lineales, la investigación fue de tipo cuasiexperimental, por lo que se dividió un paralelo de 42 estudiantes en dos grupos iguales, control y experimental, cuya homogeneidad se comprobó mediante la prueba F para varianzas de dos muestras. Para determinar los conocimientos previos, las causas que dificultan la enseñanza aprendizaje y la familiaridad con el uso de software libre se utilizó la técnica de interrogación cuyos instrumentos fueron la prueba objetiva y el cuestionario que cuentan con validez y confiabilidad. El modelo de enseñanza aprendizaje escogido aplicable a estudiantes de nivel universitario fue el modelo 3P de Biggs, que junto con los resultados obtenidos por medio de la técnica de la interrogación permitieron aplicar un alineamiento constructivo que condujo hacia un aprendizaje profundo mediado por contenido, actividades y evaluación compartidas a través de la construcción de un documento interactivo de formato. ipynb desde la interfaz Jupyter Notebook. Mediante análisis estadístico se comparó los promedios obtenidos por el grupo de control y experimental determinándose un impacto positivo del modelo 3P que incluye software libre en el grupo experimental. Se concluye que la aplicación del modelo 3P que incorpora software produjo mejora del 10,40% en el rendimiento académico del grupo experimental con respecto al grupo control por lo que se recomienda incluir actividades que impliquen el uso de software libre generando nuevas habilidades y la imprescindible motivación intrínseca por parte de los estudiantes.

PALABRAS CLAVE: <APRENDIZAJE>, <TRANSFORMACIONES LINEALES>, <SOFTWARE LIBRE>, <TRANSFORMACIONES LINEALES>, <MODELO ENSEÑANZA>, <ALINEAMIENTO CONSTRUCTIVO>, <JUPYTER (SOFTWARE)>

ABSTRACT

The objective of this research was to implement a teaching-learning model that incorporates the use of free mathematical software to improve academic performance on the topic of linear transformations. The research was quasi-experimental, so a parallel of 42 students was divided into two equal groups, control and experimental, whose homogeneity was verified by means of the F test for variances of two samples. To determine previous knowledge, the causes that hinder the teaching learning and familiarity with the use of free software, The interrogation technique - whose instruments were the objective test and the questionnaire that have validity and reliability - was used. The chosen teaching-learning model applicable to university-level students was Biggs' 3P model, which together with the results obtained through the interrogation technique allowed applying a constructive alignment that led to deep learning mediated by content, activities and Shared evaluation through the construction of an interactive document format. ipynb from the Jupyter Notebook interface. Through statistical analysis, the averages obtained by the control and experimental groups were compared, determining a positive impact of the 3P model that includes free software in the experimental group.

It is concluded that the application of the 3P model that incorporates software produced a 10.40% improvement in the academic performance of the experimental group with respect to the control group, so it is recommended to include activities that involve the use of free software, generating new skills and the essential intrinsic motivation on the part of the students.

KEY WORDS: <LEARNING>, <LINEAR TRANSFORMATIONS>, <FREE SOFTWARE>, <LINEAR TRANSFORMATIONS>, <TEACHING MODEL>, <CONSTRUCTIVE ALIGNMENT>, <JUPYTER (SOFTWARE)>

CAPÍTULO I

1 INTRODUCCIÓN

En la actualidad existe una gran diversidad de estudiantes en la educación superior, cada uno con capacidades y expectativas diferentes que difícilmente se acoplan a la enseñanza tradicional. Están desde los más destacados y académicamente comprometidos que adquirirán un conocimiento profundo hasta aquellos cuyo conocimiento es superficial y su única meta es obtener un título que le permita alcanzar una plaza para trabajar. Cada vez más el segundo grupo tiende a predominar, y se hace necesario aplicar un modelo de enseñanza que permita que todos los estudiantes se involucren, sean parte de su propio aprendizaje y adquieran el conocimiento profundo que se requiere en la educación superior (Biggs, 2006).

En un esfuerzo para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de acuerdo con Navarrete y Rojas (2018) se debería recurrir a medios digitales que estén dirigidos a un usuario promedio que pueda utilizar estos medios de acuerdo con su tiempo e intereses en busca de un efectivo y significativo aprendizaje. Según el mismo autor, Navarrete y Rojas (2018), en el ámbito educativo para adquirir o adoptar productos tecnológicos materiales o inmateriales se debe evaluar la pedagogía que sustenta el producto y la relación que existe entre este y lo que se busca cambiar con su aplicación, es decir, por si sola la herramienta tecnológica no representan innovación si ésta no forma parte de un sistema equilibrado.

El modelo 3P se presenta como una opción válida y oportuna para mejorar el aprendizaje, y, por lo tanto, el rendimiento académico, en transformaciones lineales de los estudiantes del primer semestre de la asignatura de Álgebra Lineal de ingeniería de la Universidad de las Fuerzas Armadas ya que concibe a la enseñanza como un sistema equilibrado que tiene al estudiante como principal actor de su propio proceso de aprendizaje.

En el CAPÍTULO I, se realiza un análisis de la situación problemática, se formula el problema, se establecen las preguntas directrices de la investigación, su justificación y los objetivos.

En el CAPÍTULO II se expone el marco teórico referenciado en investigaciones anteriores sobre el tema y teniendo en cuenta las variables de investigación. Además, se exponen los métodos, población, muestra e hipótesis, así como la identificación y operacionalización de las variables.

En el CAPÍTULO III se trata acerca de la metodología de la investigación aplicada, en la que constan: tipo, enfoque, métodos, población de análisis, muestra, técnicas e instrumentos utilizados para la recolección de datos.

En el capítulo IV se presentan los resultados obtenidos y su respectiva discusión, se analizan estadísticamente los datos obtenidos y se comprueba la hipótesis planteada.

En el CAPÍTULO V se desarrolla la implementación del modelo de enseñanza aprendizaje adoptado incorporando software libre matemático para el mejoramiento del rendimiento académico.

Para finalizar se presentan las conclusiones alcanzadas y se realizan las recomendaciones basadas en los resultados obtenidos, se presenta la bibliografía utilizada. Además, se incluyen los anexos que representan la evidencia de las diferentes actividades y el material desarrollado durante el proceso de investigación.

1.1 Planteamiento del problema

1.1.1 Situación Problemática

El álgebra lineal (AL) es una de las disciplinas de las matemáticas que estudia conceptos como: matrices, sistemas de ecuaciones lineales, determinantes y, formalmente se enfoca en sus espacios vectoriales y transformaciones lineales. Su historia, según Nuñez y Sandoval (2015) inicia en 1843 con la creación de los cuaterniones por William Rowan Hamilton y en 1844 con la publicación del libro La Teoría de la Extensión por Grassman, en 1888 Guiseppe Peano presentó la definición moderna de espacio vectorial cuyo desarrollo teórico se dio principalmente a mediados del siglo XX.

Dentro del estudio del álgebra lineal (AL) las transformaciones lineales de acuerdo con Savov (2016) son fundamentales, ya que hacen posible la conexión entre todos aquellos conceptos que aparentan no estar relacionados y que debieron ser revisados previo a llegar a este punto. Su importancia radica en la aplicabilidad que tienen en el campo de la física, ingeniería, ciencias sociales y diversas disciplinas de la matemática (Anton y Rorres, 2013). Esa es la razón de su incorporación como asignatura obligatoria en las mallas curriculares de las distintas carreras de ingeniería de la Universidad de las Fuerzas Armadas.

Tradicionalmente el álgebra lineal y por lo tanto las transformaciones lineales han sido y, desde la perspectiva de Sierpinska (2000), seguirán siendo una asignatura y un tema difícil para los estudiantes, cuyas fuentes de dificultad son de tipo conceptual y cognitivo. Para Hillel (2000) en el estudio del AL se hace uso básicamente de tres tipos de lenguaje: abstracto, algebraico y geométrico; mismos que deben estar articulados.

En lo que respecta a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, en general, Sierpinska (2000) hace hincapié en la importancia de aprender la teoría y propiedades, para, mediante su análisis aplicar en los ejercicios que se resuelven en el aula de tal forma que puedan entonces resolver los ejercicios propuestos. La misma autora, Sierpinska (2000), afirma que existe una tendencia a pensar en forma práctica en lugar de forma teórica, y como consecuencia de su investigación encontró que aquellos estudiantes que iban experimentando dificultades mostraban características de pensamiento práctico más que teórico, lo que no les permitía ir más allá de la representación gráfica produciéndose una relación fenomenológica antes que analítica.

En el caso específico de los estudiantes de Álgebra Lineal de la Universidad de las Fuerzas Armadas, la unidad de transformaciones lineales es muy importante ya que el estudiante pone a prueba los conocimientos previamente adquiridos acerca de matrices, resolución de sistemas lineales, independencia lineal, bases de un espacio vectorial, espacios vectoriales, combinaciones lineales, entre otros; que de manera ideal deberían ser abordados por medio del uso flexible del razonamiento evitando buscar similitudes con otros ejercicios o leer sin entender la simbología y terminología. Al ser la última unidad del período académico es determinante para la aprobación de la asignatura, en el esfuerzo para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes de acuerdo a Navarrete y Rojas (2018) se debería recurrir a medios digitales (software) que sean dirigidos a un usuario promedio que pueda utilizarlos a la medida de su tiempo e intereses en busca de un efectivo y significativo cambio en el desarrollo de las actividades en el aula, física o virtual, como aporte para la enseñanza y el aprendizaje, en nuestro caso específico, de las transformaciones lineales.

1.1.2 Formulación del problema

Por lo expuesto, la presente investigación está orientada a analizar la incidencia que puede tener un modelo de enseñanza aprendizaje que incorpore software libre matemático en el rendimiento académico de los estudiantes de la asignatura de álgebra lineal en el tema de transformaciones lineales; por lo que se pretende responder la siguiente interrogante:

¿Un Modelo de Enseñanza - Aprendizaje de Transformaciones Lineales incorporando Software Libre permite mejorar la comprensión y el rendimiento académico de los estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas?

1.1.3 Preguntas directrices o específicas de la investigación

1. ¿Cuáles son las causas que dificultan la enseñanza aprendizaje de las transformaciones lineales?
2. ¿Qué modelo de enseñanza aprendizaje adoptar para la enseñanza aprendizaje de transformaciones lineales?
3. ¿Qué aspectos considerar para desarrollar herramientas interactivas de apoyo, basadas en software matemático, para dinamizar el proceso de enseñanza aprendizaje de las transformaciones lineales?
4. ¿Cómo implementar un modelo de enseñanza aprendizaje que incorpore herramientas basadas en software libre para mejorar el rendimiento académico de los estudiantes?

1.1.4 Justificación de la investigación

Para Sierpinska (2000) la forma de acercar a los estudiantes a los conceptos abstractos del álgebra lineal y específicamente de las transformaciones lineales se potencia mediante el uso de ambientes virtuales como una parte de un todo; lo que permite ir dejando de lado la enseñanza tradicional que persiste actualmente en la educación superior según el estudio de Cartuche et al. (2015).

Como afirma Muente (2019) el uso de software educativo es actualmente una necesidad que debería estar presente en las aulas (virtuales o presenciales) de todo nivel, como parte de la metodología y estrategias de enseñanza-aprendizaje ya que siendo herramientas innovadoras atraen la atención del estudiante, lo motivan e interesan propiciando la adquisición de conocimientos o habilidades que se traducen en mejor rendimiento académico. Otra de las características es que al estar disponibles en cualquier momento promueven el autoaprendizaje por parte de los estudiantes de acuerdo con sus propios intereses y expectativas.

Varios autores (Costa et al., 2018; Grossman y Flores, 2012; Kolman y Hill, 2006) hacen énfasis en el uso de diferentes paquetes de software para resolución de ejercicios y visualización, sin embargo, le dan mayor peso al software MATLAB cuya licencia es de costo, razón por la cual queda fuera del alcance de muchos de los estudiantes. Este antecedente hace que sea necesaria la inclusión del uso de software para el estudio del Álgebra Lineal, que este software sea libre y que esté al alcance de cualquier persona. La existencia del software por sí sola no es la solución a la problemática del aprendizaje, se requiere su inclusión en los planes de enseñanza y aprendizaje ya que como lo refieren diferentes autores, (Cartuche et al., 2015; López et al., 2019; Sánchez, 2013; Sbitneva et al., 2018) no todos los docente incluyen en sus cátedras el uso de software, algo que en la actualidad es indispensable, privándose así de la posibilidad de mejorar su actividad docente y elevar el aprovechamiento de los estudiantes.

Por lo expuesto, el uso de software educativo en la enseñanza-aprendizaje de las transformaciones lineales a los estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas se presenta tanto como un aporte metodológico, como práctico que tiene como beneficiarios directos al estudiante, cuyo rendimiento académico mejorará, y al docente que encontrarán una herramienta que le permita proponer metodologías y estrategias de enseñanza innovadoras, eficientes que estén al alcance de todos.

1.2 Objetivos de la investigación

1.2.1 Objetivo general

Implementar un modelo de enseñanza aprendizaje incorporando software libre para mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales de estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas

1.2.2 Objetivos específicos

- Diagnosticar las posibles causas que dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones lineales.

- Adoptar un modelo de enseñanza aplicable al nivel universitario que permita incorporar software libre y presente la enseñanza como un sistema interactivo que equilibre los factores que dependen del estudiante y del contexto con las actividades centradas en el aprendizaje y los resultados que se requieran obtener del proceso.
- Desarrollar herramientas interactivas de apoyo, basadas en software libre, que permitan visualizar, dinamizar, y comprender las transformaciones lineales en R^2 y R^3 para generalizar el concepto a R^n.
- Implementar y validar el modelo de enseñanza aprendizaje propuesto, para verificar su impacto positivo en el rendimiento académico.

1.3 Hipótesis

1.3.1 Hipótesis General

La implementación del Modelo 3P de enseñanza aprendizaje de Biggs (Presagio, proceso, producto) incorporando software libre permite mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales de estudiantes del primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas.

CAPÍTULO II

2 MARCO TEÓRICO

2.1 Antecedentes del problema

Según Cartuche et al. (2015) en un estudio realizado por la Universidad Nacional de Loja se pudo determinar que al menos el 32% del personal docente adolece de falta de pensamiento creativo, lo que limita el número de actividades que pueden ser aplicadas en el aula de clases, es decir, prevalece aún la clase magistral que tiene al estudiante como receptor de conocimientos, lo que le priva de ser protagonista de su propio aprendizaje. En el caso de la educación superior de Colombia la situación es similar y hay que adicionar la falta de estrategias pedagógicas y didácticas que procuren el autoaprendizaje del estudiante. El estudio refiere que, si bien existe interés por incluir TICS dentro del proceso de enseñanza aprendizaje no existe continuidad en su aplicación y terminan siendo subutilizadas debido a la falta de políticas institucionales.

En el caso específico del Álgebra Lineal, rama de la matemática que se imparte en los primeros niveles de formación de las carreras de ingeniería debido a su uso y aplicación en la solución de diversos problemas dentro del ámbito académico y profesional, su carácter abstracto deja al descubierto las deficiencias conceptuales y cognoscitivas que acarrean los estudiantes en su paso de la educación secundaria a la universidad ya que para el estudio del AL y sus conceptos es necesario una flexibilidad entre los lenguajes geométrico, aritmético y algebraico (Jean-Luc Dorier y Sierpinska, 2001). La investigación de Sierpinska (2000) apoya la opinión de que la mayoría de los estudiantes prefieren la escuela práctica, es decir se sienten a gusto haciendo cálculos una vez que los problemas hayan sido puestos en una forma apropiada. Considera también que, para trabajar con definiciones axiomáticas, conceptos y pruebas; los estudiantes son inexpertos y se sienten incómodos.

Dentro de la revisión bibliográfica se ha podido evidenciar que en su mayoría los trabajos de investigación están direccionados al tratamiento del álgebra lineal en general, mientras que el número de trabajos dedicados al estudio de las transformaciones lineales en particular es menor.

Los retos actuales de la educación universitaria, como lo refiere López et al., (2019), tienen que ver, entre otros aspectos, con la necesidad de darle al estudiante mayor protagonismo y autonomía de su propio aprendizaje, lo que a su vez impone al docente la enseñanza de matemática superior en nuevos contextos, para lo que reflexionan desde su propia experiencia docente acerca de la enseñanza de las “Aplicaciones Lineales y Diagonalización” considerando que en la actualidad para lograr una educación integral se hace necesario e imprescindible la incorporación, en los planes de estudio universitarios, de las TIC dentro de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Coinciden también con los otros investigadores citados en la importancia de la matemática para la formación de los ingenieros, ya que el desarrollo del pensamiento lógico y algorítmico es básico para el ejercicio de su profesión que, como ingeniero, todo fenómeno estudiado debe poder ser representado en términos matemáticos. Entre las principales recomendaciones de su estudio resaltan:

a) La elaboración de material didáctico que permitan la reactivación independiente de los temas necesarios para el estudio de las aplicaciones lineales
b) Mayor énfasis en el uso de las TIC con finalidad de motivar y favorecer el autoaprendizaje de los estudiantes
c) Vincular las aplicaciones lineales con el perfil profesional del futuro ingeniero.
d) Promover el uso de software matemático tales como: Matlab, Excel y Derive

Por su parte en este mismo contexto Sbitneva et al. (2018) diseñaron e implementaron una serie de experiencias de instrucción, a un grupo de siete estudiantes de licenciatura, desde la perspectiva ontosemiótica, con la finalidad de que sean una guía para ellos y lograr que puedan visualizar y comprender las nociones de linealidad y proporcionalidad. Conceptos como calibración, corte y homotecia fueron tratadas mediante la práctica de operaciones, observación e interpretación del cambio que producen las matrices de transformación lineal sobre formas geométricas con el apoyo del software GeoGebra. Los autores coinciden con estudios que consideran el álgebra lineal como difícil de interpretar y comprender e incluyen en la problemática la dificultad que tienen los estudiantes con las estructuras algebraicas al tratar espacios vectoriales. Entre sus principales conclusiones se tiene que:

a) El uso de GeoGebra facilitó la visualización de las transformaciones lineales de corte, sesgo o inclinación mediante el paso del sistema de coordenadas perpendiculares a sistema de coordenadas oblicuas y viceversa.
b) Utilizar GeoGebra les permitió mostrar la conservación de las relaciones lineales que produce la conservación de proporciones. Esto permite al estudiante reconocer a una forma que haya sufrido una transformación lineal.
c) Respecto a la representación analítica de las transformaciones resaltan la relación de la matriz diagonal con las contracciones de formas geométricas debido a la presencia de vectores propios.

En el trabajo de Palomino (2017), realizado en la Escuela de Postgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, se pone de manifiesto las deficiencias y dificultades descritas pero, desde el punto de vista de la formación docente en lo que respecta a formalismo de las transformaciones lineales que provoca la reducción de la enseñanza únicamente al ámbito algebraico de tal forma que esto produce en los estudiantes dificultades para reconocer distintas formas de representación y entre transformaciones lineales y no lineales, provocando aprendizajes y técnicas de resolución “mecánicas” que en el corto plazo podrían quedar en el olvido, es decir son conocimientos temporales únicamente para salvar el curso. Su propuesta fue, bajo la metodología de ingeniería didáctica, la integración del software GeoGebra para la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones lineales.

Entre sus principales conclusiones resaltan:

a) La articulación de lenguajes ayuda en el proceso de aprendizaje de las transformaciones lineales

b) La importancia de la elección correcta del marco teórico para el desarrollo de actividades.

c) El uso de GeoGebra ayuda en el aprendizaje de definiciones y propiedades

d) Así también recomienda:

e) Repetir la experiencia con otros alumnos a fin de considerar el rediseño de actividades

f) Enfatizar el cambio entre registros: gráfico, matricial o natural para poder diferenciar si una función es o no transformación lineal.

En referencia a los docentes universitarios del Ecuador Sanchez (2013) menciona la necesidad existente de que utilicen, en la enseñanza, metodologías que incluyan a las tecnologías, amparado en la nueva Ley Orgánica de Educación Superior, por lo que investiga la influencia que tiene el uso de SCILAB y WIRIS en el rendimiento, y posible reducción del índice de reprobación de 70 estudiantes de la materia de AL en la Escuela Politécnica del Ejercito Sede Latacunga. Coincide con las afirmaciones de Cartuche et al. (2015) al considerar que las clases se dictan desde el enfoque tradicionalista que ubica al estudiante como un receptor de aprendizaje, facilista, conformista y poco investigador que el contenido del Álgebra Lineal le resulta abstracto y poco interesante, debiendo el docente analizar la conveniencia de aplicar técnicas y tecnologías que le permitan captar su atención y elevar su rendimiento académico. Entre las principales conclusiones de su investigación obtuvo que:

a) Existe una incidencia positiva en los estudiantes del software Matlab y Wiris, ya que despiertan su interés y brindan la posibilidad de pasar de lo abstracto a lo práctico, lo que influye en su aprovechamiento y rendimiento, especialmente aquellos estudiantes que poseen algún conocimiento o habilidad para programar.
b) Pudo determinar que existen docentes que usan software Matlab y Octave en el desarrollo de sus clases, y otros que debido a la falta de familiarización con software matemático no hacen uso de software para sus clases

c) Algunas de las deficiencias de los estudiantes se presentan cuando realizan operaciones aritméticas y algebraicas que producen resultados erróneos mismas que al hacerlas con software dan como resultado respuestas correctas.
d) La falta de conocimiento y habilidad en programación básica y la poca familiaridad con herramientas tecnológicas es un limitante para los estudiantes, por lo que algunos de ellos no están de acuerdo con su uso en las clases.

Entre sus recomendaciones se tienen:

a) Se debería profundizar el uso de estas aplicaciones como herramientas de comprobación ayudando de esta forma al estudiante dentro del aula, fuera de ella y en sus tareas mejorando su comprensión.

b) Recomienda investigar el uso de otras aplicaciones y su inclusión en las estrategias de enseñanza aprendizaje para trabajar álgebra lineal e incentivar su comprensión y entendimiento.

c) El uso de todas herramientas informáticas necesarias que aporten al diseño y creación de material científico de apoyo para la mejor comprensión de la matemática.

2.2 Bases Teóricas

2.2.1 Modelos de enseñanza

Dentro de la actividad diaria los docentes, según Valcárcel (2004), hacen uso de determinados modelos de enseñanza aprendizaje dentro de sus procesos, estos deben estar articulados y fundamentados en diferentes teorías y son la base del éxito en el ejercicio de la profesión docente. Es por lo que, de acuerdo con el planteamiento de Arteaga y Macías (2016) es necesario tener un modelo de referencia que nos permita realizar el análisis y el estudio de la manera en que los estudiantes adquieren el conocimiento y también conocer los procesos de tipo cognitivo que intervienen.

Durante el siglo XX, menciona Biggs (2006), se realizaron muchas y variadas investigaciones sobre el aprendizaje que tenían como finalidad elaborar algún tipo de teoría magna del aprendizaje dejando de lado el contexto en que el estudiante desarrolla su aprendizaje. La investigación acerca de cómo aprenden los estudiantes se origina con los estudios de los suecos Marton y Säljö (1976) sobre los enfoques superficial y profundo del aprendizaje cuyo marco conceptual se derivaba en gran medida de la psicología cognitiva lo que permitía la extracción de importantes consecuencias para la enseñanza.

Las teorías de la enseñanza y el aprendizaje centradas en la actividad de los estudiantes se basan en las teorías de la fenomenografía y el constructivismo, siendo esta última, para el autor, la más pragmática.

Las teorías del aprendizaje mencionadas coinciden en que el significado ni se impone ni se transmite por enseñanza directa, más bien se crea por medio de las actividades de aprendizaje de los estudiantes, entendidas como sus enfoques del aprendizaje que pueden ser, como ya se mencionó, superficial o profundo. En general se consideran como adecuadas las actividades de aprendizaje realizadas desde el enfoque profundo; e inadecuadas aquellas que se realizan desde el enfoque superficial.

El modelo 3P toma su denominación por las tres iniciales de los puntos temporales en los que se sitúan los factores ligados al aprendizaje: pronóstico o presagio, anterior al aprendizaje; proceso, durante el aprendizaje, y producto o resultado del aprendizaje. Según Sánchez (2013) este modelo concibe la enseñanza como un sistema en equilibrio basado en el apoyo de todos sus componentes, es decir, se consigue un funcionamiento adecuado cuando todos sus componentes se alinean entre sí. En este contexto una mala enseñanza y un aprendizaje deficiente, entendido como superficial, serían el resultado de un sistema no equilibrado.

El aprendizaje según Biggs (2006) desde el enfoque superficial ó profundo, describe cómo se relacionan los estudiantes con el ambiente de enseñanza y aprendizaje en el que se desenvuelven. Es necesario advertir que estas características no son fijas ya que el estudiante puede tener diferentes preferencias de aprendizaje dependiendo del tipo de ambiente en el que se encuentra inmerso, tal como lo descubrió Eley (1992) quien determinó que los estudiantes adoptan enfoques de aprendizaje diferentes dependiendo de la percepción que tienen de la exigencia de cada unidad de estudio.

La interacción mutua entre las características del estudiante y el contexto de la enseñanza establecen las actividades de aprendizaje superficial o profundo, que a su vez establecen la calidad de los resultados del aprendizaje. Los factores que determinan el aprendizaje en el modelo 3P definen niveles de pensamiento de la enseñanza: en el primer nivel se considera al estudiante como único responsable de su aprendizaje ya que debe absorber los conocimientos impartidos de forma expositiva y magistral por el profesor. En el segundo nivel, el profesor es el protagonista ya que es él quien requiere destrezas, técnicas y competencias para enseñar dejando de lado lo que el estudiante es y puede aportar. En el tercer nivel, la atención se centra en lo que el estudiante hace, es decir, se debe determinar si las actividades de aprendizaje que realiza el estudiante, bajo el estímulo del profesor, son adecuadas y permiten maximizar el empleo por parte de los estudiantes del enfoque profundo y también logran minimizar el uso del enfoque superficial (Biggs, 2006).

El modelo 3P considera al aula como un sistema que para ser eficiente necesita estar alineado, entendiéndose por alineamiento constructivo un diseño de enseñanza que busca estimular una participación profunda del estudiante, por lo que es necesario especificar los niveles de comprensión requeridos del contenido que se comparta, utilizando verbos adecuados. Estos verbos se traducen en actividades a realizar por parte de los estudiantes, deben también promover métodos de enseñanza y abordar las tareas de evaluación para de esta forma determinar la consecución exitosa o no de los objetivos y cuantificarla. La figura 1-1 presenta una síntesis del modelo 3P de enseñanza y aprendizaje

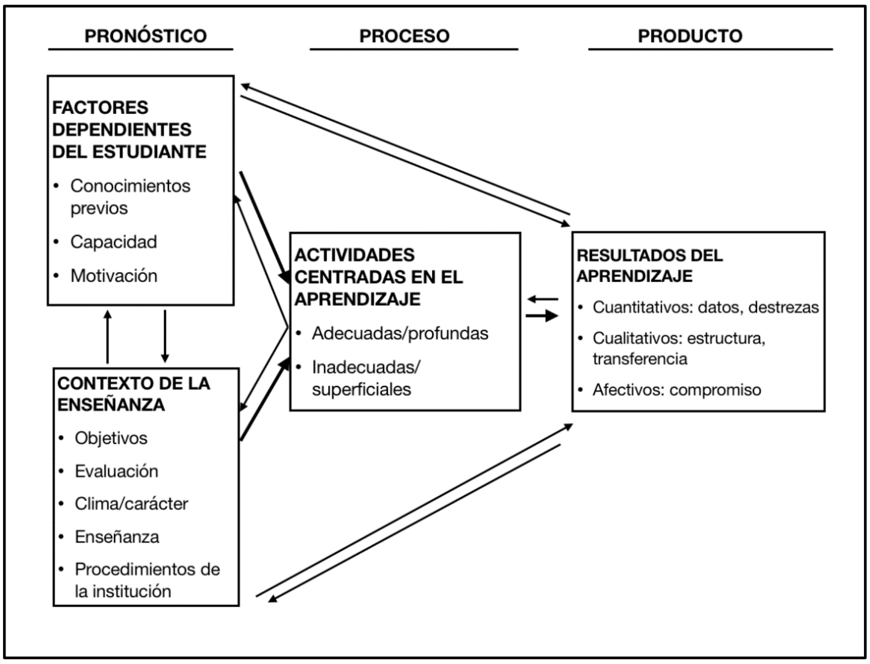


Figura 1-2. Modelo 3P.
Fuente: Biggs, 2006**.**

De lo descrito anteriormente se puede inferir que al ser el modelo 3P un modelo que entiende la clase como un sistema interactivo, en el que los factores de pronóstico (factores dependientes del estudiante y contexto de la enseñanza) determinan en conjunto las actividades de aprendizaje de las transformaciones lineales que puede ser superficial o profundo, y a su vez, estas definen los resultados del aprendizaje, que en la presente investigación es el rendimiento académico. En este contexto se puede reconocer al uso de herramientas interactivas basadas en software libre, como la variable independiente que influye en el rendimiento académico, dándole a éste el carácter de variable dependiente dentro de este sistema llamado “Modelo 3P” siempre enmarcados dentro de los objetivos propuestos.

2.2.2 Transformaciones lineales

Las transformaciones lineales de acuerdo con Savov (2016) es una idea principal del Álgebra Lineal, ya que según el autor esta se constituye en una piedra angular que conecta o relaciona los conceptos que han sido estudiados anteriormente y que aparentan no guardar relación entre sí.

Para Becerra et al., (2017) las transformaciones lineales relacionan dos espacios vectoriales definidos sobre un campo F por medio de una función que conserve la estructura del espacio vectorial. Según el autor: función, transformación y mapeo son sinónimos y suelen ser utilizados de forma intercambiable, sin embargo, dependiendo de la rama de la Matemática, existe el predominio de uno u otro término, por ejemplo, en el área de cálculo y análisis se utiliza el término función, cuando se trata de espacios vectoriales se suele utilizar el término transformación. Además, otros autores Cueva et al., (2009) incluyen también el término "aplicación" para referirse a la transformación lineal. Cuando los dos espacios vectoriales son iguales, es decir: $\mathrm{V}=W$ todos los autores coinciden en denominar operador lineal a la transformación lineal.

Espacio vectorial

Un espacio vectorial sobre un campo F es un conjunto no vacío V sobre el que están definidas la suma o adición y la multiplicación por escalares.

Transformación lineal

Una transformación lineal de un espacio V a un espacio W es una función $T: V \rightarrow W$ que cumple las propiedades de aditividad y homogeneidad (Anton y Rorres, 2013; Axler, 1996; Grossman y Flores, 2012; Savov, 2016)

Aditividad

$T(u+v)=T(u)+T(v)$ para todo u y $v \in V$

Homogeneidad

$T(\alpha v)=\alpha T(v)$ para toda $\alpha \in F$ y toda $v \in V$

En la práctica se puede utilizar una relación de Transformación Lineal (linealidad) que incluye a las dos condiciones mencionadas de manera simultánea (Cueva et al., 2009).

Linealidad

$T(\alpha \mathrm{u}+\beta \mathrm{v})=\alpha T(u)+\beta T(v)$ para todo par de vectores u y $v \in V$ y todo par de escalares α y $\beta \in F$

Gráficamente la linealidad se podría representar como lo indica la figura 2-2.

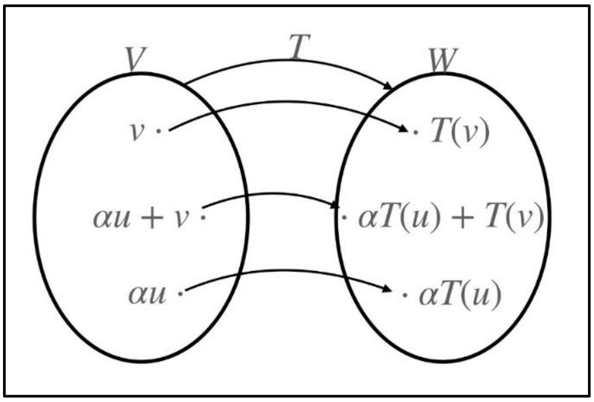


Figura 2-2. Linealidad
Fuente: Anton y Rorres, 2013.

Entre la bibliografía consultada existen ejemplos que son recurrentes por su utilidad para el manejo de datos y se los menciona a continuación:

a) Las transformaciones lineales de $R^n a\, R^m$, de una forma general, toman el nombre de transformaciones matriciales ya que estas se producen por multiplicación matricial**,** es decir que las matrices pueden ser utilizadas para representar transformaciones lineales (operadores), en R^2 y R^3, tales como: reflexiones, proyecciones ortogonales, rotaciones, contracciones y dilataciones que son de mucha utilidad en el tratamiento de imágenes o en el direccionamiento aviones o transbordadores respecto de un sistema de coordenadas x, y, z (Anton y Rorres, 2013; Costa et al., 2018; Grossman y Flores, 2012)

b) Las transformaciones lineales pueden ayudar en la resolución de problemas que se presentan en contextos diferentes y que son análogos, ese es el caso de la relación que existe, por ejemplo, entre polinomios y vectores.

   Se puede establecer una correspondencia entre polinomios y vectores, es decir que para una función cuadrática:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

   Se puede definir el vector:

$$z = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

   que está compuesto por los coeficientes del polinomio dispuesto de forma descendente. Esta forma de asociar polinomios de grado n y vectores en R^{n+1}sería muy útil para cualquier persona que escriba algún tipo de programa informático que pretenda realizar cálculos con polinomios (Anton y Rorres, 2013).

c) Las derivadas de polinomios también son transformaciones que mapean un polinomio de grado n a grado $n-1$, todo mediante la multiplicación de una matriz por la matriz columna formada con los coeficientes numéricos del polinomio ordenados en orden descendente, de forma genérica para un polinomio de grado 2:

$$p(x) = ax^2 + bx + c$$

Se puede obtener la derivada por medio de multiplicación matricial:

$$\begin{bmatrix} 2a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Otros ejemplos de transformaciones lineales entre espacios vectoriales (V, W), según varios autores (Anton y Rorres, 2013; Axler, 1996; Becerra et al., 2017; Cueva et al., 2009; Grossman y Flores, 2012) que cumplen con las propiedades de aditividad y homogeneidad son:

a) Transformación cero, nula, mapeo lineal cero o aplicación lineal nula es la transformación lineal que mapea $T: V \rightarrow W$ tal que $T(v) = 0$
b) Operador identidad o mapeo identidad es la función sobre algún espacio vectorial que lleva cada elemento a sí mismo, se denota por $I: V \rightarrow V$ y se define como $I(v) = v$
c) Operador dilatación y contracción es un operador lineal que geométricamente alarga $(k > 1)$ o contrae $(0 < k < 1)$ cada vector del espacio vectorial de salida al multiplicarlo por un factor k, tal que $T: V \rightarrow V$ queda definida por $T(v) = kv$
d) Proyección ortogonal definida en espacios vectoriales generales supone que W es un subespacio finito del espacio V con producto interior y se define como $T(v) = proy_W v$ (proyección ortogonal de V sobre W)
e) Transformación lineal $T: V \rightarrow R^n$ que mapea el vector v en su vector de coordenadas respecto a una base S del espacio vectorial V, de tal forma que $T(v) = (v)_s = (k_1, k_2, \dots, k_n)$
f) Transformación lineal $T: P_n \rightarrow P_{n+1}$ que se define como $T(p) = T\big(p(x)\big) = xp(x) = c_0 x + c_1 x^2 + \cdots + c_n x^n$
g) Operador lineal sobre P_n es la transformación que se define como $T(p) = T\big(p(x)\big) = p(ax + b) = c_0 + c_1(ax + b) + \cdots + c_n(ax + b)^n$
h) Transformación lineal diferenciación $D: V \rightarrow W$ es la que mapea una función **f**= $f(x)$ en su derivada es decir D**f**=$f'(x)$
i) Transformación lineal integración $J: V \rightarrow W$ que mapea **f**= $f(x)$ en la integral $\int_0^x f(t)\, dt$

El núcleo y la imagen de una transformación lineal

Las definiciones de núcleo e imagen son de gran importancia para el estudio de las transformaciones lineales y para facilitar su estudio se pueden establecer similitudes con las funciones sobre los números reales con las que los estudiantes ya se han familiarizado en cursos inferiores.

Núcleo

El núcleo o kernel de una transformación lineal T_A equivale al espacio nulo de una matriz A y se denota por $N(A)$ tiene una acción similar a los ceros de una función f: R → R.

Sea $L: V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces el núcleo de L, que generalmente se nota $N(L)$, es un subconjunto del espacio vectorial de entrada V, tal como se lo puede apreciar en la figura 3-2, que contiene a todos los elementos $v \in V$, de tal forma que sus imágenes son iguales al vector nulo de W.

$$N(L) = \{v \ \in V \mid L(v) = 0_w\}$$

Al núcleo de L también se le conoce como kernel de L, o nucleo(L) $[ker(L)]$

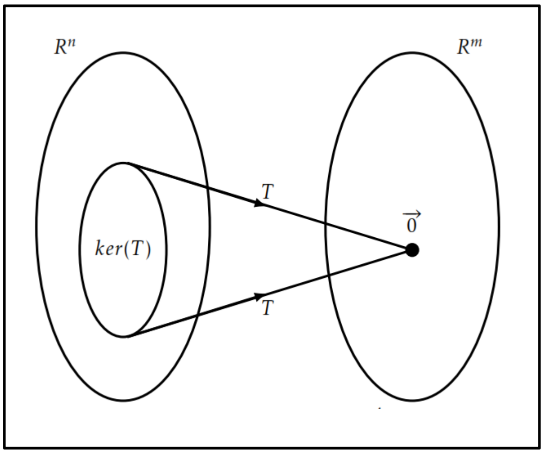


Figura 3-2. Núcleo o kernel de la transformación lineal
Fuente: Savov, 2016**.**

Imagen

La imagen de una transformación lineal T_A equivale al espacio columna de la matriz A, se denota por $C(A)$ y su acción es similar a la imagen de una función f: R → R

Sea $L: V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces la imagen de L, que generalmente se nota $Im(L)$, es un subconjunto de W, que contiene a todos los elementos $w \in W$, que son imágenes de vectores $v \in V$ debidas a la transformación L.

$$Im(L) = \{w \ \in W \mid \exists v \ \in V, L(v) = w\}$$

A la imagen, figura 4-2, de L se le conoce también como rango o recorrido de la transformación L.

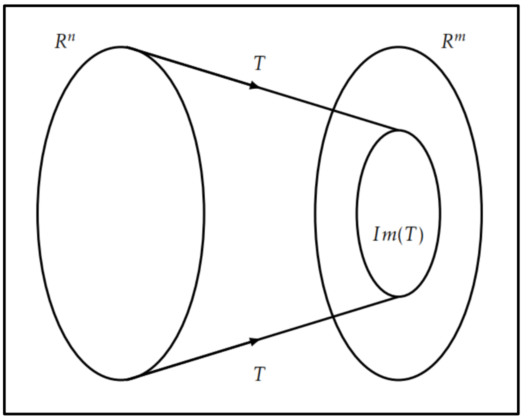


Figura 4-2. Representación gráfica de espacio imagen
Fuente: Savov, 2016**.**

Conjunto de las transformaciones lineales

El conjunto de las transformaciones, figura 5-2, lineales de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W es en sí mismo un espacio vectorial y se denota como:

$\mathcal{L}(V, W) = \{L: V \rightarrow W |\ L\ es\ lineal\}$

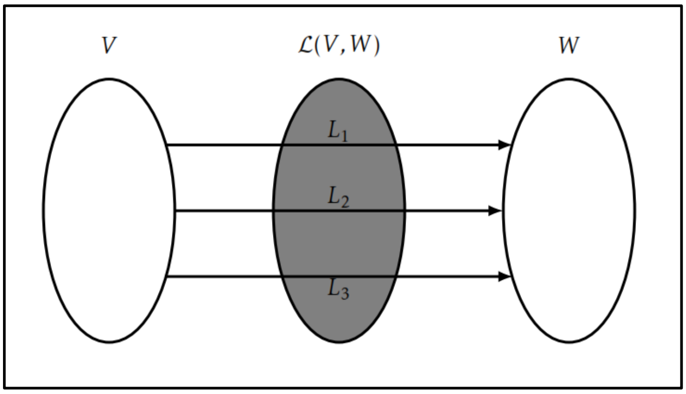


Figura 5-2. Conjunto de transformaciones lineales de V en W
Fuente: Nuñez y Sandoval, 2015.

Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Si se supone que el espacio vectorial V es de dimensión finita y $L\ \in \mathcal{L}(V, W)$, entonces el rango (espacio imagen) es de dimensión finita y la dimensión del espacio vectorial es igual a la suma del espacio nulo con la dimensión del espacio imagen de la transformación L.

$$dim\ (V) = \dim\ (N(L)) + dim\ (Im(L))$$

Donde:

V Representa la dimensión del espacio vectorial de salida

$N(L)$ Representa la dimensión del núcleo de la transformación

$Im(L)$ Representa el espacio imagen de la transformación

Composición de transformaciones lineales

La composición de transformaciones lineales implica la realización de operaciones sucesivas, es decir: sean las transformaciones lineales $L: V \rightarrow W$, $G: W \rightarrow U$, con V, W y U espacios vectoriales. Si se aplica primeramente L sobre un vector $v \in V$ para luego aplicar G sobre el vector resultante w, da como resultado el vector:

$$\boldsymbol{u} = (GL)(\boldsymbol{v}) = G\big(L(\boldsymbol{v})\big)$$

La composición de G con L se puede también escribir como $G \ o \ L$ que a su vea también es una transformación lineal. La figura 6-2 representa una composición de transformaciones lineales.

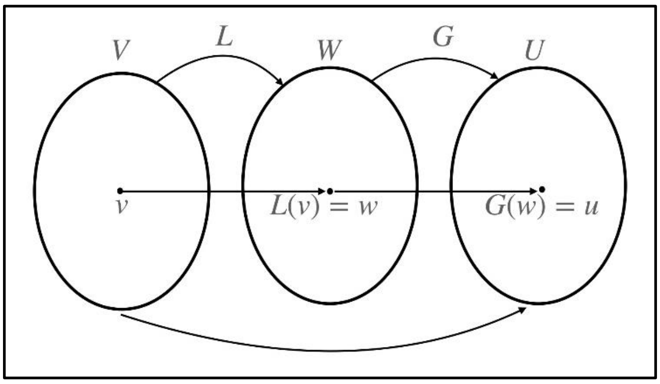


Figura 6-2. Composición de transformaciones lineales
Fuente: Cueva et al., 2009**.**

Representación matricial de las transformaciones lineales

Al referirse a la representación matricial de las transformaciones lineales Bronson et al. (2014) expresa que si se conoce que cualquier vector en un espacio vectorial de dimensión finita puede ser representado por una n-tupla, entonces es posible estudiar espacios vectoriales finitos analizando n-tuplas. Es por eso que cada transformación lineal que va de un espacio $n-dimensional$ a un espacio $m-dimensional$ puede ser representado por una matriz de dimensión $m \times n$, lo que a su vez permite reducir el estudio de las transformaciones lineales sobre un espacio vectorial finito al estudio de matrices.

Sea L una transformación lineal, $dim\ V = n$, $dim\ W = m$

$B_V = \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \ldots, \overrightarrow{e_n}$ es una base para el espacio vectorial de entrada V

$B_W = \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2}, \ldots, \overrightarrow{b_m}$ es una base para el espacio vectorial de salida W

Entonces:

$M_T \in R^{mxn}$ es una representación matricial de la transformación lineal T.

En cuanto a la notación de la representación matricial de las transformaciones lineales estas varían de autor en autor es así que, (Cueva et al., 2009; Savov, 2016) notan la representación matricial como ${}_{B_W}[M_T]_{B_V} = [f]_{C_2}^{C_1}$, donde B_V y C_1 son los espacios vectoriales de entrada y B_W y C_2 son los espacios de salida.

2.2.3 Software libre

El software libre es para *The Free Software Definition* (n.d.) es cuestión de Libertad, no de precio. Además, sugiere que se debería pensar en la palabra libre como libertad y no como gratuidad, sostiene la misma fuente que el mismo depende de la libertad de los usuarios para ejecutar, copiar, distribuir, estudiar, cambiar y mejorar el software; para ser más precisos, significa que los usuarios del programa tienen las cuatro libertades esenciales:

Libertad 0: Libertad de ejecutar el programa para cualquier propósito

Libertad 1: Libertad de estudiar la manera de trabajar del programa y de realizar cambios para que trabaje de acuerdo con lo que el usuario desee, por lo que el acceso al código fuente es una precondición necesaria.

Libertad 2: Libertad para poder redistribuir copias que puedan ayudar a otros usuarios

Libertad 3: Libertad para mejorar el programa y poder liberarlo al público en general con la finalidad de que todos se beneficien de él, por lo que el acceso al código fuente es una precondición necesaria.

Dentro de las categorías de software libre y software no libre se encuentra el software de código abierto que, según *The Free Software Definition* (n.d.) tiene pequeñas diferencias como categoría, ya que "casi todo el software libre es de código abierto y casi todo el software de código abierto es gratuito"

2.2.3.1 Uso del Jupyter

Jupyter

Reseña histórica

Los inicios de lo que hoy se conoce como el proyecto jupyter se remontan al año 2001 cuando Fernando Pérez desarrolló Ipython, para el año 2011 fue presentada una interfaz basada en la web dando paso a Ipython notebook que en 2014 se convertiría finalmente en lo que hoy es Jupyter Notebook.

Definición

Jupyter, según *Project Jupyter | About Us* (n.d.), es un proyecto sin fines de lucro, creado para el desarrollo de software de código abierto, su nombre se deriva de los tres lenguajes más sobresalientes soportados que son: Julia, Python y R. Al ser un proyecto de código abierto se asegura que su acceso será libre para todo uso y publicación.

Características

La columna vertebral en que se sustenta el proyecto Jupyter es la interfaz web conocida como Jupyter Notebook, que concentra la ejecución de código, ecuaciones en código LaTeX e inclusión de textos, posibilidad de integrar video y todo tipo de contenido que sea posible visualizarlo por medio de un navegador.

Ventajas

Desde el punto de vista docente, para Díaz y Cabrera (2018), el uso de Jupyter se ha incrementado debido entre otros factores a: la flexibilidad, facilidad de acceso a través de la web, de tal forma que el docente puede trabajar en línea desde su propio computador o haciendo uso de un servidor externo para poder compartir con los alumnos gran variedad de tareas, lecciones o presentaciones de forma interactiva. Estas características propias de Jupyter contribuyen a la eliminación de las dificultades que representa para los estudiantes la inclusión de software o programas que requieren procesos de instalación y puesta en marcha en sus propios equipos. La inclusión del aprendizaje de software de cálculo numérico es indispensable para un estudiante de ciencias, ya que este será fundamental para su desarrollo en el ámbito académico y su posterior aplicación al campo laboral.

Interfaz de Jupyter

Jupyter no requiere ser instalada y por lo tanto puede ser ejecutada en línea desde el navegador si ícono se muestra en la figura 7-2.

Figura 7-2. Ícono de Jupyter
Fuente: jupyter.org, 2022.

Jupyter Notebook para su funcionamiento requiere la combinación de tres componentes que son:

- La aplicación notebook web que permite escribir y ejecutar código de forma interactiva
- El kernel o núcleo es el encargado de separar los procesos que se realizan en la aplicación web notebook
- El documento notebook que es el que alberga todo el contenido visible, lo que incluye entradas y salidas de cálculos, texto enriquecido, imágenes y multimedia.

La aplicación de notebook web permite al usuario:

- Editar código en el navegador
- Ejecutar código directamente desde el navegador
- Observar el resultado de los cálculos en forma de medios enriquecidos.
- Utilizar lenguaje markdown para realizar texto narrativo de autor.
- Usar código LaTex en Markdown, para escribir fórmulas matemáticas

Kernel

Permite que el notebook ejecute códigos de programación en diferentes lenguajes, entre los que sobresalen: Python, Julia, R, Ruby, Haskell y otros.

El kernel establecido por defecto en el notebook ejecuta código Python

Documentos notebook

El documento notebook que es el que alberga todo el contenido visible, lo que incluye entradas y salidas de cálculos, texto enriquecido, imágenes y multimedia.

Los documentos notebook son archivos con extensión .ipynb (IPython notebook)

Los notebooks son una secuencia de celdas. Existen tres tipos básicos de celdas: celdas de código, celdas Markdown y celdas simples.

Otra de las características del notebook es la posibilidad de exportarlos en diferentes formatos tales como: PDF, LaTex, HTML, entre otros. Se puede compartir documentos que pueden ser leídos sin necesidad de tener instalado el software Jupyter Notebook.

Al iniciar jupyter, si está instalado en el equipo, la primera página en abrirse es la del panel de control, que es un navegador de archivos, tal como se muestra en la figura 8-2.

Figura 8-2. Panel de control jupyter
Fuente: jupyter.org, 2022.

Desde ahí se puede abrir el archivo requerido, lo que lleva al editor de notebook

Editor de notebook

El editor del Notebook tiene los siguientes elementos:

Nombre del archivo

Es el nombre del documento que puede ser modificado dando click sobre el mismo.

Barra de menú

Es un conjunto de menús desplegables para realizar acciones sobre el notebook, sus celdas o el kernel; está ubicado en la parte superior izquierda de la ventana bajo el nombre del documento.

Barra de herramientas

Se encuentra bajo la barra de menús y consta de una serie de íconos que permiten acceder directamente a las principales herramientas de los menús desplegables. Al ubicar el cursor en cualquiera de los íconos se muestra una pequeña descripción de su uso.

Indicador de modo

Indica el modo en que se encuentra la celda, existen dos tipos de modo: el modo de edición (figura de un lápiz) y el modo de comando (sin figura)

Indicador del Kernel

Corresponde a un círculo sin relleno cuando el kernel está inactivo y un círculo lleno para el caso de que el kernel este activo.

El Kernel hace referencia al núcleo con el que se encuentra trabajando el documento, que por defecto está establecido en Python 3, el kernel puede ser seleccionado de acuerdo con la necesidad del usuario.

Celdas

Las celdas corresponden a la unidad mínima de ejecución de jupyter, permiten el ingreso de la información y se presentan en dos modos:

Modo de edición corresponde a las celdas con contorno de color verde y permiten el ingreso de código en los diferentes lenguajes soportados, Markdown o texto plano.

Modo comando corresponde a las celdas con contorno azul y permite editar el notebook como conjunto deshabilitando la escritura de cada celda independiente.

La figura 9-2 muestra la interfaz del jupyter notebook y sus componentes principales.

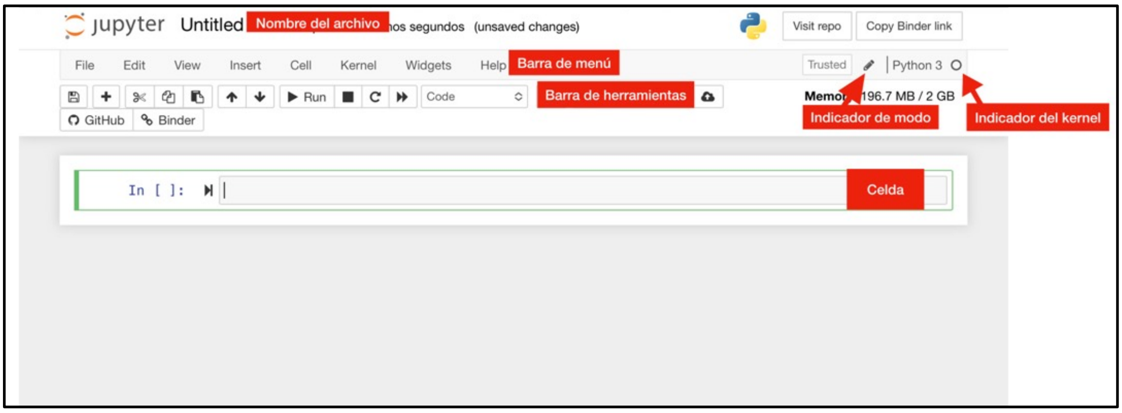


Figura 9-2. Interfaz jupyter notebook
Fuente: jupyter.org, 2022.

2.2.4 Rendimiento académico

Lamas (2014) se refiere al rendimiento académico como un tema complejo, incluso desde su conceptualización, ya que algunos autores lo denominan: rendimiento escolar, aptitud escolar o desempeño académico. En general, las diferencias son de tipo semántico y se suelen utilizar como sinónimos. Por convención, según el autor, al hablar de rendimiento académico se hace referencia a la población universitaria y, para referirse a la población de la educación básica: regular y alternativa, se lo hace como rendimiento escolar. Para Hernández y Barraza (2013) la complejidad del concepto de rendimiento académico radica en que en él inciden factores que las instituciones educativas pueden controlar y otros que no y por lo tanto deben estar estructurados para que permitan describir diferentes competencias adquiridas por el estudiante. Afirma que para definir el rendimiento académico existen posturas que van de las más simplistas a las más objetivas y dependerán del enfoque que se le quiera dar a determinadas investigaciones.

Realizando un análisis textual de las palabras: rendimiento y académico, desde su significado extraído del diccionario de la Real Academia Española de la Lengua Martinez y Pérez (1997) definen el RA como: “Producto que rinde o da el alumnado en el ámbito de los centros de enseñanza” (p. 24) en la que el actor principal de la acción es el estudiante. Por su parte para York et al. (2015) el rendimiento académico debe ser “un resultado directo de la consecución de los objetivos de aprendizaje y la adquisición de las habilidades y competencias deseadas.” (p. 6) dejando claro que lo que se mide es la capacidad de desempeño de los estudiantes y no necesariamente los aprendizajes alcanzados. Este concepto contrasta con el de otros autores (Bustamante, 2017; Pérez et al., 2000) y quienes consideran al rendimiento académico como la parte medible del aprendizaje de forma cuantitativa por medio de técnicas evaluativas pudiendo de esta manera determinar el nivel alcanzado por los alumnos dando como resultado aprobación, reprobación, pérdida, deserción y el nivel alcanzado del éxito académico. En ese contexto Pérez et al. (2000) y Reinozo et al. 2011) coinciden al considerar el rendimiento académico como un compendio de factores o propiedades susceptibles de medición y observación y por lo tanto se les puede asignar un valor numérico en forma de calificación o nota que se obtiene en un intervalo de tiempo determinado.

Para Hernández y Barraza (2013) la importancia del rendimiento académico en la educación superior va más allá de la institución educativa y es de gran importancia para el sector productivo, social e incluso gubernamental.

Para Sánchez y Pina (2011) es imprescindible enlazar los enfoques de aprendizaje con el rendimiento académico, lo que es compartido por Álvarez y Vallelado (2013) quien considera que el modelo 3P propuesto por Biggs (2001) da forma a la estructura conceptual referencial para estructurar las variables condicionantes del rendimiento académico pasando a definirse, este, según Sánchez y Pina (2011) como “el resultado del esfuerzo y la capacidad de trabajo” (p. 11)

2.2.4.1 Factores que inciden en el rendimiento académico

A los factores que inciden en el rendimiento académico se les conoce también como determinantes del rendimiento académico cuya identificación es dificultosa ya que según Calleja Sopeña et al. (1990) esos factores son parte de un enredo difícil de limitar para darles efectos diferenciables de forma individual.

Para Tejedor y García (2007) en líneas generales, sería importante que se diferencien cinco tipos de variables: de identificación, psicológicas, académicas, pedagógicas y sociofamiliares.

Para efectos de la presente investigación se tendrán en cuenta únicamente las variables académicas y pedagógicas que influyen en el rendimiento académico.

2.3 Marco Conceptual

Álgebra lineal

El álgebra lineal es una de las más importantes ramas de las matemáticas que, en principio estudia conceptos como sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes; con un enfoque centrado en los espacios vectoriales, sus aplicaciones, transformaciones o mapeos lineales y su incidencia en el estudio del cálculo vectorial, ecuaciones diferenciales, la ingeniería, entre otros (Nuñez y Sandoval, 2015). Estas conexiones dentro y fuera de las matemáticas afirman el hecho de que sea una herramienta fundamental en la formación del futuro ingeniero, que muchos autores reconocen como difícil de asimilar para el estudiante por lo que se hace necesario aportar con una enseñanza que motive al estudiante para de esta forma obtener un aprendizaje profundo.

Modelo de enseñanza

Un modelo de enseñanza según Arteaga y Macías (2016) es el producto de la investigación llevada a cabo desde el campo de la psicología y la didáctica. Estos modelos teóricos buscan explicar los complejos procesos cognitivos que tienen lugar en el aprendizaje de los estudiantes y los factores a tener en cuenta para que la construcción del conocimiento se produzca de manera significativa. En concordancia con Biggs (2006) el modelo a aplicar debería priorizar la participación del estudiante basados en teorías y propuestas prácticas ya probadas susceptibles de innovación.

Rendimiento académico

El rendimiento académico es "un constructo susceptible de adoptar valores cuantitativos y cualitativos, a través de los cuales existe una aproximación a la evidencia y dimensión del perfil de habilidades, conocimientos, actitudes y valores desarrollados por el alumno en el proceso de enseñanza aprendizaje" (Navarro, 2003). Muchas variables inciden en el rendimiento académico, sin embargo, para efectos de la presente investigación se tomarán en cuenta las variables de tipo académico y pedagógico.

Campo

Un campo F es un conjunto cuyos elementos en el algebra lineal se denominan escalares dotado de las operaciones binarias de adición o suma "+" y el producto "·", podemos reemplazar la letra F por R para referirnos al campo de los números reales (Petersen, 2012).

Software libre

El software libre son programas gratuitos que en muchos casos tienen mejor calidad que el software de pago. La razón de que el software de pago sea más difundido que el software libre está en relación directa con el gasto en propaganda y difusión. En este contexto se entenderá que el objetivo principal del software de pago son los réditos económicos que estos rindan mientras que los programas de software libre son escritos por personas que los requieren para trabajar pudiendo implementar o modificar características de acuerdo con su necesidad (Oualline y Oualline, 2018). Específicamente en el caso de los estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas, el uso de software libre brindaría al estudiante la herramienta ideal para lograr aprendizaje profundo, ya que la facilidad de instalarlo o usarlo en línea permite acercar el conocimiento al estudiante, mucho más si este acercamiento con la tecnología es útil para su desenvolvimiento profesional.

Transformaciones lineales

Una TL es un tipo especial de transformación, que toma vectores o sus combinaciones lineales del espacio vectorial de salida (V) y los transforma en nuevos vectores o sus combinaciones lineales en el espacio vectorial de llegada (W), siempre sobre el mismo campo F.

La característica más importante de las transformaciones lineales es que conservan las operaciones permitidas en los espacios con los que se trabaja, es decir que, la transformación es lineal si es aditiva y homogénea (Warner, 2018).

Espacio vectorial

De acuerdo con Axler (2015) un espacio vectorial sobre un campo K, que puede entenderse como campo de números reales o complejos, es un conjunto (una entidad abstracta) cuyos elementos son vectores y sus respectivas combinaciones lineales, en el que se definen la adición y la multiplicación por escalares.

Semiótica

La semiótica como ciencia estudia los signos y significados utilizados para la comunicación. En el ámbito de las matemáticas su importancia radica en la existencia de recursos semióticos formales y recursos semióticos no formales utilizados por los docentes para transmitir el conocimiento matemático (Sánchez Ruiz, 2018).

Vector

A diferencia del término vector estudiado en física, en el estudio del álgebra lineal la palabra vector se utiliza para referirse a objetos matemáticos compuestos de números, además los vectores son los elementos del espacio vectorial. Algunos de los ejemplos de vectores son n-tuplas, matrices, funciones, polinomios, sucesiones finitas no nulas(Anton y Rorres, 2013).

2.4 Determinación de variables

2.4.1 Variable Independiente:

De lo expuesto en apartado de bases teóricas respecto de los factores que inciden en los modelos de enseñanza (modelo 3P) se determina a la variable independiente como:

a) Software libre (Jupyter)

2.4.2 Variable dependiente:

De lo expuesto en apartado de bases teóricas respecto de los factores que inciden en los modelos de enseñanza (modelo 3P) se determina a la variable dependiente como:

1. Rendimiento académico de los estudiantes en la unidad de transformaciones lineales

2.5 Operacionalización conceptual de variables.

Tabla 1-2. Operacionalización de variables

Variable independiente	Conceptualización	Dimensiones	Indicadores	Definición de los indicadores	Criterio de medición	Técnica	Instrumento	Escala
Software libre	El software libre refiere a la libertad que tienen los usuarios para ejecutar, copiar, distribuir, cambiar y mejorar el software. (Stallman, 2004)	Funcionalidad	Adecuación con los objetivos	Permite lograr los objetivos de aprendizaje	Idoneidad Exactitud	Encuesta	Cuestionario	Likert
			Consistencia pedagógica del Objeto de Aprendizaje con la Audiencia	Concordancia entre la pedagogía usada en la elaboración del objeto de aprendizaje con el nivel cognitivo del público al que va dirigido				
			Elementos complementarios	Acceso a información complementaria que permita la comprensión del contenido y el logro de los objetivos				
			Vigencia del contenido	Vigencia del contenido por actualización o por no haber caducado				

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

Tabla 2-2. Operacionalización de variables

Variable dependiente	Conceptualización	Dimensiones	Indicadores	Definición de los indicadores	Criterio de medición	Técnica	Instrumento	Escala
Rendimiento académico	Un constructo susceptible de adoptar valores cuantitativos y cualitativos, a través de los cuales existe una aproximación a la evidencia y dimensión del perfil de habilidades, conocimientos, actitudes y valores desarrollados por el alumno en el proceso de enseñanza aprendizaje	Conceptual	Adquiere contenidos conceptuales Relacionados con las TL	Formación de representaciones mentales, obtener lo desconocido partiendo de lo conocido	Formulación matemática Contenido matemático Uso de lenguaje matemático Exactitud en el uso de la matemática Corrección en los resultados Uso de software educativo	Encuesta	Prueba objetiva	Nominal
		Procedimental	Ejecuta y resuelve problemas relacionados con las TL	Transformación de conocimientos empíricos a científicos				
		Actitudinal	Articula lenguajes y conceptos en la resolución de problemas y su transferencia a otros contextos relacionados con las TL	Interviene en actividades voluntarias propuestas en el desarrollo de la materia				

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

2.6 Matriz de consistencia

Tabla 3-2 Matriz de consistencia

Formulación del problema	Objetivo general	Hipótesis	Variables	Indicadores	Técnicas	Instrumentos
Sierpinska (2000) menciona que el AL y, por lo tanto, las TL requieren el uso articulado de tres formas de razonamiento y sus respectivos lenguajes (geométrico, aritmético y algebraico). Indica además que la poca habilidad de los estudiantes para moverse entre estos tres tipos de razonamiento constituye una de las dificultades para alcanzar el dominio del tema, por lo que se hace necesario contribuir con herramientas tecnológicas (software educativo) que le permitan mejorar su rendimiento académico.	Implementar un modelo de enseñanza aprendizaje incorporando software libre para mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales de estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas	La aplicación del Modelo 3P de enseñanza aprendizaje de Biggs (Presagio, proceso, producto) que incorpore software libre permitirá mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales de los estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas	V Ind. Software educativo	Funcionalidad	Encuesta	Cuestionario
			V. Dep Rendimiento académico	Adquiere contenidos conceptuales Relacionados con las TL	Encuesta	Prueba objetiva
				Ejecuta y resuelve problemas relacionados con las TL		
				Articula lenguajes y conceptos en la resolución de problemas y su transferencia a otros contextos relacionados con las TL		

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

CAPÍTULO III

3 METODOLOGÍA

3.1 Diseño de la investigación

3.1.1 Tipo y Diseño de la investigación

La presente investigación es de tipo cuasiexperimental con un enfoque cuantitativo; Además, tendrá un enfoque cualitativo porque se investigará el nivel de satisfacción, emoción de los estudiantes al utilizar el software educativo en su proceso de aprendizaje.

3.1.2 Método de la investigación

El método de la investigación es inductivo ya que pasa de lo particular a lo general iniciando con un diagnóstico para implementar un modelo de enseñanza que se aplique de forma general

3.1.3 Enfoque de la investigación

El presente estudio por sus características es de tipo cuantitativo

3.1.4 Alcance investigativo

En la presente investigación se va a evaluar la inclusión de software libre en el modelo de enseñanza y determinar su incidencia en el rendimiento académico, por lo que su alcance es de carácter descriptivo correlacional

3.2 Población y muestra de estudio

3.2.1 Población de estudio

La población estará conformada por 42 estudiantes de un paralelo de primer nivel de ingeniería Mecatrónica de la Universidad de las Fuerzas Armadas, que toman la asignatura de Álgebra Lineal.

3.2.2 Unidad de análisis

La unidad de análisis corresponde a los estudiantes de la Universidad de las Fuerzas Armadas a los que se les imparte la asignatura de Álgebra Lineal como requisito para otras asignaturas consecutivas tales como: Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y Cálculo Vectorial.

3.2.3 Selección de la muestra

La selección de la muestra es de tipo no probabilístico intencional y corresponde a los 42 estudiantes de un paralelo de la asignatura de álgebra lineal que fueron distribuidos en dos grupos de 21 estudiantes de acuerdo con los números pares e impares de la lista para formar los grupos experimental y control.

3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

3.3.1 Técnica de recolección de datos

Las técnicas de recolección de datos se refieren a aquellos procedimientos que hacen posible la generación de información que cumpla las características de validez y confiabilidad para poder ser como datos de tipo científico (Yuni y Urbano, 2006).

La técnica de interrogación que se utiliza en la presente investigación es la encuesta

Encuesta. – Es la técnica que, de acuerdo con Münch y Ángeles (2009) permite obtener información de una parte de la población por medio de la utilización de diferentes instrumentos.

Para realizar el diagnóstico de la situación actual de los estudiantes se aplicó la técnica de la encuesta a 42 estudiantes de primer nivel que toman la asignatura de álgebra lineal con la finalidad de obtener información que luego permitió adoptar un modelo de enseñanza - aprendizaje aplicable al nivel superior en el que se pueda incorporar el uso de software libre matemático.

3.3.2 Instrumentos de recolección de datos

Los instrumentos de recolección de datos son las herramientas específicas, los medios concretos o los materiales que han sido estructurados para obtener información.(Castillo y Cabrerizo, 2010)

Dado que la técnica utilizada es de interrogación los instrumentos que utilizamos fueron la prueba objetiva y el cuestionario.

Prueba objetiva. – Es el instrumento que permite obtener información, muy útil en la fase exploratoria o indagatoria sobre los conocimientos previos de los estudiantes, para el desarrollo de un tema seleccionado. Posterior a la aplicación del modelo de enseñanza aprendizaje que incorpora software libre matemático la prueba objetiva es un instrumento que permite conocer el grado de consecución que los estudiantes hayan alcanzado comparado con la evaluación realizada en la fase exploratoria.

Cuestionario. – Es el instrumento utilizado por la encuesta para la recabar datos de manera científica y estructurada respecto del pensamiento u opinión de las personas de tal forma que se pueda realizar posteriormente un análisis de la información (Castillo y Cabrerizo, 2010).

Como punto de partida de la presente investigación aplicó una evaluación inicial de diagnóstica cuya finalidad fue la de determinar el nivel de conocimientos y las dificultades para el aprendizaje del tema transformaciones lineales. Además, se recabó información para conocer las características que valoran los estudiantes acerca del uso de software libre matemático. La evaluación diagnóstica permitió también establecer la homogeneidad de los grupos experimental y de control.

Finalmente, para conocer el nivel de aprendizaje alcanzado por los estudiantes y el nivel de satisfacción con el modelo de enseñanza se aplicó una prueba objetiva y un cuestionario que ha sido validado por juicio de expertos y cuenta con coeficiente de confiabilidad alto.

3.3.3 Validez y confiabilidad de los instrumentos

La validez hace referencia a que los resultados o calificaciones obtenidas por medio del empleo del instrumento midan aquello que en realidad se desea medir, en tanto que la confiabilidad hace referencia al grado de estabilidad, exactitud y consistencia de los resultados, lo que implica que mediante la aplicación del instrumento se obtengan similares resultados al ser aplicados sobre las mismas muestras en condiciones iguales (Münch y Ángeles, 2009)

3.3.3.1 Validez

Una de las técnicas para validar instrumentos según Soriano (2015) es la validación a juicio de expertos a quienes se debe proveer, si fuese necesario, los elementos necesarios que les permitan comprender y cumplir con el ejercicio de validación. El número de expertos para la validación no es fijo, sin embargo, puede variar desde tres hasta seis o más de ocho si fuese necesario (*NTP 401: Fiabilidad Humana: Métodos de Cuantificación, Juicio de Expertos*, n.d.).

Para la validación de los instrumentos de la presente investigación se seleccionaron tres expertos atendiendo a su experiencia en el ámbito de estudio y se utilizó el método de agregados individuales para evitar el sesgo por contacto o familiaridad que puedan tener los expertos de acuerdo con Díaz y Luna (2015). Luego de solicitar formalmente su colaboración y para facilitar el posicionamiento teórico y dar claridad acerca de los objetivos de la investigación a los expertos se proveyó el formato de validación descrito en el ANEXO A, operacionalización de variables y los instrumentos a validar. El formato de validación de los instrumentos tiene enfoque cualitativo y cuantitativo teniendo en cuenta criterios de adecuación y pertinencia, valorados por medio de escala Likert ponderada desde uno como valor mínimo hasta cinco como máximo.

3.3.3.2 Confiabilidad

La confiabilidad hace referencia al grado de estabilidad y consistencia de tal manera que al ser aplicad de forma repetida en las mismas condiciones produzca el mismo resultado (Hernández-Sampieri et al., 2014). El cálculo de la confiabilidad según J. Sánchez et al. (2020) se puede realizar por medio de: Test-retest, formas paralelas y consistencia interna. Para establecer la confiabilidad de los instrumentos de la presente investigación se calculó la confiabilidad por consistencia interna aplicando el método de mitades partidas (Split halves) para la prueba objetiva y coeficiente alfa de Cronbach para la encuesta de satisfacción.

La confiabilidad de la prueba objetiva se calculó por la técnica de mitades partidas para obtener el coeficiente de Spearman-Brown por medio del software SPSS. El procedimiento consiste en aplicar la prueba por una sola vez a un grupo piloto, luego se dividen los ítems y las respuestas en dos partes iguales, si fuese posible, para medir la correlación existente entre ellas y el coeficiente obtenido será el indicador de correlación y fiabilidad que mientras más cercano sea a uno indicará mayor consistencia interna (Díaz y Luna, 2015).

3.3.3.3 Validez y confiabilidad de la prueba objetiva

En la Tabla 1-3 se presentan los resultados de la validación de la prueba objetiva por parte de jueces expertos.

Tabla 1-3. Validación por juicio de expertos

CRITERIO	VALORACIÓN
Adecuación	100 %
Pertinencia	100 %
Claridad y precisión de instrucciones para responder el cuestionario	100 %
Secuencia adecuada	100 %
Número suficiente de preguntas	100 %

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

Como se describió anteriormente luego de aplicar la técnica de dos mitades se obtuvo el coeficiente de Spearman-Brown, el resumen de resultados se detallan en la Tabla 2-3

Tabla 2-3. Confiabilidad coeficiente Spearman-Brown

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	Parte 1	Valor	,486
		N de elementos	10
	Parte 2	Valor	,373
		N de elementos	10
	N total de elementos		20
Correlación entre formas			,744
Coeficiente de Spearman-Brown	Longitud igual		,853
	Longitud desigual		,853
Dos mitades de Guttman			,843

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

Luego de haber realizado el análisis de los coeficientes de validez y confiabilidad de la prueba objetiva esta se acepta y se presenta en el ANEXO B.

En la Tabla 3-3 se presenta la ficha técnica de la prueba objetiva que ha sido validada y verificada su confiabilidad.

Tabla 3-3. Ficha técnica

Título	Encuesta para evaluación diagnostica de transformaciones lineales, dificultades para el aprendizaje y características para software matemático
Autor	Carlos Julio Cuenca Pomatoca
Estructura	21 preguntas (10 preguntas dicotómicas, 10 de opción múltiple y 01 abierta)
Nivel de confiabilidad	Muy alto (r=0,853)
Validez	100 % Adecuación 100 % Pertinencia 100 % Contenido
Tiempo	120 minutos
Participantes	Estudiantes de la Asignatura de Álgebra Lineal de la Carrera de Mecatrónica
Significación	Este instrumento permite conocer los conocimientos con que cuenta el estudiante en el tema Transformaciones Lineales y se aplica tanto al grupo control como al experimental. Está constituido por 21 preguntas: 10 dicotómicas, 10 de opción múltiple y 01 abierta)

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

3.3.3.4 Validez y confiabilidad del cuestionario

En la Tabla 4-3 se presenta la valoración del cuestionario.

Tabla 4-3. Validación por juicio de expertos

CRITERIO	VALORACIÓN
Adecuación	100 %
Pertinencia	100 %
Claridad y precisión de instrucciones para responder el cuestionario	100 %
Secuencia adecuada	100 %
Número suficiente de preguntas	100 %

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

El resultado del proceso para la obtención del coeficiente alfa de Cronbach se detalla en la tabla 5-3.

Tabla 5-3. Confiabilidad por coeficiente alfa de Cronbach

Resumen del procesamiento de los casos

		N	%
Casos	Válidos	13	100.0
	Excluidos	0	.0
	Total	13	100.0

Estadísticos de fiabilidad

Alfa de Cronbach	N de elementos
.807	6

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

El análisis de validez y confiabilidad da como resultado la aceptación del formato propuesto presentado en el ANEXO C

En la Tabla 6-3 se presenta la Ficha técnica del cuestionario

Tabla 6-3. Ficha técnica

Título	Encuesta para determinar el nivel de satisfacción con el uso de software libre matemático en el aprendizaje de las transformaciones lineales
Autor	Carlos Julio Cuenca Pomatoca
Estructura	06 preguntas de opción múltiple
Nivel de confiabilidad	Muy alto (α=0,807)
Validez	100 % Adecuación 100 % Pertinencia 100 % Contenido
Tiempo	30 minutos
Participantes	Estudiantes de la Asignatura de Álgebra Lineal de la Carrera de Mecatrónica
Significación	Este instrumento permite conocer el nivel de satisfacción con el uso de software libre matemático en el aprendizaje de las transformaciones lineales y se aplica al grupo experimental. Está constituido por 06 preguntas de opción múltiple. El instrumento fue elaborado en Google Forms y el link del mismo fue remitido a los estudiantes.

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

CAPÍTULO IV

4 RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1 Análisis e interpretación de los resultados de la evaluación inicial diagnóstica aplicada en la etapa de diagnóstico de la situación actual

4.1.1 Resultados de las preguntas especificas

Diagnóstico de transformaciones lineales

1. La transformación $l(x) = mx + b$, para todo b diferente de 0, es una transformación?

Tabla 1-4. Diagnóstico, pregunta 1

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Lineal	18	42.86%
	Afín	24	57.14%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

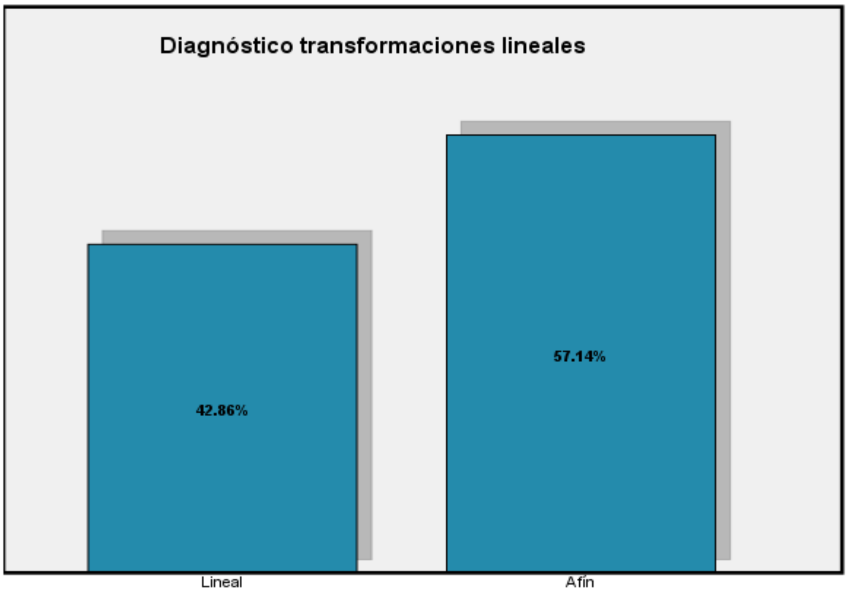


Gráfico 1-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

Una función lineal es una transformación lineal y como tal debe satisfacer las condiciones de linealidad, el 58,14% de los estudiantes reconocen esta diferencia, sin embargo, existe un significativo 41,86% que no tiene claro este “simple”, pero fundamental concepto sobre el que se construyen el álgebra lineal y en particular las transformaciones lineales.

2. **La expresión $\frac{1}{a}x_1 + b^6x_2 + \sqrt{c}x_3$, donde a, b, c pertenecen al conjunto de los números reales diferentes de cero y x1, x2, x3 son variables es:**

Tabla 2-4. Diagnóstico, pregunta 2

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Lineal	28	66.67%
	No lineal	14	33.33%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

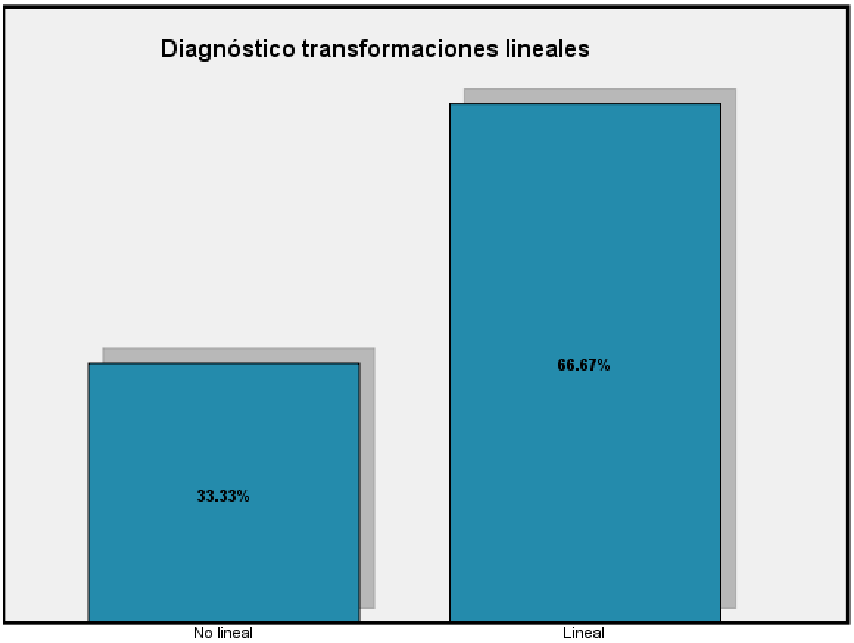


Gráfico 2-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

El 67.44% de los estudiantes reconoce que la expresión lineal contiene factores no lineales y variables x_1, x_2 y x_3 elevadas a la primera potencia y el 32,56% no tiene claro el concepto.

3. **Una transformación $T: V \to W$ es lineal si para los vectores u y v de V y para cualquier par de escalares α y ß se cumple:**

1. $T(u+v) = T(u) + T(v)$
2. $T(\alpha u) = \alpha T(u)$
3. $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$
4. $T(u+v) = \alpha T(u) + T(v)$

Tabla 3-4. Diagnóstico, pregunta 3

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Opción 1	9	21.43%
	Opción 2	6	14.29%
	Opción 3	24	57.14%
	Opción 4	3	7.14%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

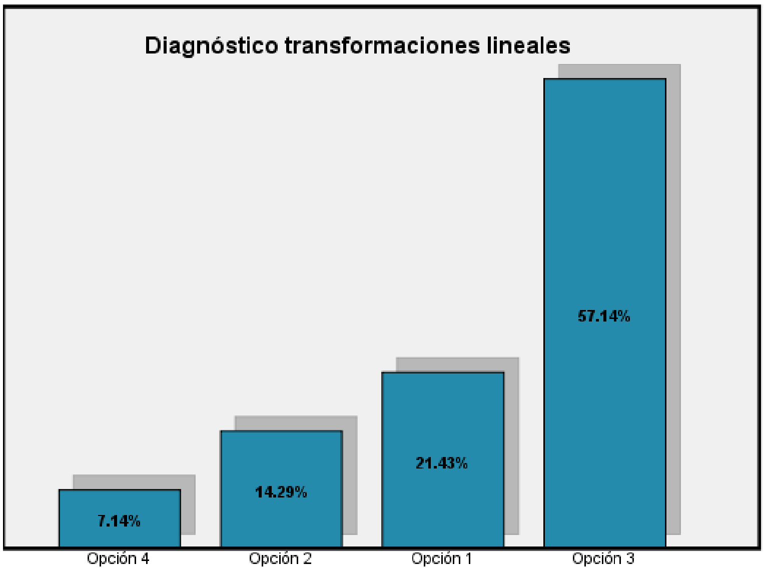


Gráfico 3-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

Una definición clave en el álgebra lineal es la de transformación lineal, que se basa en las propiedades de aditividad (conservación de la suma) y homogeneidad (conservación de la multiplicación por un escalar), propiedades que pueden ser demostradas en un solo procedimiento. En este contexto, si bien el 58,14% de estudiantes tienen claro el concepto existe un 41,86% que se inclinan por las otras opciones que no cumplen con las propiedades, lo que está claramente relacionado con la primera pregunta y con las dificultades para el aprendizaje de las transformaciones lineales.

4. **Si $T: V \rightarrow W$ es una transformación lineal de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W. En el caso especial que $V = W$, la transformación lineal $T: V \rightarrow W$ se denomina?**

Tabla 4-4. Diagnóstico, pregunta 4

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Aplicación lineal sobre V	12	28.57%
	Mapeo sobre V	5	11.90%
	Forma lineal sobre V	11	26.19%
	Operador lineal sobre V	14	33.33%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

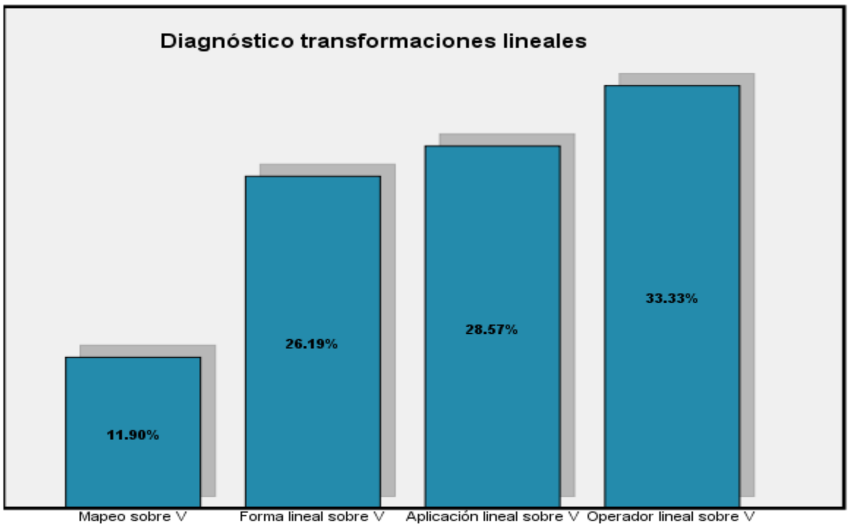


Gráfico 4-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

La semiótica es de vital importancia en el aprendizaje de las transformaciones lineales, por lo que el estudiante debe conocer los términos utilizados y en las respuestas se puede observar que 65,12% de los estudiantes escogió las opciones que contienen términos equivalentes para denotar transformación lineal frente al 34,88% que lo hiso de forma correcta.

5. **La aplicación consecutiva, (composición) de dos transformaciones lineales S y T bien definidas sobre un vector v corresponde al producto matricial $SoT(v) = S(T(v)) = M_S M_T v$ suceden en el siguiente orden:**

Tabla 5-4. Diagnóstico, pregunta 5

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Primero S y luego T	17	40.48%
	Primero T y luego S	25	59.52%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

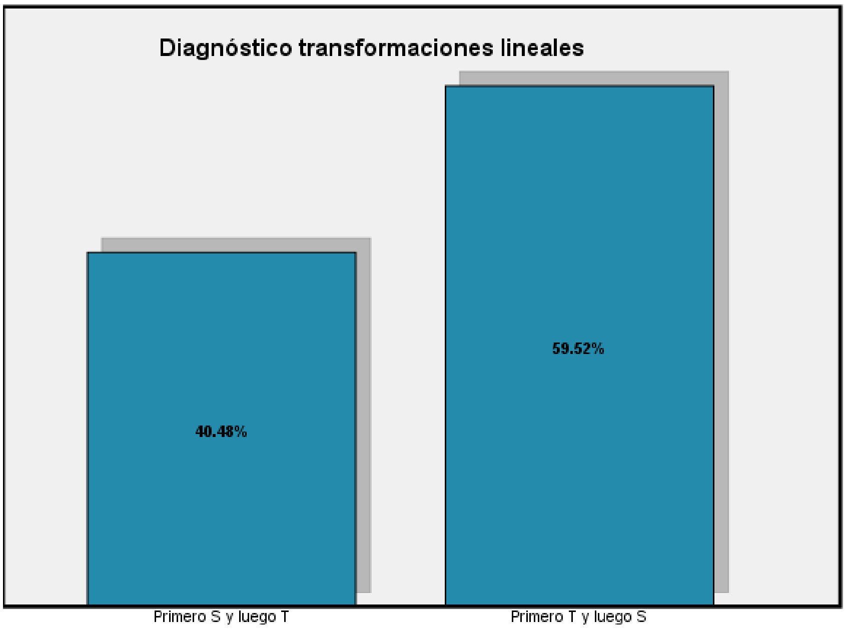


Gráfico 5-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

La composición transformaciones lineales es una aplicación de transformaciones lineales consecutivas, que puede ser calculada como producto matricial en el que el orden es importante para obtener una respuesta correcta y el 60,47% así lo comprende frente al 39.53% que al no tener claro el procedimiento está expuesto a cometer errores en el cálculo.

6. Sea la función f que pertenece al conjunto de todas las transformaciones lineales de R^3 en R^2, L (R^3, R^2), definida por f(x,y,z)=(x+z,y-2z). La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de R^3 y R^2 respectivamente es:

1. $A = [f]_{c_2}^{c_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$
2. $A = [f]_{c_2}^{c_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$

Tabla 6-4. Diagnóstico, pregunta 6

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Opción 1	31	73.81%
	Opción 2	11	26.19%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

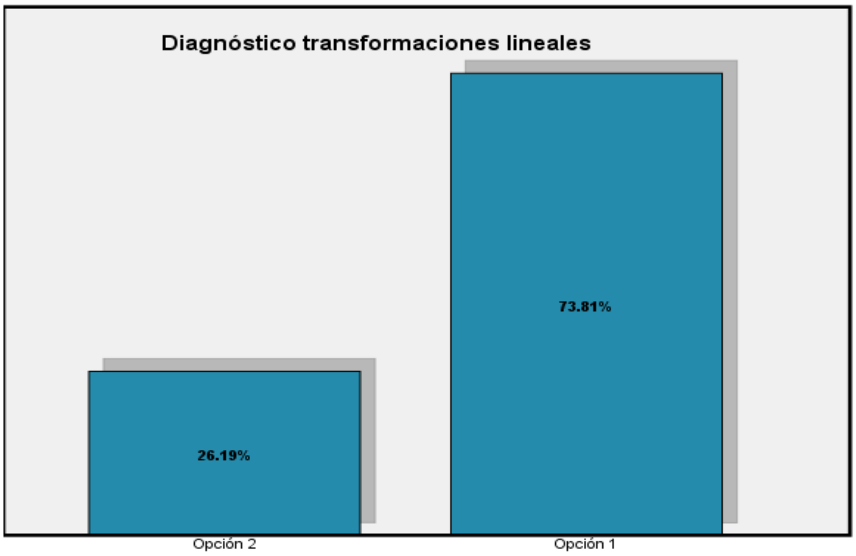


Gráfico 6-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

La matriz asociada a una transformación lineal tiene la característica de que las columnas de la matriz se corresponden con las imágenes de la base canónica del espacio vectorial de salida y el número de filas corresponde con la dimensión del espacio de llegada y el 74,42% de los estudiantes así lo consideran, no así el 25.58% que caen en un error de concepto, ya que con la respuesta escogida sería imposible obtener una transformación que vaya del espacio R^3 al espacio R^2.

7. **El kernel de una transformación lineal T: V→W es el conjunto de todos los vectores v del dominio para los cuales T(v)=0**

Tabla 7-4. Diagnóstico, pregunta 7

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Verdadero	37	88.1
	Falso	5	11.9
	Total	42	100.0

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

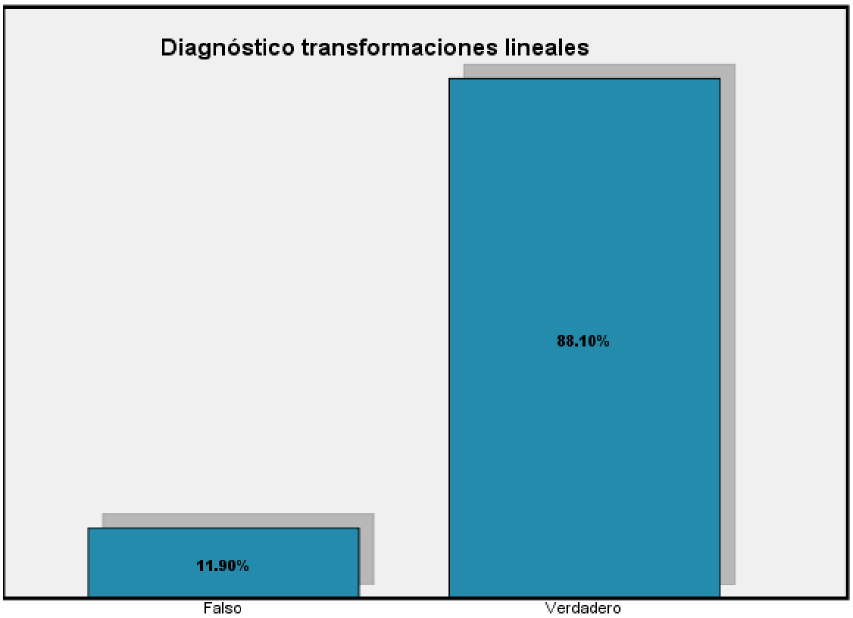


Gráfico 7-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

El 88,37% de los estudiantes, según las respuestas obtenidas, tiene claro la pertenencia del kernel al dominio de la transformación, pero el 11,63% no lo considera así, por lo que cuando requieran realizar cálculos esto les conducirá a un procedimiento y respuestas erróneas.

8. **Sea una transformación lineal T: $R^4 \rightarrow R^3$ definida por: T(w,x,y,z)=(w+2x+3y+z, w+3x+5y-2z, 3w+8x+13y-3z). El núcleo de la transformación es:**

Tabla 8-4. Diagnóstico pregunta 8

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	N(T)=(y-7z,-2y+3z,y,z)	18	42.9
	N(T)=(y+7z,2y+3z,y,z)	16	38.1
	N(T)=(y+7z,2y-3z,y,z)	8	19.0
	Total	42	100.0

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

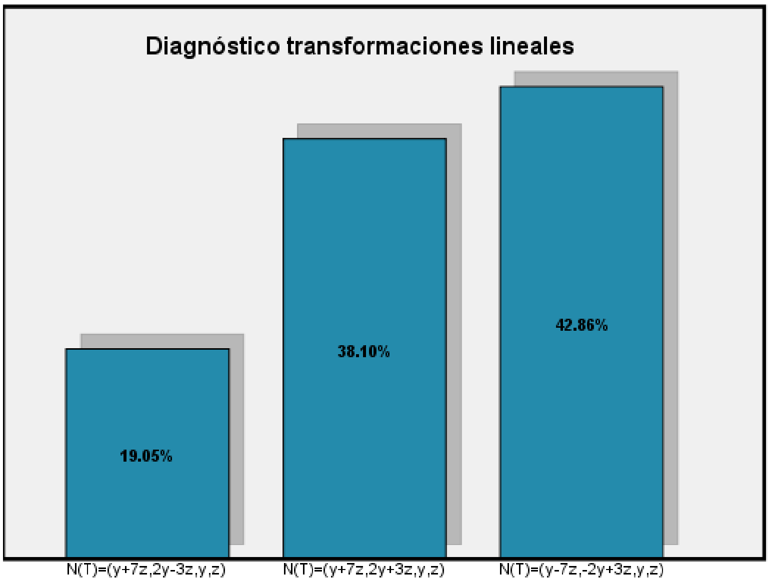


Gráfico 8-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

La respuesta a la presente pregunta esta relacionada directamente con la pregunta 7 y requiere también que el estudiante aplique conocimientos previos como la resolución de sistemas lineales de ecuaciones y sus respuestas paramétricas, unicamente el 44,19% ha seleccionado la respuesta correcta por lo que se puede inferir que el restante 55,81% presenta problemas en el cálculo del núcleo de la transformación lineal.

9. **Sea una transformación lineal T: $R^4 \rightarrow R^3$ definida por: T(w,x,y,z)=(w+2x+3y+z, w+3x+5y-2z, 3w+8x+13y-3z). El recorrido de la transformación es:**

Tabla 9-4. Diagnóstico, pregunta 9

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Im(T)={(r, s, r+2s)| r, s pertenece a los reales}	20	47.62%
	Im(T)={(r+2s, s, r)| r, s pertenece a los reales}	17	40.48%
	Im(T)={(r, s, r+s)| r, s pertenece a los reales}	5	11.90%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

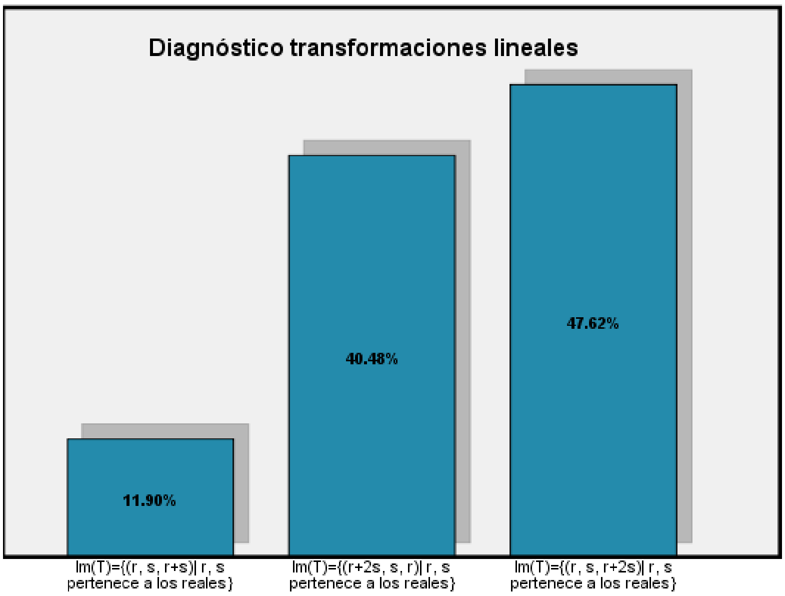


Gráfico 9-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

Para conocer el recorrido de la transformación lineal el estudiante debe aplicar sus conocimientos acerca de la transformación de las bases canónicas en una nueva base determinada por el conjunto generador relacionándola con una matriz que al ser resuelta dará como resultado el subespacio o recorrido de la transformación. Únicamente el 46,51% ha podido escoger la respuesta correcta y el porcentaje restante (53,49%) aparentemente no cuenta con el conocimiento necesario para obtener la respuesta correcta lo que deja al descubierto las dificultades que tienen los estudiantes con el estudio de las transformaciones lineales y los porcentajes contrastan con las preguntas de conocimiento del espacio imagen.

10. **El espacio imagen de una transformación lineal T: V→ W es un subespacio del espacio vectorial V.**

Tabla 10-4. Diagnóstico, pregunta 10

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Verdadero	22	52.38%
	Falso	20	47.62%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

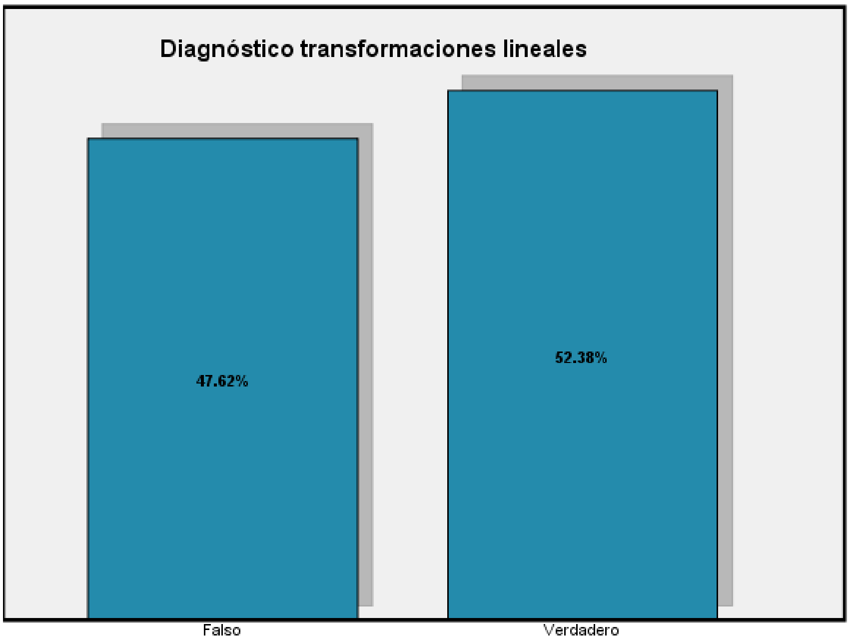


Gráfico 10-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

La presente pregunta deja ver que el 53,49% de los estudiantes no tienen claro el espacio al que pertenece el subespacio imagen lo que está relacionado directamente con el porcentaje de estudiantes que fallaron en la pregunta 9, por lo que se hace necesario reforzar la parte semiótica en la enseñanza de las transformaciones lineales.

11. La nulidad y el rango de una transformación lineal son, respectivamente, las dimensiones de su kernel e imagen.

Tabla 11-4. Diagnóstico, pregunta 11

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Verdadero	38	90.48%
	Falso	4	9.52%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

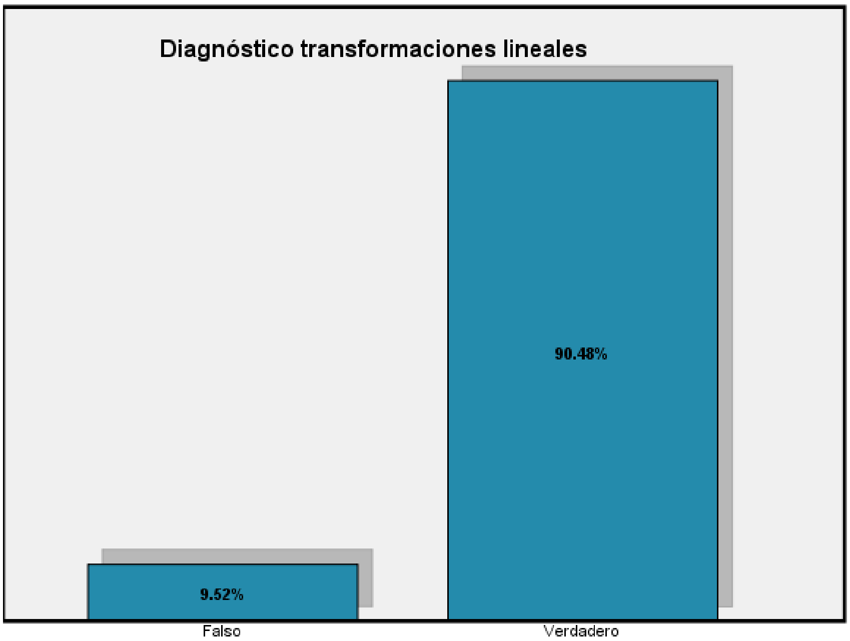


Gráfico 11-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

El 88,37 % responden correctamente la pregunta y únicamente el 11,63% lo hace de forma incorrecta, lo que permite, al contrastar con la pregunta 8, 9 y 10, advertir que existe una desconexión entre los conceptos que están relacionados.

12. Dos espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. En este caso se escribe V≡W.

Tabla 12-4. Diagnóstico, pregunta 12

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Verdadero	30	71.43%
	Falso	12	28.57%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

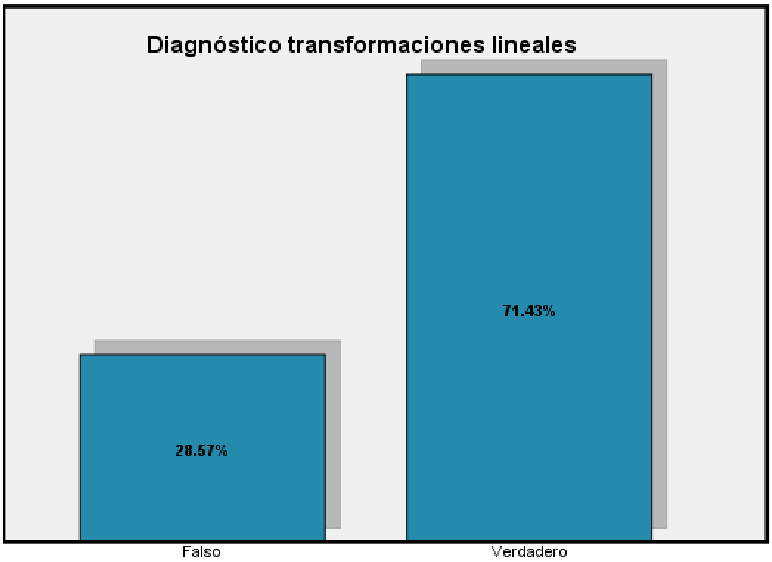


Gráfico 12-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

El 72,9% de los estudiantes ha escogido la respuesta correcta, lo que permite inferir que saben diferenciar algunos términos que se utilizan en el estudio de las transformaciones lineales, no sucediendo lo mismo con el 27,91% que aún no maneja la terminología básica requerida, por lo que se hace necesario insistir en su uso y significado coincidiendo en lo que respecta al mejoramiento del aspecto semiótico referido en la encuesta de aspectos a reforzarse.

13. Sea la función f que pertenece al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W, L (V, W), con V un espacio de dimensión finita, entonces: dim(V)=dim(N(f))+dim(Im(f)).

Tabla 13-4. Diagnóstico, pregunta 13

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Verdadero	28	66.67%
	Falso	14	33.33%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

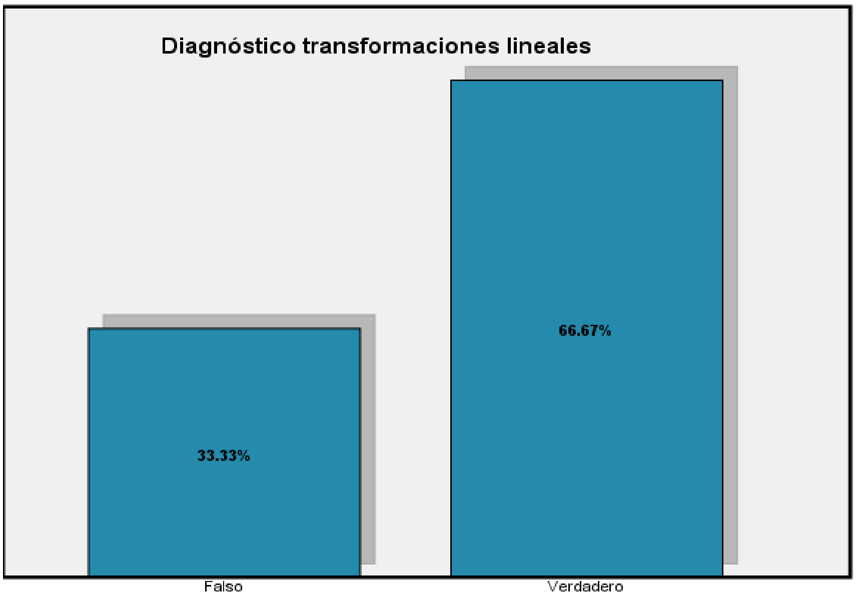


Gráfico 13-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

El teorema de la dimensión expresa una relación entre las dimensiones correspondientes del dominio, recorrido y del núcleo de la transformación lineal y es fundamental cuando se trata de transformaciones en espacios vectoriales de dimensión finita, el 67,44% de los estudiantes comprenden esta relación y el 32,56% no han alcanzado el nivel de reflexión requerido para enunciar esta relación básica, coincidiendo con las dificultades para el aprendizaje que refieren los estudiantes respecto de los espacios vectoriales en la encuesta realizada.

14. Dada la transformación f(x,y,z)=(2x-z, x+1+z). Determine si la transformación es lineal o no es lineal.

Tabla 14-4. Diagnóstico, pregunta 14

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	La transformación es lineal	20	47.62%
	La transformación no es lineal	22	52.38%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

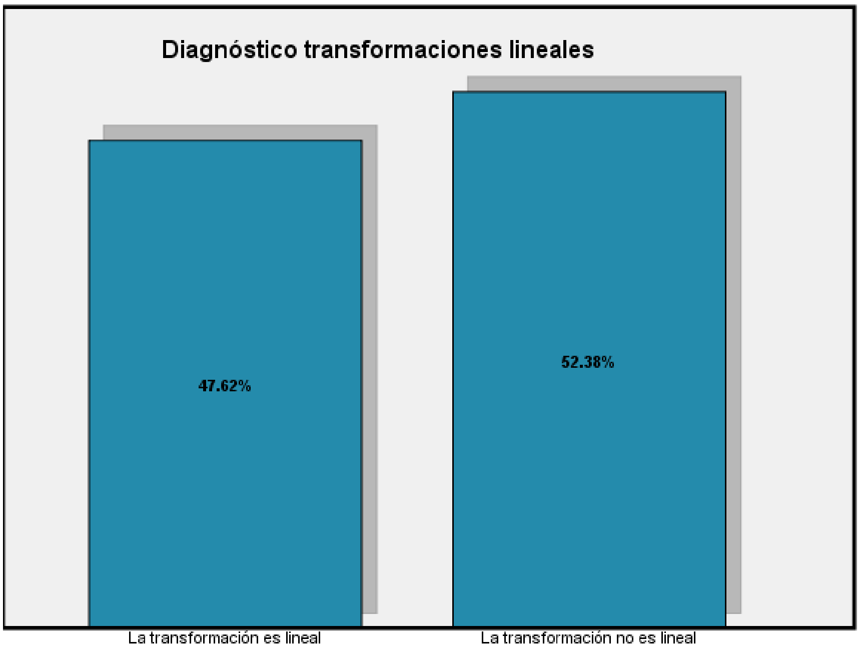
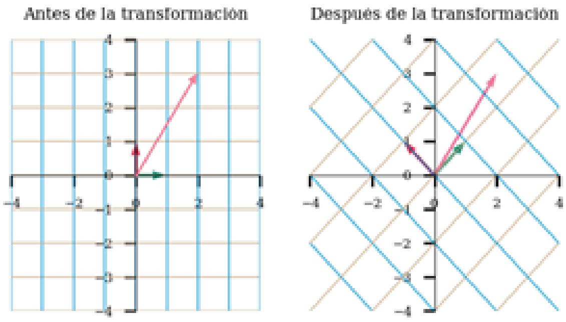


Gráfico 14-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

El 51,56% de los estudiantes ha respondido de forma correcta, sin embargo, un representativo 48,84% no ha podido aplicar la demostración u observar las propiedades para que la transformación sea lineal lo que está directamente relacionado con la pregunta 3 acerca de las propiedades que debe cumplir la transformación para que sea lineal y también respuestas de la encuesta acerca de las dificultades para el aprendizaje.

15. Del gráfico: el vector en la base canónica, el vector transformado y la base del vector transformado respectivamente son:



1. $v = (2,3) \rightarrow (2,3)_T = \left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ *y* $T = \{(1,1), (-1,1)\}$
2. $v = (2,3) \rightarrow (2,3)_T = \left(\frac{4}{2}, \frac{6}{2}\right)$ *y* $T = \{(-1,1), (1,1)\}$
3. $v = (2,3) \rightarrow (2,3)_T = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$ *y* $T = \{(1,1), (-1,1)\}$

Tabla 15-4. Diagnóstico, pregunta 15

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Opción 1	19	45.24%
	Opción 2	14	33.33%
	Opción 3	9	21.43%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

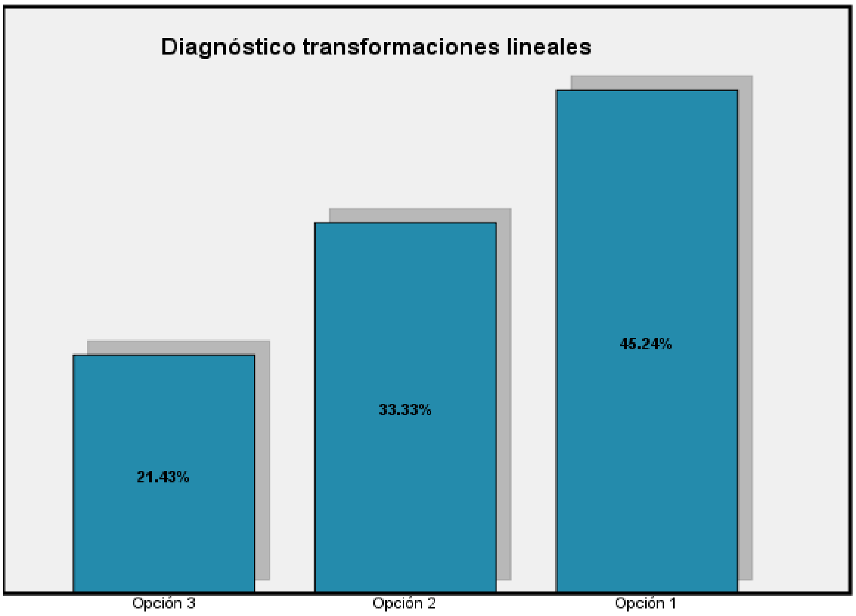
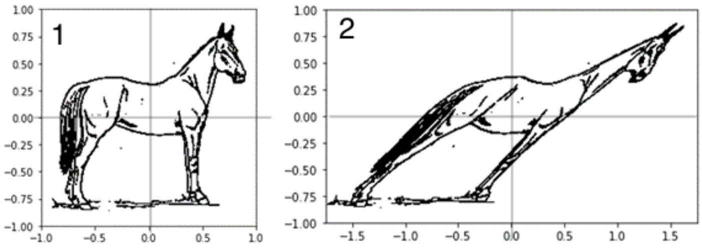


Gráfico 15-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

La pregunta corresponde a una aplicación geométrica de las transformaciones lineales a un vector, el 44,19% de los estudiantes ha sabido interpretar de forma correcta los gráficos y el 55,81% muestra una desconexión entre los conceptos y su representación geométrica. Esto confirma los resultados obtenidos en la encuesta acerca de las dificultades que tienen los estudiantes para el aprendizaje de las transformaciones lineales en lo que refiere a los aspectos que, desde su perspectiva, deben ser reforzados para mejorar el aprendizaje.

16. Considerando que la imagen del gráfico ha sido vectorizada y que 1 es la imagen original y 2 es la imagen transformada. ¿La matriz de transformación es?



1. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
2. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$
3. $\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$

Tabla 16-4. Diagnóstico, pregunta 16

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	Opción 1	26	61.90%
	Opción 2	4	9.52%
	Opción 3	12	28.57%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

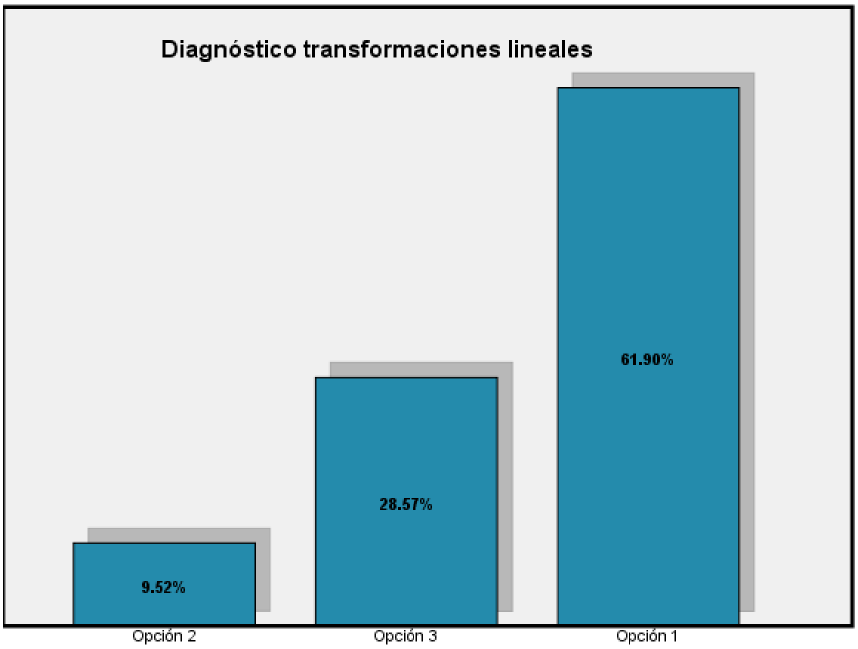


Gráfico 16-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

La opción 1 corresponde a una imagen vectorizada a la que se le ha aplicado la matriz de corte, cizalladura o inclinación paralela al eje x, el 62,79% de los estudiantes han respondido correctamente no así el 37,21% que ha respondido de forma incorrecta y que requiere mayor énfasis en la aplicación práctica de las transformaciones lineales, este resultado está relacionado directamente con el porcentaje de estudiantes que refieren, entre las dificultades para el aprendizaje, la falta posibles aplicaciones de la transformaciones lineales.

17. La matriz homogénea de la imagen sirve para indicar la posición de un brazo robótico. Está compuesta de:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{x} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \boldsymbol{y} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \boldsymbol{z} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Tabla 17-4. Diagnóstico, pregunta 17

		Frecuencia	Porcentaje
Válidos	2 submatrices: de proyección (4x3) y de rotación (4x1)	7	16.67%
	2 submatrices: de rotación(4x3) , de traslación (4x1)	9	21.43%
	4 submatrices: rotación(3x3), traslación (3x1), proyección (1x3) y escalar (1x1)	26	61.90%
	Total	42	100.00%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

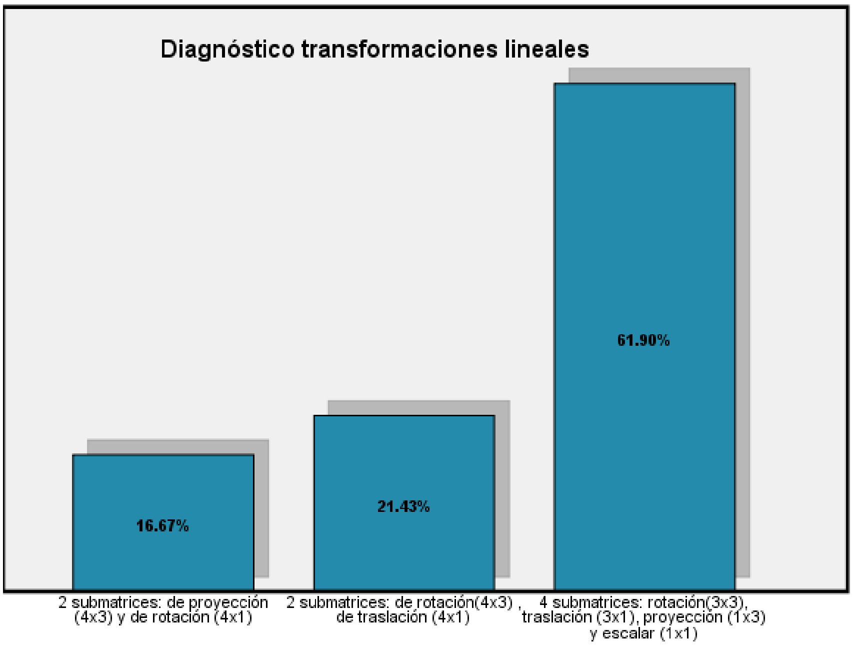


Gráfico 17-4. Diagnóstico transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

La matriz homogénea sirve para representar la posición y orientación de un sistema y su aplicación es muy importante en la vida real, especialmente en el campo de la robótica, de los resultados obtenidos el 62,79% reconoce la conformación de la matriz y el 37,21% escoge las opciones erróneas coincidiendo estos resultados con los obtenidos en la encuesta de los aspectos que, según los estudiantes, se deben reforzar para mejorar su aprendizaje y, por lo tanto, su rendimiento.

Dificultades para el aprendizaje de las transformaciones lineales

18. El tema que más ha dificultado su comprensión del álgebra lineal es:

Tabla 18-4. Diagnóstico, pregunta 18

	Respuestas		Porcentaje de casos
	Nº	Porcentaje	
Vectores, sus propiedades y operaciones en el espacio bidimensional y tridimensional	13	20.00%	30.23%
Sistemas de ecuaciones lineales y matrices, sus propiedades y operaciones	10	15.38%	23.26%
Espacios vectoriales euclidianos y generales	18	27.69%	41.86%
Transformaciones lineales	24	36.92%	55.81%
Total	65	100.0%	151.16%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

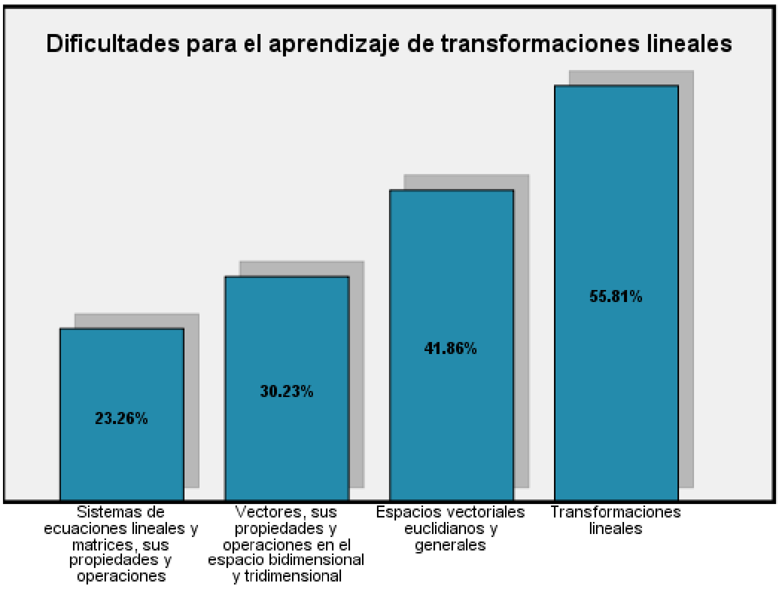


Gráfico 18-4. Dificultades para el aprendizaje de transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

Al ser cuestionados acerca del tema o temas que dificultan la comprensión del álgebra lineal el 55,81% menciona que éste corresponde a las transformaciones lineales que es el tema en el que adquiere sentido todo lo que se estudia en el álgebra lineal y al existir esta dificultad se requiere buscar los mecanismos, metodologías e innovaciones que le permitan al estudiante alcanzar un aprendizaje profundo.

19. De los siguientes aspectos ¿Cuáles considera usted que deben reforzarse para mejorar el aprendizaje de las transformaciones lineales?

Tabla 19-4. Diagnóstico, pregunta 19

	Respuestas		Porcentaje de casos
	Nº	Porcentaje	
La notación	21	20.59%	48.84%
La articulación de los lenguajes aritmético, algebraico y geométrico en el proceso de enseñanza aprendizaje	14	13.73%	32.56%
La inclusión de software libre matemático en el proceso de enseñanza aprendizaje	17	16.67%	39.53%
La bibliografía	4	3.92%	9.30%
Las posibles aplicaciones de los contenidos aprendidos	18	17.65%	41.86%
La conexión entre los contenidos de estudio	8	7.84%	18.60%
Equilibrio objetivos con metodología, actividades y tareas de evaluación obtener un aprendizaje profundo.	20	19.61%	46.51%
Total	102	100.00%	237.21%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

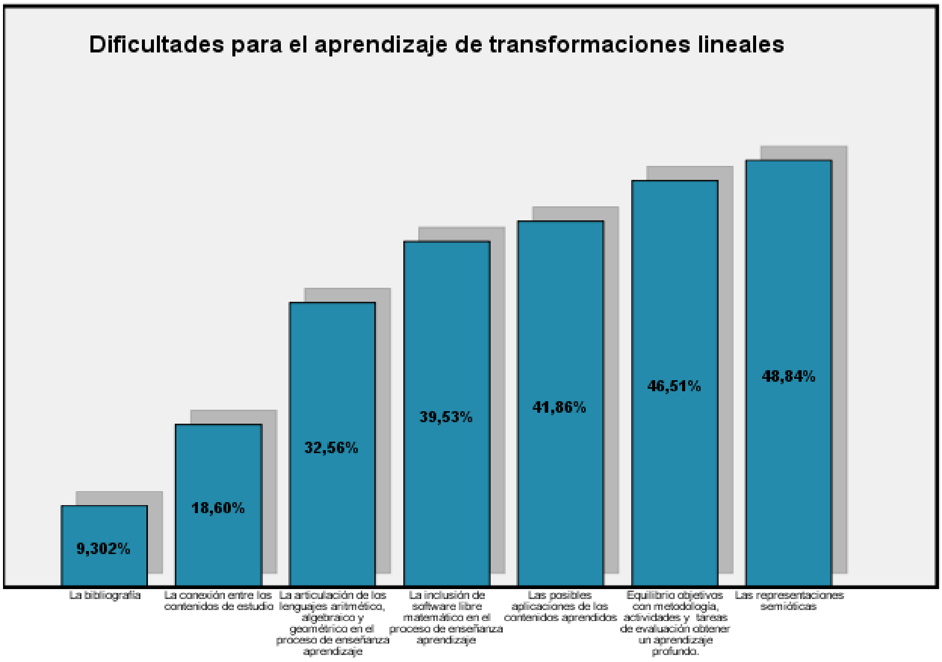


Gráfico 19-4. Dificultades para el aprendizaje de transformaciones lineales
Realizado por: Cuenca, C. 2022

Entre los aspectos que los estudiantes consideran deben reforzarse en el proceso de enseñanza aprendizaje existe un índice similar ya que 48,84% y 46,51% respectivamente consideran que se deben reforzar el conocimiento de las representaciones semióticas y el equilibrio entre los objetivos, metodología, actividades y evaluación. Otros dos aspectos que tienen porcentajes similares (39,53% y 41,86) y también significativos son los referentes a la inclusión de software libre matemático en el proceso de enseñanza y las aplicaciones de aquellos temas que han sido compartidos en el aula, todos estos aspectos están claramente relacionados con las falencias encontradas en las preguntas de diagnóstico.

Características para software libre matemático

20. ¿Qué características considera usted que son las más importantes para escoger un software libre matemático?

Tabla 20-4. Diagnóstico, pregunta 20

	Respuestas		Porcentaje de casos
	Nº	Porcentaje	
Costo	10	10.00%	23.26%
Facilidad de uso	33	33.00%	76.74%
Posibilidad de uso en la web sin necesidad de instalarlo	9	9.00%	20.93%
Soportar: cálculos, texto enriquecido, gráficos, imágenes y multimedia en una misma interfaz	32	32.00%	74.42%
Facilidad de instalación	16	16.00%	37.21%
Total	100	100.00%	232.56%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

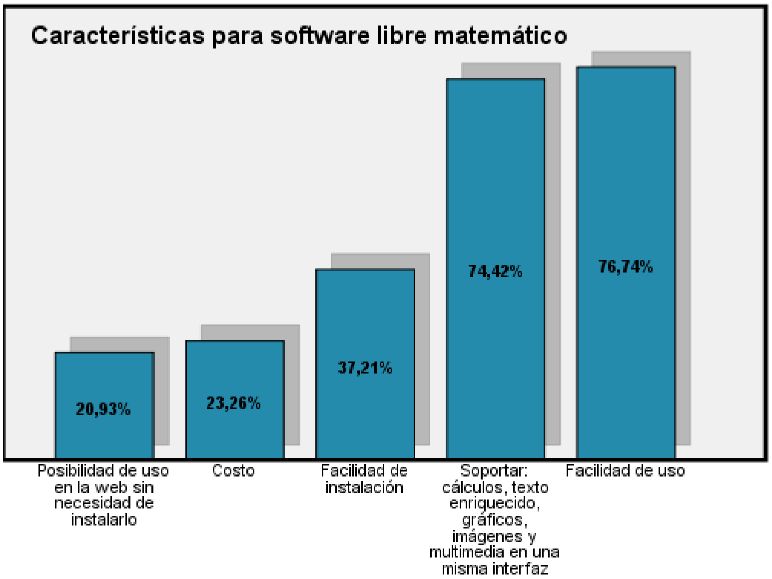


Gráfico 20-4. Características para software libre matemático
Realizado por: Cuenca, C. 2022

Entre las características más importantes escogidas por los estudiantes sobresalen con 76,74% y 74,42% la facilidad de uso y la capacidad que debería tener el software para soportar cálculos, texto enriquecido, gráficos, imágenes y multimedia en la misma interfaz, cabe mencionar que algunos de los aspectos son subjetivos y dependen de la familiaridad que tienen los estudiantes con software libre matemático, tal como se desprende de la respuesta a la pregunta respectiva. Con porcentaje menor le sigue la facilidad de instalación, 37,21%, costo y posibilidad de uso en la web con 23,26% y 20.93% respectivamente.

21. **Está usted familiarizado con el uso de software libre matemático para el estudio de las ciencias exactas? Escriba el nombre del software.**

Tabla 21-4. Diagnóstico, pregunta 21

	Respuestas		Porcentaje de casos
	Nº	Porcentaje	
GeoGebra	25	47.17%	58.14%
Matlab	4	7.55%	9.30%
Anaconda	7	13.21%	16.28%
Octave	2	3.77%	4.65%
Symbolab	2	3.77%	4.65%
Photomath	1	1.89%	2.33%
WolframAlpha	1	1.89%	2.33%
Latex	1	1.89%	2.33%
Autodesk Inventor	1	1.89%	2.33%
No	9	16.98%	20.93%
Total	53	100.00%	123.26%

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

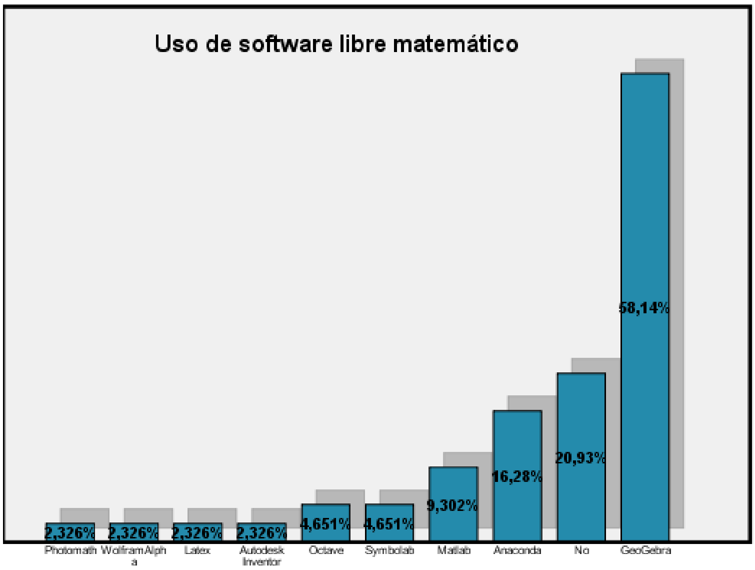


Gráfico 21-4. Uso de software libre matemático
Realizado por: Cuenca, C. 2022

De las respuestas obtenidas se desprende que el 58,14% está familiarizado con el software GeoGebra, muy utilizado en la educación básica y bachillerato, le sigue el 20,93% que no está familiarizado con software alguno, el 16,28% con Anaconda, el 9,30% con Matlab y, con porcentajes menores le siguen Symbolab, Octave, Autodesk Inventor, Latex, Wolfram Alpha y Photomath.

4.2 Resumen de los resultados obtenidos en la encuesta aplicada

Las conclusiones obtenidas como resultado de la aplicación de la encuesta a los estudiantes de primer semestre de la asignatura de álgebra lineal de la Universidad de las Fuerzas Armadas son:

4.2.1 Acerca de la evaluación diagnostica de transformaciones lineales

Se puede inferir de los resultados obtenidos que existe una desconexión entre la parte conceptual, las representaciones semióticas, la representación geométrica y la aplicación de las transformaciones lineales. El análisis de las preguntas sobre conceptos y definiciones 2, 7, 11, 12, 13 y 17, que fueron respondidas de forma correcta por entre el 62% y 88 % de los estudiantes contrasta con entre el 44% y 53 % de respuestas correctas a las preguntas 8, 9, 10, 14, 15 que corresponden a la relación de esos conceptos con la resolución de ejercicios y con las representaciones semióticas en los que se aplican los conceptos. Las preguntas 6 y 16 que enlazan la teoría con aplicaciones básicas fueron respondidas correctamente por entre el 62% y 75% mientras que las preguntas 1, 3 y 4 que tienen relación directa con la definición de transformación lineal presentan menor índice de respuestas correctas (34%-59%), lo que evidencia una deficiencia desde lo conceptual, lo que limita la comprensión del tema

4.2.2 Sobre las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las transformaciones lineales

En lo que respecta a las dificultades para el aprendizaje de transformaciones lineales queda claro que el número de estudiantes aumenta progresivamente desde los temas más básicos hasta las transformaciones lineales, lo que está directamente relacionado con los aspectos que los estudiantes consideran deben mejorarse para el aprendizaje ya que ellos refieren en mayor número que se deberían mejorar las representaciones semióticas, el equilibrio entre los objetivos, la metodología que se utilice en clase, las tareas de evaluación.

4.2.3 Características para un software libre

La mayoría de los estudiantes, según los resultados de la encuesta, valoran en un software libre matemático la facilidad de uso y la capacidad de soportar en una misma interfaz cálculos, texto enriquecido, gráficos, imágenes y multimedia.

4.2.4 Familiaridad con software libre matemático

La mayoría de los estudiantes refirió a GeoGebra como el software con el que tienen mayor familiaridad, seguido de aquellos que indican no estar familiarizados con software alguno y finalmente con porcentajes mínimos están los estudiantes que conocen algún software matemático entre libres y de costo.

4.3 Comprobación de homogeneidad entre grupos de control y experimental

Para comprobar la homogeneidad que existe entre los grupos de control y experimental, se utilizó la prueba F, para lo que fue necesario utilizar el promedio obtenido por cada pregunta en la encuesta de diagnóstico que se aplicó a cada grupo.

Tabla 22-4. Promedio obtenido por pregunta de diagnóstico

Pregunta No.	Descripción	Promedio	
		Grupo Experimental	Control
1	La transformación l(x)=mx+b, para todo b diferente de 0, es una transformación...	0,25	0,25
2	La expresión indicada, donde a, b, c pertenecen al conjunto de los números reales diferentes de cero y x1, x2, x3 son variables es:	0,4	0,5
3	Si el dominio y rango de una función real están restringidos a subconjuntos de los números reales, en el caso de las transformaciones lineales el dominio y rango se restringen a:	0,25	0,4
4	Una transformación T:V→W es lineal si para los vectores u y v de V y para cualquier par de escalares α y ß se cumple	0,5	0,5
5	Si T:V →W es una transformación lineal de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W. En el caso especial que V=W, la transformación lineal T: V→V se denomina?	0,25	0,25
6	Sean T1 la transformación rotación alrededor del eje z a través de un ángulo Θ, T2 la transformación reflexión respecto al plano yz y T3 la transformación proyección ortogonal sobre el plano xy, entonces la transformación compuesta T=T2oT3oT1 implica el siguiente orden:	0,3	0,25
7	De las siguientes transformaciones lineales, seleccione la que no puede ser un isomorfismo.	0,35	0,4
8	Sea la función f que pertenece al conjunto de todas las transformaciones lineales de R3 en R2, L(R3,R2), definida por f(x,y,z)=(x+z,y-2z). La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de R3 y R2 respectivamente es:	0,45	0,35
9	En general una transformación lineal tiene muchas representaciones matriciales, es decir, una diferente matriz para cada par de bases en el dominio y en el rango.	0,7	0,7
10	El kernel de una transformación lineal T es el conjunto de todos los vectores v del dominio para los cuales T(v)=0	0,75	0,7
11	El kernel de una transformación lineal es un subespacio del dominio	0,8	0,8
12	El espacio imagen de una transformación lineal T:V→ W es un subespacio de W	0,8	0,75
13	La nulidad y el rango de una transformación lineal son, respectivamente, las dimensiones de su kernel e imagen	0,6	0,9
14	Sea T:V→W una transformación lineal. Entonces T es es un isomorfismo si T es uno a uno y sobreyectiva	0,45	0,7
15	Dos espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. En este caso se escribe V≅W	0,65	0,55
16	Sea la función f que pertenece al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W, L(V,W), con V un espacio de	0,85	0,7

	dimensión finita, entonces: dim(V)=dim(N(f))+dim(Im(f))		
17	Cualquier transformación lineal entre espacios vectoriales de dimensión finita se puede representar mediante una matriz	0,9	0,85

Fuente: Encuesta de diagnóstico, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

Aplicación de la prueba F para varianza de dos grupos

La prueba F requiere el planteamiento de una hipótesis nula (H_0) y una hipótesis alternativa (H_1)

H_0: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$, implica homogeneidad entre el grupo experimental y el grupo de control

H_1: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$, implica no homogeneidad entre el grupo experimental y el grupo de control

La prueba F se realiza por medio de Excel cuyos resultados se muestran en la tabla 23-4

Tabla 23-4. Prueba F para varianzas de dos muestras

Prueba F para varianzas de dos muestras

	Variable 1	*Variable 2*
Media	0,54411765	0,56176471
Varianza	0,05183824	0,04766544
Observaciones	17	17
Grados de libertad	16	16
F	1,08754339	
P(F<=f) una cola	0,43438603	
Valor crítico para F (una cola)	2,33348363	

Fuente: Software Excel, 2022

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

Luego de la aplicación de la prueba F se obtiene: F=1,086 y $F_{crítica}$=2,33. Dado que $F < F_{crítica}$ se acepta la hipótesis nula, por lo tanto, se infiere que existe homogeneidad entre los grupos de control y experimental.

4.4 Resultados obtenidos en la prueba objetiva

Con la finalidad de validar la aplicación del modelo 3P que incorpora software libre para la enseñanza aprendizaje de transformaciones lineales se aplicó una prueba objetiva que permite establecer la diferencia de conocimiento existente entre los grupos de control y experimental.

En las tablas 24-4 y 25-4 respectivamente, se presentan los promedios de la prueba objetiva obtenidos por cada grupo (control y experimental).

Tabla 24-4. Notas prueba objetiva grupo control

NOTAS PRUEBA OBJETIVA (/10)					
ORDEN	**NOTA**	**ORDEN**	**NOTA**	**ORDEN**	**NOTA**
1	7,65	**8**	5,13	**15**	6,67
2	7,06	**9**	6,06	**16**	4,83
3	7,06	**10**	7,24	**17**	6,05
4	7,06	**11**	7,49	**18**	5,37
5	5,88	**12**	5,11	**19**	4,83
6	5,88	**13**	5,09	**20**	5,69
7	5,88	**14**	4,32	**21**	4,83

Fuente: Google Forms
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

Tabla 25-4. Notas prueba objetiva grupo experimental

NOTAS PRUEBA OBJETIVA (/10)					
ORDEN	**NOTA**	**ORDEN**	**NOTA**	**ORDEN**	**NOTA**
1	9,41	**8**	5,88	**15**	5,29
2	8,82	**9**	5,88	**16**	4,71
3	8,24	**10**	5,29	**17**	4,71
4	8,24	**11**	5,29	**18**	4,71
5	7,65	**12**	5,29	**19**	4,71
6	7,65	**13**	5,29	**20**	4,12
7	7,06	**14**	5,29	**21**	4,12

Fuente: Google Forms
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

4.4.1 Estadísticos descriptivos de los resultados obtenidos en los grupos experimental y de control

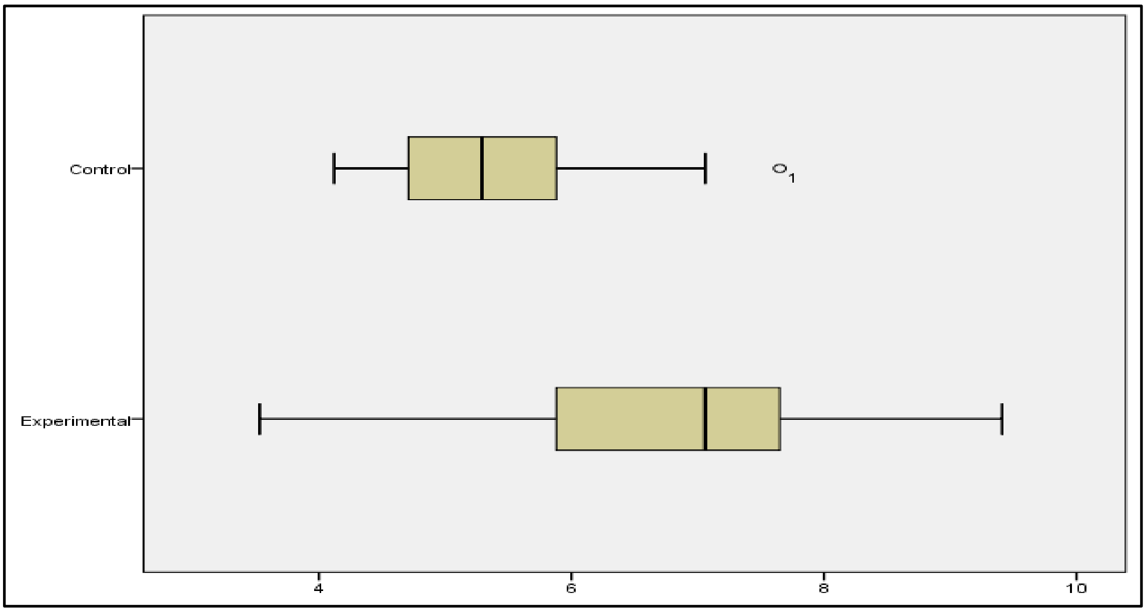


Gráfico 22-4. Gráfico de caja y Bigotes
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

En base a datos de tabla 26-4 se puede inferir que el grupo experimental presentó un incremento en la media de las calificaciones obtenidas en la prueba objetiva planteada a los dos grupos.

Tabla 26-4. Notas prueba objetiva grupo experimental

		Grupo experimental	Grupo control
N	Válidos	21	21
	Perdidos	0	0
Media		6.6114	5.5738
Error típ. de la media		.34660	.21326
Mediana		7.0600	5.2900
Moda		7.06	5.29
Desv. típ.		1.58834	.97726
Varianza		2.523	.955
Asimetría		-.363	.597
Error típ. de asimetría		.501	.501
Curtosis		-.474	-.216
Error típ. de curtosis		.972	.972
Rango		5.88	3.53
Mínimo		3.53	4.12
Máximo		9.41	7.65
Suma		138.84	117.05

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

4.4.2 Frecuencias e histogramas de los resultados de la prueba objetiva

Tabla 27-4. Tabla de frecuencias grupo experimental

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	3.53	1	4.76%	4.76%	4.76%
	4.12	2	9.52%	9.52%	14.29%
	4.71	1	4.76%	4.76%	19.05%
	5.29	1	4.76%	4.76%	23.81%
	5.88	3	14.29%	14.29%	38.10%
	7.06	7	33.33%	33.33%	71.43%
	7.65	2	9.52%	9.52%	80.95%
	8.24	2	9.52%	9.52%	90.48%
	8.82	1	4.76%	4.76%	95.24%
	9.41	1	4.76%	4.76%	100.00%
	Total	21	100.00%	100.00%	

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

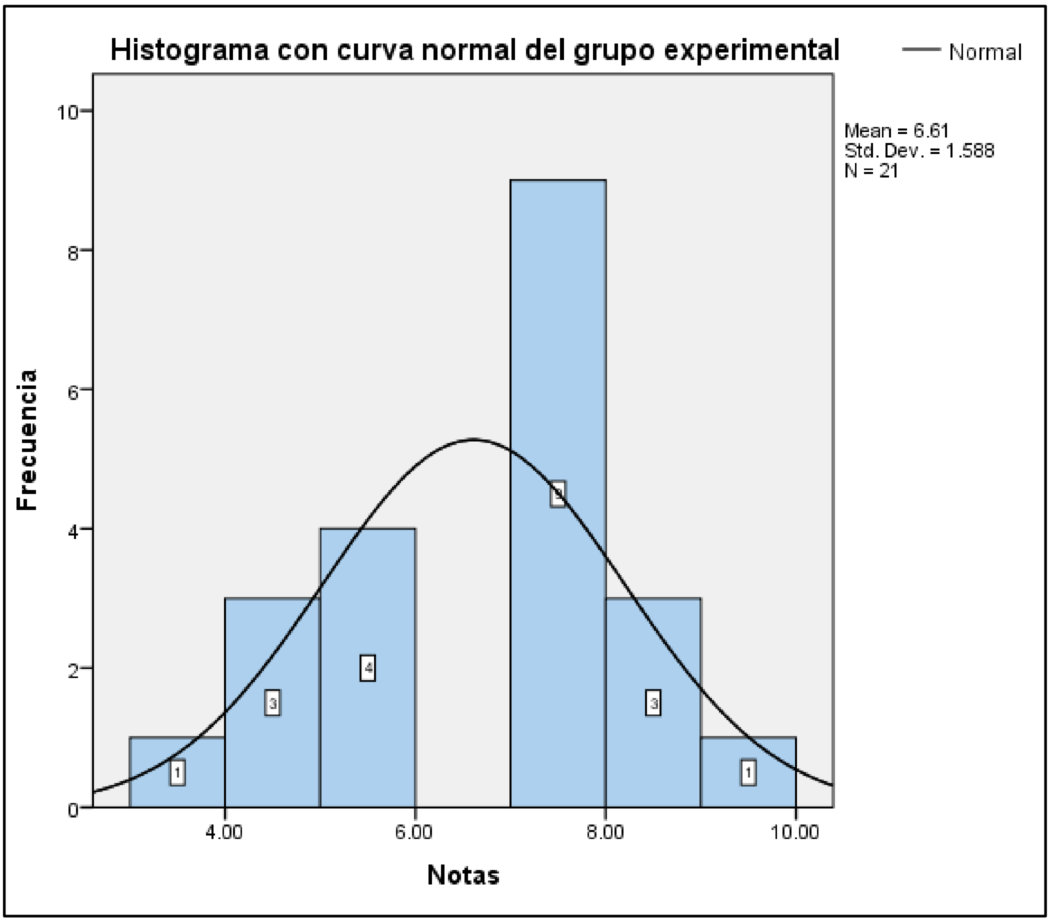


Gráfico 23-4. Histograma grupo experimental
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

Tabla 28-4. Tabla de Frecuencias grupo control

		Frecuencia	Porcentaje	Porcentaje válido	Porcentaje acumulado
Válidos	4.12	2	9.52%	9.52%	9.52%
	4.71	4	19.05%	19.05%	28.57%
	5.29	6	28.57%	28.57%	57.14%
	5.88	5	23.81%	23.81%	80.95%
	7.06	3	14.29%	14.29%	95.24%
	7.65	1	4.76%	4.76%	100.00%
	Total	21	100.00%	100.00%	

Fuente: Software SPSS, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

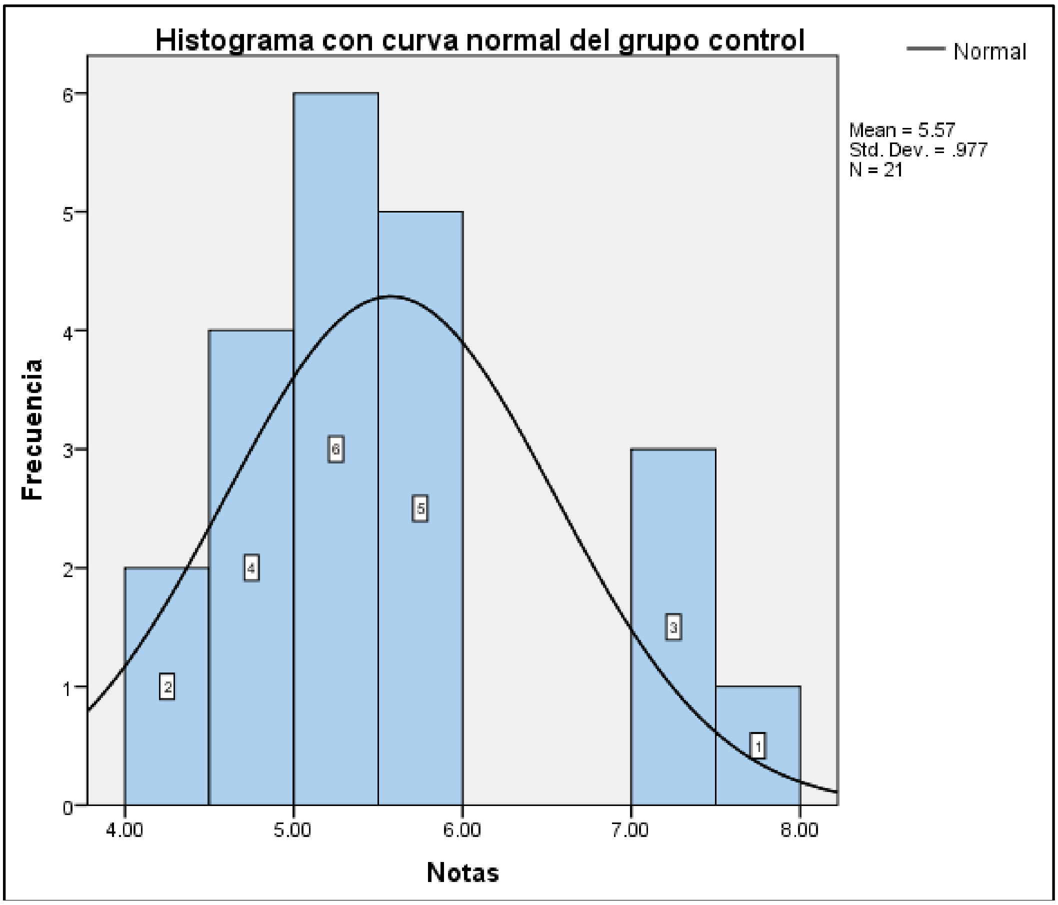


Gráfico 24-4. Histograma Grupo control
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

4.5 Contrastación de la hipótesis

La contrastación de la hipótesis se realizó por medio de la prueba t de student por medias de población:

El modelo de enseñanza aprendizaje que incorpora software libre no mejora el rendimiento académico en transformaciones lineales

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

El modelo de enseñanza aprendizaje que incorpora software libre mejora el rendimiento académico en transformaciones lineales

$H_0: \mu_1 - \mu_2 > 0$

El nivel de significancia es del 0.05 con confiabilidad de 95%

Para el cálculo del valor t se requiere de los valores obtenidos en la tabla 26-4, de las medias y suma:

Datos:

$\bar{x}_1 = 6,6114$

$\sum x_1 = 138,84$

$(\sum x_1)^2 = 968,387$

$$\mathrm{SC}_1 = \sum x_1^2 - \frac{(\sum x_1)^2}{n_1} = 968,387 - \frac{(138.84)^2}{21} = 50,4563$$

$\bar{x}_2 = 5,5738$

$\sum x_2 = 117,05$

$(\sum x_1)^2 = 671,5151$

$$\mathrm{SC}_2 = \sum x_2^2 - \frac{(\sum x_2)^2}{n_1} = 671,5151 - \frac{(117,05)^2}{21} = 19.101$$

$$t_{obt} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{SC_1 + SC_2}{n(n-1)}}} = \frac{6.6114 - 5.5738}{\sqrt{\frac{50.4563 + 19.101}{21(20-1)}}} = 2.5497$$

Tabla 29-4. Nivel de Confianza

	Grupo Experimental	*Grupo control*
Media	6,611428571	5,57380952
Varianza	2,522812857	0,95503476
Observaciones	21	21
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de libertad	33	
Estadístico t	2,549718929	
P(T<=t) una cola	0,007805403	
Valor crítico de t (una cola)	1,692360309	
P(T<=t) dos colas	0,015610806	
Valor crítico de t (dos colas)	2,034515297	

Fuente: Software Excel, 2022
Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

Del análisis de la tabla 29-4 se tiene que, para el nivel de confianza del 95% corresponde a $t_{crítico} = 2.034$ y en vista de que: t calculada (2.5497)>t crítica (2.034), se rechaza la hipótesis nula, aceptando por lo tanto la hipótesis alternativa, concluyendo que el modelo de enseñanza aprendizaje que incorpora software libre matemático permite mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales.

CAPÍTULO V

5 PROPUESTA

Para la implementación del modelo de enseñanza aprendizaje de transformaciones lineales acorde con la educación superior, se ha tomado en cuenta un modelo que permita la interacción que debería existir entre aquellos factores que dependen del compromiso del estudiante en relación al estudio, las actividades que lleven al estudiante de ser un espectador a ser parte de la construcción de su propio aprendizaje y que facilite al docente orientar su método de enseñanza en busca del logro de objetivos que desarrollen en el estudiante compromisos de alto nivel cognitivo. Todo lo descrito condujo a la adopción del modelo 3P de Biggs, al que se incorpora el uso de software libre, fácil de usar, que no requiera complicados procesos de instalación, pueda ser utilizado en línea, sea aplicable a la enseñanza aprendizaje del álgebra lineal y en que el estudiante pueda ampliar y/o complementar la información en función de sus intereses, todas estas características que poseen los Jupyter Notebook.

5.1 Introducción

El Modelo de enseñanza aprendizaje incorporando software libre para mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales pretende generar una alternativa en el proceso académico de los estudiantes de primer semestre de la Universidad de las Fuerzas Armadas que toman la asignatura de álgebra lineal. La responsabilidad de la pretendida mejora en el rendimiento académico, para el modelo 3P, ya no es exclusiva del docente y depende también del principal actor que es el estudiante cuya motivación debe ser intrínseca y provocada por lo que se ha denominado buena enseñanza(Biggs, 2006). En este sentido la labor del docente consiste en establecer y comunicar de forma clara los objetivos del proceso de enseñanza aprendizaje alineándolos con el método de enseñanza, con la evaluación y con las actividades propuestas claramente basados en los principios del constructivismo. La inclusión de los Jupyter Notebook busca apalancar el modelo 3P ya que estos permiten al estudiante tener en una sola interfaz la posibilidad de realizar cálculos, visualizar gráficas, aplicar programación básica en lenguaje Python, tomar apuntes, modificar o complementar el material elaborado por el docente, dando un sentido pragmático a su proceso de aprendizaje lo que al final produce la imprescindible motivación intrínseca y consecuentemente mejora el rendimiento académico.

5.2 Justificación

Recurrentemente el aprendizaje del AL se ha constituido en un obstáculo para los estudiantes, debido principalmente a la serie de nuevos conceptos abstractos que deben ser asimilados y que encuentran su cúspide en el tema de transformaciones lineales. Los estudiantes de primer semestre de la ESPE no son ajenos a esta realidad y se han visto limitados a asistir a clases magistrales donde su actividad es la de tomar notas y aprender de memoria sin actividades que le permitan salir de la pasividad sin ser parte de su propio aprendizaje, lo que se ve reflejado en su rendimiento académico.

La propuesta de adoptar el modelo 3P, surge por la necesidad de limitar el uso de la clase magistral en el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que este tiene su principio en la teoría constructivista y está concebido para estudiantes de nivel superior teniendo como característica el alineamiento entre los objetivos, las actividades de aprendizaje y la evaluación. La posibilidad de complementar el modelo aumenta con la inclusión de software libre como Python con su interfaz Jupyter Notebook, ya que esta permite integrar en una misma interfaz teoría, cálculos, gráficos y la posibilidad de que el estudiante obtenga la motivación que requiere para alcanzar un aprendizaje profundo. Para el docente es la oportunidad de innovar, ampliar sus métodos y tener la confianza de hacer partícipe al estudiante de su aprendizaje yendo más allá de la tradicional clase magistral tan arraigada en el ambiente de la educación superior.

5.3 Descripción

Jupyter Notebook es el complemento ideal para el modelo 3P de enseñanza aprendizaje ya que permite al docente compartir con el estudiante un documento perfectible en el que puede tomar apuntes, compartir y trabajar en línea, realizar cálculos de todo tipo y a la vez obtener visualizaciones geométricas que luego le permitirán generalizar los conceptos aprendidos.

Dentro de este contexto el docente establecerá los objetivos que pretende alcanzar, en busca de que el estudiante se motive para llegar a un aprendizaje profundo, conforme el modelo de aprendizaje adoptado. La inclusión de los Jupyter Notebook dentro de las actividades de clase permite al alumno experimentar con diferentes ejemplos, más allá de los que el docente haya plasmado en el documento de Jupyter obligando al estudiante, de esta forma, a ser parte de activa de su aprendizaje reflexionando acerca de lo compartido, creando nuevos ejercicios y aplicando lo aprendido.

Dentro del desarrollo de las clases se le propondrán al estudiante distintas actividades que buscan despertar su interés y motivación por el aprendizaje de las transformaciones lineales. Las actividades deberán estar alineadas con los objetivos y con la evaluación, conforme el modelo 3P y el alineamiento constructivo y prácticamente en todo el proceso se hará uso de los Jupyter notebook.

5.4 Objetivos de la propuesta

- Alinear metodología, actividades y evaluación para obtener un aprendizaje profundo.

- Compartir con los estudiantes los conceptos básicos requeridos para abordar el estudio de las transformaciones lineales, principalmente en lo referente a la simbología utilizada por diferentes autores.
- Reflexionar acerca del significado de la multiplicación matriz-vector, matriz -matriz, su cálculo mediante el uso de las diferentes librerías soportadas por los Jupyter Notebook y su significado geométrico para posteriormente generalizar los resultados.

5.5 Resultados del aprendizaje

- Identificar transformaciones lineales partiendo de la definición y sus propiedades.
- Calcular y dar sentido geométrico a la matriz asociada a una transformación lineal respecto de las bases del espacio de salida y de llegada en R^2 utilizando los Jupyter Notebook.
- Aplicar las transformaciones lineales en el tratamiento de imágenes y en la matriz homogénea para un brazo articular básico de dos grados de libertad.

5.6 Recursos

5.6.1 Recursos materiales

- PC, laptop o Tablet con conexión a internet en donde se compartirá la información previamente establecida de acuerdo con los objetivos y se realizarán diferentes actividades con la participación de los estudiantes.

5.6.2 Recursos humanos

- Docente
- Estudiantes

5.6.3 Recursos tecnológicos

Servicio de videotelefonía Google Meet

Servicio de alojamiento de archivos Google Drive

Correo electrónico Yahoo

Aplicación de mensajería WhatsApp

Software Jupyter Notebook al que se pude acceder desde la red, no necesita estar instalado en el equipo.

5.7 Inducción sobre Jupyter Notebook

Previo a la implementación del modelo 3P incorporando el software libre Jupyter se requiere que el estudiante conozca las características propias del mismo, los requisitos para su uso, el lenguaje que se va a utilizar, las herramientas con que cuenta la interfaz y las librerías específicas.

5.7.1 ¿Qué es el proyecto jupyter?

El proyecto Jupyter es en sí una organización sin fines de lucro cuya misión es el desarrollo de software de código abierto, con estándares abiertos y servicios para computación interactiva en varios lenguajes de programación y los Jupyter Notebook constituyen la interfaz cuya característica principal es que permite combinar texto enriquecido con código ejecutable que permite la realización de cálculos y graficación de los mismos. Para efectos del presente trabajo se utiliza lenguaje Python y las diferentes librerías específicas para el cumplimiento de los objetivos planteados.

Jupyter puede ser utilizado en varios sistemas como los son: Windows, Linux, Mac OS e incluso en Android, sin embargo, su mayor fortaleza está en su capacidad de ser utilizado en línea.

5.7.2 Funcionamiento

La interfaz de Jupyter son los Jupyter Notebook cuya principal característica es la de permitir en un mismo documento la convivencia de celdas con texto enriquecido, celdas con código Python que permiten la realización de cálculos y sus gráficas, inserción de imágenes y videos, entre otros.

Vista disponible

La vista del Jupyter Notebook es la de un cuaderno que permite insertar en cada celda código y texto enriquecido e insertar videos, gráficos y multimedia.

Facilidad de ingreso de datos

Jupyter permite trabajar en diferentes celdas independientes en las que se puede ingresar código de acuerdo con el lenguaje utilizado, texto enriquecido en código LaTex o texto plano y multimedia, todo dentro de la misma interfaz.

Recursos de Jupyter

Jupyter cuenta con un recorrido por la interfaz del usuario que permite familiarizarse con la interfaz del notebook y una serie de accesos directos a las ayudas y tutoriales en diferentes temas sobre algunos de los lenguajes y paquetes que se suelen utilizar en los notebooks.

Instalación

La instalación de jupyter no es necesaria, ya que este puede ser ejecutado desde la web, por lo que se comparte con los estudiantes el "PROCESO PARA INICIAR CON EL ESTUDIO DE TRANSFORMACIONES LINEALES INCORPORANDO EL USO DE SOFTWARE LIBRE" (ANEXO D)

Generación de gráficos de Python en Jupyter

En el presente trabajo para la generación de gráficos la secuencia de comandos, guion, o script en inglés sigue los siguientes pasos:

1 Importar la librería de gráficos y datos requerida
2 Definir los datos
3 Convertir los datos a un formato que permita visualizarlos gráficamente de manera fácil
4 Trazar o ¨plotear¨ los datos

Para la conversión de datos nos apoyamos en el archivo de libre acceso plot_helper.py que originalmente se encuentra alojado en la plataforma github al que se la ha realizado las modificaciones necesarias para cumplir con los objetivos planteados y se lo ha compartido por medio de Google Drive.

Las bibliotecas y módulos utilizados principalmente son:

Matplotlib

La biblioteca matplotlib permite generar visualizaciones de Python estáticas, animades e interactivas partiendo de arreglos de datos, también conocidos como vectores, matrices y más específicamente arrays en lenguaje Python (*Matplotlib Documentation — Matplotlib 3.5.1 Documentation*, n.d.)

Matplotlib.pyplot: es el módulo que permite un trazado similar al de MATLAB.(*Matplotlib.Pyplot — Matplotlib 3.5.1 Documentation*, n.d.)

Numpy

Es la biblioteca de que permite crear vectores multidimensionales y que posee un conjunto de funciones matemáticas para operar con ellas (*NumPy Documentation — NumPy v1.22 Manual*, n.d.).

Numpy.linalg: es un módulo de la biblioteca Numpy utilizado para realizar cálculos de álgebra lineal como: inversa de matrices, cálculo de valores propios, cálculo de determinantes, resolución de sistemas lineales, etc.(*Módulo Numpy.Linalg - Programador Clic*, n.d.)

Simpy

Es la biblioteca de Python utilizada para trabajar matemática de forma simbólica.

Sympy.matrices: es el módulo de sympy para crear matrices como objetos y poder trabajarlos como un sistema de álgebra computacional, CAS por sus siglas en inglés(*SymPy*, n.d.).

5.8 Propuesta didáctica Modelo de enseñanza

Para la aplicación del modelo de enseñanza 3P se considera el aprendizaje como consecuencia de lo que hace el estudiante y cuanto ha progresado en su aprendizaje o cuanto le falta para alcanzarlo, por lo que se hace necesaria la inclusión de actividades de aprendizaje adecuadas, que se refuerzan con el uso de software libre matemático que limita la posibilidad de aplicar únicamente la clase magistral.

Para iniciar es necesario determinar la forma y lo que queremos que los estudiantes comprendan y especificar los niveles de comprensión requerida, así como las actividades de aprendizaje adecuadas reforzando el hecho de que lo importante está en la actividad del estudiante y no necesariamente en lo que haga el docente. En este contexto una enseñanza de nivel 3 depende entonces de factores dependientes del estudiante como del contexto, que incluye la responsabilidad del docente, información acerca de sus decisiones y una buena conducción de la clase.

Principio del alineamiento

La característica del modelo 3P es que concibe la enseñanza como un sistema en equilibrio donde todos sus componentes interactúan y se alinean entre sí dejando ver que el fracaso lo puede determinar un desequilibrio que provoca una enseñanza deficiente y un aprendizaje de tipo superficial. Los componentes críticos del sistema de enseñanza son:

- El currículo.
- Los métodos de enseñanza que se utilizan.

- Los procesos de evaluación que se apliquen y los métodos que se utilicen para comunicar los resultados.
- El ambiente creado durante la interacción con los estudiantes
- El ambiente institucional, las normas y la forma de proceder que se debe respetar.

El currículo está establecido dentro de la normativa legal de la institución de educación superior y contiene la malla curricular que, a su vez, para su cumplimiento, está sujeta a lo previsto en el syllabus respectivo de cada asignatura, en el que están establecidos los temas que se deben abordar, la metodología, bibliografía, entre otros aspectos.

Para la presente investigación nos centramos en aquellos componentes que dependen del área docente, es decir, los métodos de enseñanza, los procesos de evaluación y el ambiente creado en la interacción con los estudiantes. La probabilidad de que la enseñanza sea eficaz es directamente proporcional al alineamiento entre aquello que queremos conseguir, cómo compartimos el conocimiento y la forma como realizamos la evaluación. Como ya se había indicado anteriormente se asume el aprendizaje desde el enfoque constructivista ya que el mundo cambiante exige orientar el proceso educativo al logro de competencias.

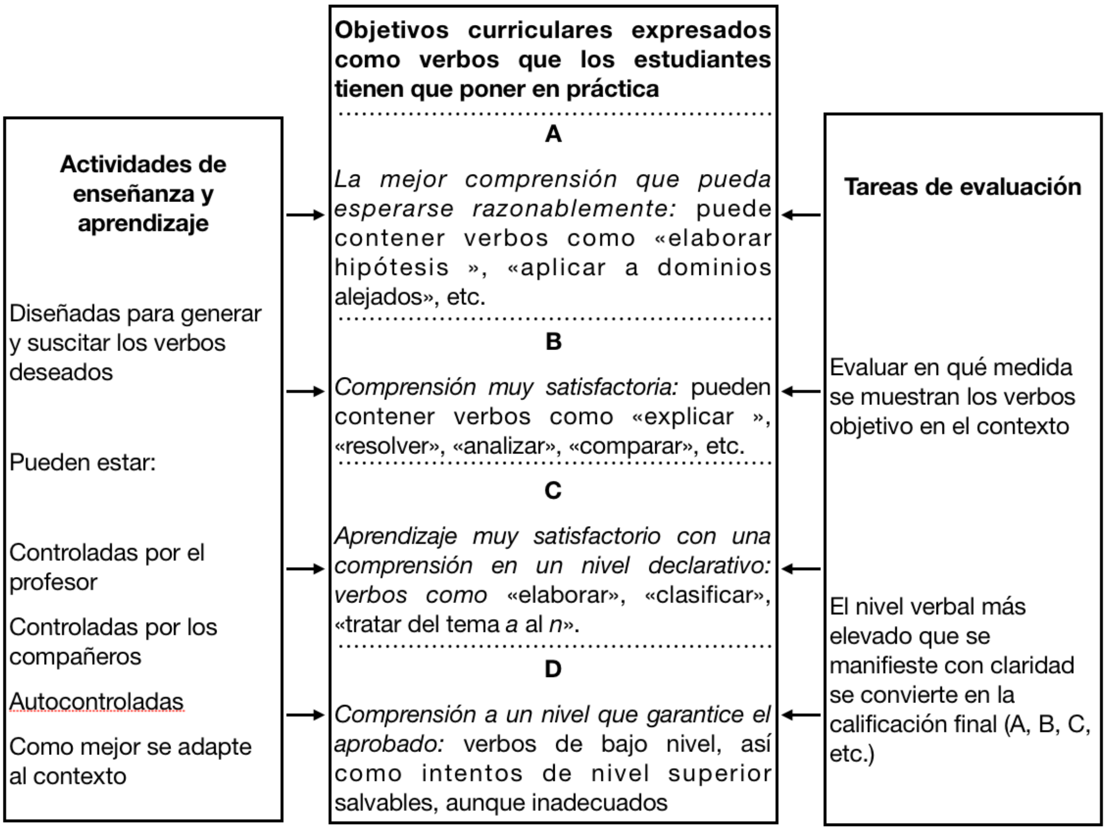


Figura 5-4: Alineación de objetivos, actividades y tareas
Fuente: Biggs, (2006)

Tarea del profesor en un sistema de enseñanza alineado, la labor del profesor consiste en verificar que los verbos:

- Estén nombrados en los objetivos
- Se susciten en las actividades de enseñanza y aprendizaje escogidas
- Estén incluidas en las tareas de evaluación, de tal forma que sea posible juzgar hasta que punto satisfacen los objetivos el nivel de rendimiento del estudiante.

Papel del docente en el proceso

De acuerdo con el modelo planteado el papel del docente en la actualidad es el de ser un moderador que facilite y sea un mediador en el proceso de enseñanza de tal forma que su papel es:

Estimular y aceptar la iniciativa y autonomía del estudiante

Utilizar información de fuentes primarias, recursos materiales físicos, interactivos y que sean manipulables

Utilizar terminología cognitiva de nivel 3 (clasificar, analizar, predecir, crear, inferir, deducir, elaborar, pensar, etc.)

Permitir que el estudiante sea partícipe de su aprendizaje pudiendo cambiar de estrategias e incluso cuestione los contenidos.

Fomentar el trabajo colaborativo entre los estudiantes, los estudiantes y el docente.

Estimular el interés y la motivación intrínseca de los estudiantes

Insistir en que el estudiante repiense, elabore y complemente su respuesta inicial.

Crear situaciones y experiencias que estimulen su pensamiento reflexivo

Estrategia

Antes

Preparación del estudiante acerca de ¿qué y de qué manera va a aprender?

Contextualizar aquello que va a aprender mediante una visión general de lo que se va a tratar.

Informar al estudiante acerca de los objetivos que busca alcanzar el proceso de enseñanza

Durante

Las actividades están dirigidas a apoyar al cumplimiento del currículo y:

Permiten la organización y estructuración de los contenidos

Se realizarán actividades que permitan alcanzar el aprendizaje deseado.

Después

Culminar el proceso mediante una integración de todas las actividades

Valorar el propio aprendizaje

Desarrollo mediante actividades

Tabla 30-3. Procesos cognitivos y estrategias

Proceso cognitivo en el que incide la estrategia	**Tipos de estrategia de enseñanza**
Generación de expectativas apropiadas	Objetivos
Activación de conocimientos previos	Situaciones que activan o generan información previa (actividad focal introductoria, discusiones guiadas, etc.)
Orientar y guiar la atención y el aprendizaje	Señalizaciones Preguntas insertadas
Mejorar la codificación de la nueva información	Ilustraciones Gráficas Preguntas insertadas
Promover organización global más adecuada a la información nueva a aprender	Resúmenes Mapas y redes conceptuales Organizadores gráficos Organizadores textuales Infografías
Para potenciar y explicitar el enlace entre conocimientos previos y la información nueva por aprender	Analogías Aprendizaje basado en problemas Informes Estudios de caso Artículos Trabajo cooperativo y colaborativo

Realizado por: Cuenca, Carlos, 2022

La estrategia aplicad al grupo experimental se describe en el plan de clase del ANEXO F, procurando mantener en todo el proceso el alineamiento constructivo y finalmente realizando evaluaciones: formativa, para proveer retroalimentación al docente y al estudiante, y, sumativa para cuantificar la efectividad del proceso.

CONCLUSIONES

Luego de culminar el trabajo de investigación se han obtenido las siguientes conclusiones:

- El diseño de la presente investigación basada en los objetivos propuestos permite la aplicación del modelo 3P desde la perspectiva constructivista incorporando software libre para la enseñanza aprendizaje de transformaciones lineales.
- El diagnostico de las causas que dificultan el proceso de enseñanza aprendizaje mediante las técnicas e instrumentos utilizados permite conocer la realidad del estudiante respecto de sus conocimientos previos, conocimiento de software libre y con eso facilitar la creación de ambientes favorables al desarrollo y aplicación del modelo3P.
- Se ha demostrado que la aplicación del modelo 3P mediante el alineamiento constructivo centrado en el estudiante es una opción válida para el nivel universitario pudiendo evidenciar en el proceso estudiantes involucrados en las actividades de clase y evaluación diseñadas por el docente, y complementadas haciendo uso del software jupyter en base a los objetivos propuestos.
- Jupyter Notebook que, según la encuesta aplicada a los estudiantes, era desconocida fue bien recibida y aceptada por los estudiantes ya que esta permitió confirmar los resultados obtenidos mediante cálculo manual, obtener visualizaciones geométricas dinámicas, así como la generación de nuevos ejemplos y la construcción de un documento interactivo que puede ser complementado conforme a la necesidad del usuario dejando la opción de utilizar jupyter en otras asignaturas.
- La implementación del modelo de enseñanza 3P permitió obtener un impacto positivo en el rendimiento académico de los estudiantes obteniendo el grupo experimental mejor promedio en la prueba objetiva aplicada con respecto al grupo control ($6,611>5,573$) y el uso jupyter despertó la atención e interés de los estudiantes produciendo sentimiento de satisfacción que puede traducirse en motivación intrínseca.
- Mediante la aplicación de la prueba objetiva los grupos de control y experimental se validó la efectividad de la propuesta didáctica pudiendo comprobar mediante la prueba t la hipótesis de que la implementación del modelo 3P de enseñanza aprendizaje de Biggs incorporando software libre jupyter permite mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales habiéndose obtenido un valor calculado de $t=2.54>2.021$.

RECOMENDACIONES

Se recomienda:

- Analizar la metodología didáctica del cumplimiento microcurricular de la asignatura en función del auge o desarrollo de los lenguajes de programación propios de la ingeniería.
- Incorporar el uso de software libre ya que este tipo de software es el más utilizado en grandes universidades permitiéndoles a los estudiantes posicionarse en la vanguardia del desarrollo de la ciencia y la tecnología por lo que debe ser contemplado dentro de los contenidos curriculares.
- Establecer programas de Investigación para medir de forma más amplia la incidencia que tiene el aprendizaje significativo de transformaciones lineales que forman parte de las ciencias básicas en la adquisición de nuevos conocimientos especialmente en asignaturas de formación profesional.
- Se debe incorporar en el proceso de enseñanza aprendizaje a nivel universitario marcos teóricos didácticos que garanticen ambientes de aprendizaje dinámicos, participativos, de interrelación propiciando espacios académicos para la modelación matemática y simulación numérica, aspectos que no se desarrollan en los contenidos del primer nivel.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, M. V. S., & Vallelado, E. (2013). Algunas dimensiones relacionadas con el rendimiento académico de estudiantes de administración y dirección de empresas. *Universitas Psychologica*, *12*(3), 739–752. https://doi.org/10.11144/Javeriana.UPSY12-3.adrr

Anton, H., & Rorres, C. (2013). *Introducción al álgebra lineal* (Quinta edi). LYMUSA WILEY.

Arteaga, B., & Macías, J. (2016). Didáctica de las matemáticas en educación infantil. In *Ensayos: Revista de la Facultad de Educación de Albacete* (Primera, Issue 8). Universidad Internacional de la Rioja, S. A.

Axler, S. (1996). Linear algebra done right. In *Choice Reviews Online* (Vol. 33, Issue 11). https://doi.org/10.5860/choice.33-6354

Becerra, F., Castillo, A., Hernandez, A., & Mata, O. (2017). Teoría de Espacios Vectoriales. *Book*.

Biggs, J. (2006). *Calidad Del Aprendizaje Universitaria* (Segunda). NARCEA, S.A. DE EDICIONES.

Calleja Sopeña, J. Á., Page, M. Á., Bueno Monrea, M. J., Jiménez Suarez, S., Victoria, J., Echeverría Cubillas, M. J., García López, M. del C., Gaviria Soto, J. L., Gómez Bueno, C., Sánchez Ruíz, A., López Pérez, B., Javato, L., Mínguez, A. L., & Trillo Marco, C. (1990). *Hacia un modelo casual del rendimiento academico* (C. de I. y D. E. Ministerio de Educación Cultura y Deporte, Ed.).

Cartuche, N., Tusa, M., Agüinsaca, J., Merino, W., & Tene, W. (2015). El modelo pedagogico en la practica docente de las universidades publicas del pais. *Repositorio Digital: Universidad Politécnica Salesiana*.

Costa, V., Rossignoli, R., Sorichetti, C., & Vampa, V. (2018). *Algebra Lineal con Aplicaciones Libros de Cátedra Parte I* (Primera). EDULP. https://doi.org/https://doi.org/10.35537/10915/66828

Cueva, R., Navas, F., & José, T. (2009). *Álgebra Lineal* (F. Barba & T. Juan, Eds.).

Díaz, E., & Cabrera, E. (2018). *Manual de uso de Jupyter Notebook para aplicaciones docentes [Manuscrito no publicado]*.

Eley, M. G. (1992). *Differential adoption of study approaches within individual students** (Vol. 23, Issue 9). Kluwer Academic Publishers.

Grossman, S., & Flores, J. (2012). *ÁLGEBRA LINEAL* (S. A. D. C. V. McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, Ed.; Séptima ed).

Hernández, L., & Barraza, A. (2013). *RENDIMIENTO ACADÉMICO Y AUTOEFICACIA PERCIBIDA. UN ESTUDIO DE CASO* (1st ed.). Instituto Universitario Anglo Español.

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level* (pp. 191–207). Kluwer Academic Publishers.

Kolman, B., & Hill, D. R. (2006). *Álgebra lineal*.

Kuttler, K. (2012). *Elementary linear algebra*. The Saylor Fundation 2012. https://doi.org/10.1016/0955-7997(92)90033-4

Lamas A, H. (2014). Sobre el rendimiento escolar. *Group Work with Children and Adolescents: Prevention and Intervention in School and Community Systems*, *3*(1), 141–160.

López, J., Fraga, E., & Cordovés, M. (2019). Consideraciones para la enseñanza del tema “ aplicaciones lineales y la diagonalizacion de endomorfismos ” en la formación del ingeniero en los planes de estudio E Teaching of the topic lineal " applications and diagonalizacion de endomorfismos " in the e. *Referencia Pedagógica*, *7*(2), 378–391.

Martinez, V., & Pérez, O. (1997). *Los adolescentes ante el estudio: causas y consecuencias del rendimiento* (Primera). EDITORIAL FUNDAMENTOS.

Marton, F., & Säljö, R. (1976). On qualitative differences in learning : i-outcome and process*. *British Journal of Educational*, *46*(1), 4–11. https://doi.org/MARTON, F., & SÄLJÖ, R. (1976). ON QUALITATIVE DIFFERENCES IN LEARNING: I-OUTCOME AND PROCESS*. British Journal of Educational Psychology, 46(1), 4–11. doi:10.1111/j.2044-8279.1976.tb02980.x

Muente, G. (2019). *Software educativo: el uso de la tecnología en favor del aprendizaje*. https://rockcontent.com/es/blog/software-educativo/

Navarrete, Z. & Rojas, I. (2018). *Tecnologías de la Información y la Comunicación en Educación Superior. Políticas y usos didácticos*.

Navarro, R. E. (2003). EL RENDIMIENTO ACADÉMICO: CONCEPTO, INVESTIGACIÓN Y DESARROLLO. *REICE - Revista Electrónica Iberoamericana Sobre Calidad, Eficacia y Cambio En Educación*, *1*(2), 1–15.

Nuñez, J., & Sandoval, I. (2015). *Álgebra Lineal* (Primera). Escuela Politécnica Nacional.

Oualline, S., & Oualline, G. (2018). *No TitlePractical Free Alternatives to Commercial Software*. Apress.

Palomino, J. A. (2017). *Transformaciones lineales con Geogebra, una propuesta para profesores en formación continua*. 151.

Pérez, A., Juan, R., & José, S. (2000). *Análisis exploratorio de las variables que condicionan el rendimiento académico*.

Project Jupyter | About Us. (n.d.). Retrieved June 19, 2021, from https://jupyter.org/about

Reinozo, M., Guzmán, E., Barboza, Z., & Benavidez, S. (2011). Análisis de factores que influyen en el rendimiento estudiantil Escuela Básica de Ingeniería, Universidad de Los Andes. *Ciencia e Ingeniería*, *32*(1), 79–90.

Sanchez, J. (2013). *MAESTRÍA EN DOCENCIA MATEMÁTICA TEMA : USO DE LAS TICS (SCILAB Y WIRIS) Y SU*.

Sánchez, J. J. M., & Pina, F. H. (2011). Influencia de la motivación en el rendimiento académico de los estudiantes de formación profesional. *Redalyc.Org*, *14*, 81–100.

Sánchez, S. (2013). CALIDAD DE APRENDIZAJE UNIVERSITARIO. *SUPLEMENTO ACDÉMICO*, 4.

Savov, I. (2016). *NO BULLSHIT GUIDE TO LINEAR ALGEBRA*. MINIREFERENCE Co.

Sbitneva, L., Moreno, N., Serna, L., & Valdez, R. (2018). VISUALIZACIÓN DE TRANSFORMACIONES LINEALES CON APOYO DE GEOGEBRA. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *31*(2), 1843–1852.

Sierpinska, A. (2000). ON SOME ASPECTS OF STUDENTS' THINKING IN LINEAR ALGEBRA. In J.-L. Dorier (Ed.), *ON THE TEACHING OF LINEAR ALGEBRA* (pp. 209–246).

Tejedor, F., & García, A. (2007). Causas del bajo rendimiento del estudiante universitario (en opinión de los profesores y alumnos): propuestas de mejora en el marco del EEES. *Revista de Educación*, *342*, 419–442.

The Free Software Definition - Free Software Foundation. (n.d.). Retrieved June 20, 2021, from https://web.archive.org/web/20090831122839/http://www.fsf.org/licensing/essays/free-sw.html

York, T. T., Gibson, C., & Rankin, S. (2015). Defining and measuring academic success. *Practical Assessment, Research and Evaluation*, *20*(5), 1–20.

ANEXOS

ANEXO A

VALIDACIÓN DE ENCUESTA POR EXPERTOS

Titulo

Implementación de un Modelo de Enseñanza Aprendizaje Incorporando Software Libre para Mejorar el Rendimiento Académico en Transformaciones Lineales de Estudiantes de Primer Nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas.

Formulación del problema

¿Un Modelo de Enseñanza - Aprendizaje de Transformaciones Lineales incorporando Software Libre permite mejorar la comprensión y el rendimiento académico de los estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas?

Objetivos

Objetivo general

Implementar un modelo de enseñanza aprendizaje incorporando software libre para mejorar el rendimiento académico en transformaciones lineales de estudiantes de primer nivel de la Universidad de las Fuerzas Armadas

Objetivos específicos

1. Diagnosticar las posibles causas que dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones lineales.
2. Adoptar un modelo de enseñanza aplicable al nivel universitario que permita incorporar software libre y presente la enseñanza como un sistema interactivo que equilibre los factores que dependen del estudiante y del contexto con las actividades centradas en el aprendizaje y los resultados que se requieran obtener del proceso.
3. Desarrollar herramientas interactivas de apoyo, basadas en software libre, que permitan visualizar, dinamizar, y comprender las transformaciones lineales en R^2 y R^3 para generalizar el concepto a R^n.
4. Implementar y validar el modelo de enseñanza aprendizaje propuesto, mediante un trabajo colaborativo para verificar su impacto positivo en el rendimiento académico.

Formato

Encuesta (prueba objetiva y cuestionario) para Evaluación Diagnóstica de Transformaciones Lineales, Dificultades para el Aprendizaje y Características para Software Libre Matemático.

En el formato adjunto sirve para evaluar la encuesta con la finalidad de validarlo.

De entre las 5 opciones se le solicita marcar con una X la respuesta escogida de acuerdo al siguiente detalle:

5 = Totalmente de acuerdo

4 = De acuerdo

3 = Ni de acuerdo ni en desacuerdo

2 = En desacuerdo

1 = Totalmente en desacuerdo

VALIDACIÓN POR JUECES EXPERTOS DE LA ENCUESTA PARA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA DE TRANSFORMACIONES LINEALES, DIFICULTADES PARA EL APRENDIZAJE Y CARACTERÍSTICAS PARA SOFTWARE LIBRE MATEMÁTICO

Objetivos de la investigación:
1. Diagnosticar las posibles causas que dificultan el proceso de enseñanza-aprendizaje de las transformaciones lineales.
2. Adoptar un modelo de enseñanza-aprendizaje aplicable al nivel universitario que permita incorporar software libre y presente la enseñanza como un sistema interactivo que equilibre las actividades de enseñanza y aprendizaje, los objetivos curriculares y tareas de evaluación.
3. Desarrollar herramientas interactivas de apoyo basadas en software libre, que permitan visualizar, dinamizar, y comprender las transformaciones lineales en R^2 y R^3 para generalizar el concepto a R^n.
4. Implementar y validar el modelo de enseñanza aprendizaje propuesto, mediante un trabajo colaborativo para verificar su impacto positivo en el rendimiento académico.

ITEM	CRITERIOS A EVALUAR																				Observaciones (considerar si debe eliminarse o modificarse, favor especificar)
	ADECUACIÓN (Formulación adecuada a los destinatarios a evaluar)															PERTINENCIA					
	Claridad en la redacción y lenguaje adecuado al nivel del informante					Opciones de respuesta adecuadas					Opciones de respuesta en orden lógico					Pertinencia al logro de los objetivos específicos					
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	
1																					
2																					
3																					
4																					
5																					
6																					
7																					
8																					
9																					
10																					
11																					
12																					
13																					
14																					
15																					
16																					
17																					
18																					

19																					
20																					
21																					

ASPECTOS GENERALES	**SI**	**NO**	
El instrumento contiene instrucciones claras y precisas para responder la encuesta			
La secuencia de los ítems es adecuada			
El número de items es suficiente			

EVALUACIÓN GENERAL DE LA ENCUESTA				
	Excelente	**Buena**	**Regular**	**Deficiente**
Validez del contenido de la encuesta				

Identificación del experto		
Validado por:	C.I:	Fecha:
Firma:	Teléfono:	E-mail:

ANEXO B

ENCUESTA PARA EVALUACIÓN DIAGNÓSTICA DE TRANSFORMACIONES LINEALES, DIFICULTADES PARA EL APRENDIZAJE Y CARACTERÍSTICAS PARA SOFTWARE LIBRE MATEMÁTICO

OBJETIVO: Obtener datos, que permitan identificar las posibles falencias y dificultades en el aprendizaje de las transformaciones lineales y como insumo para diseñar estrategias didácticas que permitan enfocar la práctica docente acorde a la realidad del grupo.

INDICACIONES:
Estimado/a estudiante:
La presente es una evaluación diagnóstica, por lo que su realización es de forma autónoma y debe ser contestada de acuerdo a los conocimientos que usted posee al momento de realizar la misma.
Consta de tres partes:
- La primera es una prueba objetiva que permitirá conocer y diagnosticar el estado actual de conocimientos del encuestado
- La segunda es un cuestionario para conocer las dificultades en el aprendizaje de transformaciones lineales
- La tercera parte es un cuestionario para establecer las características para software libre matemático

El tiempo para realización de la encuesta (prueba objetiva y cuestionario) es de 120 minutos

*Obligatorio

Diagnóstico

Este apartado corresponde a una prueba objetiva para conocer y diagnosticar el estado actual de conocimientos que usted posee al momento.

1. ¿La transformación l(x)=mx+b, para todo b diferente de 0, es una transformación? * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- ⬭ Lineal
- ⬭ Afín

2. La expresión indicada, donde a, b, c pertenecen al conjunto de los números reales diferentes de cero y x1, x2, x3 son variables es: * 1 punto

$$\frac{1}{a}x_1 + b^6 x_2 + \sqrt{c}x_3$$

Marca solo un óvalo.

- Lineal
- No lineal

3. Una transformación T:V→W es lineal si para los vectores u y v de V y para cualquier par de escalares α y ß se cumple * 1 punto

Marca solo un óvalo.

$$T(u+v) = T(u) + T(v)$$

- Opción 1

$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

- Opción 2

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v)$$

- Opción 3

$$T(u+v) = \alpha T(u) + T(v)$$

- Opción 4

4. Si T:V →W es una transformación lineal de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W. En el caso especial que V=W, la transformación lineal T: V→V se denomina? * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- Aplicación lineal sobre V
- Mapeo sobre V
- Forma lineal sobre V
- Operador lineal sobre V

5. La aplicación consecutiva, (composición) de dos transformaciones lineales S y T bien definidas sobre un vector v corresponde al producto matricial SoT(v)=S(T(v))=MSMTv suceden en el siguiente orden. * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- Primero S y luego T
- Primero T y luego S

6. Sea la función f que pertenece al conjunto de todas las transformaciones lineales de R3 en R2, L(R3,R2), definida por f(x,y,z)=(x+z,y-2z). La matriz asociada a f respecto de las bases canónicas de R3 y R2 respectivamente es: * — 1 punto

Marca solo un óvalo.

$$A = [f]_{c_2}^{c_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Opción 1

$$A = [f]_{c_2}^{c_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Opción 2

7. El kernel de una transformación lineal T:V→W es el conjunto de todos los vectores v del dominio para los cuales T(v)=0 * — 1 punto

Marca solo un óvalo.

- Verdadero
- Falso

8. Sea una transformación lineal T:R4→R3 definida por: T(w,x,y,z)=(w+2x+3y+z, w+3x+5y-2z, 3w+8x+13y-3z). El núcleo de la transformación es: * — 1 punto

Marca solo un óvalo.

- N(T)=(y-7z,-2y+3z,y,z)
- N(T)=(y+7z,2y+3z,y,z)
- N(T)=(y+7z,2y-3z,y,z)

9. Sea una transformación lineal T:R4→R3 definida por: T(w,x,y,z)=(w+2x+3y+z, w+3x+5y-2z, 3w+8x+13y-3z). El recorrido de la transformación es: * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- Im(T)={(r, s, r+2s)| r, s pertenece a los reales}
- Im(T)={(r+2s, s, r)| r, s pertenece a los reales}
- Im(T)={(r, s, r+s)| r, s pertenece a los reales}

10. El espacio imagen de una transformación lineal T:V→ W es un subespacio del espacio vectorial V * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- Verdadero
- Falso

11. La nulidad y el rango de una transformación lineal son, respectivamente, las dimensiones de su kernel e imagen * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- Verdadero
- Falso

12. Dos espacios vectoriales V y W son isomorfos si existe un isomorfismo T de V sobre W. En este caso se escribe V≡W * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- Verdadero
- Falso

13. Sea la función f que pertenece al conjunto de todas las transformaciones lineales de V en W, L(V,W), con V un espacio de dimensión finita, entonces: dim(V)=dim(N(f))+dim(Im(f)) * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- Verdadero
- Falso

14. Dada la transformación f(x,y,z)=(2x-z, x+1+z). Determine si la transformación es lineal o no es lineal * 1 punto

Marca solo un óvalo.

- La transformación es lineal
- La transformación no es lineal

15. Del gráfico: el vector en la base canónica, el vector transformado y la base del vector transformado respectivamente son: * 1 punto

Marca solo un óvalo.

$v = (2,3) \rightarrow (2,3)_T = (\frac{5}{2}, \frac{1}{2}) \quad y \quad T = \{(1,1),(-1,1)\}$

- Opción 1

$v = (2,3) \rightarrow (2,3)_T = (\frac{4}{2}, \frac{6}{2}) \quad y \quad T = \{(-1,1),(1,1)\}$

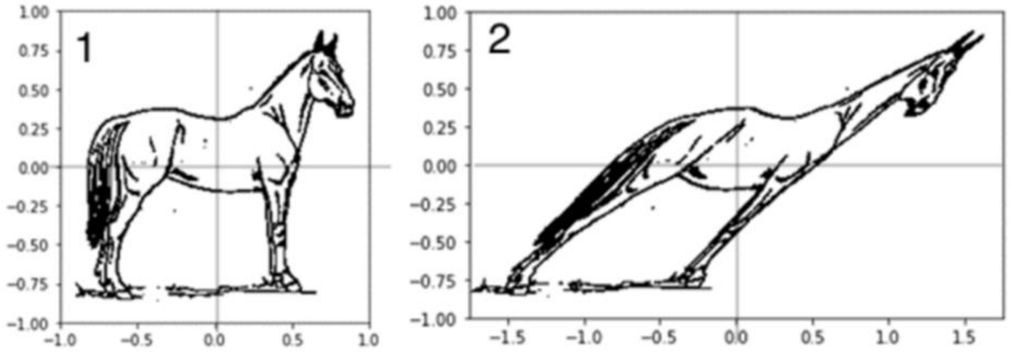
- Opción 2

$v = (2,3) \rightarrow (2,3)_T = (\frac{1}{2}, \frac{5}{2}) \quad y \quad T = \{(1,1),(-1,1)\}$

- Opción 3

16. Considerando que la imagen del gráfico ha sido vectorizada y que 1 es la imagen original y 2 es la imagen transformada. La matriz de transformación es? *

1 punto



Marca solo un óvalo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opción 1

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Opción 2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opción 3

17. La matriz homogénea de la imagen sirve para indicar la posición de un brazo robótico. Está compuesta de: * 1 punto

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Marca solo un óvalo.

- 2 submatrices: de proyección (4x3) y de rotación (4x1)
- 2 submatrices: de rotación(4x3) , de traslación (4x1)
- 4 submatrices: rotación(3x3), traslación (3x1), proyección (1x3) y escalar (1x1)
- 4 submatrices: proyección (3x3), traslación (3x1), rotación (1x3) y escalar (1x1)

Cuestionario

Este apartado permitirá conocer las dificultades para el aprendizaje de las transformaciones lineales

18. El tema que más ha dificultado su comprensión del álgebra lineal es: Puede escoger más de una opción *

Selecciona todas las opciones que correspondan.

- [ ] Vectores, sus propiedades y operaciones en el espacio bidimensional y tridimensional
- [ ] Sistemas de ecuaciones lineales y matrices, sus propiedades y operaciones
- [ ] Espacios vectoriales euclidianos y generales
- [ ] Transformaciones lineales

19. De los siguientes aspectos ¿Cuáles considera usted que deben reforzarse para mejorar el aprendizaje de las transformaciones lineales? Puede escoger más de una opción *

Selecciona todas las opciones que correspondan.

- [ ] Las representaciones semióticas (construcciones de sistemas de expresión y representación que pueden incluir diferentes sistemas de escritura como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, diagramas, esquemas, etc.)
- [ ] La articulación de los lenguajes aritmético, algebraico y geométrico en el proceso de enseñanza aprendizaje
- [ ] La inclusión de software libre matemático en el proceso de enseñanza aprendizaje
- [ ] La bibliografía
- [ ] Las posibles aplicaciones de los contenidos aprendidos
- [ ] La conexión entre los contenidos de estudio
- [ ] El equilibrio entre los objetivos de aprendizaje con la metodología de enseñanza, las actividades de los estudiantes y las tareas de evaluación de tal forma que se logre obtener un aprendizaje profundo.

Cuestionario

Cuestionario para establecer las características principales que se valoran para el uso de un software matemático

20. ¿Qué características considera usted que son las más importantes para escoger un software libre matemático? Puede escoger más de una opción *

Selecciona todas las opciones que correspondan.

- [ ] Costo
- [ ] Facilidad de uso
- [ ] Posibilidad de uso en la web sin necesidad de instalarlo
- [ ] Posibilidad de soportar: cálculos, la introducción de texto enriquecido, la realización de gráficos, inserción de imágenes y multimedia en una misma interfaz
- [ ] Facilidad de instalación

21. ¿Está usted familiarizado con el uso de software libre matemático para el estudio de las ciencias exactas? Escriba el nombre del software? *

Google no creó ni aprobó este contenido.

Google Formularios

ANEXO C

ENCUESTA PARA DETERMINAR EL NIVEL DE SATISFACCIÓN CON EL USO DE SOFTWARE LIBRE MATEMÁTICO EN EL APRENDIZAJE DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

OBJETIVO: Obtener datos, que permitan medir el nivel de conformidad del estudiante respecto al uso y aprovechamiento para el aprendizaje del tema transformaciones lineales con el software jupyter notebook.

INDICACIONES:
El presente es un cuestionario para medir la conformidad con el uso del jupyter notebook en el aprendizaje de transformaciones lineales, por lo que su realización es de forma autónoma y debe ser contestada de acuerdo su criterio personal.

El tiempo para realización del cuestionario es de 30 minutos

Preguntas para medir la conformidad con el uso del software libre matemático

1. El modelo de enseñanza que incorpora el uso de software libre matemático ha despertado mi interés y ha logrado que me motive a aprender transformaciones lineales.

   Marca solo un óvalo.

   - Totalmente de acuerdo
   - De acuerdo
   - Ni de acuerdo ni en desacuerdo
   - En desacuerdo
   - Totalmente en desacuerdo

2. El uso del software libre matemático me ha permitido articular en una sola interfaz los lenguajes aritmético, algebraico y geométrico, facilitando el aprendizaje de las transformaciones lineales.

Marca solo un óvalo.

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

3. La incorporación de software libre matemático en el proceso de aprendizaje de transformaciones lineales me permite reflexionar acerca del significado, interpretación geométrica y forma de resolver los problemas planteados acerca de transformaciones lineales

Marca solo un óvalo.

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

4. El modelo de enseñanza aprendizaje que incorpora software libre ha contribuido a la obtención de aprendizaje profundo y por lo tanto a elevar mi rendimiento académico en transformaciones lineales.

Marca solo un óvalo.

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

5. La interfaz del software libre matemático me permite ampliar y complementar la información entregada por el docente acerca de transformaciones lineales y experimentar con nuevos ejercicios de acuerdo con mis propias inquietudes e intereses.

Marca solo un óvalo.

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

6. El contenido compartido por medio del software libre matemático es actualizado, se encuentra vigente y lo utilizaría incluso luego de finalizar el curso.

Marca solo un óvalo.

- Totalmente de acuerdo
- De acuerdo
- Ni de acuerdo ni en desacuerdo
- En desacuerdo
- Totalmente en desacuerdo

ANEXO D

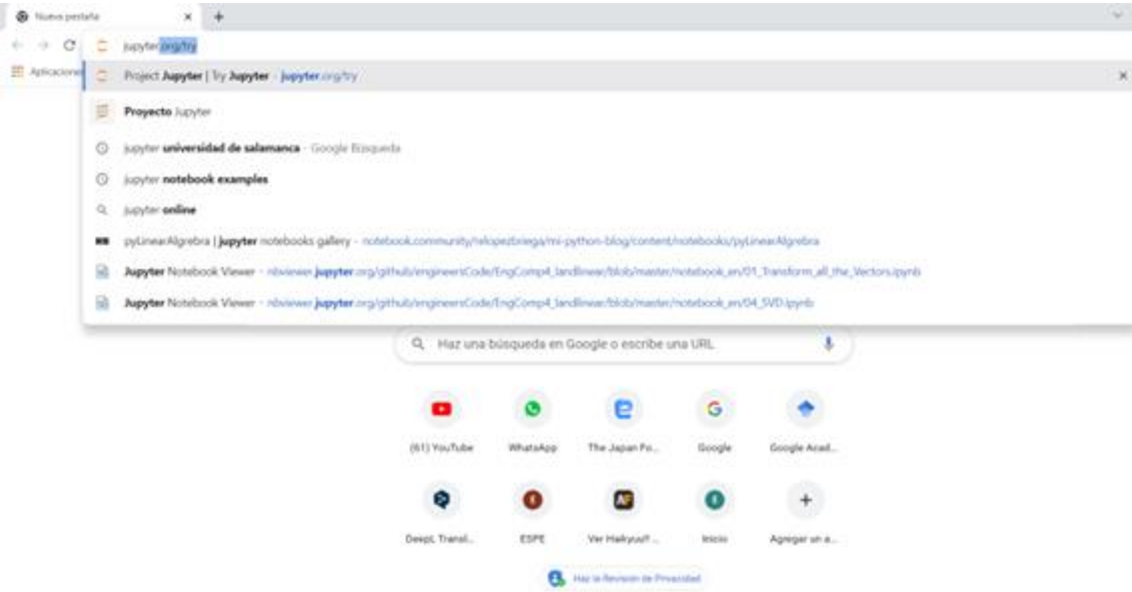
PROCESO PARA INICIAR CON EL ESTUDIO DE TRANSFORMACIONES LINEALES INCORPORANDO EL USO DE SOFTWARE LIBRE

De el link:

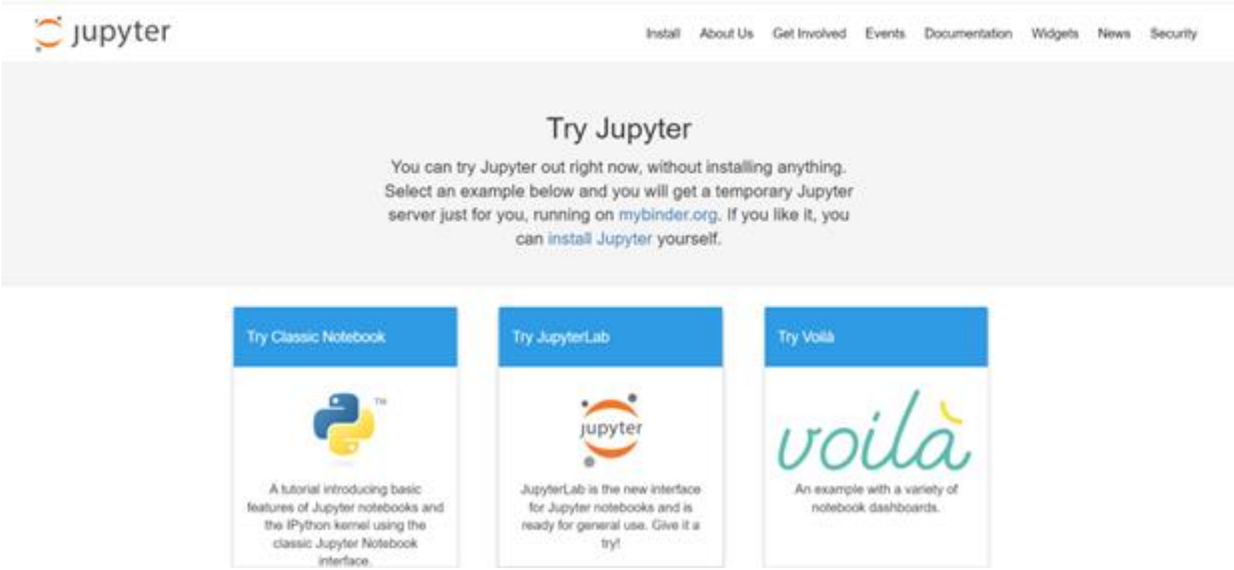
https://drive.google.com/drive/folders/11v8FXDcZw71mxh-bu9MD14Nxf07T6F8G?usp=sharing

Descargar toda la carpeta y guardarla en su equipo.

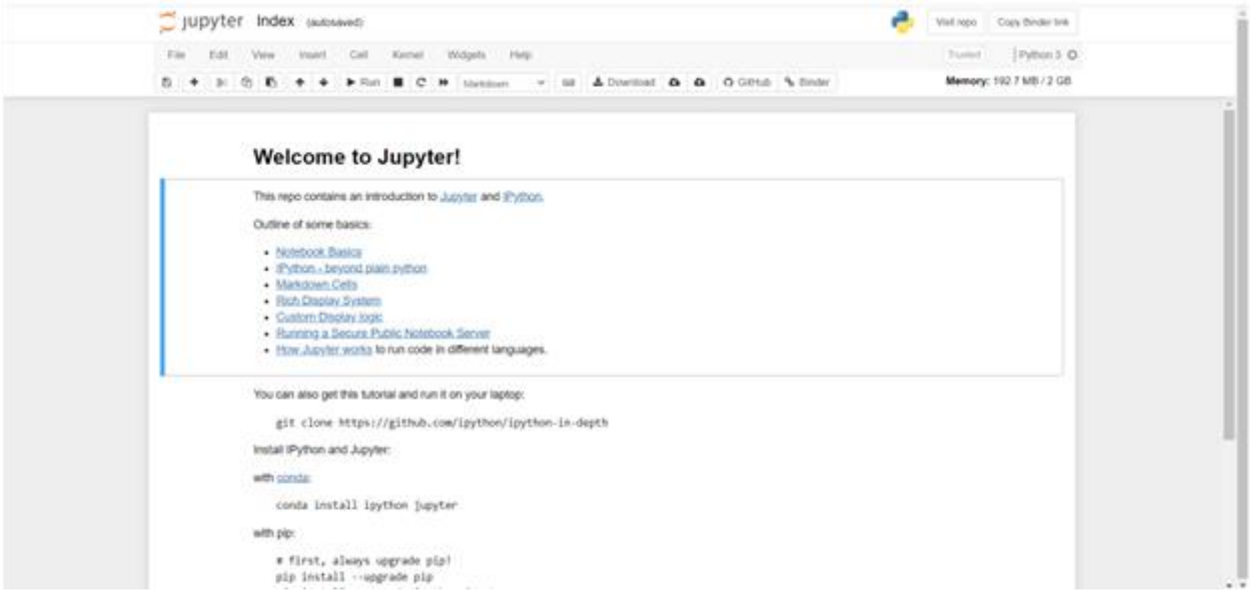
En el navegador de su preferencia digite "jupyter.org"



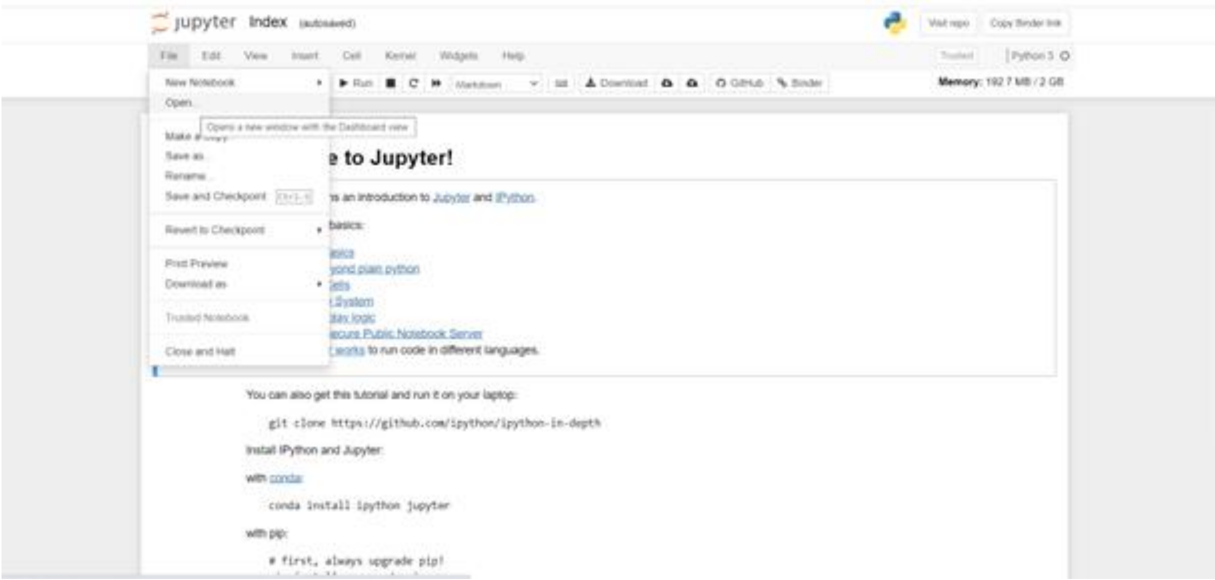
En la página de Jupyter dar click al recuadro "Try Classic Notebook"



Se desplegará la siguiente ventana:

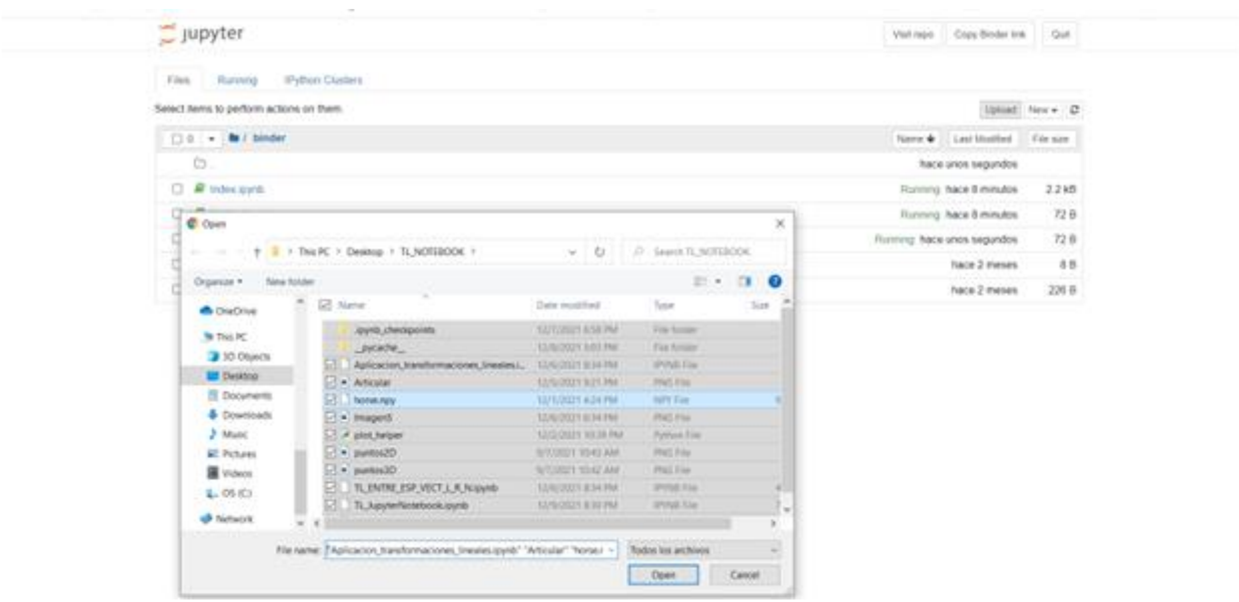


En la pestaña “file” seleccionar “open…”

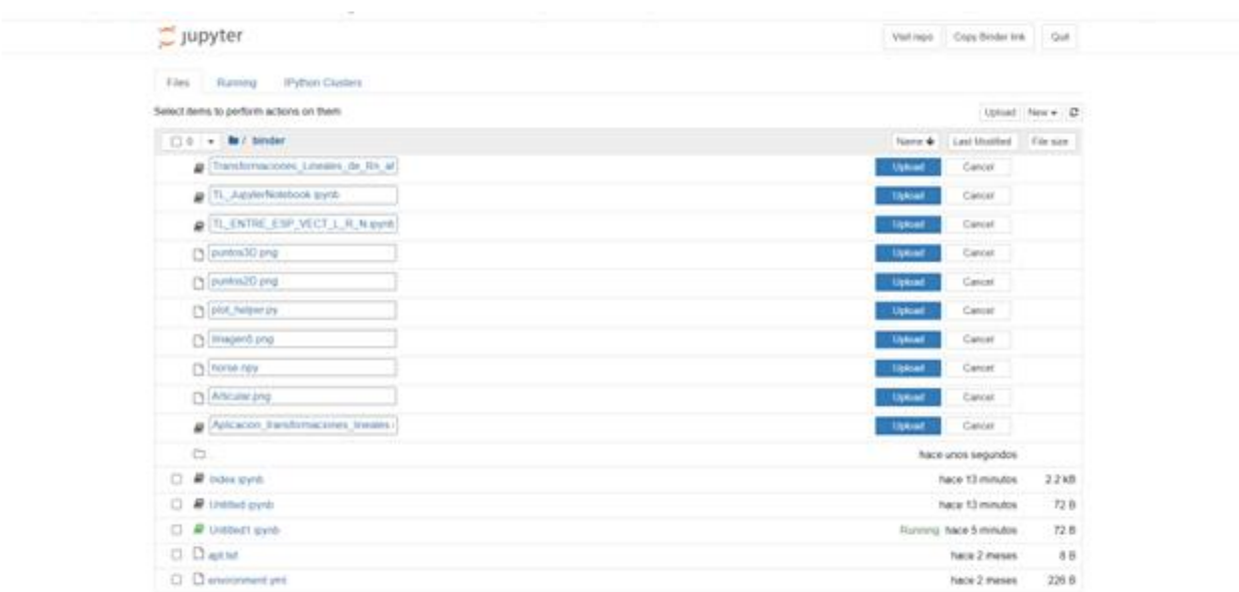


Dar click en “upload”

Seleccionar la carpeta descargada y abrir todos los archivos



Dar click en “Upload” a todos los archivos



¡¡¡Y listo!!!

Podemos iniciar nuestro estudio de transformaciones lineales incorporando el uso de software libre.

Para unirte al aula virtual debes ingresar al siguiente link:

http://meet.google.com/pti-dcda-dhu

O marca: (US) +1 929-260-4716

PIN: 636 779 074#

ANEXO E

ESTUDIO DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES INCORPORANDO SOFTWARE LIBRE

July 1, 2022

Para trabajar en jupyter notebook es necesario importar las librerías (import ...) y las funciones especificas requeridas de acuerdo a la necesidad (from ... import ...). Las librerías en lenguaje de programación corresponden a una recopilación de códigos escritos con anterioridad que permiten al usuario optimizar diferentes tareas.

[2]:
```
import numpy as np# Numpy es librería vectores multidimensionales que posee␣
↪funciones matemáticas para operar con ellos
from numpy.linalg import inv #función de Numpy para cálculos de Álgebra Lineal
%matplotlib inline
import matplotlib as mp # Matplotlib es librería que permite generar␣
↪visualizaciones estáticas, animades e interactivas
from matplotlib import pyplot # Permite trazado similar a MATLAB
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D # Permite generar gráficos 3D
from matplotlib import cm #Permite manejo de mapas de color
import matplotlib.pyplot as plt#Permite a matplotlib tranajar como MATLAB
import plot_helper # Plot_helper permite generar visualizaciones de vectores␣
↪específicos para transformaciones lineales
from plot_helper import * # Función específica para para Álgebra Lineal
#import numpy as np
from sympy.matrices import Matrix
```

1 Álgebra lineal

Álgebra Lineal (AL) es una de las más útiles asignaturas de pregrado y que todos necesitamos saber en la actualidad. Su importancia radica en la aplicabilidad a la física, computación, estadística, machine learning, y otras áreas de la ciencia.
Muchos conceptos, aparentemente sin conexión entre sí, son abordados en el desarrollo de la asignatura, sin embargo, el aprendizaje de estos conceptos adquiere sentido en el tratamiento de las transformaciones lineales, uno de estos conceptos es el de vector y su generalización.
Con el álgebra lineal seremos capaces de modelar las relaciones complejas que existen entre entradas multivariables y salidas multivariables(Savov, 016)

1.1 Vectores

Existen tres diferentes ideas acerca de los vectores:
- La de los físicos, que consideran al vector como una flecha que tiene longitud, dirección y sentido,

pudiendo representar cantidades direccionales de fuerza, aceleración, velocidad.
- Para los científicos informáticos que consideran a los vectores como listas ordenadas de números que pueden representar conjuntos de variables o características guardadas en un determinado orden.
- Los matemáticos conciben a los vectores como **objetos** genéricos que tienen cierto comportamiento cuando son sumados o escalados.

Inicialmente los vectores se entienden como puntos o flechas en los espacios bidimensionales (pares ordenados), tridimensionales (ternas ordenadas) y n-dimensionales (n-tuplas), luego se generaliza el término vector a objetos matemáticos que cumplen un determinado conjunto de axiomas, extendiendo de esta manera su representación geométrica a los nuevos objetos matemáticos basados en las propiedades de los vectores en R^2 (espacio bidimensional) y R^3 (espacio tridimensional).

La notación dada a los vectores varía de acuerdo con el autor, es así que, al referirse a vectores de forma genérica, entre otras se pueden encontrar las siguientes notaciones.
- $\vec{v}$, $\vec{v_1}$, $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$
- u, v, w
- x, y, z

Como se indicó anteriormente es importante tener clara la representación geométrica de los vectores en R^2 y R^3 para poder abstraer y generalizar el concepto a los nuevos objetos matemáticos denominados vectores.

1.1.1 Definición

El vector bidimensional $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ equivale a un par de números $\vec{v} \equiv (v_x, v_y)$
v_x el componente x de $\vec{v}$
v_y el componente y de $\vec{v}$

1.1.2 Representación (par ordenado, combinación lineal de unitarios y polar)

$\vec{v} = (v_x, v_y)$
$\vec{v} = v_x\hat{\imath} + v_y\hat{\jmath}$
$\vec{v} = \|\vec{v}\|\angle\theta$

1.2 Escalares

Los escalares son cantidades numéricas que pertenecen al conjunto de los números reales o complejos y su notación genérica, dependiendo del autor, es:
- α, β
- a, b
- r, s
- k, m

1.3 MATRICES

Aunque algunos autores describen a la matriz como un arreglo ordenado de números en filas y columnas, **lo que en realidad importa es lo que la matriz puede hacer.**

1.3.1 Producto matriz-vector

La importancia del producto matriz vector radica en su relación con las transformaciones lineales. En este contexto las funciones vectoriales son transformaciones de un espacio de entrada conocido como dominio a un espacio de salida denominado rango. Debido a la equivalencia entre matrices y transformaciones lineales se puede pasar de entender al álgebra lineal como la que "trata de vectores y matrices" a aquella que "trata de vectores y transformaciones lineales".

Matrices con NumPy

Para poder graficar vectores en 2D en el jupyter notebook debemos cargar las libreriás y las funciones de ayuda, mismos que fueron especificados al inicio del presente documento. En el presente apartado se requiere la librería numpy.

[3]:
```
# Vectores unitarios
i = np.array((1,0))#Representacion vectorial del vector unitario i
j = np.array((0,1))#Representacion vectorial del vector unitario j
A = np.array([[3,-1], [2,4]])#Matriz A de tamaño 2x2 con librería Numpy
print(A)#Permite visualizar la matriz A
```

```
[[ 3 -1]
 [ 2  4]]
```

Las columnas de la matriz A representan la transformacion de los vectores unitarios del sistema de coordenadas rectangulares, es decir el vector unitario $(1, 0)$ se transforma en el vector $(3, 2)$, lo propio sucede con el vectro unitario $(0, 1)$ que se transforma en el vector $(-1, 4)$, dando origen a los "unitarios" del nuevo sistema de coordenadas, tal como se puede apreciar en la gráfica del "Antes de la transformación" y "Después de la transformación" que se presenta en la parte inferior.

[4]:
```
A.dot(i)#Transformación del unitario i multiplicando por la matriz
```

[4]:
```
array([3, 2])
```

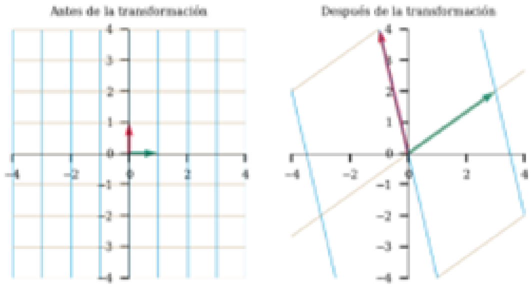
$$[A][\vec{i}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{1}$$

[5]:
```
A.dot(j)# Transformación del unitario j multiplicando por la matriz
```

[5]:
```
array([-1,  4])
```

$$[A][\vec{j}] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

[6]:
```
plot_linear_transformation(A)#Permite graficar la transformación
```



Ejercicio
Experimente con nuevas matrices de tamaño 2x2 propuestas por usted y verifique la transformación que sufre el sistema de coordenadas dependiendo de los valores asignados a las columnas.

Multiplicación matriz - vector

Un vector c en el sistema de coordenadas rectangulares difiere del vector transformado obtenido mediante el producto de la matriz $[A]$ por el vector c.
Mediante el uso de Jupyter notebook procedemos a realizar el cálculo indicado y su representación gráfica tal como se muestra a continuación:
- Se declara la matriz de transformación, misma que debe tener el número de columnas igual al número de filas del vector a ser transformado (multiplicado).
- Se declara el vector $c = (x_1, x_2) = (x, y) = (a_1, a_2)$ (la notación genérica del vector 2D difiere de autor en autor)
- Multiplicar la matriz A por el vector c dando como resultado el vector transformado.

[7]:
```
A = np.array([[3,-1], [2,4]])#Declarar la matriz
c = np.array((3,1))# Declarar el vector, se puede delarar como par ordenado␣
↪(3,1) o como matriz columna [3], [1]
A.dot(c)# Multiplicar la matriz por el vector
print(A)#Permite visualizar la matriz A
print(c)#Permite visualizar la matriz c
print(A.dot(c))#Permite visualizar la matriz resultante de multiplicar A por c
vectors = [c, A.dot(c)]#Vectors indica los vectores que se van a graficar en el␣
↪plano cartesiano
plot_vector(vectors)#Permite graficar los vectores en el plano, el vector en␣
↪base canónica y en base dada por matriz A
pyplot.title("Representación gráfica de la multiplicación de una matriz por un␣
↪vector 2D");#Título de gráfico
#El vector en la base canónica es c y el mismo vector transformado al␣
↪multiplicarse por la matriz A es el vector A.dot(c)
```

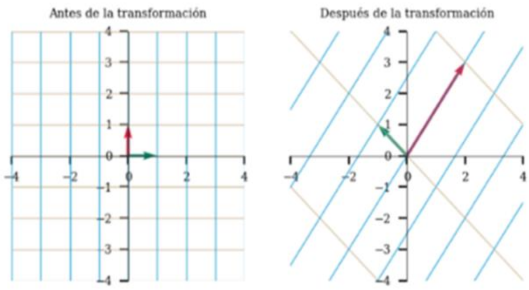
```
[[ 3 -1]
 [ 2  4]]
[3 1]
```

```
[ 8 10]
```

Representacion gráfica de la transformación de los vectores unitarios y de un vector cualquiera

[8]:
```
M = np.array([[-1,2], [1,3]])
plot_linear_transformation(M)
c = np.array((-1,1))
vectors = [c, M.dot(c)]
plot_vector(vectors)
pyplot.title("Representación gráfica de un vector y su transformación por la␣
↪matriz");
print (M, c, M.dot(c))
```

```
[[-1  2]
 [ 1  3]] [-1  1] [3 2]
```



Para observar lo que la transformación le hace a un vector en particular, se ha hecho uso de la funcion plot__vector, permitiendo visualizar un determinado vector y su transformación.

Ejercicio

- Probar con diferentes vectores.
- Construir una matriz $[N]$ que transforme el vector unitario $[\vec{i}]$ en $\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}$ y el vector unitario $[\vec{j}]$ en $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$
- Declare un vector $v = (x_1, x_2)$, multiplique por la matriz $[N]$, grafique y compare el vector $\vec{v}$ y su transformada $\vec{v'}$

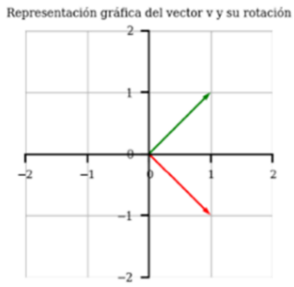
1.4 Algunas transformaciones especiales

1.4.1 Rotación

La rotación de un vector en ángulos de 90, 180, 270 y 360 grados en el plano se puede realizar mediante la multiplicación **matriz - vector**. El procedimiento se detalla a continuación:

[9]:
```
rotation = np.array([[0,1], [-1,0]])#Produce rotación de los vectores unitarios␣
 ↪(90, 180, 270 grados positivos o
#negativos dependiendo de los valores declarados en la matriz)
plot_linear_transformation(rotation)
c = np.array((1,1))
vectors = [c, rotation.dot(c)]
plot_vector(vectors)
pyplot.title("Representación gráfica del vector v y su rotación");
print(rotation, c, rotation.dot(c))
```

```
[[ 0  1]
 [-1  0]] [1 1] [ 1 -1]
```



Ejercicio
Experimente la rotación de nuevos vectores propuestos por usted por medio de matrices que den como resultado rotación de 90, 180 y 270 grados.

1.4.2 Cizalladura, corte o deslizamiento cortante

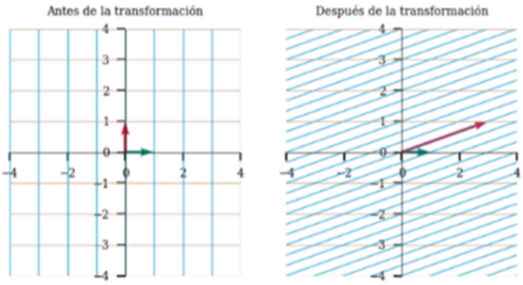
Cizalladura, corte o deslizamiento cortante en la dirección de x
El corte, deslizamiento cortante, cizalladura o inclinación en la dirección x es una transformación lineal que mueve cada punto (x, y) paralelo al eje x en una cantidad ky hasta una nueva posición $(x + ky, y)$, es decir, inclina el vector por un factor escalar horizontalmente, es decir: el unitario i permanece igual y el unitario j se transforma en un nuevo vector de acuerdo a la matriz planteada: Deslizamiento horizontal:

$$\begin{bmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[10]:
```
shear = np.array([[1,3], [0,1]])#Produce el cizallamiento
plot_linear_transformation(shear)
c = np.array((1,1))
vectors = [c, shear.dot(c)]
plot_vector(vectors)
```

```
pyplot.title("Representación gráfica del vector $v$ y su cizalladura en la␣
↪dirección del eje $x$");
print(shear, c, shear.dot(c))
```

```
[[1 3]
 [0 1]] [1 1] [4 1]
```



Cizalladura, corte o deslizamiento cortante en la dirección de y

El corte, deslizamiento cortante o cizalladura en la dirección y es una transformación lineal que mueve cada punto (x, y) paralelo al eje y en una cantidad kx hasta una nueva posición $(x, y + kx)$, es decir, inclina el vector por un factor escalar verticalmente:

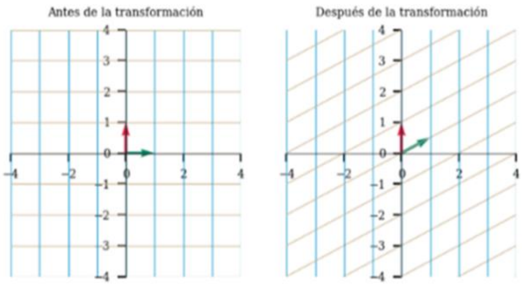
Deslizamiento vertical:

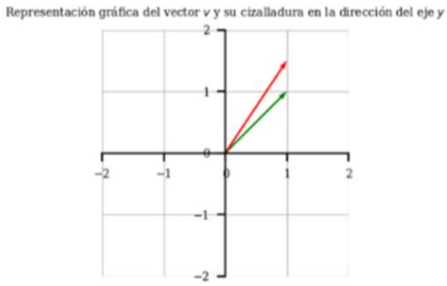
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

[11]:
```
shear = np.array([[1,0], [0.5,1]])#Produce el cizallamiento
plot_linear_transformation(shear)
c = np.array((1,1))
vectors = [c, shear.dot(c)]
plot_vector(vectors)
```

```python
pyplot.title("Representación gráfica del vector $v$ y su cizalladura en la dirección del eje $y$");
print(shear, c, shear.dot(c))
```

```
[[1.  0. ]
 [0.5 1. ]] [1 1] [1.  1.5]
```





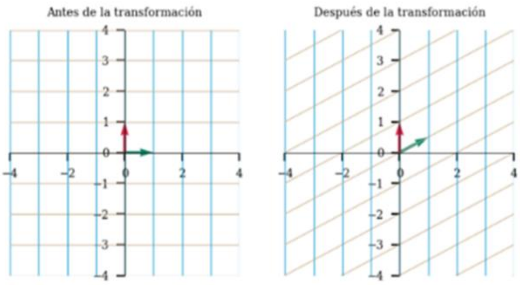
El corte, deslizamiento cortante o cizalladura en la dirección y es una transformación lineal que mueve cada punto (x, y) paralelo al eje y en una cantidad kx hasta una nueva posición $(x, y + kx)$, es decir, inclina el vector por un factor escalar verticalmente:
Deslizamiento vertical:

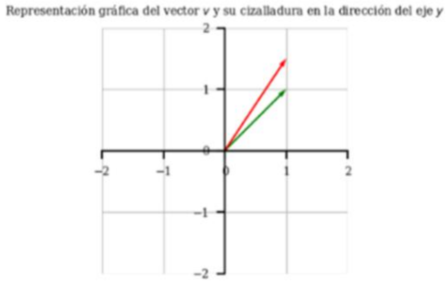
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & 1 \end{bmatrix}$$

[12]:
```python
shear = np.array([[1,0], [0.5,1]])#Produce el cizallamiento
plot_linear_transformation(shear)
c = np.array((1,1))
vectors = [c, shear.dot(c)]
plot_vector(vectors)
pyplot.title("Representación gráfica del vector $v$ y su cizalladura en la dirección del eje $y$");
```

```
print(shear, c, shear.dot(c))
```

```
[[1.  0. ]
 [0.5 1. ]] [1 1] [1.  1.5]
```



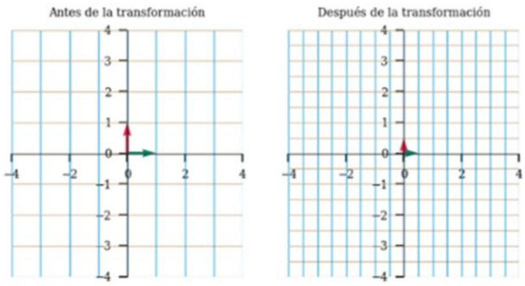


Experimente el corte de nuevos vectores propuestos por usted y matrices que den como resultado cortes paralelos a los ejes x y y

1.4.3 Escalado

[13]:
```
scale=np.array([[0.5,0], [0,0.5]])#Matriz que produce escalamiento de un vector
plot_linear_transformation(scale)
v = np.array((3,2))
vectors = [v, scale.dot(v)]
plot_vector(vectors)
pyplot.title("Representación gráfica del vector $v$ y su escalado");
print(scale, v, scale.dot(v))
```

```
[[0.5 0. ]
 [0.  0.5]] [3 2] [1.5 1. ]
```

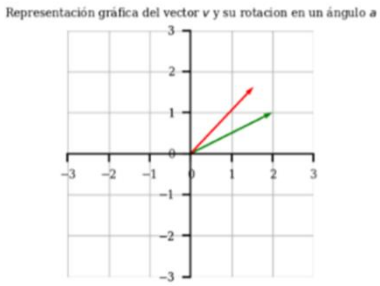


1.4.4 Rotación en un ángulo determinado

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$$

[14]:
```
a = np.pi/9 #declarar el ángulo de rotación
M = np.array([[np.cos (a), -np.sin (a)], [np.sin (a), np.cos (a)]])#Matriz de transformación
v = np.array((2,1)) #Declarar el vector a rotar en un ángulo determinado
vectors = [v, M.dot(v)] #Declarar los vectores a graficar
plot_vector(vectors)
pyplot.title("Representación gráfica del vector $v$ y su rotacion en un ángulo $a$");
print(M, v, M.dot(v))
```

```
[[ 0.93969262 -0.34202014]
 [ 0.34202014  0.93969262]] [2 1] [1.5373651  1.62373291]
```



1.5 Multiplicación matriz-matriz

¿Qué se puede obtener cuando se aplican dos transformaciones lineales? Por ejemplo si aplicamos un cizallamiento (C) y luego rotamos (R) 90^o a la izquierda?
Las matrices de cada transformación se ubican de derecha a izquierda.
Se debe tener en cuenta que proceso es análogo a la composición de funciones.

$$RC\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{3}$$

Multiplicación de matrices con Python

Multiplicación de matrices que produce cizalladura y posteriormente produce rotación
Ejemplo
La matriz para la cizalladura es $[T]_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$
La matriz para rotación es $[T]_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Para realizar las operaciones se deben disponer las matrices de las operaciones requeridas de derecha a izquierda, es decir, en el extremo derecho se ubica la matriz de cizalladura y luego la matriz de rotación.

$$[T] = [T_2][T_1] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

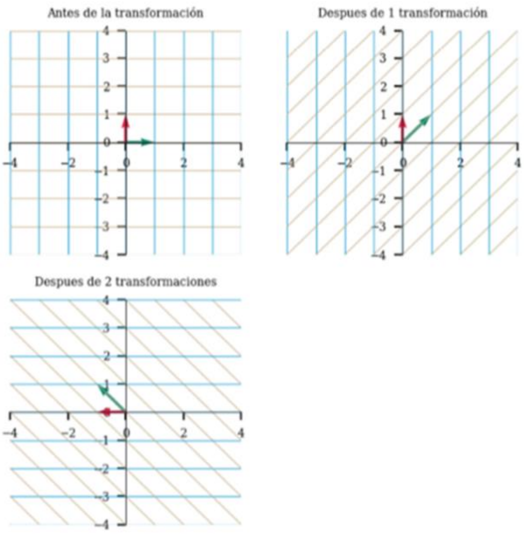
La matriz permite realizar el **cizallamiento y la rotación**, nótese que el orden es importante y cambiarlo implica un resultado diferente.

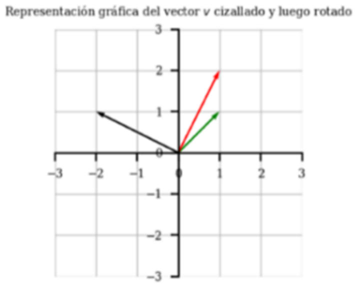
[15]:
```
shear = np.array([[1,0], [1,1]]) #Matriz de cizallamiento
rotation = np.array([[0,-1], [1,0]]) #Matriz de rotación
print(shear)
print(rotation)
print(shear@rotation)
#print(rotation@shear)
```

```
[[1 0]
 [1 1]]
[[ 0 -1]
 [ 1  0]]
[[ 0 -1]
 [ 1 -1]]
```

Se puede observar que para realizar multiplicacion se tiene como primer factor la matriz de rotación T_2 y como segundo factor la matriz de cizalladura T_1, sin embargo, primero se produce la cizalladura y luego la rotación, tal como se muestra a continuación:

[16]:
```python
plot_linear_transformations(shear, rotation) #[T_2][T_1] #Se ubica de acuerdo al orden de
v = np.array((1,1))
vectors = [v, shear.dot(v), rotation.dot(shear.dot(v))]
plot_vector(vectors)
pyplot.title("Representación gráfica del vector $v$ cizallado y luego rotado");
```

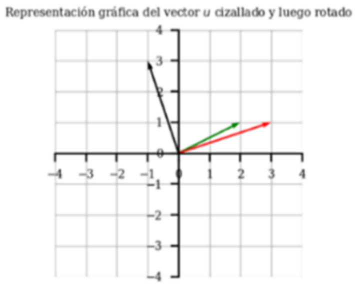




Diferencie el orden de las transformaciones: corte-rotación y rotación-corte

[17]:
```
u = np.array((2,1)) #Declarar un vector
shear = np.array([[1,1], [0,1]]) #Matriz de cizallamiento [T1]
rotation = np.array([[0,-1], [1,0]]) #Matriz de rotación [T2]
vectors = [u, shear.dot(u), rotation.dot(shear.dot(u))]
plot_vector(vectors)
pyplot.title("Representación gráfica del vector $u$ cizallado y luego rotado");
print(u, shear.dot(u), rotation.dot(shear.dot(u)))
vectors = [u, rotation.dot(u), shear.dot(rotation.dot(u))]
plot_vector(vectors)
pyplot.title("Representación gráfica del vector $u$ rotado y luego cizallado");
print(u, rotation.dot(u), shear.dot(rotation.dot(u)))
print(shear@rotation)
print(rotation@shear)
```

```
[2 1] [3 1] [-1  3]
[2 1] [-1  2] [1 2]
[[ 1 -1]
 [ 1  0]]
[[ 0 -1]
 [ 1  1]]
```



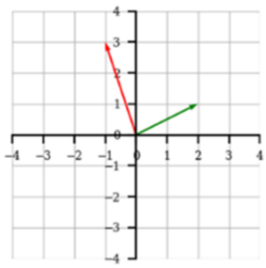
Aplicando las matrices de transformación

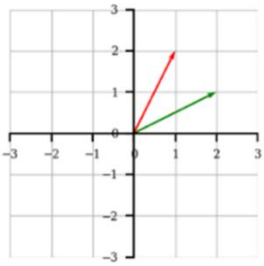
$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad y \quad [T_1] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

directamente se obtiene:

[18]:
```
v = np.array((2,1))
shear = np.array([[1,1], [0,1]]) #Matriz de cizallamiento [T1]
rotation = np.array([[0,-1], [1,0]]) #Matriz de rotación [T2]
print(rotation@shear@v, shear@rotation@v)
vectors = [v, rotation@shear.dot(v)]
plot_vector(vectors)
vectors = [v, shear@rotation@v]
plot_vector(vectors)
```

```
[-1  3] [1 2]
```



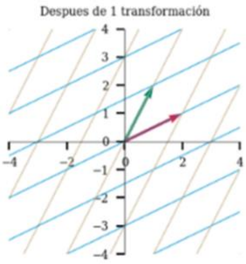


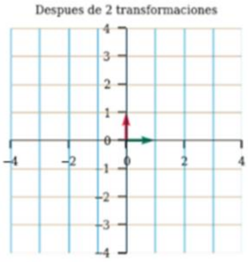
Ejercicio
Realice diferentes composiciones de transformaciones lineales y compruebe que la multiplicación matricial no cumple con la propiedad conmutativa

1.6 Inversa de una matriz

[19]:
```
M = np.array([[1,2], [2,1]])
M_inv=inv(M)#Permite calcular la matriz inversa de M
plot_linear_transformations(M, M_inv)
print(M)
print(M_inv)
```

```
[[1 2]
 [2 1]]
[[-0.33333333  0.66666667]
 [ 0.66666667 -0.33333333]]
```





1.7 Transformaciones lineales entre espacios vectoriales

1.7.1 Notación genérica

La notación generalmente utilizada para denotar:
- Espacios vectoriales:
U, V, W

- Elementos (vectores) de un espacio vectorial general:
$\vec{v}$, $\vec{v_1}, \vec{v_2}$
u, v
x, y

- Escalares de un campo:
α, β
r, s
a, b
k, m

-Transformación lineal:
f :, g :, h :
T :, T_1 :, T_2 :

Resumen de entradas y salidas para transformaciones lineales

Espacios vectoriales	$U, V, W,$					
Entradas y /o salidas	R^n $n-tuplas$		M_{mn} $Matrices$		P_n $Polinomios$	
Entradas y/o salidas especificas	R	(x)	M_{12}	$[a_{11} \quad a_{12}]$	P_1	$a_1x + a_0$
	R^2	(x_1, x_2)	M_{13}	$[a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}]$	P_2	$a_2x^2 + a_1x + a_0$
	R^3	(x_1, x_2, x_3)	M_{21}	$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$	P_3	$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	R^n	$(x_1, x_2, x_3, \ldots x_n)$	M_{mn}	$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$	P_n	$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$

1.7.2 Funciones vectoriales

Las funciones vectoriales de variable vectorial, son funciones cuyas variables independientes y dependientes son vectores, representados por v y w respectivamente

Generalmente una función vectorial de variable vectorial se comporta como cualquier función escalar de variable escalar.
El estudio de sistemas lineales nos permite considerar colecciones cerradas bajo combinaciones lineales. Definimos esas colecciones como espacios vectoriales.
El espacio de vectores fila es lo mismo que el espacio columna.
Otros dos espacios que podemos pensar que son lo mismo es el espacio de polinomios cuadráticos P_2 y R^3

1.7.3 Notación básica y conceptos que describen los espacios vectoriales de entrada y salida

- V: es el espacio vectorial de entrada de la transformación T

- W: es el espacio vectorial de salida de la transformación T

- $dim(U)$: es la dimensión del espacio vectorial U

- $T : V \to W$: es una transformación lineal que toma vectores (v) del espacio vectorial V como entradas y produce nuevos vectores w en el espacio vectorial W como salidas.

- $Im(T)$: el espacio imagen de la transformación lineal T es el conjunto de los vectores que produce la transformación. Es el equivalente del conjunto imagen de una función de variable simple.
  $Im(T) = \{w \in W : (\exists v \in V)(T(v) = w)\} \subseteq W$

- $Ker(T)$: también conocido como núcleo es el conjunto de todos los elementos del espacio vectorial de salida V que se transforman en el vector 0 del espacio de llegada. Es el equivalente de las raices de una función, es decir: $\{x \in R : f(x) = 0\}$
  $Ker(T) = Nu(T) = \{v \in V : T(v) = 0\} \subseteq V$

1.7.4 Transformaciones lineales (Aplicaciones lineales)

Morfismo significa mapeo o transformación
Homomorfismo equivale a una transformación lineal
Un **automorfismo** es un isomorfismo de un espacio consigo mismo, por ejemplo: dilatacion, rotación,reflexion respecto a un determinado eje
Isomorfismo significa un mapeo o transformación que expresa similitud (va de un espacio a otro del mismo tamaño), por ejemplo: $T : P_1 \to R^2$, $F : R^3 \to P_2$, $R : M_{2x2} \to P_3$, etc.
Para verificar **isomorfismo** se debe cumplir:
· Que sea una correpondencia uno a uno (inyectiva) y sobreyectiva
· Que preserve la estructura, es decir la suma y la multiplicación por un escalar

Es aconsejable pensar en **objetos** matemáticos como un todo y no como partes, es decir un polinomio, una matriz, etc. deben ser considerados como un solo objeto
Las transformaciones son consideradas como la idea central del álgebra lineal, ya que conectan todos los conceptos revisados con anterioridad por el estudiante.

1.7.5 Linealidad

Si una función va de un espacio vectorial V a un espacio vectorial W, $F : V \to W$, para que sea transformación lineal debe cumplir con los criterios de linealidad, es decir:

- Conservación de adición $+$: $f(u + v) = f(u) + f(v)$.
- Conservación de multiplicación por un escalar $\cdot$: $f(\alpha \cdot u) = \alpha \odot f(u)$.
  Algunos autores suelen utilizar una relación de transformación lineal que incluye la conservación de la adición y la multiplicación por un escalar, es decir:
  $f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$

- Las matrices pueden ser utilizadas para representar transformaciones lineales, tales como: proyecciones, reflexiones y rotaciones.

- Se puede establecer la relación existente entre las bases y las representaciones matriciales, es decir, las bases de entrada y salida determinan los coeficientes de la representacion matricial de la transformación.

La linealidad nos permite analizar procesos y transformaciones multidimensionales estudiando sus efectos sobre una pequeño conjunto de entradas.

Las transformaciones lineales toman vectores como entrada y producen vectores como salidas. $T : R^n \to R^m$ implica que una transformación T toma un vector n-dimensional como entrada y produce un vector m-dimensional como salida

Ejemplo de demostración de linealidad de una transformación
La demostración de linealidad se puede hacer con ternas o con vector columna (matriz $n \times 1$), este procedimiento debe cumplir con los criterios de linealidad (conservación de la adición y de la multiplicación por un escalar)

Demostración con tripletas y en un solo proceso $f : R^3 \to R^2$
Definida por:
$f(x, y, z) = (x - z, y + z)$
El **objeto** que ingresa es una tripleta y el **objeto** que sale es un par
Se arma la funcion de dos vectores $u = (x_1, x_2, x_3)$ y $v = (y_1, y_2, y_3)$ y se comprueba la linealidad con $f(\alpha(u)) + (v)$
$f(\alpha u + v) = f(\alpha(x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)$
$f(\alpha u + v) = f(\underbrace{\alpha x_1 + y_1}_{nuevo\, x}, \underbrace{\alpha x_2 + y_2}_{nuevo\, y}, \underbrace{\alpha x_3 + y_3}_{nuevo\, z})$ Se reemplaza los nuevos valores de x, y y z en la función $x - z, y + z$

$f(\alpha u + v) = (\alpha x_1 + y_1 - (\alpha x_3 + y_3), \alpha x_2 + y_2 + (\alpha x_3 + y_3))$ esta expresión se puede transformar en una suma de dos vectores
$f(\alpha u + v) = (\alpha(x_1 - x_3) + (y_1 - y_3), \alpha(x_2 + x_3) + (y_2 + y_3))$
$f(\alpha u + v) = (\alpha(x_1 - x_3), \alpha(x_2 + x_3)) + (y_1 - y_3, y_2 + y_3)$
$f(\alpha u + v) = \alpha(x_1 - x_3, x_2 + x_3) + (y_1 - y_3, y_2 + y_3)$
$f(\alpha u + v) = \alpha f(x_1, x_2, x_3) + f(y_1, y_2, y_3)$
$\therefore f(\alpha u + v) = \alpha f(u) + f(v)$

NOTA No hay problema en representar un punto como el vector cuya representación canónica termina en ese punto, es decir:

$$R^n = \{ \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} | v_1, \ldots, v_n \in R\}$$

Además se pueden realizar las operaciones de adición y multiplicación por un escalar con los respectivos términos de las componentes. Bajo este criterio se pueden realizar las operaciones para demostrar la linealidad de una transformación.

Ejemplo de transformación no lineal
$f(x) = x^2$ no es aplicación lineal

El **objeto** que ingresa es un número x y el **objeto** que sale es es el número x elevado al cuadrado
Aplicando la conservación de la suma se tiene que:
$f(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \neq x^2 + y^2$
$\therefore$ Se puede concluir que $f(x) = x^2$ no es una transformación lineal

Ejemplo de transformación lineal de $T : R^3 \to P_1$
$T : R^3 \to P_1$
$(a_1, a_2, a_3) \to 2a_1 + a_2 - a_3x$

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \to (2a_1 + a_2) - a_3x$$

El ejercicio se lo realizará en el mismo notebook y se verificará por medio del ingreso de cuatro puntos que forman un cuadrado en el espacio, para luego observar la transformación del mismo cuadrado en otro cuadrado en el plano.
Si se desea calcular la matriz de transformación se debe calcular la función de las bases de un sistema de R^3, es decir:
$f(1,0,0) = 2 \cdot 1 + 0 - 0x = 2 - 0x = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$
$f(0,1,0) = 2 \cdot 0 + 1 - 0x = 1 - 0x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
$f(0,0,1) = 2 \cdot 0 + 0 - 1x = 0 - 1x = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$
Las matrices columna obtenida son las columnas de la matriz de transformación [T]:
$[T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
La multiplicación de esta matriz por cualquier vector de R^3 da como resultado pares ordenados, es decir coordenadas en R^2

```
T = np.array([[2,1,0], [0,0,-1]])#Matriz de transformación
TP = np.array([[1,1,1,1], [1,1,-1,-1], [1,3,3,1]])#4 puntos para transformar␣
 ↪mult por matriz T
print(T@TP)#muestra los nuevos cuatro puntos transformados
```

```
[[ 3  3  1  1]
 [-1 -3 -3 -1]]
```

Representacion geométrica de $T : R^3 \to P_1$
Para representar geometricamente la transformación lineal primeramente vamos a establecer 4 puntos (es decir vamos a establecer 4 ternas) en el espacio vectorial R^3 de salida que formen un cuadrado en el espacio, por ejemplo se pueden establecer los puntos: (1,1,1), (1,1,3),(1,-1,3), (1,-1,1)
Si $T(a_1, a_2, a_3) = 2a_1 + a_2 - a_3x$
$T(1,1,1) = 3 - x = (3,-1) = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$
$T(1,1,3) = 3 - 3x = (3,-3) = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$
$T(1,-1,3) = 1 - 3x = (1,-3) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

$T(1,-1,1) = 1 - x = (1,-1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

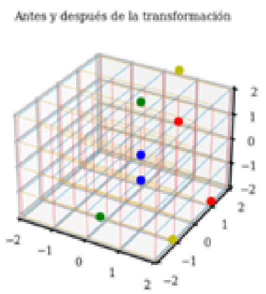
Los mismos resultados se pueden obtener multiplicando las entradas por la matriz de transformación, por ejemplo:

$T(1,-1,3) = [T] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = [T] = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$

Representación geométrica de $T : R^3 \rightarrow P_1$ mediante puntos en R^3 y puntos transformados en R^2

[21]:
```
M = np.array([[1,0,0], [0,1,0], [0,0,1]])#Matriz identidad 3x3
print(M)
plot_3d_linear_transformation(M)#Grafica el sistema de coordenadas en base canónica
#plt.plot([1, 1, 1, 1], [1, 1, -1, -1], [1, 3, 3, 1], 'b.')#grafica 4 puntos azules en R3
#plt.plot([3, 3, 1, 1], [-1, -3, -3, -1], 'r.')#grafica 4 puntos rojos en R2
#para poner colores a cada punto
plt.plot([1], [1], [1], 'r.')
plt.plot([1], [1], [3], 'y.')
plt.plot([1], [-1], [3], 'g.')
plt.plot([1], [-1], [1], 'b.')
plt.plot([3], [-1], 'r.', [3], [-3], 'y.', [1], [-3], 'g.', [1], [-1], 'b.')
plt.show()
```

```
[[1 0 0]
 [0 1 0]
 [0 0 1]]
```



1.7.6 Teorema de la dimensión

Sean V y W espacios vectoriales y sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Si el espacio V es dimensionalmente finito, entonces:

$$nulidad(T) + rango(T) = dim(V)$$

Obteniendo la matriz escalonada reducida de la matriz de transformación se puede determinar que el rango es 2 y, aplicando el teorema de la dimensión podemos establecer que la nulidad es, por lo tanto, 1

Rango de $T : R^3 \to P_1$
Haciendo uso de la base canónica de R^3 se obtiene el conjunto generador del recorrido:
Sea $T : R^3 \to P_1$
$(a_1, a_2, a_3) \to 2a_1 + a_2 - a_3 x$
$f(1,0,0) = 2 \cdot 1 + 0 - 0x = 2 - 0x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = (2,0)$
$f(0,1,0) = 2 \cdot 0 + 1 - 0x = 1 - 0x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0)$
$f(0,0,1) = 2 \cdot 0 + 0 - 1x = 0 - 1x = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = (0,-1)$
Por lo que el conjunto generador será $G = \{(2,0),(1,0),(0,-1)\}$ y se establece el espacio generado, utilizando los vectores (elementos del conjunto) como renglones de una matriz:
$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Escalonando la matriz se puede obtener la base del espacio fila y se podrá obtener de esta manera el recorrido de la transformación. $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
Por lo que la base del subespacio, en este caso R^2, es $B = \{(1,0),(0,-1)\}$ y esta genera al subespacio $T(R^3) = \{(r,-s) : r \in R, s \in R\}$
Por el teorema de la dimensión se puede establecer la dimensión del espacio nulo.

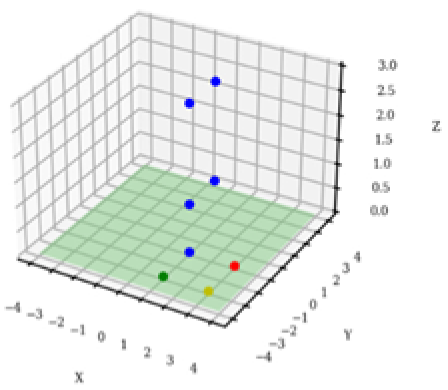
$$nulidad(T) + rango(T) = dim(V) \to nulidad(T) = dim(V) - rango(T) = 3 - 2 = 1$$

Gráfico del espacio imagen de la transformación $T : R^3 \to P_1$

[22]:
```
x,y=np.linspace(-4,4,10),np.linspace(-4,4,10)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
```

[23]:
```
Z1= 0*X+0*Y #Ecuación para un plano que pasa por el origen ortogonal al eje z
```

[24]:
```
fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(121,projection='3d')
ax.plot_surface(X,Y,Z1,alpha=0.5,cmap=cm.Accent,rstride=100,cstride=100)
ax.set_xlabel('X');ax.set_ylabel('Y');ax.set_zlabel('Z')
plt.plot([1, 1, 1, 1], [1, 1, -1, -1], [1, 3, 3, 1], 'b.')#4 puntos azules en R3
#plt.plot([3, 3, 1, 1], [-1, -3, -3, -1], 'r.')#4 puntos rojos es R2
plt.plot([3], [-1], 'r.', [3], [-3], 'y.', [1], [-3], 'g.', [1], [-1], 'b.
↪')#para poner colores a cada punto
plt.show()
```



Ejercicio de $T : R^2 \rightarrow R^2$
$T : R^2 \rightarrow R^2$
$(x, y) \rightarrow (2x, 3x - 2y)\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2x \\ 3x - 2y \end{pmatrix}$
- Demostrar linealidad
- Obtener la matriz de transformación
- Representar graficamente
- Obtener el rango y la nulidad

1.7.7 Matriz de cambio de base

Sea un espacio vectorial V sobre el campo de los números reales $\mathbb{R}$ y las bases ortonormales B y B' del espacio vectorial V. La matriz de cambio de base ${}_{B'}1_B = [I_V]^B_{B'}$ La relación entre los conjuntos de coordenadas de las bases B y B´ está dada por la matriz de cambio de base.

Los conjuntos
$B = \{(1, 1), (-1, 1)\}$ y $B' = \{(2, -1), (1, 2)\}$
son bases de R^2. Determinar:
- La matriz de transición de B a B´ y de$B$´ a B
- Las coordenadas del vector $v = (-3, 4)$ con respecto a la base B' sabiendo que las coordenadas de v respecto a la base B son: $(\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

Solución
La matriz de transición de B a B´ se obtiene calculando las coordenadas de cada elemento del conjunto B respecto a la base B´, esto se lo consigue realizando la combinación lineal de los elementos de la base B´ para obtener los elementos de la base B.
$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = \frac{1}{5} \quad \beta = \frac{3}{5} \rightarrow$
$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha_1 = -\frac{3}{5} \quad \beta_1 = \frac{1}{5} \rightarrow$

$$[I_{R^2}]^B_{B'} =_{B'} [1]_B = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \text{ Matriz de transicion de } B \text{ a } B'$$

Quiere decir que si tengo un vector v en la base B, $[(v)]_B$, al multiplicarlo por la matriz de cambio de base $[I_{R^2}]^B_{B'} =_{B'} [1]_B$ obtenemos las coordenadas del vector v en la base B'

$$[I_{R^2}]^B_{B'}[(v)]_B =_{B'} [1]_B[(v)]_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En resumen se ha obtenido:

$$\underbrace{(-3,4)}_{base\ cannica} \quad = \quad \underbrace{(\frac{1}{2},\frac{7}{2})}_{base\ \{(1,1),(-1,1)\}} \quad = \quad \underbrace{(-2,1)}_{base\ \{(2,-1),(1,2)\}}$$

La matriz de transición de $B´$ a B se puede calcular bajo de forma similar a la anterior o calculando la inversa de la matriz de transición $[I_{R^2}]^B_{B'}$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \quad \beta = \frac{-3}{2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow \alpha_1 = \frac{3}{2} \quad \beta_1 = \frac{1}{2}$$

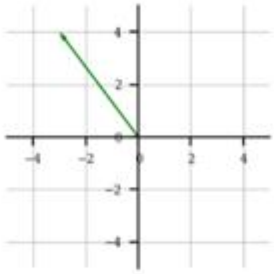
$$[I_{R^2}]^{B'}_B =_B [1]_{B'} = \begin{bmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \text{ Matriz de transicion de } B´ \text{ a } B$$

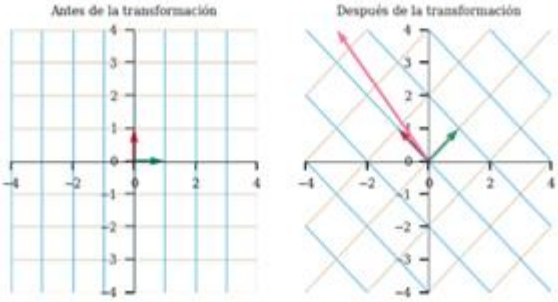
-

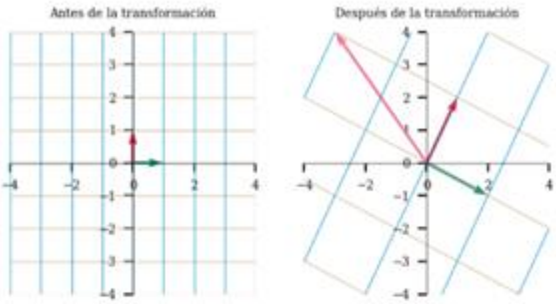
$$[I_{R^2}]^{B'}_B = \left([I_{R^2}]^B_{B'}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$ Matriz de transicion de $B´$ a B calculada por la inversa.

[25]:
```
v = np.array((-3,4))
vB = np.array((0.5,3.5))
vectors = [v]
plot_vector(vectors)
B = np.array([[1,-1], [1,1]])#matriz de la base B
B_1 = np.array([[2,1], [-1,2]])#matriz de la base B_1
BB_1 = np.array([[0.2,-0.6], [0.6,0.2]])#matriz de cambio de base B a B_1
plot_linear_transformation_1(B,vB)#Matriz de la base B y el vector c en la base␣
↪B (cB)
plot_linear_transformation_1(B_1,BB_1@vB)#Matriz de la base B_1 y el vector c_B␣
↪en la base B_1
print (v, vB, BB_1@vB)
```

```
[-3  4] [0.5 3.5] [-2.  1.]
```







Ejercicio

Los conjuntos
$B = \{(2,1),(1,0)\}$ y $D = \{(-1,1),(1,1)\}$
son bases de R^2. Determinar:
- La matriz de transición de B a D y de$D$ a B
- Las coordenadas del vector $v = (2,1)$ con respecto a la base D sabiendo que las coordenadas de v respecto a la base B son: $(1,0)$

Ejercicio de transformación lineal $f : R^3 \to R^3$ con cálculo de núcleo e imagen y

representación geométrica
$f : R^3 \to R^3$
$(x, y, z) \to (x - y + z, x + y + z, x - 3y + z)$
Núcleo
$\begin{aligned} x - y + z &= 0 \\ x + y + z &= 0 \\ x - 3y + z &= 0 \end{aligned}$ extrayendo la matriz aumentada se obtiene: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$
$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to & z = -x \\ \to & y = 0 \\ & \end{matrix}$
$\to N(f) = \{(x, y, z) : z = -x \, y \, y = 0\}$

$\to N(f) = \{(x, 0, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ por lo tanto $dimN(f) = 1$ y todas las ternas que tienen esa forma se transforman en 0

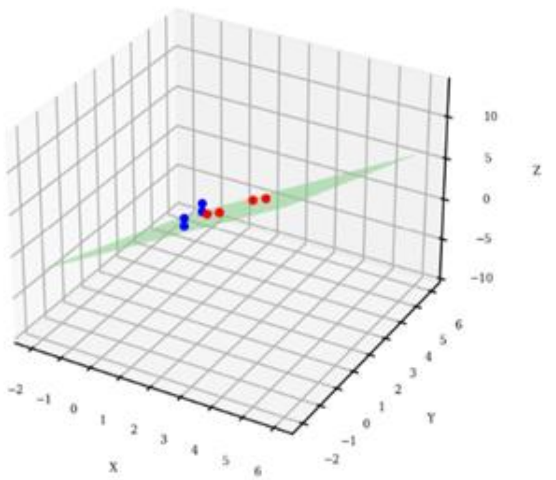
Recorrido de $f : R^3 \to R^3$
$f(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$
$f(0, 1, 0) = (-1, 1, -3)$
$f(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$
Se forma una matriz y se obtiene la forma escalonada reducida
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \to & base \\ \to & base \\ & \end{matrix}$
$Im(f) = \{(r, s, 2r - s) : r, s \in \mathbb{R}\}$
$Im(f) = \{r(1, 0, 2) + s(0, 1, -1) : r, s \in \mathbb{R}\}$
$\therefore B = \{(1, 0, 2), (0, 1, -1)\}$
Entonces la dimensión del espacio imagen es 2 y todos los vectores transformados caen sobre el plano formado por los vectores de la base.
La ecuación del plano se obtiene de la expresión: $(r, s, 2r - s)$ donde se puede determinar que si r,s y t equivalen a x,y,z respectivamente entonces z=2x-y.

Representación geométrica de $f : R^3 \to R^3$ **y su espacio imagen**
Se establecen 4 puntos en el espacio de salida, se los multiplica por la matriz de transformación y se obtienen los puntos transformados. La matriz de transformación es: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$
Se forma una matriz con los elementos de los 4 puntos como columnas: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
Se multiplican las dos matrices y se obtienen los elementos de los 4 puntos transformados:
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 4 \\ -1 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$

```
x,y=np.linspace(-2,6,5),np.linspace(-2,6,5)
X,Y=np.meshgrid(x,y)
```

```
Z1= 2*X-Y #El espacio imagen corresponde a un plano que pasa por el origen␣
↪perpendicular al eje z
```

[28]:
```
fig=plt.figure()
ax=fig.add_subplot(111,projection='3d')
ax.plot_surface(X,Y,Z1,alpha=0.5,cmap=cm.Accent,rstride=100,cstride=100)
ax.set_xlabel('X');ax.set_ylabel('Y');ax.set_zlabel('Z')
plt.plot([1, 1, 1, 1], [1, 1, 2, 2], [1, 2, 2, 1], 'b.')# se ingresa la matriz␣
 ↪por filas, grafica puntos azules
plt.plot([1, 2, 1, 0], [3, 4, 5, 4], [-1, 0, -3, -4], 'r.')# se ingresa la␣
 ↪matriz por filas, grafica puntos rojos
plt.show()
```



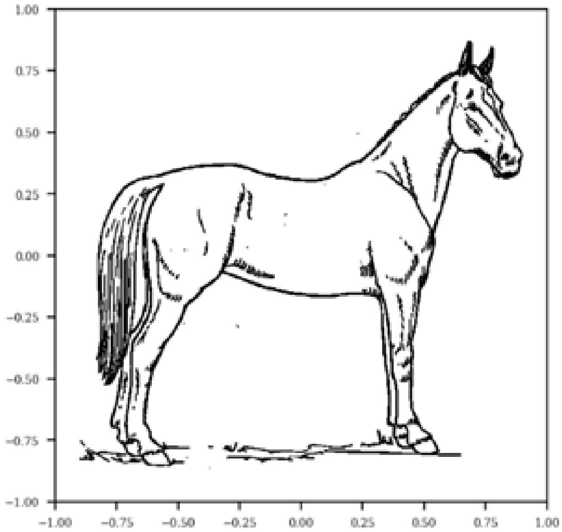
Conclusión
Se puede observar que los 4 puntos del espacio de salida se transforman en otros 4 puntos del espacio de llegada que precisamente pertenecen al espacio imagen, que en este caso particular es el plano generado por la base $B = \{(1,0,2),(0,1,-1)\}$ cuya ecuación es $z = 2x - y$ y mantienen la linealidad.
Todos los cálculos pueden ser realizados con el mismo software ahorrando tiempo y optimizando los procesos.

1.8 APLICACIÓN DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

1.8.1 Manipulación de imágenes

Para poder trabajar con imágenes es necesario vectorizarlas, es decir, transformar la imagen en puntos (vectores) que pueden ser representados matricialmente, por lo que trabajaremos con imagenes con extensión *.npy*

[29]:
```python
data = np.load("horse.npy")
plt.plot(data[0],data[1], 'k,')
plt.axis([-1,1,-1,1])
plt.gca().set_aspect("equal")
plt.show()
```



[30]:
```python
print(data)
```

```
[[ 0.6883   0.6865   0.6847  … -0.5879  -0.5897  -0.3719]
 [ 0.867    0.867    0.867   … -0.859   -0.859   -0.867 ]]
```

Deslizamiento cortante de la imagen en la dirección x con factor 1 Como par ordenado

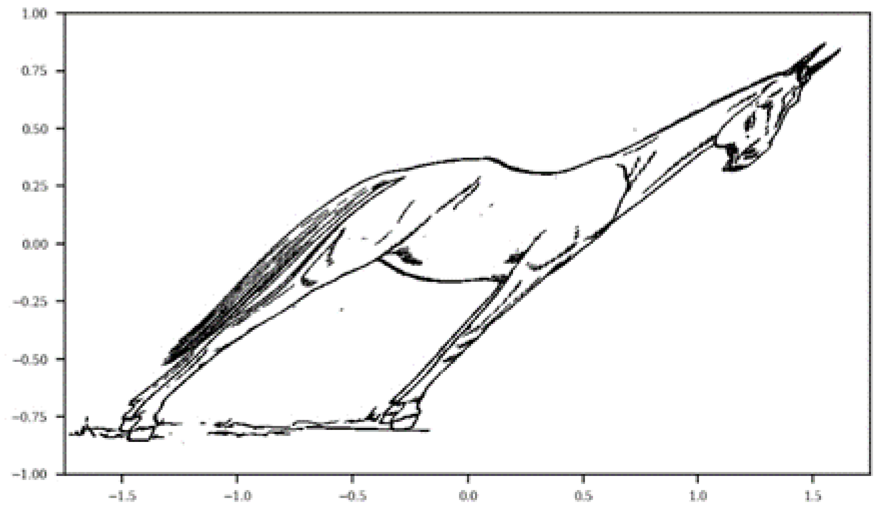
$$(x, y) \to (x + y, y)$$

Notación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ y \end{bmatrix}$$

[31]:
```python
shear = np.array([[1,1], [0,1]])
b = shear@data
plt.plot(b[0],b[1], 'k,')
plt.axis([-1.75,1.75,-1.0,1.0])
plt.gca().set_aspect("equal")
print(shear@data)
```

```
[[ 1.5553  1.5535  1.5517 … -1.4469 -1.4487 -1.2389]
 [ 0.867   0.867   0.867  … -0.859  -0.859  -0.867 ]]
```



Ejercicio
- Realice el deslizamiento cortante en la dirección y con factor 1
Como par ordenado

$$(x, y) \to (x, x + y)$$

Notación matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ y \end{bmatrix}$$

- Realice el escalado con un factor mayor que 1 y un factor entre 0 y 1
- Realice la rotación en ángulos múltiplos de 90º
- Realice la rotación en un ángulo de 45º y 110º
- Realice la composición de un cizallamiento, deslizamiento cortante, a lo largo del eje x y una rotación de 90º

1.8.2 Robótica de manipuladores

Cinemática directa Es una función de una o varias entradas y una salida, que en nuestro caso es un vector.
$X = F(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$
donde:
X es el espacio cartesiano $X = (x, y, z)$, es el la posición final como resultado de mover las articulaciones.
Q es el espacio articular $Q = (q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n)$, el mayor subíndice indica los grados de libertad o

articulaciones del robot
Se utiliza la cinemática directa cuando se tiene las dimensiones estructurales, el ángulo de desplazamineto de cada articulación y se requiere conocer la ubicación de un punto cualquiera en el espacio.
Matriz Homogenea Se pueden realizar los cálculos por medio del método algebraico-geométrico, sin embargo, hacerlo por medio de transformaciones lineales es mas eficiente. Para esto hacemos uso de la matriz homogenea (H) que contiene información de la orientación de la articulación, la posición final, la persepectiva y un factor de escalamiento.

$$H = \begin{bmatrix} [R(3\times 3)] & [T(3\times 1)] \\ [P(1\times 3)] & [E(1\times 1)] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

donde:
$R(3\times 3)$ Matriz de 3x3 que representa rotación
$T(3\times 1)$ Vector columna que representa traslación
$P(1\times 3)$ Vector fila que representa perspectiva
$E(1\times 1)$ Escalar que representa la escala de transformación
Principales matrices homogeneas

$$Rot_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

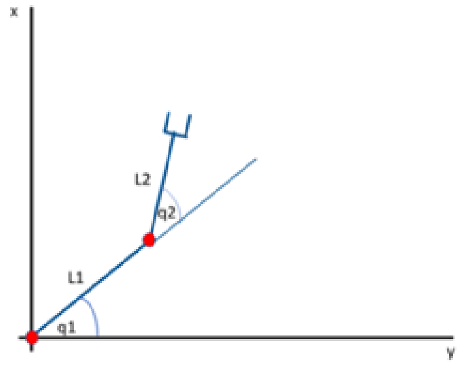
$$Rot_y(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Rot_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Trans_{x,y,z}(a,b,c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo

ARTICULAR DE 2 GRADOS DE LIBERTAD



Para obtener la cinemática directa del robot del gráfico se lo realiza por medio de la multiplicación de las matrices homogeneas correspondientes a cada transformación:

$$Rot_z(q1) * L_x(L1) * Rot_z(q2) * L_x(L2)$$

[32]:
```
In [1]: import sympy
In [2]: sympy.init_printing()
```

[33]:
```
In [24]: q1, q2, L1, L2 = sympy.symbols("q1, q2, L1, L2", real=True)#declarar␣
 ↪variables
q1 = sympy.pi/4 #declarar el ángulo de rotación
q2 = sympy.pi/6 #declarar el ángulo de rotación
L1 = 15 #declarar longitud L1
L2 = 10 #declarar  longitud L2
```

[34]:
```
H_1 = np.array([[sympy.cos(q1),-sympy.sin(q1), 0, 0],
                [sympy.sin(q1), sympy.cos(q1), 0, 0],
                [0, 0, 1,0],
                [0, 0, 0, 1]])
#print(H_1)
sympy.simplify(H_1)
```

[34]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[35]:
```
H_2 = np.array([[sympy.cos(q2),-sympy.sin(q2), 0, 0],
                [sympy.sin(q2), sympy.cos(q2), 0, 0],
```

```
                    [0, 0, 1,0],
                    [0, 0, 0, 1]])
#print(H_2)
sympy.simplify(H_2)
```

[35]:

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[36]:

```
L_1 = np.array([[1, 0, 0, L1], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1,0], [0, 0, 0, 1]])
sympy.simplify(L_1)
#print(L_1)
```

[36]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[37]:

```
L_2 = np.array([[1, 0, 0, L2], [0, 1, 0, 0], [0, 0, 1,0], [0, 0, 0, 1]])
sympy.simplify(L_2)
#print(L_2)
```

[37]:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

[38]:

```
H_1@L_1@H_2@L_2
sympy.simplify(H_1@L_1@H_2@L_2)#Permite ver los resultados de forma ordenada y
 ↪simplificada
```

[38]:

$$\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{5\sqrt{6}}{2} + 5\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} & 0 & \frac{5\sqrt{6}}{2} + 10\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusión

Se concluye que la posición final del brazo robótico está de acuerdo con la tercera columna de la matriz homogenea obtenida, es decir: $\left(\frac{5\sqrt{6}}{2} + 5\sqrt{2}, \frac{5\sqrt{6}}{2} + 10\sqrt{2}, 0\right) = (13.195, 20.266, 0)$

ANEXO F

PLAN DE CLASE

1. DATOS INFORMATIVOS:

Departamento: Ciencias Exactas	**Carrera:** Mecatrónica	**Tema de la clase** • Multiplicación matriz – vector y representación gráfica • Transformaciones lineales como producto matriz vector • Transformaciones lineales en el plano • Rotación, deslizamiento, escalado
Área de conocimiento: Análisis	**Asignatura:** Álgebra Lineal	
Docente: Lcdo. Carlos Cuenca	**Curso/Paralelo:** Primero	
Fecha: 07 enero 2022	**Duración de la clase:** 120 minutos	
Período académico:		

2. DESPLIEGUE DEL PROCESO:

OBJETIVO DE LA CLASE	**LOGRO DE APRENDIZAJE:**
• Desarrollar la capacidad para analizar y adquirir contenidos conceptuales acerca de la relación de la multiplicación matriz-vector con las transformaciones lineales (TL) en R2 y R3 para generalizar a Rn. • Resolver y estructurar nuevos problemas relacionados con las TL en el plano para generalizar lo aprendido. • Utilizar Jupyter Notebook de forma interactiva para el cálculo, verificación, visualización geométrica, modificación e ingreso de información relevante acerca de TL.	• Analiza, reflexiona e interioriza el concepto de transformación lineal desde el lenguaje aritmético, algebraico y geométrico. • Resuelve, estructura, propone y generaliza nuevos ejercicios de TL. • Utiliza el software Jupyter Notebook como medio para calcular, graficar, modificar, complementar e ingresar información referente a la asignatura de acuerdo con sus propias necesidades e inquietudes.

3. MATRIZ DE PLANIFICACIÓN:

FASES DE LA CLASE	**PROCESO METODOLÓGICO**		**TIEMPO APROX**	**INSTRUMENTO DE EVALUACIÓN**
	ACTIVIDADES DOCENTES	**ACTIVIDADES ESTUDIANTES**		
INICIAL	**Motivación:** Relación entre matrices y transformaciones **Diagnóstico:**	• Participa, explica, relaciona y sugiere posibles aplicaciones	20 min.	Resolución de Ejercicios

	Obtención, valoración y análisis de conocimientos previos **Planteamiento del tema:** • Multiplicación matriz – vector y representación gráfica • Transformaciones lineales como producto matriz vector • Transformaciones lineales en el plano • Rotación, deslizamiento, escalado			
DESARROLLO	• Construir sobre el conocimiento actual del estudiante el significado de la multiplicación de matrices por vectores desde el lenguaje aritmético, algebraico y geométrico. • Mediante el uso de Jupyter cada estudiante de forma independiente declara nuevas matrices observa y explica la transformación que estas provocan al plano cartesiano. • Preguntar constantemente como medio para despertar el interés y buscar que el estudiante analice lo aprendido, lo generalice y lo aplique.	• Activamente y en consenso construye los conceptos y significados inherentes al producto matriz vector y TL. • Realiza cálculos de forma manual y por medio del Jupyter Notebook para contrastar los resultados obtenidos y darles un sentido geométrico. • Responde a las preguntas del docente o solicita información complementaria para hacerlo.	70 min	
FINAL	**Evaluación:** • Se propicia la evaluación de tipo formativa procurando retroalimentar lo compartido haciendo que el estudiante explique, construya sus propios ejemplos, calcule y grafique dentro de la interfaz de Jupyter y a mano.	• Responde a las preguntas del docente exhibiendo su capacidad de análisis y síntesis sobre el tema. • Realiza de forma autónoma las actividades propuestas por el docente dentro de Jupyter y de forma escrita.	30 min	
TIEMPO TOTAL DE LA CLASE			**120 min**	

Dirección de Bibliotecas y Recursos del Aprendizaje

UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS Y ANÁLISIS BIBLIOGRÁFICO Y DOCUMENTAL

REVISIÓN DE NORMAS TÉCNICAS, RESUMEN Y BIBLIOGRAFÍA

Fecha de entrega: 07 / 09 / 2022

INFORMACIÓN DEL AUTOR/A (S)
Nombres – Apellidos: *Carlos Julio Cuenca Pomatoca*
INFORMACIÓN INSTITUCIONAL
Instituto de Posgrado y Educación Continua
Título a optar: *Magíster en Matemática mención Modelación y Docencia*
f. Analista de Biblioteca responsable: Lic. Luis Caminos Vargas Mgs.

Firmado electrónicamente por:
LUIS ALBERTO CAMINOS VARGAS

UNIDAD DE PROCESOS TÉCNICOS
DBRA
ESPOCH

0099-DBRA-UPT-IPEC-2022

INICIO MAIL NOTICIAS FINANZAS DEPORTES CELEBRITY VIDA Y ESTILO MÁS...

yahoo!mail

Buscar mensajes, documentos, fotos o personas Avanzada

carlos Inicio

Redactar

cajucupo@y... 999+
cajucupo2 142

Bandeja de e... 999+
No leídos
Destacado
Borradores 23
Enviados
Archivo
Spam
Papelera
Menos

Vistas Mostrar

Carpetas Ocultar
+ Carpeta nueva
BANCO PACIFICO
bgr
ESPE

Atrás Archivar Mover Eliminar Spam

Sol. Traducción resumen 2 Yahoo/Bandeja ...

carlos cuenca Estimados Señores del centro de idiomas ESPOCH reciban un cordial saludo. Luego de la aprobación de la Biblioteca ESPOCH, con la finalidad de contir mié, 3 ago a las 12:40

MARLIN JANETH KHAMASHTA MORAN <marlin.khamashta@espoch.edu.ec> mar, 9 ago a las 9:38
Para: cajucupo@yahoo.es
CC: Centro de Idiomas

Buenos dias,

Adjunto la traduccion del resumen.

Lic. Marlin Khamashta, Msg

De: Centro de Idiomas <idiomas@espoch.edu.ec>
Enviado: jueves, 4 de agosto de 2022 8:05
Para: MARLIN JANETH KHAMASHTA MORAN <marlin.khamashta@espoch.edu.ec>
Asunto: RV: Sol. Traducción resumen

Saludos cordiales,

Favor realizar la siguiente traducción y enviar al mail del estudiante con copia al mail: idiomas@espoch.edu.ec

Atentamente,

Centro de Idiomas
"Saber para ser"