



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**FACULTAD DE MECÁNICA**

**CARRERA MECÁNICA**

**“DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO  
AUTO BALANCEADO MONTADO EN UN CARRO MÓVIL PARA  
EL ANÁLISIS DE DISTINTAS TÉCNICAS DE CONTROL  
AUTOMÁTICO.”**

**Trabajo de Integración Curricular**

Tipo: Proyecto Técnico

Presentado para optar el grado académico de:

**INGENIERO MECÁNICO**

**AUTOR:**

**DANIEL VICENTE OROZCO TORRES**

Riobamba – Ecuador

2022



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**FACULTAD DE MECÁNICA**

**CARRERA MECÁNICA**

**“DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO  
AUTO BALANCEADO MONTADO EN UN CARRO MÓVIL PARA  
EL ANÁLISIS DE DISTINTAS TÉCNICAS DE CONTROL  
AUTOMÁTICO.”**

**Trabajo de Integración Curricular**

Tipo: Proyecto Técnico

Presentado para optar el grado académico de:

**INGENIERO MECÁNICO**

**AUTOR: DANIEL VICENTE OROZCO TORRES**

**DIRECTOR: Ing. GABRIEL VINICIO MOREANO SÁNCHEZ**

Riobamba – Ecuador

2022

© 2022, Daniel Vicente Orozco Torres

Se autoriza la reproducción total o parcial, con fines académicos, por cualquier medio o procedimiento, incluyendo cita bibliográfica del documento, siempre y cuando se reconozca el Derecho del Autor.

Yo, Daniel Vicente Orozco Torres, declaro que el presente trabajo de integración curricular es de mi autoría y los resultados de este son auténticos. Los textos en el documento que provienen de otras fuentes están debidamente citados y referenciados.

Como autor asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este trabajo de integración curricular; el patrimonio intelectual pertenece a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

Riobamba, 14 de marzo del 2022.

A handwritten signature in black ink, reading "Daniel Orozco". The signature is stylized with a large, sweeping initial 'D' and a cursive 'Orozco'.

**Daniel Vicente Orozco Torres**

**0604056606**

**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**FACULTAD DE MECÁNICA**

**CARRERA MECÁNICA**

El Tribunal del Trabajo de Integración Curricular certifica que: El Trabajo de Integración Curricular; tipo: Proyecto Técnico, **DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN PÉNDULO INVERTIDO AUTO BALANCEADO MONTADO EN UN CARRO MÓVIL PARA EL ANÁLISIS DE DISTINTAS TÉCNICAS DE CONTROL AUTOMÁTICO**, realizado por el señor: **DANIEL VICENTE OROZCO TORRES**, ha sido minuciosamente revisado por los Miembros del Trabajo de Integración Curricular, el mismo que cumple con los requisitos científicos, técnicos, legales, en tal virtud el Tribunal Autoriza su presentación.

	<b>FIRMA</b>	<b>FECHA</b>
Ing. Edwin Fernando Viteri Núñez <b>PRESIDENTE DEL TRIBUNAL</b>		2022-03-14
Ing. Gabriel Vinicio Moreano Sánchez <b>DIRECTOR DE TRABAJO DE INTEGRACIÓN CURRICULAR</b>		2022-03-14
Ing. Miguel Ángel Escobar Guachambala <b>MIEMBRO DEL TRIBUNAL</b>		2022-03-14

## **DEDICATORIA**

A mis padres y a mi familia que son el pilar principal de mi vida por los cuales quiero cada día superarme, a mis amigos que han formado parte de mi vida universitaria y se han vuelto muy importantes para mí, a todos los docentes que han aportado un granito de arena para que me encuentre finalizando este largo y duro camino que orgullosamente escogí.

**Daniel**

## **AGRADECIMIENTO**

Mi más sincero agradecimiento a toda mi familia por su apoyo y comprensión, a mi querida y prestigiosa Escuela Superior Politécnica de Chimborazo por haberme permitido formarme en ella, agradezco al Ing. Gabriel Moreano por compartirme su conocimiento el cual fue fundamental en la realización de este proyecto de tesis, agradezco al Ing. Miguel Escobar y al Ing. Geovany Novillo por invertir su tiempo en la revisión y sugerencias a este proyecto de tesis.

**Daniel**

## TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS.....	xii
ÍNDICE DE FIGURAS.....	xiii
ÍNDICE DE GRÁFICOS.....	xvi
ÍNDICE DE ANEXOS.....	xvii
RESUMEN.....	xviii
SUMMARY .....	xix
INTRODUCCIÓN .....	1

### CAPÍTULO I

1.	DIAGNÓSTICO DEL PROBLEMA.....	2
1.1	Antecedentes .....	2
1.2	Delimitación.....	3
1.2.1	<i>Delimitación espacial.</i> .....	3
1.2.2	<i>Delimitación sectorial.</i> .....	3
1.3	Formulación del problema .....	3
1.4	Objetivos .....	3
1.4.1	<i>Objetivo general.</i> .....	3
1.4.2	<i>Objetivos específicos.</i> .....	3

### CAPÍTULO II

2.	FUNDAMENTOS TEÓRICOS .....	4
2.1	Diseño y manufactura asistido por computadora CAD/CAM.....	4
2.1.1	<i>SolidWorks.</i> .....	5



2.1.2	<i>AutoCAD</i> .....	5
2.2	Despliegue de la función de calidad QFD.....	6
2.3	Estructura funcional .....	7
2.4	Corriente directa .....	8
2.5	Fuente independiente .....	8
2.6	Circuito eléctrico .....	9
2.7	Lazo en un circuito.....	10
2.8	Resistencia.....	10
2.9	Inductor.....	11
2.10	Ley de tensión de Kirchhoff .....	11
2.11	Motor de imán permanente de cd.....	12
2.12	Encoder .....	13
2.12.1	<i>Encoder óptico</i> .....	13
2.12.2	<i>Encoders incrementales</i> .....	14
2.12.3	<i>Encoders absolutos</i> .....	14
2.13	Arduino .....	15
2.14	ESP32 DevKite v2 .....	15
2.15	Sistemas de Control.....	16
2.16	Variable controlada y señal de control o variable manipulada .....	16
2.17	Sistemas.....	16
2.18	Perturbaciones.....	17
2.19	Control realimentado.....	17
2.20	Sistemas de control en lazo abierto.....	17
2.21	Compensación del sistema .....	18
2.22	Modelos matemáticos.....	18
2.22.1	<i>Movimiento traslacional</i> .....	19
2.22.2	<i>Movimiento rotacional</i> .....	19
2.22.3	<i>Elementos eléctricos</i> .....	21

2.22.3.1	<i>Resistencia</i> .....	21
2.22.3.2	<i>Inductor</i> .....	21
<b>2.22.4</b>	<b><i>Modelo de un motor DC</i></b> .....	<b>22</b>
2.22.4.1	<i>Amortiguador torsional</i> .....	22
2.22.4.2	<i>Torque del motor</i> .....	23
2.22.4.3	<i>Fuerza contraelectromotriz</i> .....	23
<b>2.22.5</b>	<b><i>Determinación de parámetros de un motor DC</i></b> .....	<b>24</b>
2.22.5.1	<i>Determinación de la resistencia de armadura</i> .....	24
2.22.5.2	<i>Determinación de la constante contraelectromotriz</i> .....	24
2.22.5.3	<i>Determinación de constante de fricción viscosa</i> .....	24
2.22.5.4	<i>Determinación de la constante de tiempo mecánica</i> .....	25
2.22.5.5	<i>Determinación del momento de inercia del motor</i> .....	25
<b>2.23</b>	<b>Sistema no lineal</b> .....	<b>25</b>
<b>2.24</b>	<b>Sistemas lineales</b> .....	<b>26</b>
<b>2.25</b>	<b>Espacio de estados</b> .....	<b>26</b>
<b>2.26</b>	<b>Diagrama de Bloques</b> .....	<b>27</b>
<b>2.27</b>	<b>Controladores automáticos</b> .....	<b>29</b>
<b>2.28</b>	<b>Control óptimo</b> .....	<b>30</b>
2.28.1	<i>Índice de desempeño</i> .....	30
2.28.2	<i>Formulación de los problemas de optimización</i> .....	30
2.28.3	<i>Sistema regulador cuadrático lineal LQR</i> .....	31
2.28.4	<i>Solución del regulador óptimo cuadrático con Matlab</i> .....	32

### CAPITULO III

<b>3.</b>	<b>MARCO METODOLÓGICO</b> .....	<b>33</b>
<b>3.1</b>	<b>Modelado en 3D y selección de elementos electrónicos del prototipo</b> .....	<b>33</b>
3.1.1	<i>Casa de la calidad</i> .....	33
3.1.2	<i>Análisis funcional</i> .....	34

<b>3.1.3</b>	<b><i>Selección de elementos electrónicos y mecánicos</i></b> .....	<b>36</b>
3.1.3.1	<i>Placa base y soporte</i> .....	36
3.1.3.2	<i>Neumáticos</i> .....	36
3.1.3.3	<i>Motorreductor con encoder</i> .....	36
3.1.3.4	<i>Soporte de montaje para motorreductores</i> .....	37
3.1.3.5	<i>Driver para motor dc</i> .....	38
3.1.3.6	<i>Módulo de control</i> .....	38
3.1.3.7	<i>Encoder rotacional</i> .....	39
3.1.3.8	<i>Fuente de alimentación</i> .....	40
3.1.3.9	<i>Péndulo invertido</i> .....	40
<b>3.1.4</b>	<b><i>Modelado del equipo en SolidWorks</i></b> .....	<b>41</b>
<b>3.2</b>	<b>Modelado dinámico del sistema péndulo invertido – carro móvil</b> .....	<b>42</b>
3.2.1	<i>Modelo dinámico del péndulo invertido</i> .....	43
3.2.2	<i>Modelo dinámico del carro móvil</i> .....	45
3.2.3	<i>Modelo dinámico del neumático y motorreductor DC</i> .....	46
3.2.4	<i>Sistema no lineal del sistema péndulo invertido-carro móvil</i> .....	48
3.2.5	<i>Sistema lineal del sistema péndulo invertido-carro móvil</i> .....	49
3.2.6	<i>Espacio de estados del sistema péndulo invertido-carro móvil</i> .....	50
3.2.7	<i>Determinación de los parámetros del motor</i> .....	52
3.2.8	<i>Ecuaciones de estado del modelo lineal</i> .....	55
<b>3.3</b>	<b>Implementación del modelo dinámico en Simulink</b> .....	<b>56</b>
<b>3.4</b>	<b>Sintonización de un control LQR para balanceo del péndulo invertido</b> .....	<b>58</b>
<b>3.5</b>	<b>Verificación del control automático LQR en Simulink</b> .....	<b>59</b>
<b>3.6</b>	<b>Construcción del prototipo</b> .....	<b>61</b>
<b>3.7</b>	<b>Costos</b> .....	<b>65</b>
<b>3.8</b>	<b>Programación del control automático en ESP32 mediante Arduino</b> .....	<b>67</b>
<b>3.9</b>	<b>Guía de práctica</b> .....	<b>67</b>

## CAPITULO IV

<b>4.</b>	<b>RESULTADOS.....</b>	<b>68</b>
<b>4.1</b>	<b>Pruebas de funcionamiento .....</b>	<b>68</b>
<b>4.1.1</b>	<b><i>Pruebas mecánicas.....</i></b>	<b>68</b>
4.1.1.1	<i>Prueba 1: Dimensiones y material de la estructura.....</i>	68
4.1.1.2	<i>Prueba 2: Elementos y ensamblaje de la máquina. ....</i>	68
<b>4.1.2</b>	<b><i>Pruebas electrónicas .....</i></b>	<b>69</b>
4.1.2.1	<i>Prueba 1: Funcionamiento de ESP32, placa D-1356 y de la batería LIPO.....</i>	69
4.1.2.2	<i>Prueba 2: Funcionamiento de controladores L298 y motorreductores.....</i>	69
4.1.2.3	<i>Prueba 3: Funcionamiento de encoder de motorreductores y E6B2.....</i>	70
<b>4.1.3</b>	<b><i>Pruebas del equipo en funcionamiento.....</i></b>	<b>70</b>
4.1.3.1	<i>Prueba 1: Funcionamiento del equipo.....</i>	70
4.1.3.2	<i>Prueba 2: Funcionamiento del control LQR.....</i>	71
<b>4.2</b>	<b>Análisis de resultados.....</b>	<b>71</b>
<b>4.3</b>	<b>Discusión .....</b>	<b>73</b>
<b>CONCLUSIONES.....</b>		<b>77</b>
<b>RECOMENDACIONES.....</b>		<b>78</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>		
<b>ANEXOS</b>		

## ÍNDICE DE TABLAS

<b>Tabla 1-3:</b> Características del motorreductor elegido .....	52
<b>Tabla 2-3:</b> Valores experimentales en los motorreductores .....	53
<b>Tabla 3-3:</b> Valores numéricos de los parámetros del equipo .....	55
<b>Tabla 4-3:</b> Peso de las partes del equipo .....	65
<b>Tabla 5-3:</b> Detalle de costos.....	66

## ÍNDICE DE FIGURAS

<b>Figura 1-2:</b>	Estructura de la Casa de la Calidad.....	7
<b>Figura 2-2:</b>	Estructura funcional.....	8
<b>Figura 3-2:</b>	Corriente directa.....	9
<b>Figura 4-2:</b>	Símbolos para fuentes de tensión independientes.....	9
<b>Figura 5-2:</b>	Circuito en serie.....	10
<b>Figura 6-2:</b>	Circuito con dos lazos.....	10
<b>Figura 7-2:</b>	Resistor y su símbolo.....	11
<b>Figura 8-2:</b>	Forma de un inductor.....	11
<b>Figura 9-2:</b>	Circuito de un solo lazo.....	12
<b>Figura 10-2:</b>	Espira sencilla giratoria entre caras polares curvas.....	13
<b>Figura 11-2:</b>	Encoder óptico.....	13
<b>Figura 12-2:</b>	Encoder incremental.....	14
<b>Figura 13-2:</b>	Encoder absoluto.....	15
<b>Figura 14-2:</b>	Movimiento de partículas que muestra el sistema de coordenadas, la fuerza aplicada $f$ y la aceleración resultante $a$ , la velocidad $v$ y la trayectoria.....	20
<b>Figura 15-2:</b>	Un objeto que gira alrededor de un eje fijo.....	20
<b>Figura 16-2:</b>	Representación de un circuito con una resistencia.....	21
<b>Figura 17-2:</b>	Representación de un circuito con un inductor.....	22
<b>Figura 18-2:</b>	Diagrama de un motor DC.....	23
<b>Figura 19-2:</b>	Diagrama de bloques del sistema de control lineal invariante en el tiempo, representado en el espacio de estados.....	28
<b>Figura 20-2:</b>	Diagrama de bloques de (a) sistema en lazo cerrado (b) Sistema de lazo cerrado realimentado.....	28
<b>Figura 21-2:</b>	Diagrama de bloques de un sistema de control industrial, formado por un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición).....	29

<b>Figura 22-2:</b>	Sistema regulador óptimo .....	32
<b>Figura 1-3:</b>	Nivel cero del análisis funcional.....	34
<b>Figura 2-3:</b>	Nivel uno del análisis funcional.....	34
<b>Figura 3-3:</b>	Nivel 2 del análisis funcional.....	35
<b>Figura 4-3:</b>	Neumáticos con acople .....	36
<b>Figura 5-3:</b>	Soporte para motorreductor .....	38
<b>Figura 6-3:</b>	Módulo L298 .....	38
<b>Figura 7-3:</b>	Módulo ESP32.....	39
<b>Figura 8-3:</b>	Placa D-1356.....	39
<b>Figura 9-3:</b>	Encoder rotacional E6B2 .....	40
<b>Figura 10-3:</b>	Batería LiPo 1600mAh .....	40
<b>Figura 11-3:</b>	Modelado del equipo en SolidWorks.....	41
<b>Figura 12-3:</b>	Ubicación del centro de gravedad.....	42
<b>Figura 13-3:</b>	Sistema péndulo invertido sobre carro móvil .....	42
<b>Figura 14-3:</b>	Diagrama del cuerpo libre del péndulo invertido.....	43
<b>Figura 15-3:</b>	Diagrama de cuerpo libre del carro móvil .....	45
<b>Figura 16-3:</b>	Diagrama del cuerpo libre del neumático .....	46
<b>Figura 17-3:</b>	Modelo dinámico del motor DC .....	47
<b>Figura 18-3:</b>	Diagrama de bloques en Simulink del sistema no controlado .....	56
<b>Figura 19-3:</b>	Diagrama de bloques en Simulink del sistema controlado .....	59
<b>Figura 20-3:</b>	Placa base del equipo .....	61
<b>Figura 21-3:</b>	Placa superior y soporte para encoder del equipo.....	61
<b>Figura 22-3:</b>	Montaje del motorreductor y acople en el soporte.....	62
<b>Figura 23-3:</b>	Montaje de los 4 motorreductores en la placa base.....	62
<b>Figura 24-3:</b>	Montaje de los elementos electrónicos en la placa base .....	63
<b>Figura 25-3:</b>	Diagrama de conexión de los elementos electrónicos.....	63
<b>Figura 26-3:</b>	Ensamblaje de la placa superior y elevadores.....	64
<b>Figura 27-3:</b>	Ensamblaje del soporte del encoder, encoder, eje del encoder y chumacera.....	64

**Figura 28-3:** Sistema péndulo invertido - carro móvil ensamblado completamente ..... 65



## ÍNDICE DE GRÁFICOS

<b>Gráfico 1-3:</b>	Casa de la calidad del sistema péndulo invertido - carro movil .....	33
<b>Gráfico 2-3:</b>	Fuerza contraelectromotriz vs velocidad angular.....	53
<b>Gráfico 3-3:</b>	Curva de reacción del motorreductor .....	54
<b>Gráfico 4-3:</b>	Variables de estado simuladas del sistema no controlado.....	57
<b>Gráfico 5-3:</b>	Ángulo del péndulo vs tiempo del regulador LQR simulado.....	60
<b>Gráfico 6-3:</b>	Velocidad angular del péndulo vs tiempo del regulador LQR simulado.....	60
<b>Gráfico 7-3:</b>	Desplazamiento del carro móvil vs tiempo del regulador LQR simulado.....	60
<b>Gráfico 8-3:</b>	Velocidad lineal del carro móvil vs tiempo del regulador LQR simulado.....	60
<b>Gráfico 1-4:</b>	Ángulo del péndulo vs tiempo del regulador LQR real.....	72
<b>Gráfico 2-4:</b>	Velocidad angular del péndulo vs tiempo del regulador LQR real .....	72
<b>Gráfico 3-4:</b>	Desplazamiento del carro móvil vs tiempo del regulador LQR real .....	73
<b>Gráfico 4-4:</b>	Velocidad lineal del carro móvil vs tiempo del regulador LQR real.....	73
<b>Gráfico 5-4:</b>	Señal de voltaje vs tiempo del regulador LQR real.....	73
<b>Gráfico 6-4:</b>	Ángulo del péndulo del modelo simulado y del equipo real .....	74
<b>Gráfico 7-4:</b>	Comparación de la velocidad angular entre el modelo simulado y el experimental .....	75
<b>Gráfico 8-4:</b>	Comparación de la posición entre el modelo simulado y el experimental .....	75
<b>Gráfico 9-4:</b>	Comparación de la velocidad lineal entre el modelo simulado y el experimental .....	76

## ÍNDICE DE ANEXOS

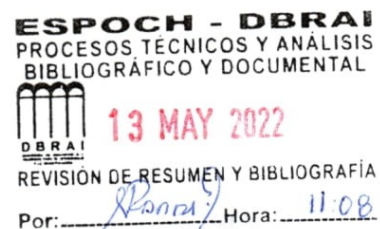
- ANEXO A:** Clasificación de pines de ESP32
- ANEXO B:** Características de motorreductor
- ANEXO C:** Características del encoder rotacional E6B2-CWZ3E
- ANEXO D:** Características del controlador L298N
- ANEXO E:** Curva característica de descarga de una celda de batería LiPo
- ANEXO F:** Dimensiones y material de la estructura.
- ANEXO G:** Elementos y ensamblaje de la máquina
- ANEXO H:** Funcionamiento del módulo ESP32, placa D-1356 y de la batería LIPO
- ANEXO I:** Funcionamiento de controladores L298 y motorreductores
- ANEXO J:** Funcionamiento de encoder de motorreductores y E6B2
- ANEXO K:** Funcionamiento del equipo
- ANEXO L:** Funcionamiento del control LQR
- ANEXO M:** Vista de Conjunto
- ANEXO N:** Vista Explosionada
- ANEXO O:** Placa base
- ANEXO P:** Placa superior, Soporte peso y Soporte encoder
- ANEXO Q:** Elevador cilíndrico, Eje de encoder y Péndulo
- ANEXO R:** Topes, Elevador chumaceras, Cilindro y Eje unión
- ANEXO S:** Programacion del ESP32 en arduino
- ANEXO T:** Guía de práctica

## RESUMEN

El objetivo de este estudio fue diseñar, construir e implementar un péndulo invertido auto balanceado montado en un carro móvil para el aprendizaje de diferentes métodos de control automático para los estudiantes de la Carrera de Ingeniería Mecánica de la ESPOCH. Se aplicó el método QFD con el cual se obtuvo las características técnicas del equipo, posteriormente se realizó el diseño funcional describiendo el funcionamiento en sus distintos niveles. El diseño 3D se realizó mediante el software SolidWorks el cual permitió dimensionar y seleccionar los diferentes elementos mecánicos y electrónicos. Se realizó el modelo dinámico del equipo y estas ecuaciones se linealizaron representándolas en espacio de estados que permitió representar la planta dentro de Simulink obteniéndose las curvas donde muestra que el sistema es naturalmente inestable. Se aplicó un regulador cuadrático lineal obteniéndose la matriz de realimentación de estado K mediante el uso del software Matlab, se aplicó la realimentación de estados integrando la matriz K al modelo dinámico del equipo, representado en Simulink, esta simulación permitió observar la regulación de las variables de estado. Se construyó el equipo mediante el uso de máquinas de precisión obteniéndose una gran exactitud dimensional y un correcto ensamblaje, finalmente se implementó el control LQR en el módulo ESP32 mediante la programación en lenguaje C. Las curvas obtenidas de las variables de estados son muy parecidas a la simuladas, donde se muestra que la posición del carro móvil no regresa a su posición inicial cero. Todas las variables, excepto la posición, varían alrededor de cero grados y esto se debe al sistema de control ya que prioriza el control del ángulo del péndulo sacrificando el control de las demás variables. Se recomienda agregar un integrador al control LQR para que la posición del carro móvil pueda mantenerse en el origen.

**Palabras clave:** <PÉNDULO INVERTIDO AUTO BALANCEADO> <REGULADOR CUADRÁTICO LINEAL (LQR)> <CONTROL AUTOMÁTICO> <CONTROL ÓPTIMO> <ESPACIO DE ESTADOS>.

0906-DBRA-UPT-2022



## ABSTRACT

The objective of this study was to design, build and implement a self-balancing inverted pendulum mounted on a mobile cart for learning different methods of automatic control for students of the Mechanical Engineering Degree at ESPOCH. The QFD method was applied with which the technical characteristics of the equipment were obtained, later the functional design was carried out describing the operation at its different levels. The 3D design was carried out using the SolidWorks software which allowed the dimensioning and selection of the different mechanical and electronic elements. The dynamic model of the equipment was made and these equations were linearized by representing them in state space that allowed the plant to be represented within Simulink, obtaining the curves where it shows that the system is naturally unstable. A linear quadratic regulator was applied, obtaining the state feedback matrix  $K$  using Matlab software, the state feedback was applied by integrating the  $K$  matrix to the dynamic model of the equipment, represented in Simulink, this simulation allowed observing the regulation of the variables of State. The equipment was built with precision machines, obtaining great dimensional accuracy and correct assembly. Finally, the LQR control was implemented in the ESP32 module through programming in C language. The curves obtained from the state variables are very similar to the simulated one, where it is shown that the position of the mobile car does not return to its initial zero position. All the variables, except the position, vary around zero degrees and this is due to the control system as it prioritizes control of the pendulum angle sacrificing control of the other variables. It is recommended to add an integrator to the LQR control so that the position of the moving carriage can be maintained at the origin.

**Keywords:** <SELF-BALANCED INVERTED PENDULUM> <LINEAR QUADRATIC REGULATOR (LQR)> <AUTOMATIC CONTROL> <OPTIMAL CONTROL> <STATE SPACE>.

LUIS  
FRANCISCO  
MANTILLA  
CABRERA

Firmado  
digitalmente por  
LUIS FRANCISCO  
MANTILLA  
CABRERA  
Fecha: 2022.05.16  
23:33:51 -05'00'

## INTRODUCCIÓN

Este documento describe la metodología para el diseño, construcción y el control de un péndulo invertido sobre un carro móvil el cual sirve para los estudiantes de la carrera de ingeniería mecánica en el cual pueden aplicar de forma teórica y práctica diferentes técnicas de control automático lo que permitirá comparar el desempeño de cada una de estas.

El péndulo invertido sobre un carro móvil no es más que una barra vertical articulada en su parte inferior sobre un carro móvil el cual debe mantener dicha barra en su posición vertical mediante la aplicación de voltaje a los motores que giran en sentido horario u antihorario balanceando dicha barra mediante la implementación de un control automático que adquiere el estado de todas las variables para realizar la acción de control.

El péndulo invertido auto balanceado se ha convertido en un equipo conveniente para la aplicación de distintas técnicas de control automático debido a su alta inestabilidad ya que es un modelo no lineal y esto lo vuelve complejo, impredecible y caótico para su control. El rápido cambio en las variables que describe y controlan este equipo mecánico-electrónico (ángulo del péndulo, posición, etc.) permiten una observación y sintonización del control automático de forma inmediata lo que no ocurre por ejemplo con sistemas térmicos donde la reacción del equipo se observa dentro de un tiempo mucho más amplio por lo cual aumenta el tiempo de sintonización de un control automático.

El uso de un módulo ESP32 el cual cuenta con conectividad inalámbrica Bluetooth y WIFI en el mismo modulo, permitirá en un futuro desarrollar aplicaciones IoT(Internet de las cosas) convirtiéndose este equipo en un área de investigación y desarrollo para los estudiantes. ESP32 tiene un alto rendimiento y mejores características comparándolas con Arduino Uno, además tiene una frecuencia de operación 240MHz siendo 15 veces más rápido que Arduino uno, este nos ayuda a tener una respuesta más rápida.

# CAPÍTULO I

## 1. DIAGNÓSTICO DEL PROBLEMA

### 1.1 Antecedentes

En la Carrera de Ingeniería Mecánica actualmente no se dispone de un dispositivo que permita ver el funcionamiento, aplicación y desempeño de los diferentes métodos de control automático por lo que es necesario realizar un banco de pruebas para su experimentación y aprendizaje.

“Los péndulos invertidos constituyen un banco de pruebas completo e interesante para la ingeniería de control. Uno de los más estudiados de esta familia de artefactos es el denominado péndulo invertido sobre un vehículo, al que corrientemente se denomina como carro” (Aracil y Gordillo, 2005, p.8).

*Gran parte de la optimización de procesos se debe a la automatización e implementación de sistemas de control cada vez más eficaces y que necesitan menos supervisión humana, previniendo los errores de estos, logrando mayor eficiencia, rapidez y precisión. Muchos de los procesos que deben controlarse son sistemas complejos que tienden a la inestabilidad (Roca, 2015, p. 1).*

El péndulo invertido ha sido desarrollado desde los años 50, primordialmente para la enseñanza de muchas teorías de control automático. Robergeen, en su tesis de graduación “The Mechanical Seal”, fue la primera persona que dio solución a la estabilización del péndulo invertido usando control lineal. (Roca, 2015, p. 1)

“Su aplicación en la vida cotidiana se da desde en el control de estabilidad de grúas, hasta la construcción de vehículos de desplazamiento para humanos que implementan este problema” (Hernández, Legaspi y Peláez, 2012, p. 9)

En aeroespacial, para mantener a un cohete en la posición vertical invertida durante su despegue se necesita de un control ya que el ángulo de inclinación del cohete depende de la variación de la aplicación del ángulo de la fuerza de empuje la cual se encuentra en la base del cohete. (Cruz et al., 2014)

*En Biomecánica el péndulo invertido es frecuentemente utilizado para modelar bípedos caminantes, tal como el robot humanoide Asimo de Honda. En los robots bípedos la pierna de apoyo en contacto con el suelo a menudo se modela como un péndulo invertido, mientras que la pierna en movimiento se comporta como un péndulo que oscila libremente, suspendido de la cadera del humanoide. (Cruz et al., 2014).*

## **1.2 Delimitación**

### **1.2.1 Delimitación espacial.**

El presente trabajo se realiza en la ciudad de Riobamba en la provincia de Chimborazo perteneciente al territorio nacional del Ecuador.

### **1.2.2 Delimitación sectorial.**

El presente trabajo se acoge al Plan Nacional de Desarrollo 2017-2021 apoyado en el objetivo 1 el cual dicta: “Garantizar una vida digna con iguales oportunidades para todas las personas”

## **1.3 Formulación del problema**

El control automático es utilizado en muchas maquinas que diariamente se utilizan. El control de la temperatura en el refrigerador, de los diferentes tiempos y fases en una lavadora, soldadura en el ensamblaje de autos, etc., son algunos ejemplos de su importancia y uso.

La falta de dispositivos o bancos de pruebas que permitan a los estudiantes una mejor comprensión y experimentación de los diferentes métodos de control automático que se pueden aplicar a cualquier sistema es un inconveniente ya que todo lo estudiado teóricamente debe ser aplicado a un modelo real para apreciar el comportamiento entre los distintos métodos de control automático, sus diferencias, ventajas y desventajas.

## **1.4 Objetivos**

### **1.4.1 Objetivo general**

Diseñar, construir e implementar un péndulo invertido auto balanceado montado en un carro móvil para el aprendizaje y aplicación de las diferentes técnicas y métodos de control.

### **1.4.2 Objetivos específicos**

- Diseñar en un software 3D el sistema a implementar y seleccionar los elementos eléctricos, electrónicos y mecánicos para su correcto funcionamiento.
- Implementar un regulador cuadrático lineal para la estabilidad del péndulo invertido.
- Construir y comprobar la funcionalidad del equipo.
- Realizar una guía de práctica para el uso del equipo.

## CAPÍTULO II

### 2. FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### 2.1 Diseño y manufactura asistido por computadora CAD/CAM

El diseño asistido por computadora (CAD) permite crear un modelo geométrico del producto, donde se pueden realizar diferentes estudios y desarrollos ingenieriles a este, hasta definirlo completamente mediante formas, dimensiones, tolerancias, materiales, despieces, características donde quedan plasmadas en documentación de fichas técnicas, catálogos, libros de servicios y mantenimiento que servirán para su construcción y comercialización. (Ferré, 2009, p. 13)

Debney cuenta un poco de la historia del CAD y como influyo en el mundo:

*El CAD se inventó por primera vez en la década de 1960, pero comenzó a ser común en la industria de la construcción en la década de 1980 y finalmente suplantó a los tableros de dibujo en la década de 1990. Si bien el primer borrador de un dibujo puede llevar un tiempo similar en un tablero de dibujo, los cambios (y siempre hay cambios) son mucho más rápidos con CAD. En los pizarrones de dibujo, tuvimos que borrar las líneas de lápiz del papel y rascar con cuidado la tinta de la película de dibujo con un bisturí, antes de volver a dibujar con cuidado el elemento infractor. Con CAD puede mover, estirar, rotar y editar las imágenes o el modelo con poco esfuerzo. (Debney, 2018, p. 31)*

“El CAD puede considerarse una tecnología en plena aplicación dentro de la industria, con una integración total de las funciones de diseño desde las primeras fases de estudio, análisis, cálculo, simulación y pruebas, hasta la obtención de la documentación necesaria para la especificación del producto” (Ferré, 2009, p. 15).

Ferré da una introducción de la tecnología CAD-CAM y su uso:

*La introducción de las tecnologías del CAD-CAM es una buena oportunidad para la integración de todas las funciones de producción, desde el diseño a la entrega del producto terminado pasando por todas las fases intermedias del proceso y cubriendo todas las funciones de gestión y control. La pieza clave es la capacidad del CAD-CAM de gestionar una sola base de datos del producto con toda la información geométrica y alfanumérica asociada. Pero el término "base de datos" es bastante abstracto. En su sentido más amplio, es la recopilación de toda la información sobre el producto junto con todo lo necesario para su fabricación. Si el*



*producto es complejo y está formado por conjuntos, subconjuntos y piezas, cada una de ellas debe estar contenida en la base de datos con toda su información asociada.* (Ferré, 2009, p. 12)

### **2.1.1 SolidWorks**

La empresa creadora de este software ofrece un concepto de SolidWorks:

*SOLIDWORKS es un software de diseño CAD 3D (diseño asistido por computadora) para modelar piezas y ensamblajes en 3D y planos en 2D. El software que ofrece un abanico de soluciones para cubrir los aspectos implicados en el proceso de desarrollo del producto. Sus productos ofrecen la posibilidad de crear, diseñar, simular, fabricar, publicar y gestionar los datos del proceso de diseño.* (Dassault Systèmes, 2021)

SolidWorks brinda muchas herramientas completas para crear, simular, administrar datos, publicar, gestionar proyectos y procesos enfocándose en la innovación y la productividad de los recursos ingenieriles. Todo esto permite que el diseño de productos sea mejores, rápidos y rentables. (Dassault Systèmes, 2021)

SolidWorks tiene diferentes herramientas que permiten entender mejor el uso e importancia de este software, y son:

- Herramientas de diseño para crear modelos y ensamblajes.
- Herramientas de diseño para la fabricación mecánica, que automatiza documentos de inspección y genera documentación sin planos 2D.
- Herramientas de simulación para evaluar el diseño y garantizar que es el mejor posible.
- Herramientas que evalúan el impacto medioambiental del diseño durante su ciclo de vida.
- Herramientas que reutilizan los datos de CAD en 3D para simplificar el modo en que las empresas crean, conservan y utilizan contenidos para la comunicación técnica.

### **2.1.2 AutoCAD**

Gindis describe a este software como:

*AutoCAD es un paquete de software de dibujo y diseño desarrollado y comercializado por Autodesk, Inc. A partir de 2011, ha existido durante aproximadamente 29 años, varias vidas en la industria del software de entonces. Ha*

*crecido desde sus modestos comienzos hasta convertirse en un estándar de la industria, a menudo imitado, a veces superado, pero nunca igualado. La premisa básica de su diseño es simple y es la principal razón del éxito de AutoCAD. Cualquier cosa que se te ocurra, puedes dibujar rápida y fácilmente. Durante muchos años, AutoCAD siguió siendo un excelente tablero de dibujo electrónico 2D, que reemplazó el lápiz y el papel para toda una generación de profesionales técnicos. En versiones recientes, sus capacidades 3D finalmente maduraron, y AutoCAD ahora también se considera una excelente herramienta de visualización 3D, especialmente para arquitectura y diseño de interiores.* (Gindis, 2012, p. xxi)

AutoCAD permite utilizar diferentes herramientas y permite realizar diferentes actividades, entre las más destacables se tiene:

- Crea, anota y edita geometría en 2D y modelos en 3D con sólidos, superficies y objetos de malla.
- Automatiza tareas como, por ejemplo, comparar dibujos, realizar un recuento, añadir bloques, crear tablas de planificación, etc.
- Personaliza con las aplicaciones complementarias y las API.

Gindis da su idea de la importancia de AutoCAD:

*[...] Este es un software verdaderamente global que ha sido adoptado por millones de arquitectos, diseñadores e ingenieros en todo el mundo. A lo largo de los años, Autodesk amplió este alcance mediante la introducción de paquetes complementarios que personalizan AutoCAD para tareas específicas de la industria, como ingeniería eléctrica, civil y mecánica. Sin embargo, debajo de todos estos complementos sigue estando AutoCAD simple [...]* (Gindis, 2012, p. xxi)

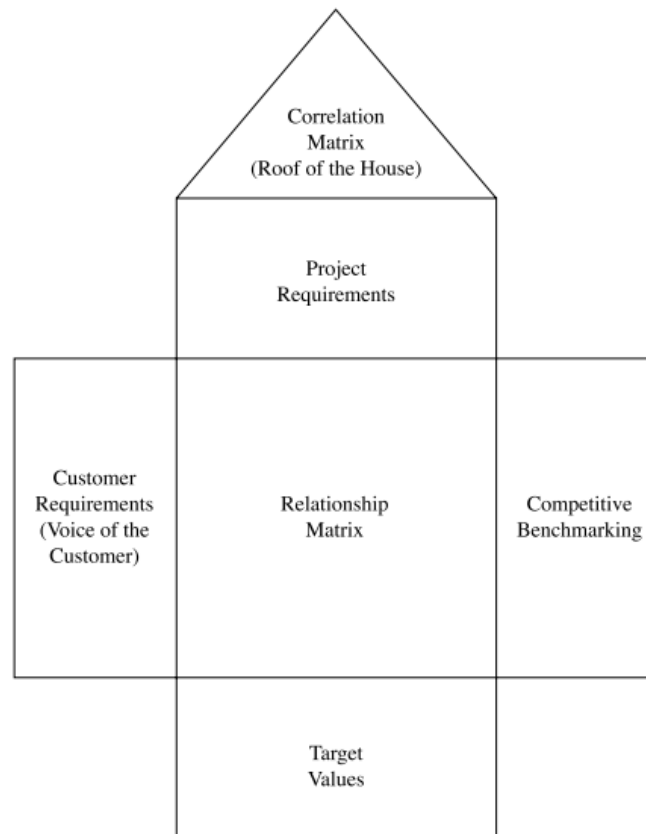
## **2.2 Despliegue de la función de calidad QFD**

Es un método usado para convertir los requerimientos del cliente en datos técnicos para cada nivel del desarrollo del producto iniciando desde el concepto, desarrollo, ingeniería, fabricación hasta la distribución. Cuando esto se cumple cada intervención en el proceso del proyecto ayuda a cumplir con los requisitos expresados por los clientes del proyecto. (Duncan y Luftig, 1995, p. 144)

QFD utiliza unas matrices para relacionar la voz del usuario (los requisitos del cliente) con los requisitos del proyecto (datos técnicos). El QFD también es denominado “Casa de la Calidad” ya que la matriz tiene dicha forma como se observa en la Figura 1-2. (Milosevic, 2003, p. 113)

Los pasos para construir la Casa de la Calidad son los siguientes:

- Preparar los requisitos del cliente
- Identificar los requisitos del proyecto.
- Vincular los requisitos del cliente con los requisitos del proyecto.
- Punto de referencia.
- Desarrollar valores objetivo.
- Deténgase o continúe.



**Figura 1-2:** Estructura de la Casa de la Calidad

**Fuente:** Milosevic, 2003, p. 114

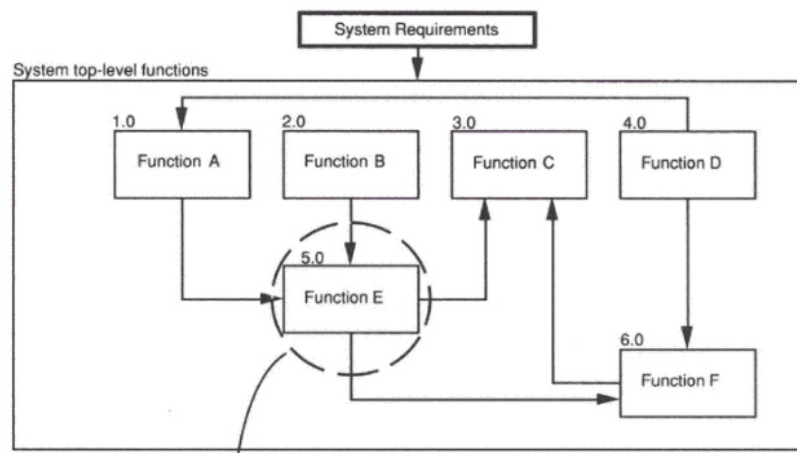
La ventaja de utilizar esta metodología es que tiene simplicidad conceptual ya que es fácil de entender por su procedimiento lógico y con sentido común. Además de esto posee un poder visual el cual permite comprender mejor los requerimientos del usuario y las características más importantes a cumplir en el proyecto. (Milosevic, 2003, p. 120)

### 2.3 Estructura funcional

Para el diseño preliminar y conceptual inicial se realiza la estructura funcional del sistema que sirve para la identificación de los elementos necesarios permitiendo que el sistema cumpla su

función. Una función es una acción específica o discreta necesaria para lograr un objetivo dado; es decir, una operación que el sistema debe realizar para cumplir su misión. Dichas funciones pueden hacer uso de equipos, personas, software, instalaciones, datos o composiciones de estos. En conclusión, el objetivo es especificar los "qué" y no los "cómo"; es decir, lo que se necesita conseguir versus cómo se debe hacer. (Blanchard y Blyler, 2016, p. 74)

El análisis funcional se puede facilitar haciendo uso de diagramas de bloques funcionales, como se ilustra en la Figura 2-2. Los diagramas de bloques permiten estructurar las necesidades del sistema en términos funcionales. Esto permite ilustrar la formación básica del sistema e identificar interfaces funcionales. (Blanchard y Blyler, 2016, p. 75)



**Figura 2-2:** Estructura funcional

Fuente: Blanchard y Blyler, 2016, p. 76

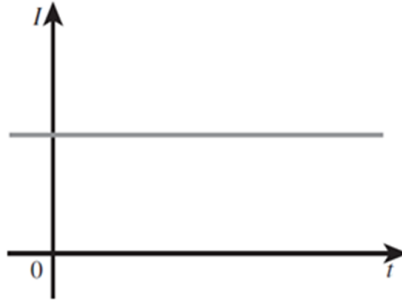
## 2.4 Corriente directa

“Es una corriente que permanece constante en el tiempo. Por convención, el símbolo  $I$  se usa para representar tal corriente constante” (Alexander y Sadiku, 2006, p. 7).

“La terminología  $cd$  [...] es una abreviatura del término corriente directa, el cual engloba los distintos sistemas eléctricos en que existe un flujo de carga unidireccional (“en una sola dirección”)” (Boylestad, 2004, p. 39).

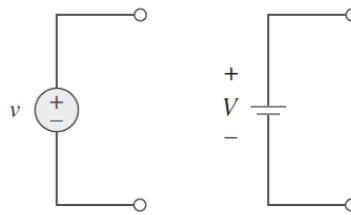
## 2.5 Fuente independiente

Una fuente independiente es la encargada de suministrar al circuito la corriente suficiente y necesaria para mantener la tensión entre los terminales. Estas pueden ser las baterías, generadores, etc. (Alexander y Sadiku, 2006, p. 15)



**Figura 3-2:** Corriente directa

Fuente: Alexander y Sadiku, 2006



**Figura 4-2:** Símbolos para fuentes de tensión independientes

Fuente: Alexander y Sadiku, 2006, p. 15

## 2.6 Circuito eléctrico

Alexander y Sadiku dan un concepto del circuito eléctrico:

*En ingeniería eléctrica, a menudo interesa comunicar o transferir energía de un punto a otro. Hacerlo requiere una interconexión de dispositivos eléctricos. A tal interconexión se le conoce como circuito eléctrico, y a cada componente del circuito como elemento.*

*Un circuito eléctrico es una interconexión de elementos eléctricos.*

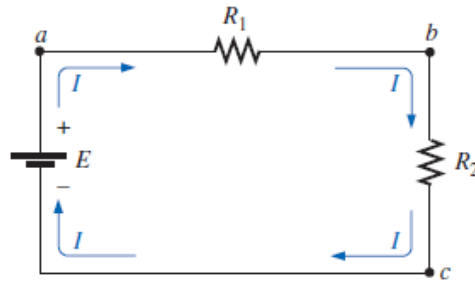
*Los circuitos eléctricos se usan en numerosos sistemas eléctricos para realizar diferentes tareas. Por análisis de un circuito se entiende un estudio del comportamiento del circuito: ¿cómo responde a una entrada determinada? ¿Cómo interactúan los elementos y dispositivos interconectados en el circuito? (Alexander y Sadiku, 2006, p. 4)*

Un circuito eléctrico está formado por un número cualquiera de elementos conectados en diferentes puntos o nodos, permitiendo que la carga o energía fluya a través de una trayectoria

cerrada. Se puede ver esto en la Figura 5-2 donde se tiene conectados tres elementos en una trayectoria cerrada donde circula la corriente  $I$ . (Boylestad, 2004, p. 130)

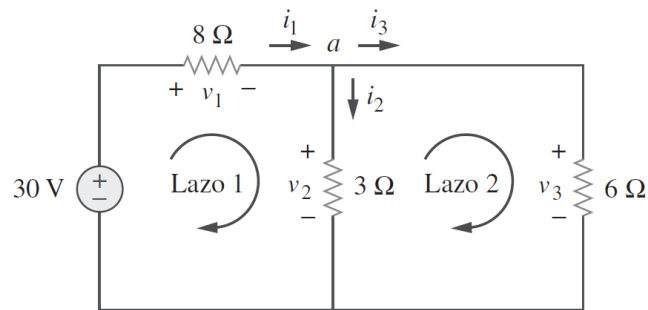
## 2.7 Lazo en un circuito

“Un lazo es una trayectoria cerrada que se inicia en un nodo, pasa por un conjunto de nodos y retorna al nodo inicial sin pasar por ningún nodo más de una vez. [...] Los lazos o trayectorias independientes dan por resultado conjuntos independientes de ecuaciones.” (Alexander y Sadiku, 2006)



**Figura 5-2:** Circuito en serie

Fuente: Boylestad, 2004, p. 130

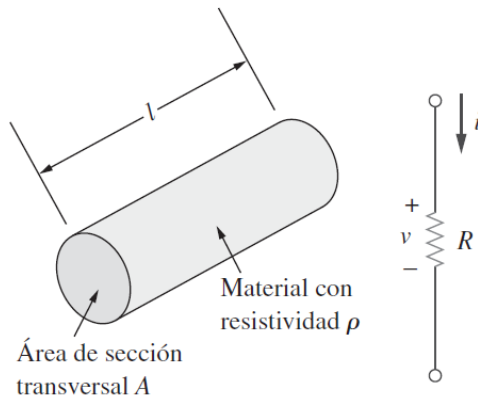


**Figura 6-2:** Circuito con dos lazos

Fuente: Alexander y Sadiku, 2006, p. 42

## 2.8 Resistencia

“Los materiales en general poseen el comportamiento característico de oponer resistencia al flujo de la carga eléctrica. Esta propiedad física, o capacidad para resistir a la corriente, se conoce como resistencia y se representa con el símbolo  $R$ ” (Alexander y Sadiku, 2006, p. 30)



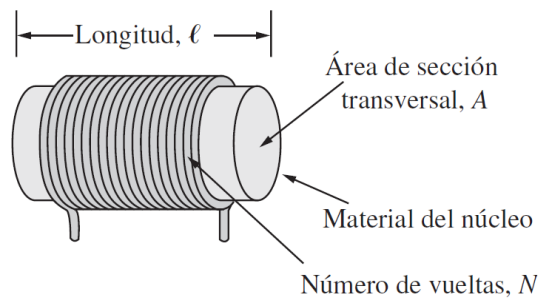
**Figura 7-2:** Resistor y su símbolo

Fuente: Alexander y Sadiku, 2006, p. 30

## 2.9 Inductor

“Un inductor es un elemento pasivo diseñado para almacenar energía en su campo magnético. Los inductores encuentran numerosas aplicaciones en sistemas electrónicos y de potencia” (Alexander y Sadiku, 2006, p. 226).

Un inductor suele formarse como una bobina cilíndrica para aumentar el efecto inductivo, donde se enrolla un conductor con muchas vueltas como se muestra en la Figura 8-2. (Alexander y Sadiku, 2006, p. 226)



**Figura 8-2:** Forma de un inductor

Fuente: Alexander y Sadiku, 2006, p. 226

## 2.10 Ley de tensión de Kirchhoff

Para el análisis de circuitos, la ley de ohm no es suficiente por lo que se debe aplicando las dos leyes de Kirchhoff hay suficientes herramientas para analizar dichos circuitos.

La segunda ley de Kirchhoff también conocida como ley de mallas, se obtuvo mediante el principio de conservación de energía.

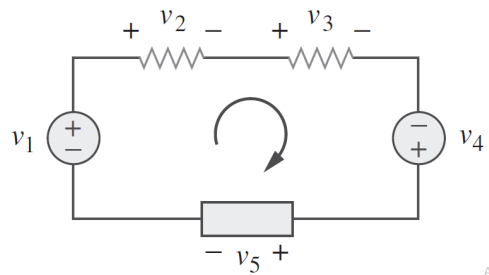
“La ley de tensión de Kirchhoff (LTK) establece que la suma algebraica de todas las tensiones alrededor de una trayectoria cerrada (o lazo) es cero ” (Alexander y Sadiku, 2006, p. 39).

Se expresa de la siguiente manera:

$$\sum_{m=1}^M v_m = 0 \quad (1)$$

A continuación, se muestra la aplicación de dicha al circuito de la Figura 9-2 obteniéndose lo siguiente:

$$-v_1 + v_2 + v_3 - v_4 = 0 \quad (2)$$



**Figura 9-2:** Circuito de un solo lazo

Fuente: Alexander y Sadiku, 2006, p. 39

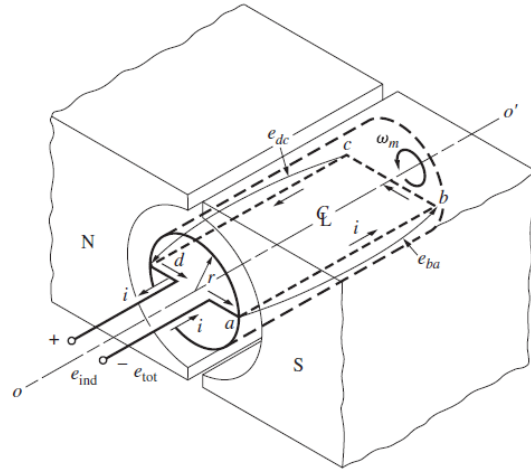
## 2.11 Motor de imán permanente de cd

Chapman describe en general a los motores de cd como:

*Las máquinas de cd son generadores que convierten energía mecánica en energía eléctrica de cd y motores que convierten energía eléctrica de cd en energía mecánica. La mayoría de las máquinas de cd son semejantes a las máquinas de ca en el sentido de que tienen voltajes y corrientes de ca dentro de ellas; las máquinas de cd cuentan con una salida de cd simplemente porque hay un mecanismo que convierte los voltajes internos de ca en voltajes de cd en sus terminales. Puesto que a este mecanismo se le llama conmutador, a la maquinaria de cd también se le conoce como maquinaria de colector o de conmutación. (Chapman, 2012, p. 301)*

“Un motor de cd de imán permanente (MCDIP) es un motor de cd cuyos polos están hechos de imanes permanentes [...] son menos costosos, más pequeños, más sencillos y con mayor eficiencia que los motores de cd correspondientes con campos electromagnéticos separados.” (Chapman, 2012, p. 364)





**Figura 10-2:** Espira sencilla giratoria entre caras polares curvas.

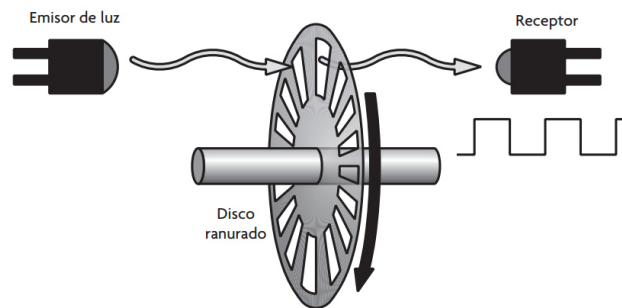
Fuente: Chapman, 2012, p. 302

## 2.12 Encoder

“Los elementos sensores más utilizados para la medición de sistemas rotacionales son los encoders, también conocidos como tacómetros o codificadores de posición. Un encoder es un elemento capaz de convertir el movimiento, ya sea rotacional o lineal, a una señal digital equivalente” (Corona, Abarca y Mares, 2014, p. 79)

### 2.12.1 Encoder óptico

Un encoder óptico está compuesto de por lo general, dos dispositivos optoelectrónicos, uno de ellos es el emisor de luz y el otro es el receptor, en general se usa un fotodiodo y un fototransistor. Entre estos dos dispositivos se coloca un disco ranurado de n ranuras transparentes acoplado al eje. Cuando el eje gira, mueve el disco ranurado y se produce una señal alternante entre el receptor y el emisor, la frecuencia de esta señal da la velocidad del eje. (Corona, Abarca y Mares, 2014, p. 79)



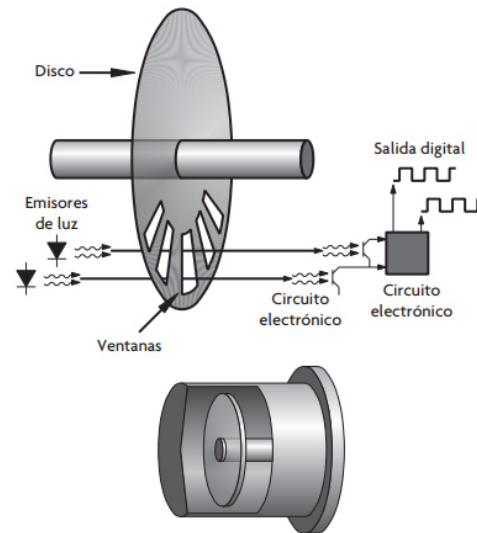
**Figura 11-2:** Encoder óptico

Fuente: Corona, Abarca y Mares, 2014, p. 79

### 2.12.2 Encoders incrementales

Corona comenta las características de los encoders incrementales:

*Para esta configuración se requieren al menos dos pares de emisor/receptor, los cuales deberán estar desfasados un cierto número de ranuras más un cuarto de ranura; así, cuando el eje comienza a girar en sentido horario, la señal generada por el primer par receptor/emisor estará adelantada un cuarto con respecto a la señal del segundo par receptor/emisor; por el contrario, cuando el eje gira en sentido antihorario, la señal del segundo par receptor/emisor estará adelantada con respecto a la primera tres cuartos. (Corona, Abarca y Mares, 2014, p. 79)*

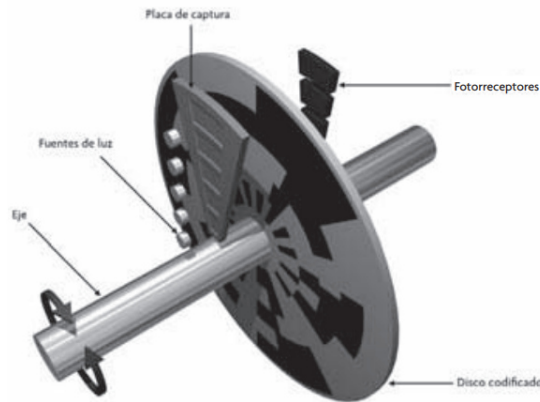


**Figura 12-2:** Encoder incremental

**Fuente:** Corona, Abarca y Mares, 2014, p. 79

### 2.12.3 Encoders absolutos

Los encoders absolutos tienen el disco muchas bandas concéntricas y estas están codificadas en código Gray, por lo que a cada banda le corresponde un par receptor/emisor. Cuando el eje gira, los pares receptor/emisor estarán en un área opaca o transparente mediante el cual se genera el código, con esta señal codificada se determina la posición del disco. (Corona, Abarca y Mares, 2014, p. 80)



**Figura 13-2:** Encoder absoluto

**Fuente:** Corona, Abarca y Mares, 2014, p. 80

### 2.13 Arduino

La organización de Arduino se autodefine como:

*Arduino es una plataforma electrónica de código abierto basada en hardware y software fáciles de usar. Las placas Arduino pueden leer entradas (luz en un sensor, un dedo en un botón o un mensaje de Twitter) y convertirlo en una salida, activando un motor, encendiendo un LED, publicando algo en línea. Puede decirle a su tablero qué hacer enviando un conjunto de instrucciones al microcontrolador en el tablero. Para hacerlo, utiliza el lenguaje de programación Arduino (basado en Wiring) y el Software Arduino (IDE), basado en Processing. (Arduino, 2018)*

Arduino es un entorno de desarrollo libre, es decir que es gratis además que es multiplataforma el cual se instala en los ordenadores y este permite escribir, verificar y cargar el código en la plataforma electrónica ya sea el mismo Arduino u otra placa compatible para que se pueda ejecutar las instrucciones programadas. (Torrente, 2013, p. 67)

### 2.14 ESP32 DevKitc v2

“ La familia ESP son MCU de 32 bits producidos por Espressif Systems, con funciones integradas de Wi-Fi (ambas) y Bluetooth (ESP32)” (Posch, 2019).

Es una tarjeta de desarrollo que tiene pines que incluye una interfaz USB con la cual también se puede alimentar la placa. Incorpora dos pulsadores con funciones de reset y boot.

El módulo ESP32 tiene 38 pines los cuales se les puede asignar diferentes funciones en la programación de este. Existen pines de diferente tipo: digitales, analógicos y con función touch.

Tiene también sensores internos como un sensor de temperatura, un sensor de efecto hall que permite detectar campos magnéticos cerca del módulo, sensores touch que detectan variaciones al acercar o tocar el pin con un objeto o nuestra mano. Este módulo también puede generar hasta 16 canales PWM.

Este módulo se lo puede alimentar por medio de su conexión USB que arroja 5V o también por medio de una fuente externa ya sea a 5V o 3,3V.

Los pines de entradas y salidas trabajan a 3,3V por lo que se debe utilizar conversores de nivel para recibir o enviar la señal a otro dispositivo electrónico.

## **2.15 Sistemas de Control**

Ogata da una clasificación de los diferentes sistemas de control y su importancia:

*Las teorías de control que se utilizan habitualmente son la teoría de control clásica (también denominada teoría de control convencional), la teoría de control moderno y la teoría de control robusto.*

*El control automático ha desempeñado un papel vital en el avance de la ingeniería y la ciencia. El control automático se ha convertido en una parte importante e integral en los sistemas de vehículos espaciales, en los sistemas robóticos, en los procesos modernos de fabricación y en cualquier operación industrial que requiera el control de temperatura, presión, humedad, flujo, etc. Es deseable que la mayoría de los ingenieros y científicos estén familiarizados con la teoría y la práctica del control automático. (Ogata, 2010, p. 3)*

## **2.16 Variable controlada y señal de control o variable manipulada**

La variable controlada es la cantidad o condición que se mide y controla. La señal de control o variable manipulada es la cantidad o condición que el controlador modifica para afectar el valor de la variable controlada. Normalmente, la variable controlada es la salida del sistema. Controlar significa medir el valor de la variable controlada del sistema y aplicar la variable manipulada al sistema para corregir o limitar la desviación del valor medido respecto del valor deseado. (Ogata, 2010, p. 4)

## **2.17 Sistemas**

Un sistema es una combinación de componentes que actúan juntos y realizan un objetivo determinado. Un sistema no está necesariamente limitado a los sistemas físicos. El concepto de sistema se puede aplicar a fenómenos abstractos y dinámicos, como los que se encuentran en la

economía. Por tanto, la palabra sistema debe interpretarse en un sentido amplio que comprenda sistemas físicos, biológicos, económicos y similares. (Ogata, 2010, p. 4)

### **2.18 Perturbaciones**

“Una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema. Si la perturbación se genera dentro del sistema se denomina interna, mientras que una perturbación externa se genera fuera del sistema y es una entrada” (Ogata, 2010, p. 4)

### **2.19 Control realimentado**

El control realimentado se refiere a una operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida de un sistema y alguna entrada de referencia, y lo realiza tomando en cuenta esta diferencia. Aquí sólo se especifican con este término las perturbaciones impredecibles, ya que las perturbaciones predecibles o conocidas siempre pueden compensarse dentro del sistema. (Ogata, 2010, p. 7)

Ogata explica que:

*Los sistemas de control realimentados se denominan también sistemas de control en lazo cerrado. En la práctica, los términos control realimentado y control en lazo cerrado se usan indistintamente. En un sistema de control en lazo cerrado, se alimenta al controlador la señal de error de actuación, que es la diferencia entre la señal de entrada y la señal de realimentación (que puede ser la propia señal de salida o una función de la señal de salida y sus derivadas y/o integrales), con el fin de reducir el error y llevar la salida del sistema a un valor deseado. El término control en lazo cerrado siempre implica el uso de una acción de control realimentado para reducir el error del sistema. (Ogata, 2010, p. 7)*

### **2.20 Sistemas de control en lazo abierto**

“Los sistemas en los cuales la salida no tiene efecto sobre la acción de control se denominan sistemas de control en lazo abierto. En otras palabras, en un sistema de control en lazo abierto no se mide la salida ni se realimenta para compararla con la entrada [...]” (Ogata, 2010, p. 9)

En cualquier sistema de control en lazo abierto, la salida no se compara con la entrada de referencia. Así, a cada entrada de referencia le corresponde una condición de operación fija; como resultado de ello, la precisión del sistema depende de la calibración. Ante la presencia de perturbaciones, un sistema de control en lazo abierto no realiza la tarea deseada. En la práctica, el control en lazo abierto sólo se usa si se conoce la relación entre la entrada y la salida y si no

hay perturbaciones internas ni externas. Es evidente que estos sistemas no son de control realimentado. Obsérvese que cualquier sistema de control que opere con una base de tiempo está en lazo abierto. Por ejemplo, el control de tráfico mediante señales operadas con una base de tiempo es otro ejemplo de control en lazo abierto. (Ogata, 2010, p. 9)

### **2.21 Compensación del sistema**

Establecer la ganancia es el primer paso para llevar al sistema a un comportamiento satisfactorio. Sin embargo, en muchos casos prácticos, ajustando únicamente la ganancia tal vez no proporcione la alteración suficiente en el comportamiento del sistema para cumplir las especificaciones dadas. Como ocurre con frecuencia, incrementar el valor de la ganancia mejora el comportamiento en estado estacionario, pero produce una estabilidad deficiente o, incluso, inestabilidad. En este caso, es necesario volver a diseñar el sistema (modificando la estructura o incorporando dispositivos o componentes adicionales) para alterar el comportamiento general, de modo que el sistema se comporte como se desea. Este nuevo diseño o adición de un dispositivo apropiado se denomina compensación. Un elemento insertado en el sistema para satisfacer las especificaciones se denomina compensador. El compensador modifica el comportamiento deficiente del sistema original. (Ogata, 2010, p. 11)

### **2.22 Modelos matemáticos**

Un modelo matemático de un sistema dinámico se define como un conjunto de ecuaciones que representan la dinámica del sistema con precisión o, al menos, bastante bien. Téngase presente que un modelo matemático no es único para un sistema determinado. Un sistema puede representarse de muchas formas diferentes, por lo que puede tener muchos modelos matemáticos, dependiendo de cada perspectiva.

La dinámica de muchos sistemas, ya sean mecánicos, eléctricos, térmicos, económicos, biológicos, etc., se describe en términos de ecuaciones diferenciales. Dichas ecuaciones diferenciales se obtienen a partir de leyes físicas que gobiernan un sistema determinado como las leyes de Newton para sistemas mecánicos y las leyes de Kirchhoff para sistemas eléctricos. Se debe siempre recordar que obtener un modelo matemático razonable es la parte más importante de todo el análisis.

Los modelos matemáticos pueden adoptar muchas formas distintas. Dependiendo del sistema del que se trate y de las circunstancias específicas, un modelo matemático puede ser más conveniente que otros. Por ejemplo, en problemas de control óptimo, es provechoso usar representaciones en el espacio de estados. En cambio, para los análisis de la respuesta transitoria o de la respuesta en frecuencia de sistemas lineales con una entrada y una salida invariantes en el tiempo, la representación mediante la función de transferencia puede ser más conveniente que cualquier otra.

Una vez obtenido un modelo matemático de un sistema, se usan diversos recursos analíticos, así como computadoras para estudiarlo y sintetizarlo. (Ogata, 2010, p. 15)

### 2.22.1 *Movimiento traslacional*

Palm realiza algunas observaciones que facilitan el manejo de este:

*“Si asumimos que el objeto es un cuerpo rígido y descuidamos la distribución de fuerza dentro del objeto, podemos tratar el objeto como si su masa estuviera concentrada en su centro de masa. Este es el supuesto de masa puntual, que facilita la obtención de las ecuaciones de traslación del movimiento, porque las dimensiones del objeto pueden ignorarse y todas las fuerzas externas pueden tratarse como si actuaran a través del centro de masa”* (Palm, 2010, p. 43)

La primera ley de Newton establece que una partícula que este en reposo en movimiento con una velocidad constante, permanecerá en ese estado mientras no se aplique una fuerza externa que lo desequilibre.

$$\sum \vec{F} = 0 \quad (3)$$

La segunda ley de Newton que la aceleración de una partícula con masa es proporcional a la fuerza neta que actúa sobre ella como se muestra en la figura 14-2. Se expresa como:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad (4)$$

La tercera ley de Newton establece que las fuerzas de acción y reacción entre dos cuerpos son iguales en magnitud y colineales, pero opuestas en dirección.

$$\vec{R} = -\vec{R} \quad (5)$$

Si el cuerpo rota, estas ecuaciones de traslación se deben complementar con las ecuaciones de movimiento rotacional que se describirá en el siguiente punto.

### 2.22.2 *Movimiento rotacional*

Para el movimiento plano donde un cuerpo rígido se puede trasladar en dos dimensiones y puede girar solo alrededor de un eje que es perpendicular al plano, la segunda ley de newton rotacional se puede expresar como:

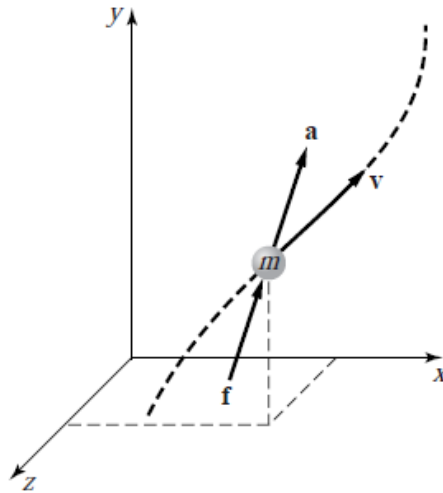
$$I_O \dot{\omega} = M_O \quad (6)$$

Donde:

$I_O$ : inercia del cuerpo alrededor del eje o

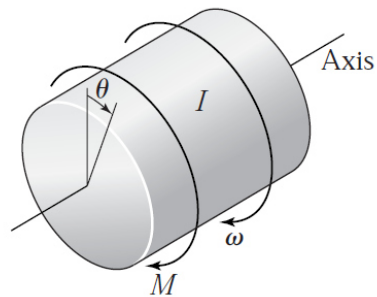
$\dot{\omega}$ : aceleración angular alrededor del eje o

$M_O$ : suma de momentos aplicados al cuerpo alrededor del eje o



**Figura 14-2:** Movimiento de partículas que muestra el sistema de coordenadas, la fuerza aplicada  $f$  y la aceleración resultante  $a$ , la velocidad  $v$  y la trayectoria.

Fuente: Palm, 2010, p. 43



**Figura 15-2:** Un objeto que gira alrededor de un eje fijo.

Fuente: Palm, 2010, p. 48



### 2.22.3 Elementos eléctricos

#### 2.22.3.1 Resistencia

Una resistencia es un elemento diseñado para proporcionar resistencia. La mayoría de las resistencias están diseñadas para tener una relación lineal entre la corriente que las atraviesa y la diferencia de voltaje entre ellas. Esta relación lineal es la ley de Ohm. Se afirma que

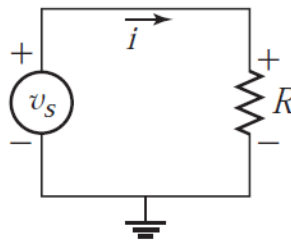
$$v_s = iR \quad (7)$$

Donde:

$v_s$ : voltaje en la resistencia en Volts(V)

$i$ : corriente que pasa a través de circuito medida en Amperios(A)

$R$ : resistencia eléctrica medida en ohms ( $\Omega$ )



**Figura 16-2:** Representación de un circuito con una resistencia

Fuente: Palm, 2010, p. 273

#### 2.22.3.2 Inductor

Si un conductor está enrollado (bobinado) y por este pasa una corriente, se crea un flujo el cual perturba a otros bobinados adyacentes. Este flujo es proporcional a la integral de tiempo del voltaje aplicado y la corriente es proporcional al flujo. Esta relación del inductor se puede expresar como:

$$\varphi = Li \quad (8)$$

Donde:

$\varphi$ : flujo a través del inductor

$L$ : inductancia

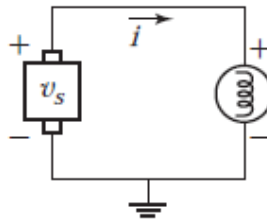
$i$ : corriente a través del inductor

La relación de causalidad integral entre flujo y voltaje es

$$\varphi = \int v dt \quad (9)$$

La combinación de las dos expresiones anteriores para  $\varphi$  da la relación voltaje-corriente para el inductor:

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (10)$$



**Figura 17-2:** Representación de un circuito con un inductor

Fuente: Palm, 2010, p. 273

#### 2.22.4 Modelo de un motor DC

El subsistema de un motor DC se puede representar por los circuitos mostrados en la figura 18-2.

El subsistema mecánico consiste en la inercia  $I$  del motor y de una amortiguación torsional  $c$ . La inercia es tanto del motor como de la carga y la amortiguación se debe a los cojinetes del eje o de la carga. El torque  $T_L$  representa a un par adicional que actúa por la carga y es distinto al de amortiguación, este puede ser positivo o negativo, pero generalmente se opone al torque del motor  $T$ . (Palm, 2010, p. 302)

##### 2.22.4.1 Amortiguador torsional

“Un amortiguador de torsión ejerce un torque de resistencia en respuesta a una diferencia de velocidad angular a través de él.” (Palm, 2010, p. 187)

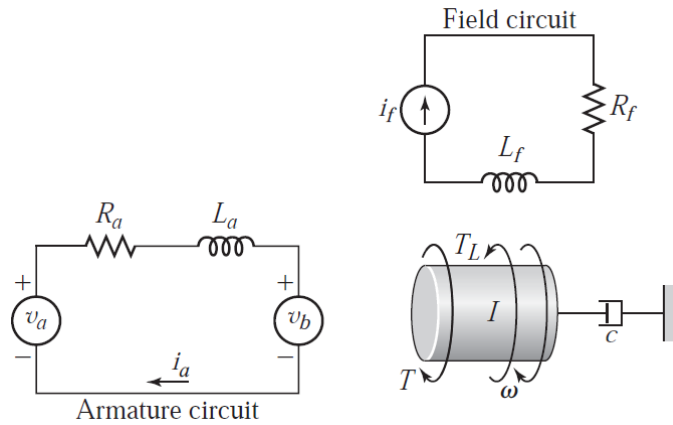
El torque producido por un amortiguador torsional se expresa como:

$$T_c = c\omega \quad (11)$$

Donde:

$c$ : constante de amortiguación torsional

$\omega$ : velocidad angular del motor



**Figura 18-2:** Diagrama de un motor DC

Fuente: Palm, 2010, p. 301

#### 2.22.4.2 Torque del motor

El motor produce un par  $T$  que es proporcional a la corriente del inducido  $i_a$ .

$$T = K_T i_a \quad (12)$$

Donde:

$K_T$ : constante de par del motor

$i_a$ : corriente de armadura

#### 2.22.4.3 Fuerza contraelectromotriz

Como se sabe, el movimiento de un conductor que dentro del mismo pasa una corriente en medio de un campo magnético, genera un voltaje que se opone a la corriente. (Palm, 2010, p. 302)

Se representa con la siguiente ecuación:

$$v_b = K_b \omega \quad (13)$$

Donde:

$K_b$ : constante contraelectromotriz del motor

$\omega$ : rapidez angular del motor

Las constantes  $K_b$  y  $K_T$  tienen el mismo valor numérico si son expresadas en las mismas unidades. (Palm, 2010, p. 302)

$$K_b = K_T = k \quad (14)$$

### 2.22.5 *Determinación de parámetros de un motor DC*

Para modelar el motor eléctrico dc se debe obtener algunos parámetros los cuales permitirán definir las ecuaciones que describen dicho sistema.

#### 2.22.5.1 *Determinación de la resistencia de armadura*

Este valor se mide directamente en el bobinado del motor con un multímetro configurando la opción de medida de resistencia en ohms normalmente representado por  $R_a$ .

#### 2.22.5.2 *Determinación de la constante contraelectromotriz*

Para determinar esta constante se debe aplicar un voltaje determinado al motor y medir la corriente que pasa por la armadura, posteriormente se aplica la ec. (27) despejando la fuerza contraelectromotriz:

$$E_a = k\dot{\phi} = k\omega \quad (15)$$

Donde:

$k$ : constante contraelectromotriz del motor

$\omega$ : rapidez angular del motor

$E_a$ : Fuerza contraelectromotriz

Se grafica estos valores y se linealiza la gráfica aplicando mínimos cuadrados lo cual proporcionará el valor de la constante  $k$ .

#### 2.22.5.3 *Determinación de constante de fricción viscosa*

La constante de fricción viscosa se puede determinar analíticamente mediante la aplicación de la ecuación la cual relaciona la corriente sin carga del motor, la constante contraelectromotriz y la velocidad angular nominal del motor.

$$B_m = \frac{kI_o}{\omega_N} \quad (16)$$

Donde:

$B_m$ : constante de fricción viscosa

$k$ : constante contraelectromotriz del motor

$I_0$ : corriente sin carga del motor

$\omega_N$ : rapidez angular nominal del motor

Otra manera de obtener esta constante es realizarla experimentalmente mediante la aplicación de un voltaje midiendo la corriente de armadura para obtener una gráfica del torque del motor en función de la velocidad angular y así obtener la constante de fricción viscosa mediante la aproximación por mínimos cuadrados.

#### 2.22.5.4 Determinación de la constante de tiempo mecánica

Normalmente representado por  $t_m$ , es el tiempo que tarda el motor en alcanzar el 63,2% de su velocidad nominal, esto se realiza aplicando el voltaje nominal mediante una entrada escalonada. Es un valor indicativo porque cambia cuando se agrega la inercia de la carga.

#### 2.22.5.5 Determinación del momento de inercia del motor

La inercia se obtiene de forma analítica ya que se conoce los parámetros anteriormente obtenidos experimentalmente de la siguiente manera:

$$I_m = \frac{t_m}{R_a} (R_a B_m + k^2) \quad (17)$$

Donde:

$I_m$ : Inercia del motor

$t_m$ : constante de tiempo mecánica

$R_a$ : resistencia de armadura del motor

$B_m$ : constante de fricción viscosa

$k$ : constante contraelectromotriz del motor

### 2.23 Sistema no lineal

“Un sistema es no lineal si no se aplica el principio de superposición. Por tanto, para un sistema no lineal la respuesta a dos entradas no puede calcularse tratando cada entrada a la vez y sumando los resultados” (Ogata, 2010, p. 42).

Muchas ecuaciones que se presentan como ecuaciones lineales, en la mayor parte de casos no son verdaderamente lineales. Un estudio reveló que dichas ecuaciones lineales sólo lo son en rangos limitados. (Ogata, 2010, p. 42)

## 2.24 Sistemas lineales

Ogata define a un sistema lineal como:

*Un sistema se denomina lineal si se aplica el principio de superposición. Este principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones de entradas diferentes es la suma de las dos respuestas individuales. Por tanto, para el sistema lineal, la respuesta a varias entradas se calcula tratando una entrada cada vez y sumando los resultados. Este principio permite desarrollar soluciones complicadas para la ecuación diferencial lineal a partir de soluciones simples.*

*Si en una investigación experimental de un sistema dinámico son proporcionales la causa y el efecto, lo cual implica que se aplica el principio de superposición, el sistema se considera lineal. (Ogata, 2010, p. 15).*

## 2.25 Espacio de estados

Los modelos donde las ecuaciones de primer orden están acopladas, se dice que están en forma de variable de estado también llamada forma de Cauchy y esta consiste en una única ecuación de orden superior y permite expresar un modelo lineal de forma compacta y estándar que facilita la aplicación en software y su análisis. (Palm, 2010, p. 225)

Las variables de un sistema son el conjunto de variables que establecen el estado del sistema dinámico. Si se necesitan  $n$  variables  $x_1, x_2, \dots, x_n$  para describir el comportamiento de un sistema, entonces tales  $n$  variables son un conjunto de variables de estado. Estas  $n$  variables de estado son las  $n$  componentes de un vector  $x$ . Este vector se denomina vector de estado. (Ogata, 2010, p. 30)

El espacio  $n$ -dimensional cuyos ejes de coordenadas están formados por el *eje*  $x_1$ , *eje*  $x_2, \dots, eje$   $x_n$ , donde  $x_1, x_2, \dots, x_n$  son las variables de estado, se denomina espacio de estados.

Se supone un sistema de múltiples entradas y salidas, además que hay  $r$  entradas  $u_1(t), u_2(t), \dots, u_r(t)$  y  $m$  salidas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$ . Se definen las  $n$  salidas como variables de estado:  $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ . (Ogata, 2010, p. 30)

Entonces el sistema se puede representar como:

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

⋮

$$\dot{x}_n(t) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

Las salidas  $y_1(t), y_2(t), \dots, y_m(t)$  del sistema se obtienen mediante:

$$y_1(t) = g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

$$y_2(t) = g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

⋮

$$y_m(t) = g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t)$$

Representándolo en vectores:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n; u_1, u_2, \dots, u_r; t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_r(t) \end{bmatrix}$$

Así las ecuaciones se convierten en:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned}$$

Si se linealiza estas ecuaciones y si se considera que las funciones  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  no involucran el tiempo, es decir, que el sistema es invariante en el tiempo, se convierten en las siguientes expresiones:

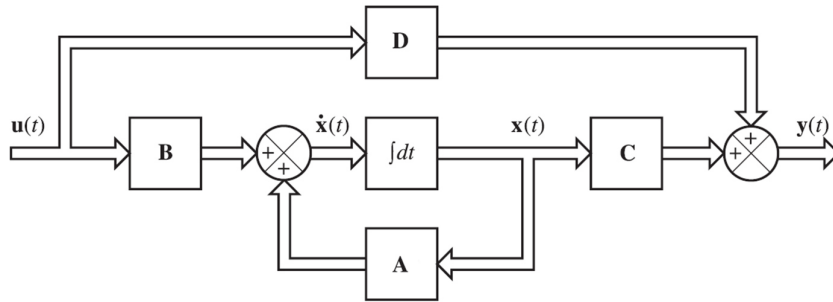
$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \tag{18}$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \tag{19}$$

Donde  $\mathbf{A}$  se denomina matriz de estado,  $\mathbf{B}$  matriz de entrada,  $\mathbf{C}$  matriz de salida y  $\mathbf{D}$  matriz de transformación directa. La Figura 19-2 muestra el diagrama de bloques que representa las ecuaciones (18) y (19). (Ogata, 2010, p. 31)

## 2.26 Diagrama de Bloques

Un diagrama de bloques de un sistema no es más que una forma gráfica de las funciones que cumple cada elemento o componente y como se relaciona con otros componentes. Un diagrama de bloque indica de manera visual el flujo de las señales del sistema estudiado a comparación de una forma matemática puramente abstracta. En estos diagramas de bloques las variables se entrelazan entre ellas mediante bloques funcionales, dichos boques representan la operación matemática que realizan a la señal de entrada para generar la salida. (Ogata, 2010, p. 17)

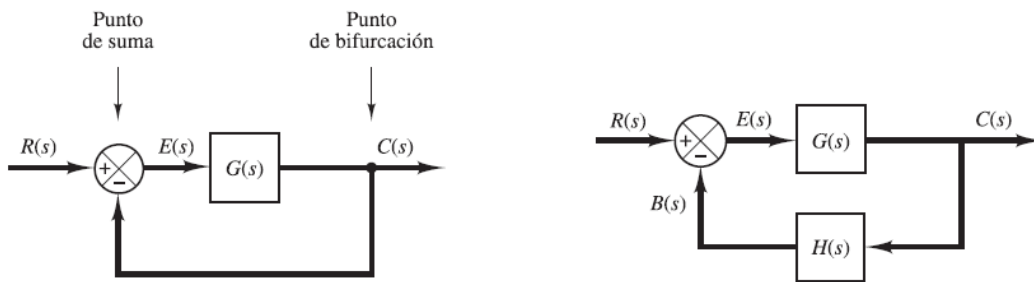


**Figura 19-2:** Diagrama de bloques del sistema de control lineal invariante en el tiempo, representado en el espacio de estados.

Fuente: Ogata, 2010, p. 31

Ogata resalta la importancia de los diagramas de bloque:

*“Las ventajas de la representación mediante diagramas de bloques de un sistema estriban en que es fácil formar el diagrama de bloques general de todo el sistema con sólo conectar los bloques de los componentes de acuerdo con el flujo de señales y en que es posible evaluar la contribución de cada componente al desempeño general del sistema”* (Ogata, 2010, p. 18).



**Figura 20-2:** Diagrama de bloques de (a) sistema en lazo cerrado (b) Sistema de lazo cerrado realimentado

Fuente: Ogata, 2010, p. 19

En la Figura 20-2(a) se observa un diagrama de bloques en lazo cerrado donde la salida  $C(s)$  se conecta al punto de suma, aquí se compara con el valor de referencia  $R(s)$ . En la Figura 20-2(b) se introduce un bloque de realimentación  $H(s)$  que modifica la salida para compararse con la referencia generándose la señal de error  $E(s)$ . La mayoría de las veces, este  $H(s)$  es una señal de un sensor que mide la salida de la planta. (Ogata, 2010, p. 18)

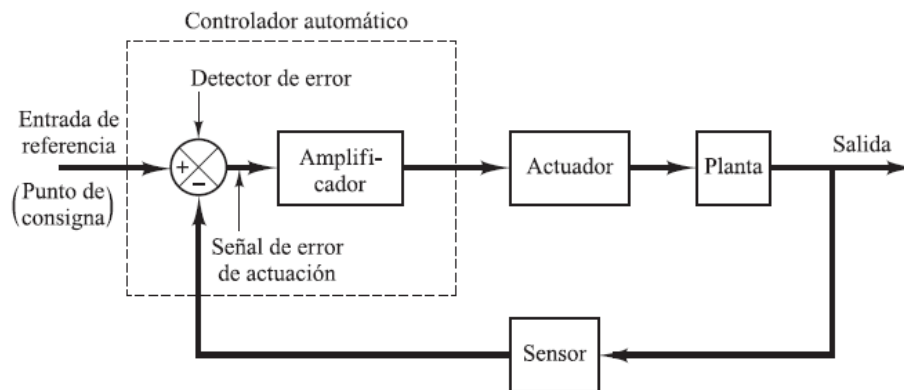


## 2.27 Controladores automáticos

Ogata explica claramente que es un controlador automático:

*Un controlador automático compara el valor real de la salida de una planta con la entrada de referencia (el valor deseado), determina la desviación y produce una señal de control que reduce la desviación a cero o a un valor pequeño. La manera en la cual el controlador automático produce la señal de control se denomina acción de control. La Figura es un diagrama de bloques de un sistema de control industrial que consiste en un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición). El controlador detecta la señal de error, que, por lo general, está en un nivel de potencia muy bajo, y la amplifica a un nivel lo suficientemente alto. La salida de un controlador automático se alimenta a un actuador, como un motor o una válvula neumáticos, un motor hidráulico o un motor eléctrico. (El actuador es un dispositivo de potencia que produce la entrada para la planta de acuerdo con la señal de control, a fin de que la señal de salida se aproxime a la señal de entrada de referencia.)*

*El sensor, o elemento de medición, es un dispositivo que convierte la variable de salida en otra variable manejable, como un desplazamiento, una presión o un voltaje, que pueda usarse para comparar la salida con la señal de entrada de referencia. Este elemento está en la trayectoria de realimentación del sistema en lazo cerrado. (Ogata, 2010, p. 22)*



**Figura 21-2:** Diagrama de bloques de un sistema de control industrial, formado por un controlador automático, un actuador, una planta y un sensor (elemento de medición).

Fuente: Ogata, 2010, p. 22

## 2.28 Control óptimo

“Se ha establecido que el problema de control óptimo, dada una condición inicial  $x(0)$ , consiste en encontrar un vector de control permitido  $u(k)$  que transfiera al estado a la región deseada del espacio de estados y para el cual el índice de desempeño se minimiza” (Ogata, 1996, p. 567).

El control óptimo soluciona uno de los problemas más populares del control moderno, este problema es la determinación de la mejor estrategia de control posible, normalmente del vector de control óptimo  $u(t)$ , que minimiza una función de costo o índice de desempeño. (Paraskevopoulos, 2002, p. 479)

Un sistema de control óptimo, cuyo diseño minimiza o maximiza el valor de una función seleccionada como el índice de desempeño en el que difiere de uno ideal ya que el primero es más alcanzable en presencia de restricciones físicas, mientras que el ideal puede ser un objetivo inalcanzable. (Ogata, 1996, p. 568)

Una vez encontrado este índice de desempeño máximo, se debe diseñar un sistema simple que se acerque al óptimo, con el cual se construye un sistema físico prototipo, se prueba, y se modifica hasta que se obtenga un sistema que tenga características de actuación próxima a la del sistema de control óptimo que se ha trabajado en teoría. (Ogata, 2010, p. 568)

### 2.28.1 Índice de desempeño

Al diseñar un sistema de control se debe encontrar una regla para determinar la decisión de control presente con ciertas restricciones, esto minimiza la desviación de un comportamiento ideal. Dicha corrección es provista por el índice de desempeño seleccionado, esta función arroja un valor el cual es la indicación de qué tanto se parece el comportamiento al deseado. Generalmente, el control del sistema se optimiza al seleccionar el vector de control  $u(k)$  haciendo que el índice de desempeño se minimice (o maximice, dependiendo del caso). La selección de un índice de desempeño apropiado es importante porque determina la naturaleza del sistema de control óptimo resultante, ya sea lineal, no lineal, estacionario, o variante en el tiempo. Por lo que este índice se diseña en base a los requisitos que el sistema debe cumplir. Los requisitos de diseño por lo regular no sólo incluyen especificaciones de desempeño sino también restringen la forma del control a utilizar. (Ogata, 1996, p. 568)

### 2.28.2 Formulación de los problemas de optimización

Según Ogata(1996, p. 567), el control óptimo de un sistema se puede realizar si se tiene la siguiente información:

- Ecuaciones del sistema

- Clase de vectores de control permitidos
- Restricciones en el problema
- Índice de desempeño
- Parámetros del sistema

Ogata(1996, p. 567) dice que para llegar al control óptimo se debe determinar el vector de control óptimo  $u(k)$  dentro de la clase de vectores de control permitidos, el cual depende de:

- La naturaleza del índice de desempeño
- La naturaleza de las restricciones
- El estado o salida inicial
- El estado o salida deseada

El control óptimo puede ser difícil para obtener una solución analítica por lo que es mejor y rápido obtener una solución por computadora. (Ogata, 1996, p. 567)

### 2.28.3 Sistema regulador cuadrático lineal LQR

Este método proporciona un procedimiento sistemático para calcular la matriz de ganancia de control de realimentación del estado.

Dadas las ecuaciones ec. (18) y ec. (19) del sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t)$$

En el que el índice de desempeño se calcula como:

$$J = \int_0^{\infty} [\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}\mathbf{x}(t) + \mathbf{u}^T(t)\mathbf{R}\mathbf{u}(t)]dt$$

Donde:

$\mathbf{Q}$ : es una matriz hermítica definida positiva (o semidefinida positiva) o simétrica real

$\mathbf{R}$ : es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real.

Por lo que, el vector de control óptimo que minimiza a  $J$  está dado por:

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

“[...] la señal de control  $u$  se determina mediante un estado instantáneo. Tal esquema se denomina realimentación del estado. La matriz  $K$  se denomina matriz de ganancia de realimentación de estado. Se supone que todas las variables de estado están disponibles para su realimentación” (Ogata, 2010, p. 724).

La matriz óptima  $K$  puede ser obtenida mediante:

$$K = R^{-1}B^T P$$

Donde:

$P$ : es una matriz hermítica definida positiva o simétrica real.

La matriz  $P$  es la única solución definida positiva de la ecuación matricial reducida de Riccati (EAR):

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

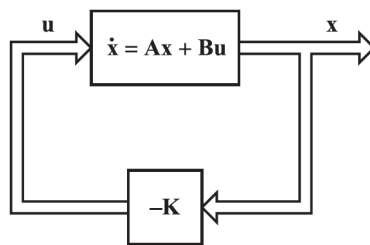
Así, la ley del control óptimo para el problema de control óptimo cuadrático es lineal.

Las matrices  $Q$  y  $R$  deben ser dadas por el diseñador,  $Q$  también llamada matriz de coste tiene la forma de una matriz identidad en la cual se cambian los unos por diferentes valores los cuales dan diferentes resultados, esto se hace hasta encontrar la  $K$  que da el control más eficiente. La matriz  $R$  también llamada matriz de rendimiento se asigna generalmente una matriz unitaria 1.

La matriz  $Q$  penaliza los errores en los estados y  $R$  penaliza el gasto de energía.

Si la matriz  $Q$  es más grande que  $R$ , la respuesta de los estados es más rápida por lo que los estados llegan más rápido a la referencia. Si  $R$  es más grande que  $Q$ , se ahorra energía por lo que la regulación de los estados es más lenta.

El diagrama de bloques que da la configuración óptima se muestra en la Figura 22-2.



**Figura 22-2:** Sistema regulador óptimo

Fuente: Ogata, 2010, p. 793

#### 2.28.4 Solución del regulador óptimo cuadrático con Matlab

Para una rápida y mejor obtención de la matriz  $K$ , Matlab dispone de la siguiente función

$$K = lqr(A, B, Q, R)$$

Esta función resuelve la ecuación de Riccati y obtiene la matriz de realimentación óptima  $K$ , esto permite una mayor exactitud y el cálculo en un menor tiempo, también permite comparar las diferentes asignaciones que se puede dar a las matrices  $Q$  y  $R$  del control.

CAPITULO III

3. MARCO METODOLÓGICO

3.1 Modelado en 3D y selección de elementos electrónicos del prototipo

3.1.1 Casa de la calidad

Se aplica el método QFD el cual permite obtener los requerimientos del cliente o usuario para poder transformar dichos requerimientos en parámetros técnicos que se debe cumplir.

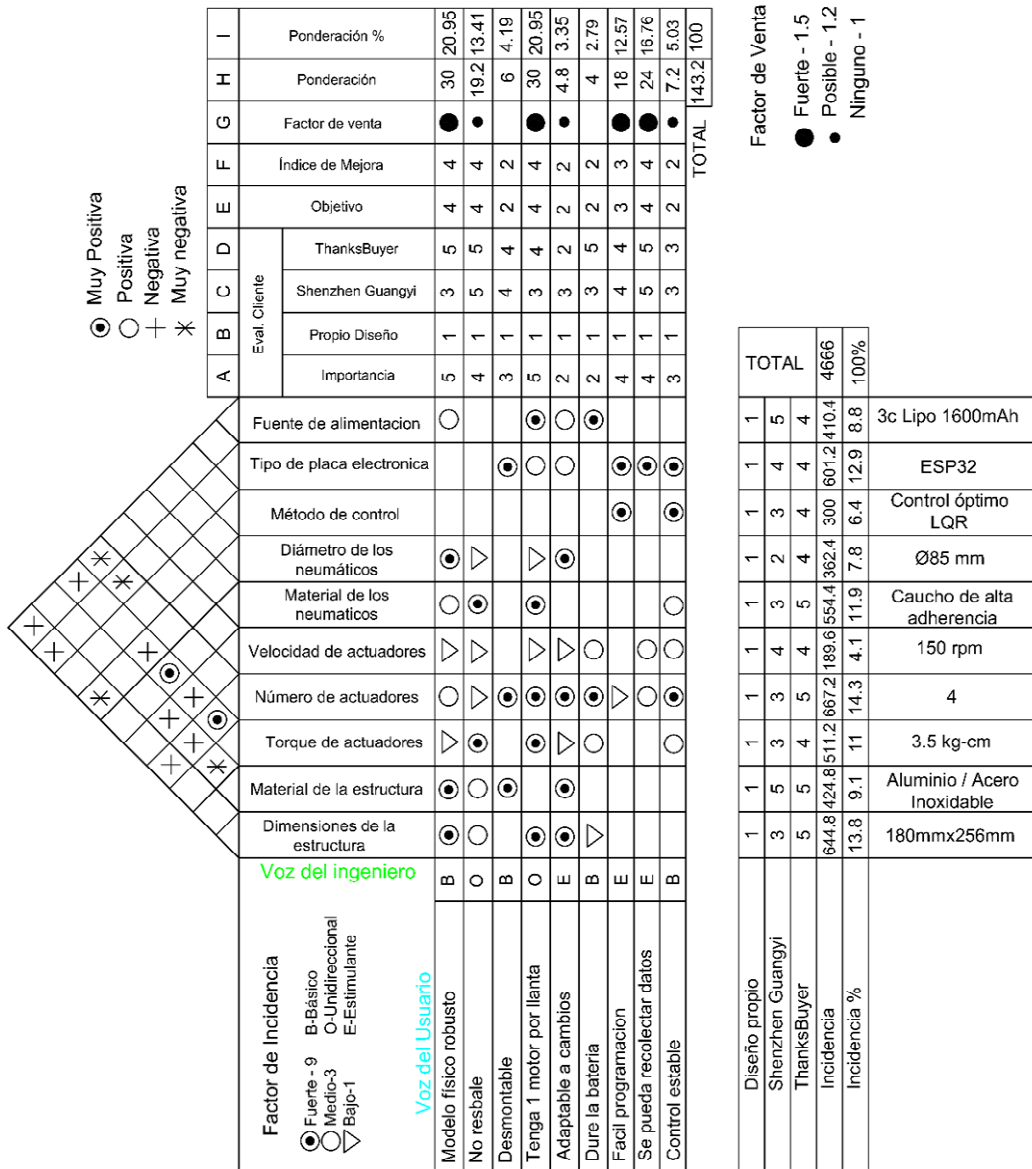


Gráfico 1-3: Casa de la calidad del sistema péndulo invertido - carro móvil

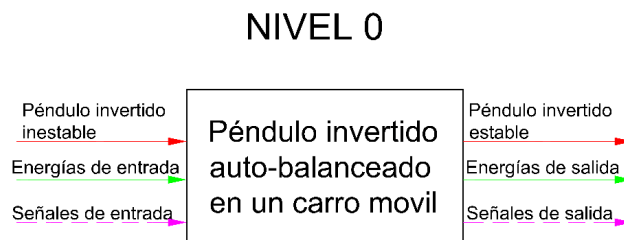
Realizado por: Orozco D. 2022

En la Gráfico 1-3 muestra la comparación con dos marcas que produzcan el mismo tipo de producto ya que esto permite definir algunos parámetros técnicos. Con los porcentajes de incidencia y ponderación se observa los parámetros más importantes a cumplir en el producto, además de esto se obtiene las correlaciones positivos y negativos que existen entre los parámetros técnicos para un mejor desarrollo del producto.

### 3.1.2 *Análisis funcional*

Para llevar a cabo el diseño del péndulo invertido se realiza un análisis funcional para definir los flujos de entrada y salida para los distintos niveles.

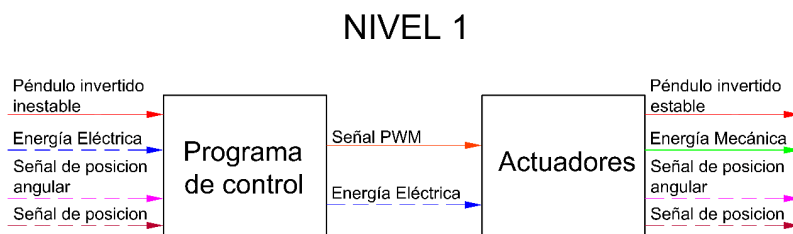
Para el nivel cero plasmado en la Figura 1-3 se tiene tres flujos de entrada los cuales son: el péndulo inestable, señales de entrada y energía de entrada. Estas señales entran al bloque de control del péndulo invertido y se obtiene como salidas: el péndulo invertido estable, señales de salida y energía de salida.



**Figura 1-3:** Nivel cero del análisis funcional

**Realizado por:** Orozco D. 2022

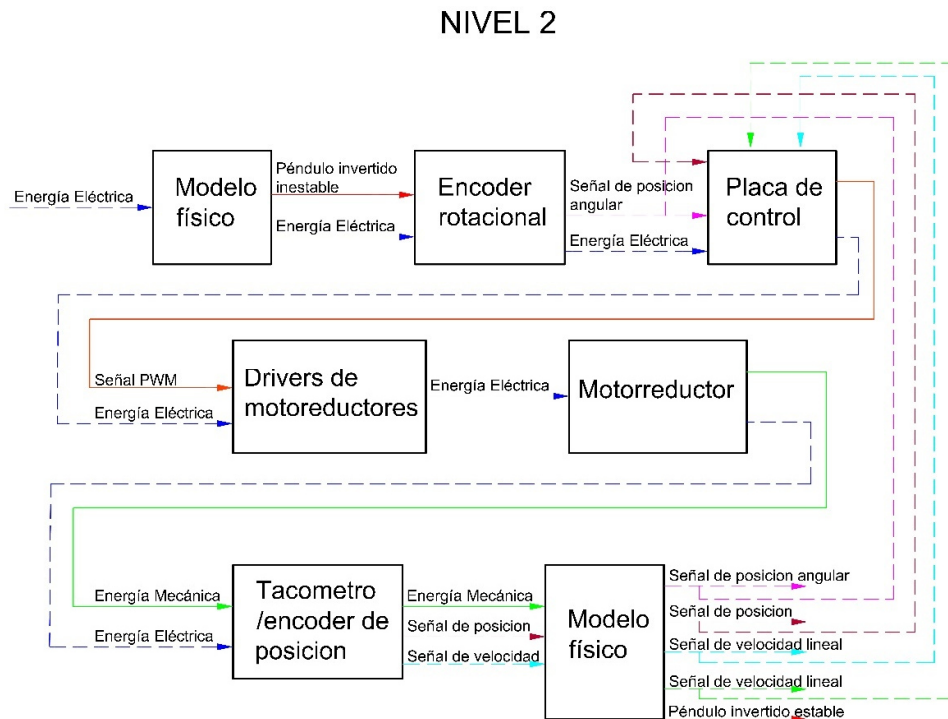
Para el nivel uno mostrado en Figura 2-3 se tiene cuatro flujos de entrada los cuales son: el péndulo inestable, señales de posición angular, señal de posición y energía eléctrica. Estas señales entran al bloque del programa de control y se obtiene como salidas: una señal PWM y energía eléctrica. Estas señales ingresan hacia el bloque de actuadores por lo que se obtiene como salidas: el péndulo invertido estable, señales de posición angular, señal de posición y energía mecánica.



**Figura 2-3:** Nivel uno del análisis funcional

**Realizado por:** Orozco D. 2022

Para el nivel dos mostrado en Figura 3-3 se dispone un modelo más completo del funcionamiento del sistema. Se tiene un flujo de entrada al bloque de modelo físico el cual es la energía eléctrica, se obtienen como salidas: el péndulo inestable y energía eléctrica. Estas señales entran al encoder rotacional que a su vez arroja como salidas: señal de posición angular y energía eléctrica. Estas dos señales ingresan al bloque de placa de control en la cual arroja las salidas de: señal PWM y energía eléctrica. Estas dos señales son enviadas al bloque de controlador del motor en el cual da la salida de: energía eléctrica. Esta energía es enviada al bloque del motorreductor dando como salida: energía mecánica y energía eléctrica. Estas dos salidas son percibidas por el tacómetro o encoder de posición obteniendo las salidas: energía mecánica, señal de posición y señal de velocidad. Estas salidas actúan sobre el modelo físico dándonos las siguientes respuestas: el péndulo invertido estable, señales de posición angular, señal de posición. Estas salidas a su vez son reenviadas al bloque de placa de control donde se repite el proceso generando el funcionamiento del sistema.



**Figura 3-3:** Nivel 2 del análisis funcional

Realizado por: Orozco D. 2022

### 3.1.3 Selección de elementos electrónicos y mecánicos

#### 3.1.3.1 Placa base y soporte

La base y soportes del carro móvil se realiza con una placa de aluminio de 2mm de espesor ya que se tiene disponibilidad en el país. El aluminio es un metal no ferroso muy conocido por su característica de su peso ligero. Su densidad es un tercio la del acero por lo que es ideal para muchas aplicaciones que requieren ser lo menos pesado posible. Además de esto, el aluminio tiene buena maleabilidad y formabilidad, alta resistencia a la corrosión además de su alta reflectividad y no decoloración superficial. El aluminio en su estado puro tiene una resistencia tensil alrededor de  $13000 \text{ lb/in}^2$  lo cual es suficiente para la base y soportes del carro móvil. (Avner, 1988, p. 477)

#### 3.1.3.2 Neumáticos

Los neumáticos del carro móvil tienen un diámetro de 85mm y son de alta adherencia, esto obtenido en la matriz de la casa de la calidad del Gráfico 1-3, estos neumáticos están disponibles en país y además vienen incluidos con un acople para motores de distinto diámetro de eje como se observa en la Figura 4-3 siendo una excelente opción para su construcción y disponibilidad de repuestos.



**Figura 4-3:** Neumáticos con acople

Fuente: CZH-LABS, 2020

#### 3.1.3.3 Motorreductor con encoder

Para el motorreductor se analiza el torque mínimo que debe tener cada motor para vencer la fuerza de fricción estática ya que el carro móvil partirá de un estado estático. Para esto se analiza la Figura 15-3.

Donde la fuerza  $f$  es la fuerza de rozamiento estática entre el neumático y el piso, esta fuerza se debe maximizarla tomando en cuenta las superficies en los cuales va a trabar el carro móvil. El



material del neumático es de caucho o hule y se asume que trabajará en concreto seco por lo que se toma el coeficiente de fricción estática un valor de  $\mu_s = 0,9$ . (Beer et al., 2010, p. 414)

Se diseña el modelo físico de una forma simétrica por lo que el peso total del carro móvil estará uniformemente distribuido sobre los cuatro neumáticos, entonces la normal en cada llanta será la cuarta parte del peso total del modelo. Asumiendo que el modelo tendrá un peso total de 3kg, el valor de la normal será de  $N = 0,75kg$ .

Se calcula el torque mínimo necesario para mover el sistema:

$$\begin{aligned}\tau_{min} &= f_r r \\ \tau_{min} &= (\mu_s N) r \\ \tau_{min} &= (0,9 * 0,75kg) * 4,5cm \\ \tau_{min} &= 3,04kg - cm\end{aligned}$$

Los motorreductores disponibles en el país tienen diferentes características mostradas en el ANEXO B, se selecciona un motorreductor con un torque aproximado al calculado de los disponibles tomando en cuenta el costo, se eligió un motorreductor de 12Volts con una velocidad nominal de 500rpm y un torque de 7,4 kg-cm cumpliendo con los parámetros calculados y de referencia anteriormente analizados.

Estos motorreductores vienen incluidos en su eje del motor un encoder con el cual se puede calcular la velocidad de rotación de este y también la posición en la que se encuentra.

Se comprueba la velocidad lineal que tendrá el carro móvil con este motor para conocer la respuesta que tendrá el mismo:

$$\begin{aligned}v &= \omega * r \\ v &= 500 \frac{rev}{min} * \frac{2\pi}{1rev} * \frac{1min}{60s} * 0,0425m \\ v &= 2,225 m/s\end{aligned}$$

Como se observa, el carro móvil se desplazará un máximo de 220 cm en un segundo por lo que es una velocidad alta y suficiente para el control del péndulo invertido.

#### 3.1.3.4 Soporte de montaje para motorreductores

Existen diferentes soportes prediseñados para este tipo de motorreductores por lo que es más rentable seleccionar estos soportes. Estos soportes son hechos de acero o de aluminio y su modelo es dinámico ya que disponen de diferentes formas de acoplar con cualquier tipo de base.

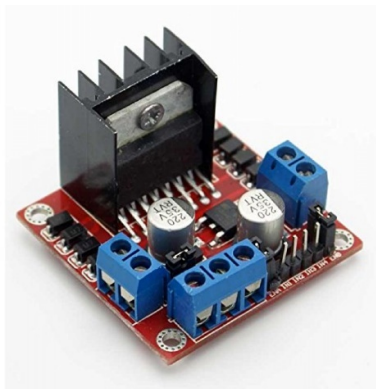


**Figura 5-3:** Soporte para motorreductor

Fuente: Orozco D. 2022

### 3.1.3.5 *Driver para motor dc*

Para que se pueda realizar un control sobre el péndulo invertido, el carro móvil debe poder desplazarse tanto hacia adelante como hacia atrás por lo que los motores deben cambiar el sentido de giro. Existen diferentes elementos electrónicos que permiten realizar esta función, pero se seleccionó el driver L298 ya que este elemento permite controlar dos motores DC al mismo tiempo, soporta una corriente máxima de 2A por cada motor por lo que se ajusta a nuestras necesidades. Además de esto, este elemento se puede alimentar de 0 a 12 volts y tiene una salida de 5V con lo que se disminuye el uso de un elemento que se encargue de dar este voltaje al módulo de control. Las características de este elemento se adjuntan en el ANEXO D.



**Figura 6-3:** Módulo L298

Fuente: CZH-LABS, 2020

### 3.1.3.6 *Módulo de control*

Existen diferentes placas en las que se pueden realizar un control de distintos tipos de elementos electrónicos, además de estos cada uno tienen sus lenguajes de programación. Para la aplicación en el control del carro móvil se utilizará la placa ESP32 ya que se dispone de un número de pines de entrada que facilitarán el control de los 4 motores y los drivers además de que cuenta con WI-FI que permite la recepción y envío de datos en tiempo real. Esta placa permite el uso del software

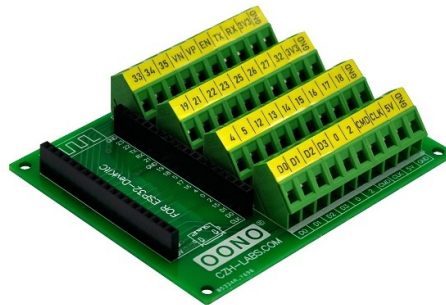
Arduino que es un lenguaje muy conocido, fácil de programar y entender por lo que los estudiantes, quienes serán los usuarios, no tendrán ningún problema en su uso. Con esto se cumple con los requerimientos del usuario en el ámbito de la programación plasmados en la casa de la calidad. Las características del módulo se adjuntan en el ANEXO A.

Para este módulo de control se conseguirá la placa D-1356 de CZH-LABS.COM que facilita el uso del módulo ESP32 permitiendo al modelo ser más dinámico a futuros cambios y nuevas aplicaciones.



**Figura 7-3:** Módulo ESP32

Fuente: Posch, 2019



**Figura 8-3:** Placa D-1356

Fuente: CZH-LABS, 2020

### 3.1.3.7 Encoder rotacional

Se seleccionó un encoder rotacional E6B2-CWZ3E con una resolución alta de 1000P/R ya que este se utilizará para medir al ángulo del péndulo al cual se realiza el control. Además, dicho encoder maneja voltajes de 0 a 12V y tiene un tamaño robusto. La señal de salida del encoder está dentro de los 3,3V por lo que se ajusta a la entrada de nuestro módulo de control. Las características generales de este encoder se muestran en el ANEXO C.

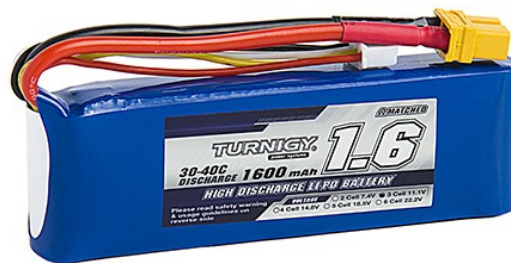


**Figura 9-3:** Encoder rotacional E6B2

Fuente: OMRON, 2019

### 3.1.3.8 Fuente de alimentación

La fuente de alimentación debe tener la suficiente energía para mover los cuatro motores con sus encoders, el módulo de control, los 2 drivers, y el encoder rotacional. Tomando esto en cuenta, los dispositivos utilizados manejan 12 voltios por lo que es ideal conseguir una fuente a este voltaje o un voltaje aproximado menor. En la casa de la calidad se obtuvo que la mejor opción sería una batería LIPO de una capacidad de 1600mAh de 3 celdas ya que esta batería brinda una mayor capacidad en potencia que las pilas utilizadas normalmente. Esta batería tiene un voltaje nominal de 11,1 volts cumpliendo con el voltaje de la mayoría de los elementos y soporta capacidad pico de descarga de 30C, esto significa que la corriente máxima a consumir es de  $30 \times 1600mAh = 48A$ . En el ANEXO E se muestra la curva característica de descarga.



**Figura 10-3:** Batería LiPo 1600mAh

Fuente: Turnigy, 2020

### 3.1.3.9 Péndulo invertido

El péndulo invertido se realizará en acero inoxidable por su alta resistencia a la corrosión y por su reflectividad que hace visualmente ideal para este modelo. Se utilizará un eje de diámetro de 3/8in y se lo montará en un eje de 5/8in perpendicular al mismo por medio de una rosca. Este eje estará conectado al encoder rotacional por medio de un prisionero y en el otro extremo se montará

en una chumacera de 12mm de diámetro interno. El péndulo deberá estar alineado al centro de gravedad del carro móvil.

### 3.1.4 *Modelado del equipo en SolidWorks*

Se modela el equipo en SolidWorks ya que este es un software muy fácil de utilizar además que tiene diferentes bibliotecas que facilitan el uso de algunos elementos y algunas operaciones.

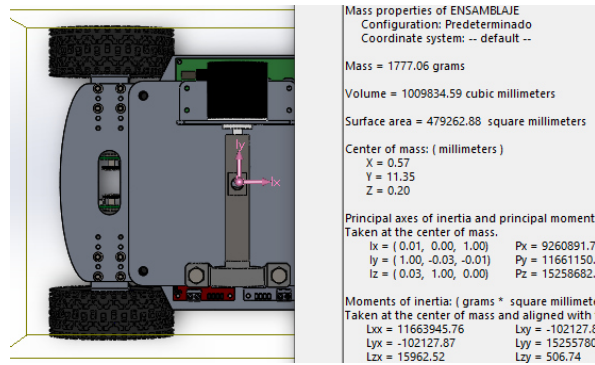
Primero se diseña el modelo de la placa base donde se montarán todos los elementos electrónicos, este diseño debe tomar en cuenta las medidas de todos los elementos además de las conexiones que se realizarán y la distribución de peso. Posteriormente se modela una placa para el segundo nivel del prototipo donde irá montado el encoder rotacional, el péndulo invertido y la chumacera. Se diseña el soporte del encoder para que mantenga una posición horizontal donde se montará el eje que conecta con el péndulo y a su vez con la chumacera como se observa en la Figura 11-3.



**Figura 11-3:** Modelado del equipo en SolidWorks

**Realizado por:** Orozco D. 2022

Cabe recalcar que los modelos de los elementos electrónicos no se diseñaran ya que son seleccionados y estos modelos 3d están disponibles en la página del fabricante. Con el modelo se comprueba que el centro de gravedad del carro móvil está alineado con el centro de gravedad del péndulo invertido como se muestra en la Figura 12-3.



**Figura 12-3:** Ubicación del centro de gravedad

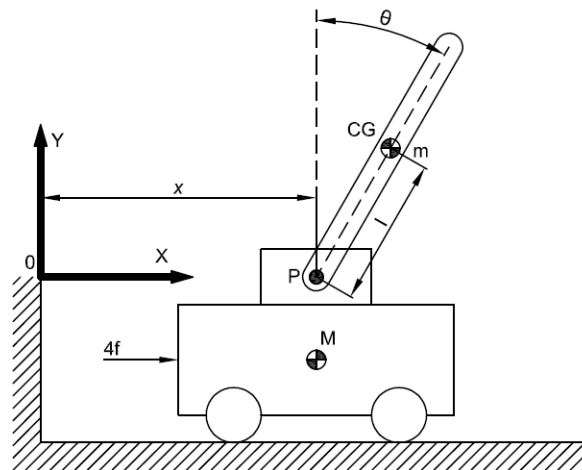
Realizado por: Orozco D. 2022

Los planos de este modelo son mostrados desde el ANEXO M hasta el ANEXO R.

### 3.2 Modelado dinámico del sistema péndulo invertido – carro móvil

Para obtener las ecuaciones que describen el movimiento del péndulo invertido montado en un carro móvil se debe separar en dos elementos que cumplen con distintas condiciones como es el carro móvil y el péndulo invertido.

En el carro móvil rige solamente un movimiento traslacional mientras que en el péndulo invertido rige un movimiento traslacional y rotacional. Estas condiciones generan diferentes ecuaciones que describen el movimiento de cada parte y en conjunto describen el movimiento dinámico del prototipo.

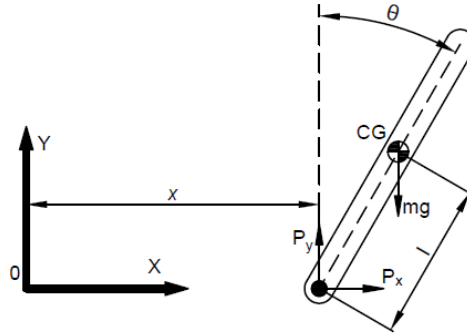


**Figura 13-3:** Sistema péndulo invertido sobre carro móvil

Realizado por: Orozco D. 2022

### 3.2.1 Modelo dinámico del péndulo invertido

Al separar el péndulo invertido del carro móvil como se muestra en la Figura 14-3, se aplica la tercera ley de Newton ec. (5) en el punto P donde es un apoyo articulado por lo que se generan dos fuerzas, una en el eje x y una en el eje y.



**Figura 14-3:** Diagrama del cuerpo libre del péndulo invertido

Realizado por: Orozco D. 2022

El péndulo invertido tiene movimiento traslacional en sus dos ejes por la acción del carro móvil y también movimiento rotacional alrededor del punto P. Teniendo en cuenta estas condiciones, se debe aplicar la segunda ley de Newton tanto rotacional como traslacional.

El centro de gravedad del péndulo invertido tiene como coordenadas:

$$CG_x = x + l \sin \theta \quad (20)$$

$$CG_y = l \cos \theta \quad (21)$$

Donde:

$CG_x$ : posición en el eje X del centro de gravedad del péndulo invertido.

$CG_y$ : posición en el eje Y del centro de gravedad del péndulo invertido.

$x$ : desplazamiento del péndulo en el eje X.

$l$ : longitud del péndulo invertido.

$\theta$ : ángulo inclinación del péndulo invertido.

Se aplica la ley de la dinámica rotacional ec. (6) alrededor del centro de gravedad en sentido antihorario como dirección positiva obteniendo:

$$I_{CG} \ddot{\theta} = P_y l \sin \theta - P_x l \cos \theta \quad (22)$$

Donde:

$I_{CG}$ : inercia del péndulo invertido.

$P_x$ : fuerza de reacción en el eje X en el punto P.

$P_y$ : fuerza de reacción en el eje Y en el punto P.

$\ddot{\theta}$ : aceleración angular del péndulo invertido

Se obtiene la fuerza horizontal aplicando la ec. (4), cabe recalcar que la operación se realiza en el centro de gravedad del elemento tanto en X como en Y.

$$P_x = m\ddot{C}G_x$$

Donde:

$m$ : masa del péndulo invertido

$\ddot{C}G_x$ : aceleración lineal en el eje X del centro de gravedad del péndulo invertido

$$P_x = m \frac{d}{dt^2} (x + l \sin \theta)$$

$$P_x = m\ddot{x} + ml \frac{d}{dt} (\cos \theta \dot{\theta})$$

$$P_x = m\ddot{x} + ml(-\sin \theta \dot{\theta}^2 + \cos \theta \ddot{\theta})$$

$$P_x = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (23)$$

Ahora se analiza la traslación de la barra en su eje y:

$$P_y - mg = m\ddot{C}G_y$$

Donde:

$\ddot{C}G_y$ : aceleración lineal en el eje Y del centro de gravedad del péndulo invertido.

$g$ : aceleración de la gravedad.

$$P_y = m \frac{d}{dt^2} (l \cos \theta) + mg$$

$$P_y = ml \frac{d}{dt} (-\sin \theta \dot{\theta}) + mg$$

$$P_y = -ml(\cos \theta \dot{\theta}^2 + \sin \theta \ddot{\theta}) + mg$$

$$P_y = -ml\ddot{\theta} \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \cos \theta + mg \quad (24)$$

Se reemplaza la ec. (18) y (19) en la ec. (17):



$$I_{CG}\ddot{\theta} = (-ml \cos \theta \dot{\theta}^2 - ml \sin \theta \ddot{\theta} + mg)l \sin \theta - (m\ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta})l \cos \theta$$

$$I_{CG}\ddot{\theta} = -ml^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - ml^2 \ddot{\theta} \sin \theta^2 + mlg \sin \theta - ml \ddot{x} \cos \theta +$$

$$ml^2 \dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - ml^2 \ddot{\theta} \cos \theta^2$$

$$I_{CG}\ddot{\theta} = mlg \sin \theta - ml \ddot{x} \cos \theta - ml^2 \ddot{\theta} (\sin \theta^2 + \cos \theta^2)$$

$$I_{CG}\ddot{\theta} = mlg \sin \theta - ml \ddot{x} \cos \theta - ml^2 \ddot{\theta}$$

Se sabe que la inercia del péndulo es un valor muy pequeño por lo que se la desprecia:

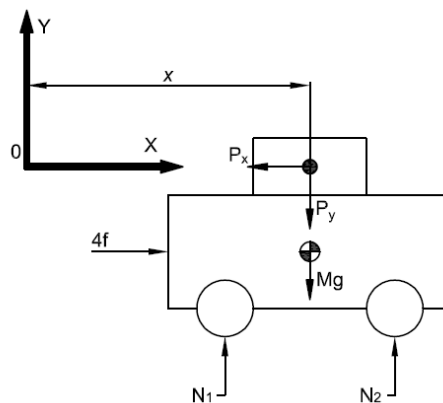
$$ml^2 \ddot{\theta} = mlg \sin \theta - ml \ddot{x} \cos \theta$$

$$l\ddot{\theta} + \ddot{x} \cos \theta = g \sin \theta \quad (25)$$

### 3.2.2 Modelo dinámico del carro móvil

Se realiza el diagrama del cuerpo libre del carro móvil donde se coloca las fuerzas que están aplicadas en el carro móvil como son la normal, el peso y las fuerzas de reacción del péndulo sobre el carro como se muestra en la Figura 15-3.

Como se ha analizado anteriormente, el carro móvil solo tiene movimiento traslacional en el eje X por lo que se aplica la tercera ley de Newton en el eje X para obtener la ecuación que relaciona la fuerza  $f$  con el desplazamiento  $x$ . Se desprecia la fuerza de fricción ya que esta se desarrolla en las llantas contraponiéndose a la fuerza generada por los motores por lo que es casi nula.



**Figura 15-3:** Diagrama de cuerpo libre del carro móvil

Realizado por: Orozco D. 2022

Se aplica la segunda ley de Newton ec. (4) en el eje X:

$$4f - P_x = M\ddot{x}$$

Donde:

$f$ : fuerza generada por un motorreductor

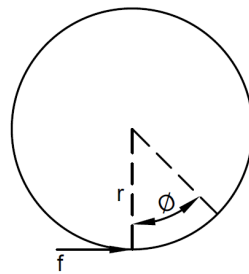
$M$ : masa del carro movil

$$4f - (m\ddot{x} - ml \sin \theta \dot{\theta}^2 + ml \cos \theta \ddot{\theta}) = M\ddot{x}$$

$$(M + m)\ddot{x} + ml(\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 4f \quad (26)$$

### 3.2.3 Modelo dinámico del neumático y motorreductor DC

Se realiza el diagrama del cuerpo libre del neumático y del motor juntamente con lo que se obtiene la aplicación de la fuerza mediante un voltaje determinado en el motor.



**Figura 16-3:** Diagrama del cuerpo libre del neumático

Realizado por: Orozco D. 2022

Se aplica suma de momentos en el centro del neumático:

$$\tau_c = fr \quad (27)$$

Se obtiene la segunda derivada del desplazamiento lineal del neumático:

$$x = \phi r$$

Donde:

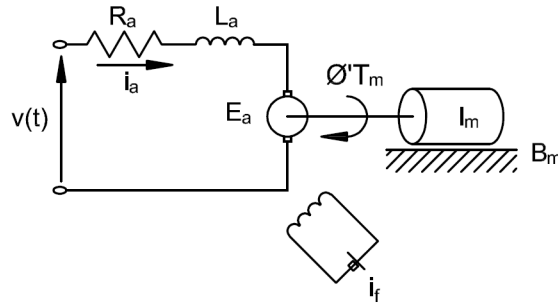
$r$ : radio del neumático

$\phi$ : desplazamiento angular del neumático

$$\frac{\dot{x}}{r} = \dot{\phi} \quad (28)$$

$$\frac{\ddot{x}}{r} = \ddot{\phi} \quad (29)$$

Se ha representado el circuito de un motor eléctrico dc para obtener las ecuaciones que rigen este sistema.



**Figura 17-3:** Modelo dinámico del motor DC

Realizado por: Orozco D. 2022

Se ha analizado la parte mecánica obteniendo los diferentes torques generados en el motor aplicando la segunda ley de newton rotacional ec. (6):

$$\tau_m - \tau_B - \tau_c = I_m \ddot{\phi} \quad (30)$$

Se reemplaza las ec. (11), ec. (12) y ec. (27) en ec. (30):

$$k i_a - B_m \dot{\phi} - f r = I_m \ddot{\phi} \quad (31)$$

Donde:

$B_m$ : constante de amortiguación torsional

$\dot{\phi}$ : velocidad angular del motor

$k$ : constante de par del motor

$i_a$ : corriente de armadura

$I_m$ : inercia del motor

Se analiza la parte eléctrica, realizando un análisis de malla del circuito del motor como se observa en la Figura 17-3, se aplica las ec. (1), ec. (7), ec. (10) y ec. (13) se ha obtenido la siguiente ecuación:

$$v(t) = R_a i_a + L_a \dot{i}_a + k \dot{\phi}$$

Donde:

$R_a$ : resistencia de armadura

$L_a$ : inductancia de armadura

$k$ : constante contraelectromotriz del motor

Se desprecia la reluctancia ya que es un valor muy pequeño.

$$v(t) = R_a i_a + k \dot{\phi} \quad (32)$$

$$i_a = \frac{v(t) - k \dot{\phi}}{R_a} \quad (33)$$

Se reemplaza la ec. (33) en la ec. (31):

$$k \left[ \frac{v(t) - k \dot{\phi}}{R_a} \right] - B_m \dot{\phi} - f r = I_m \ddot{\phi}$$

$$k v(t) - k^2 \dot{\phi} - R_a B_m \dot{\phi} - R_a f r = R_a I_m \ddot{\phi} \quad (34)$$

Se reemplaza las ec. (28) y ec. (29) en la ec. (34) quedando:

$$k v(t) - k^2 \frac{\dot{x}}{r} - R_a B_m \frac{\dot{x}}{r} - R_a f r = R_a I_m \frac{\ddot{x}}{r}$$

$$k v(t) = R_a I_m \frac{\ddot{x}}{r} + \left( \frac{k^2 + R_a B_m}{r} \right) \dot{x} + R_a f r$$

Se despeja la fuerza

$$f = \frac{k}{R_a r} v(t) - \frac{I_m}{r^2} \ddot{x} - \left( \frac{k^2 + R_a B_m}{R_a r^2} \right) \dot{x} \quad (35)$$

La ec. (35) describe la fuerza que se genera el neumático mediante la aplicación del voltaje en el motor.

### 3.2.4 Sistema no lineal del sistema péndulo invertido-carro móvil

Las ecuaciones que describen el movimiento del conjunto péndulo invertido y carro móvil respectivamente son las ecuaciones ec. (25) ec. (26) y ec. (35) :

$$l \ddot{\theta} + \dot{x} \cos \theta = g \sin \theta$$

$$(M + m) \ddot{x} + m l (\ddot{\theta} \cos \theta - \dot{\theta}^2 \sin \theta) = 4f$$

$$f = \frac{k}{R_a r} v(t) - \frac{I_m}{r^2} \ddot{x} - \left( \frac{k^2 + R_a B_m}{R_a r^2} \right) \dot{x}$$

Las ecuaciones obtenidas corresponden a un sistema no lineal ya que el ángulo está incluido en funciones trigonométricas por lo que no se tiene homogeneidad ni se puede aplicar el principio de superposición.

### 3.2.5 Sistema lineal del sistema péndulo invertido-carro móvil

El sistema se puede linealizar si se considera que  $\theta(t)$  y  $\dot{\theta}(t)$  son muy pequeños puesto que el péndulo se lo debe mantener en vertical, por lo que  $\sin \theta \approx \theta$ ,  $\cos \theta \approx 1$  y  $\theta \dot{\theta}^2 = 0$  quedando las ecuaciones ec. (25) ec. (26) y ec. (35) como:

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - 4f \quad (36)$$

$$M\ddot{x} = 4f - mg\theta \quad (37)$$

$$f = \frac{k}{R_a r} v(t) - \frac{I_m}{r^2} \ddot{x} - \left( \frac{k^2 + R_a B_m}{R_a r^2} \right) \dot{x} \quad (38)$$

Con estas ecuaciones se tiene un sistema lineal.

Se reemplaza ec. (38) en ec. (37)

$$M\ddot{x} = \frac{4k}{R_a r} v(t) - \frac{4I_m}{r^2} \ddot{x} - 4 \left( \frac{k^2 + R_a B_m}{R_a r^2} \right) \dot{x} - mg\theta$$

$$\left( M + \frac{4I_m}{r^2} \right) \ddot{x} = \frac{4k}{R_a r} v(t) - \left( \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{R_a r^2} \right) \dot{x} - mg\theta$$

Se reemplaza ec. (38) en ec. (36):

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta + 4 \left( \frac{k^2 + R_a B_m}{R_a r^2} \right) \dot{x} - \frac{4k}{R_a r} v(t) +$$

$$\frac{4I_m}{r^2} \left[ \frac{4rk}{R_a (Mr^2 + 4I_m)} v(t) - 4 \left( \frac{k^2 + R_a B_m}{R_a (Mr^2 + 4I_m)} \right) \dot{x} - \frac{mgr^2}{(Mr^2 + 4I_m)} \theta \right]$$

$$Ml\ddot{\theta} = (M + m)g\theta - \frac{4k}{R_a r} v(t) + \frac{16kI_m}{R_a r (Mr^2 + 4I_m)} v(t) -$$

$$\frac{16I_m(k^2 + R_a B_m)}{R_a r^2 (Mr^2 + 4I_m)} \dot{x} - \frac{4I_m mg}{(Mr^2 + 4I_m)} \theta + \frac{4(k^2 + R_a B_m)}{R_a r^2} \dot{x}$$

$$Ml\ddot{\theta} = \frac{4(k^2 + R_a B_m)}{R_a r^2} \dot{x} - \frac{16I_m(k^2 + R_a B_m)}{R_a r^2 (Mr^2 + 4I_m)} \dot{x} + (M + m)g\theta -$$

$$\frac{4I_m mg}{(Mr^2 + 4I_m)} \theta - \frac{4k}{R_a r} v(t) + \frac{16kI_m}{R_a r (Mr^2 + 4I_m)} v(t)$$

$$Ml\ddot{\theta} = 4 \left[ \frac{k^2 + R_a B_m}{R_a r^2} - \frac{4I_m(k^2 + R_a B_m)}{R_a r^2 (Mr^2 + 4I_m)} \right] \dot{x} + \left[ (M + m)g - \frac{4I_m mg}{(Mr^2 + 4I_m)} \right] \theta +$$

$$4 \left[ \frac{4kI_m}{R_a r (Mr^2 + 4I_m)} - \frac{k}{R_a r} \right] v(t)$$

$$Ml\ddot{\theta} = \left[ \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{R_a r^2} \left( 1 - \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} \right) \right] \dot{x} + \left[ (M + m)g - \frac{4I_m mg}{(Mr^2 + 4I_m)} \right] \theta + \left[ \frac{4k}{R_a r} \left( \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} - 1 \right) \right] v(t)$$

Las ecuaciones lineales que rigen el sistema péndulo invertido - carro móvil son las siguientes:

$$\left( M + \frac{4I_m}{r^2} \right) \ddot{x} = \frac{4k}{R_a r} v(t) - \left( \frac{4k^2 + 4R_e B_m}{R_a r^2} \right) \dot{x} - mg\theta \quad (39)$$

$$Ml\ddot{\theta} = \left[ \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{R_a r^2} \left( 1 - \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} \right) \right] \dot{x} + \left[ (M + m)g - \frac{4I_m mg}{(Mr^2 + 4I_m)} \right] \theta + \left[ \frac{4k}{R_a r} \left( \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} - 1 \right) \right] v(t) \quad (40)$$

### 3.2.6 Espacio de estados del sistema péndulo invertido-carro móvil

Se despeja las ecuaciones ec. (39) y ec. (40) en función de las derivadas de mayor grado ya que esto facilita la aplicación de las variables de estado.

Se despeja  $\ddot{\theta}$  de la ec. (39):

$$\ddot{\theta} = \left[ \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{MlR_a r^2} \left( 1 - \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} \right) \right] \dot{x} + \left[ \frac{(M + m)g}{Ml} - \frac{4I_m mg}{Ml(Mr^2 + 4I_m)} \right] \theta + \left[ \frac{4k}{MlR_a r} \left( \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} - 1 \right) \right] v(t) \quad (41)$$

Se despeja  $\ddot{x}$  de la ec. (38):

$$\ddot{x} = \frac{4k}{R_a r \left( M + \frac{4I_m}{r^2} \right)} v(t) - \left( \frac{4k^2 + 4R_e B_m}{R_a r^2 \left( M + \frac{4I_m}{r^2} \right)} \right) \dot{x} - \frac{mg}{\left( M + \frac{4I_m}{r^2} \right)} \theta$$

$$\ddot{x} = \frac{4rk}{R_a (Mr^2 + 4I_m)} v(t) - \left( \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{R_a (Mr^2 + 4I_m)} \right) \dot{x} - \frac{mgr^2}{(Mr^2 + 4I_m)} \theta \quad (42)$$

Para expresarla en variables de estado se debe definir cuatro nuevas variables:

$$z_1 = \theta$$

$$z_2 = \dot{\theta}$$

$$z_3 = x$$

$$z_4 = \dot{x}$$

Como se sabe, el ángulo  $\theta$  y la distancia o posición  $x$  varía según el voltaje que se aplica al carro móvil por lo que se consideran como salidas, teniendo:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_3 \end{bmatrix}$$

Se aplica la definición de variables de estado en las ec. (41) y ec. (42) y se obtiene:

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 = & \left[ \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{MlR_a r^2} \left( 1 - \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} \right) \right] z_4 + \\ & + \left[ \frac{(M+m)g}{Ml} - \frac{4I_m mg}{Ml(Mr^2 + 4I_m)} \right] z_1 + \left[ \frac{4k}{MlR_a r} \left( \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} - 1 \right) \right] v(t) \end{aligned} \quad (44)$$

$$\dot{z}_3 = z_4 \quad (45)$$

$$\dot{z}_4 = \frac{4rk}{R_a(Mr^2 + 4I_m)} v(t) - \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{R_a(Mr^2 + 4I_m)} z_4 - \frac{mgr^2}{(Mr^2 + 4I_m)} z_1 \quad (46)$$

Para simplificar la representación se asigna las siguientes constantes:

$$a = \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{MlR_a r^2} \left( 1 - \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} \right) \quad (47)$$

$$b = \frac{(M+m)g}{Ml} - \frac{4I_m mg}{Ml(Mr^2 + 4I_m)} \quad (48)$$

$$c = \frac{4k}{MlR_a r} \left( \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} - 1 \right) \quad (49)$$

$$e = \frac{4rk}{R_a(Mr^2 + 4I_m)} \quad (50)$$

$$h = \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{R_a(Mr^2 + 4I_m)} \quad (51)$$

$$j = \frac{mgr^2}{(Mr^2 + 4I_m)} \quad (52)$$

Al remplazar las ecuaciones desde ec. (47) hasta la ec. (52) en las variables de estado correspondientes a las ecuaciones ec. (43), (44), (45) y (46) se obtiene:

$$\dot{z}_1 = z_2$$

$$\dot{z}_2 = az_4 + bz_1 + cv(t)$$

$$\dot{z}_3 = z_4$$

$$\dot{z}_4 = ev(t) - hz_4 - jz_1$$

Por lo que, el espacio de estado que describe este modelo dinámico es:

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ b & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -j & 0 & 0 & -h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ c \\ 0 \\ e \end{bmatrix} v(t) \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (54)$$

### 3.2.7 Determinación de los parámetros del motor

La Tabla 1-3 muestra los parámetros de funcionamiento del motor dados por el fabricante, así como algunos valores fácilmente obtenibles. La resistencia de armadura se calcula experimentalmente mediante el uso de un amperímetro en el bobinado del motor dc.

**Tabla 1-3:** Características del motorreductor elegido

Parámetro	Valor
$\omega_N$	500 rpm
$V_N$	12 V
$R_a$	3,5 $\Omega$
$I_o$	0,3A

Realizado por: Orozco D. 2022

Para determinar el k del motor se aplica experimentalmente la ecuación ec. (32) y ec. (15) con las cuales se mide la corriente en generada en el inducido y la velocidad del motor a diferentes voltajes aplicados obteniendo la fuerza contraelectromotriz y así el valor de k.

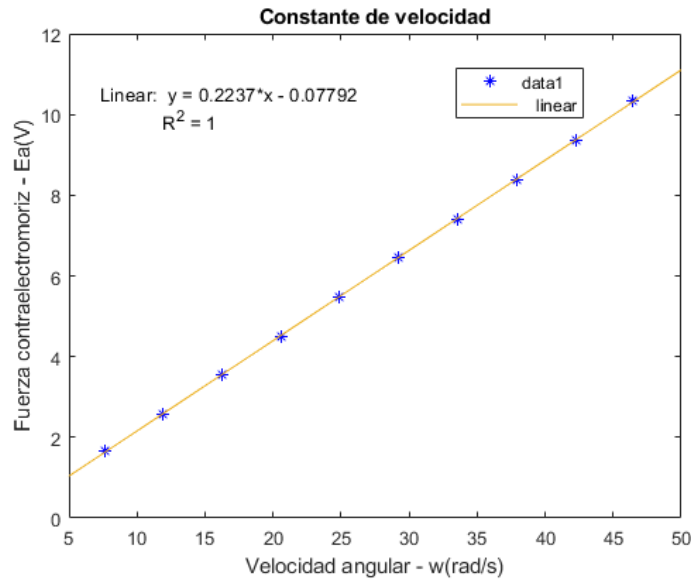


**Tabla 2-3:** Valores experimentales en los motorreductores

$v(V)$	$I_a(A)$	$\omega(rad/s)$	$E_a(V)$	$k(Vs/rad)$
2	0,1	7,650	1,650	0,2157
3	0,118	11,860	2,587	0,2181
4	0,1301	16,220	3,545	0,2185
5	0,1416	20,580	4,504	0,2189
6	0,1515	24,850	5,470	0,2201
7	0,159	29,160	6,444	0,2210
8	0,167	33,520	7,416	0,2212
9	0,173	37,940	8,395	0,2213
10	0,179	42,300	9,374	0,2216
11	0,1875	46,460	10,344	0,2226

Realizado por: Orozco D. 2022

Se grafica la fuerza contraelectromotriz y la velocidad angular con la ayuda de Matlab generando el Gráfico 2-3.



**Gráfico 2-3:** Fuerza contraelectromotriz vs velocidad angular

Realizado por: Orozco D. 2022

Como se ve en la gráfica, se linealiza mediante mínimos cuadrados obteniendo la siguiente relación:

$$k = 0.2237 \frac{V \cdot s}{rad}$$

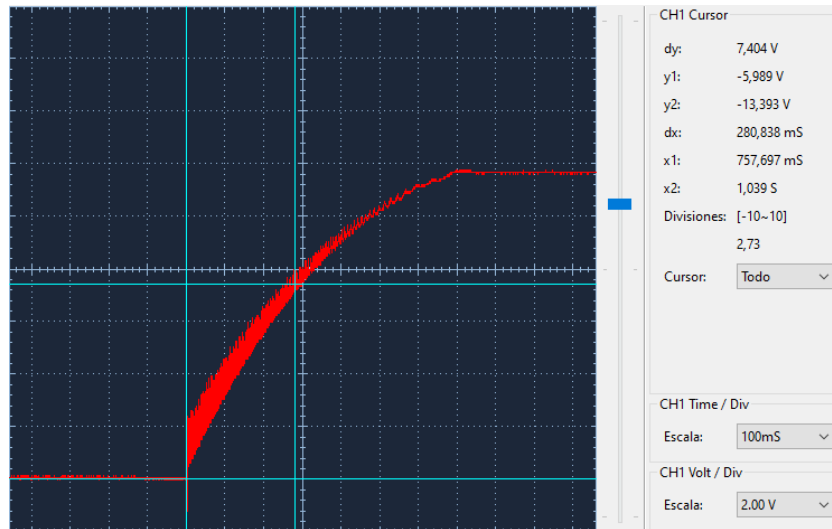
Ahora se determina el coeficiente de fricción viscosa mediante la aplicación de la ecuación ec. (16).

$$B_m = \frac{0,2237V \cdot s/rad(0,3A)}{52,3599rad/s}$$

$$B_m = 0,001282Nm \cdot s$$

Se determina de la constante de tiempo mecánica  $t_m$  en la cual se mide mediante un osciloscopio el tiempo en que tarda el motor en alcanzar el 63,2% de su voltaje o velocidad nominal. Esto se hace mediante el uso del menú Trigger y con el modo Único, esto permite ver la curva de reacción en el motor al momento en que se enciende.

Se utilizó el osciloscopio PeakTech 1265 y se genera la curva del motor donde se procedió a guardar la onda externamente para tratarla con el software para Pc donde se trata la curva con mayor facilidad y precisión como se observa en el Gráfico 3-3.



**Gráfico 3-3:** Curva de reacción del motorreductor

Realizado por: Orozco D. 2022

Al tratar la curva se coloca una línea horizontal al 63,2% del nominal correspondiente al 7,39V se observa que al trazar una vertical donde se genera la intersección entre la curva del motor y la línea horizontal, este corresponde a la constante de tiempo mecánica, arrojando un valor numérico de:

$$t_m = 0,280s$$

Con estos datos que se han obtenido de forma analítica y experimental, se determina el momento de inercia del motor  $I_m$  aplicando la ecuación ec. (17).

$$I_m = \frac{0,28s}{3,5\Omega} \left[ 3,5\Omega * 0,001282Nm.s + \left( 0,2237 \frac{V.s}{rad} \right)^2 \right]$$

$$I_m = 0,004363kg.m^2$$

### 3.2.8 Ecuaciones de estado del modelo lineal

La Tabla 3-3 muestra los valores numéricos del equipo que ayudaran a obtener las ecuaciones de estado del modelo.

**Tabla 3-3:** Valores numéricos de los parámetros del equipo

Parámetro	Valor numérico
$M$	1,784 kg
$m$	0,401 kg
$l$	0,315 m
$r$	0,0425 m
$g$	9,81 m/s <sup>2</sup>
$R_a$	3,5Ω
$k$	0,2237 V.s/rad
$B_m$	0,001282Nm.s
$I_m$	0,004363kg.m <sup>2</sup>

Realizado por: Orozco D. 2022

Para obtener el espacio de estados del modelo dinámico se reemplaza los valores tabulados en la Tabla 3-3 en las ecuaciones ec. (47) hasta la ec. (52) obteniendo los siguientes valores:

$$a = 9,5692$$

$$b = 32,2339$$

$$c = -1,6684$$

$$e = 0,5256$$

$$h = 3,0143$$

$$j = 0,3437$$

Se reemplaza estos valores en las ecuaciones ec. (53) y ec. (54), obteniendo el espacio de estado que describe este modelo dinámico correspondientes a las ecuaciones ec. (18) y ec. (19).

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 32,2339 & 0 & 0 & 9,5692 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,3437 & 0 & 0 & -3,0143 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1,6684 \\ 0 \\ 0,5256 \end{bmatrix} v(t) \quad (55)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \quad (56)$$

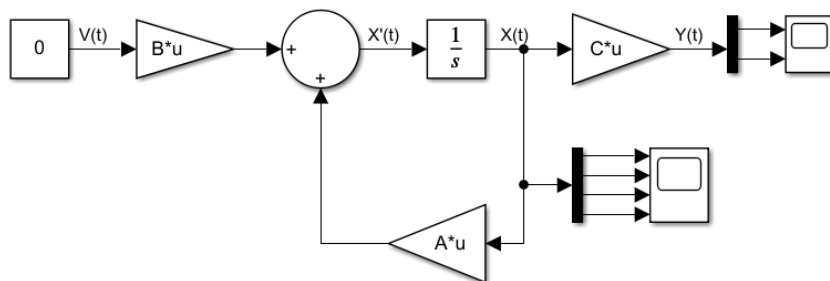
Se separan las matrices que servirán para la programación y la verificación del modelo en Simulink.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 32,2339 & 0 & 0 & 9,5692 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,3437 & 0 & 0 & -3,0143 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -1,6684 \\ 0 \\ 0,5256 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

### 3.3 Implementación del modelo dinámico en Simulink

Se representa el espacio de estados del modelo lineal mediante diagrama de bloques en Simulink ya que este diagrama es con el cual se va a realizar el control automático. Este diagrama representa la planta sin un control, es decir en su forma natural, se coloca un voltaje de cero a la entrada y como salida las 4 variables de estados y colocando las distintas matrices del espacio de estado como se muestra en la Figura 18-3.



**Figura 18-3:** Diagrama de bloques en Simulink del sistema no controlado

Realizado por: Orozco D. 2022

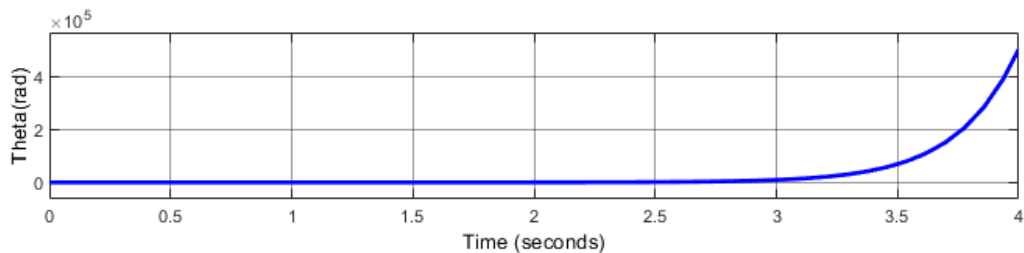
Para iniciar el programa se define los valores numéricos de los diferentes parámetros además de las matrices para lo cual se ejecuta el siguiente script:

```

1  clc;
2  clear;
3  close all;
4
5  M = 1.784;           %Masa del carrito (kg)
6  m = 0.401;         %Masa del péndulo (kg)
7  l = 0.315;         %Longitud/2 del péndulo (m)
8  r = 0.0425;        %Radio de llanta[m]
9  g = 9.81;          %Gravedad [m/s^2]
10 Ra= 3.5;           %Resistencia de motor [oms]
11 k = 0.2237;        %Adimensional
12 Bm= 0.001282;     %Friccion viscosa del motor[Nms]
13 Im= 0.004363;     %Inercia del motor, caja [kgm2]
14
15 %variables simplificadoras
16 a= ((4*k^2+4*Ra*Bm)/(M*l*Ra*r^2)) * (1 - (4*Im/(M*r^2+4*Im)));
17 b= ((M+m)*g)/(M*l) - (4*Im*m*g)/(M*l*(M*r^2+4*Im));
18 c= (4*k/(M*l*Ra*r)) * ((4*Im/(M*r^2+4*Im)) - 1);
19 e= (4*r*k/(Ra*(M*r^2+4*Im)));
20 h= (4*k^2+4*Ra*Bm)/(Ra*(M*r^2+4*Im));
21 j= r^2*m*g/(M*r^2+4*Im);
22
23 %Matrices de variables de estado
24 A=[0 1 0 0;b 0 0 a;0 0 0 1;-j 0 0 -h];
25 B=[0;c;0;e];
26 C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
27 D=[0;0];

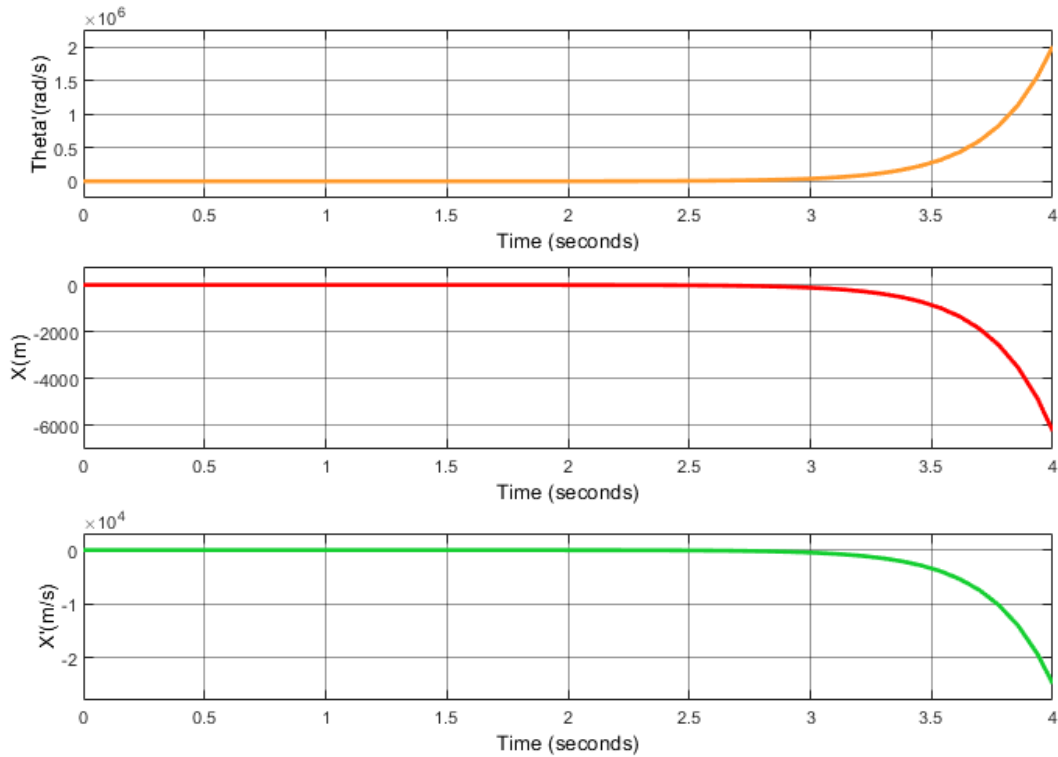
```

Una vez ejecutado el programa y configurado con una condición inicial de un ángulo del péndulo de 5°, el display arroja el Gráfico 4-3 de las variables de estado del sistema lineal. Como se observa todos los valores tienden al infinito lo que demuestra que el sistema es naturalmente inestable y el péndulo cae.



**Gráfico 4-3:** Variables de estado simuladas del sistema no controlado.

Realizado por: Orozco D. 2022



**Gráfico 5-3:** (Continuación)

Realizado por: Orozco D. 2022

### 3.4 Sintonización de un control LQR para balanceo del péndulo invertido

Se aplica un regulador cuadrático lineal LQR para ello se debe encontrar la matriz de retroalimentación de estados  $K$ , dicha matriz se obtendrá mediante Matlab ya que esta herramienta permitirá obtener el mejor control posible con la modificación de los valores de la matriz  $Q$  y  $R$ .

No se tienen reglas para la selección de los valores de las matrices  $Q$  y  $R$ , por lo que se asigna valores mucho mayores a las variables que se desea minimizar. Si la matriz  $Q$  es más grande que  $R$ , se tiene una rápida regulación de los estados hacia cero siendo agresivo el regulador, en caso contrario, si  $R$  es mayor que  $Q$ , se tiene una lenta regulación de los estados hacia cero siendo conservador el regulador.

Se coloca valores mayores en la posición de  $Q$  que penaliza el ángulo del péndulo y el desplazamiento del equipo ya que con estos valores se obtiene una rápida regulación del péndulo hacia cero. Se asigna un valor de 1 a  $R$  para que la matriz  $Q$  sea mucho mayor además de que para este equipo se necesita que los estados lleguen a cero rápidamente sin importar el ahorro de energía.

Se utiliza la función  $K = lqr(A, B, Q, R)$  mediante la adición del siguiente código al código utilizado para la verificación del modelo en Simulink sin control.

```

29 %Matriz optima de realimentacion de estados
30 Q=[10000,0,0,0; %Penaliza el angulo del pendulo
31 0,1,0,0; %Penaliza la rapidez angular del pendulo
32 0,0,10000,0; %Penaliza la posicion X del modelo
33 0,0,0,1]; %Penaliza la rapidez lineal del modelo
34
35 R=1; %penaliza el gasto de energia
36
37 K=lqr(A,B,Q,R) %obtiene la matriz oprima de realimentacion

```

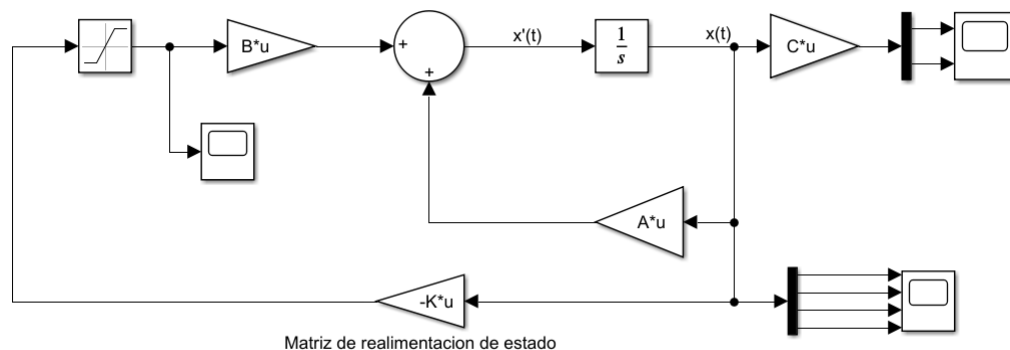
Al ejecutar el script, Matlab arroja la siguiente matriz de retroalimentación de estados que servirá para el control del modelo.

$$K = [-223,6831 \quad -35,7363 \quad -100 \quad -70,5451]$$

### 3.5 Verificación del control automático LQR en Simulink

Se verifica cómo se desempeña el control LQR sintonizado mediante simulación en Simulink, se observa cómo se comporta este control y mediante la modificación de las matrices Q y R se consigue una mejor regulación de nuestro modelo físico.

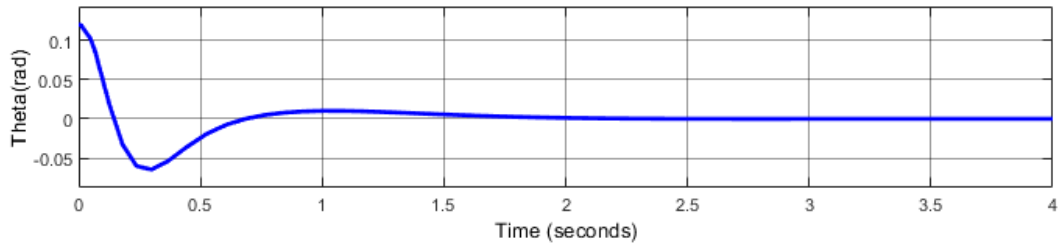
Para ello se agrega al sistema anterior creado en Simulink mostrado en la figura 19-3, una ganancia con la matriz de realimentación de estados que multiplicará a las variables de estados obteniendo la regulación de este. Además de ello se agrega un bloque de saturación donde se coloca los valores máximos de voltaje que maneja los motores, en este caso +12 y -12.



**Figura 19-3:** Diagrama de bloques en Simulink del sistema controlado

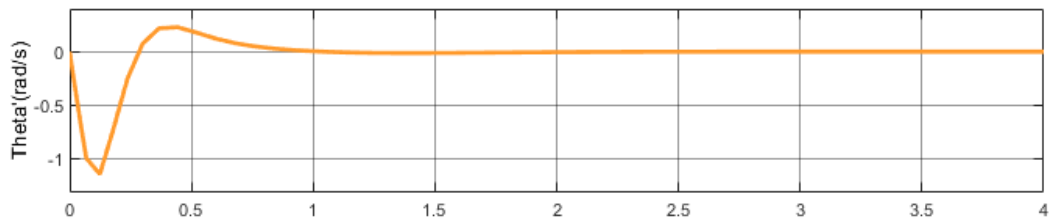
Realizado por: Orozco D. 2022

Para ejecutar la simulación se coloca una condición inicial del ángulo theta del péndulo invertido de 0,12rad en el integrador que se encuentra dentro del subsistema planta para simular el control de este, obteniéndose los gráficos 5-3, 6-3, 7-3 y 8-3.



**Gráfico 6-3:** Ángulo del péndulo vs tiempo del regulador LQR simulado

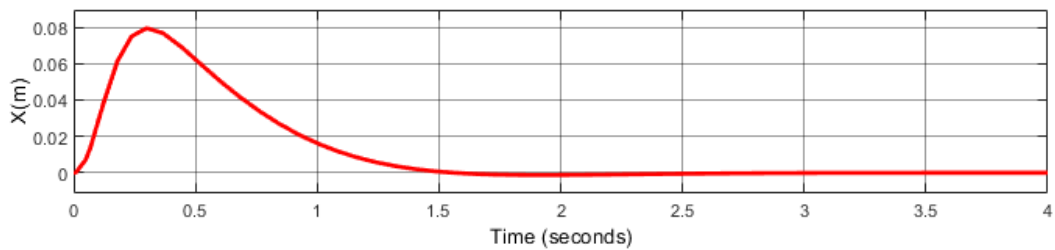
Realizado por: Orozco D. 2022



**Gráfico 7-3:** Velocidad angular del péndulo vs tiempo del regulador LQR simulado

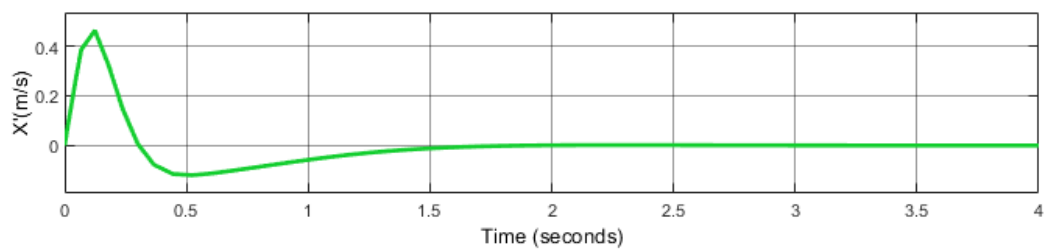
Realizado por: Orozco D. 2022

Se observa que este control da una respuesta rápida y regula en un tiempo de 0,7 segundos, envía todos los estados a cero por lo que esta matriz de realimentación de estado  $K$  se colocará en la programación dentro de Arduino.



**Gráfico 8-3:** Desplazamiento del carro móvil vs tiempo del regulador LQR simulado

Realizado por: Orozco D. 2022



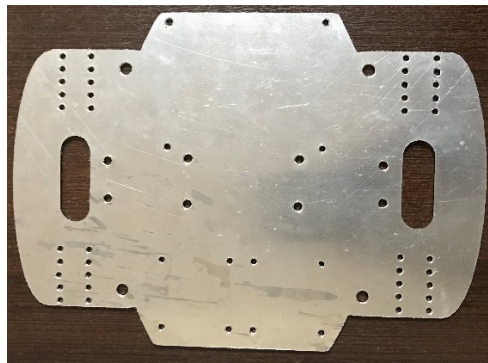
**Gráfico 9-3:** Velocidad lineal del carro móvil vs tiempo del regulador LQR simulado

Realizado por: Orozco D. 2022



### 3.6 Construcción del prototipo

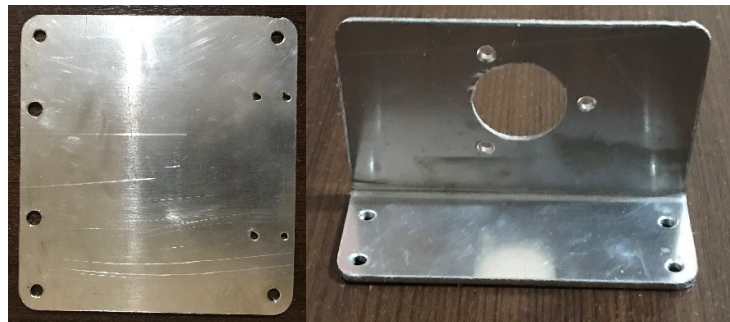
La placa base mostrada en la figura 20-3 se la realizó en plancha de aluminio de 2mm de espesor mediante una cnc de corte en plasma, en la cual se obtuvo una gran aproximación a los planos proyectados del ANEXO O. La cortadora en plasma no tiene tanta exactitud al momento de realizar agujeros de menos de 10mm, por lo que se tuvo que marcar los centros de los agujeros con puntos dentro del archivo .dxf y eliminar las circunferencias correspondientes a los agujeros. Luego de obtener la placa cortada y marcada en los centros de los agujeros, se realizó las perforaciones mediante el uso de un taladro vertical teniendo en cuenta los diámetros de los agujeros. Esto permitió una mayor exactitud que si lo se realizara de manera rudimentaria y con una mayor facilidad.



**Figura 20-3:** Placa base del equipo

Realizado por: Orozco D. 2022

De igual manera se realizó el corte de la placa superior, topes y del soporte del encoder correspondientes al Anexo P y R como se observa en la figura 21-3.

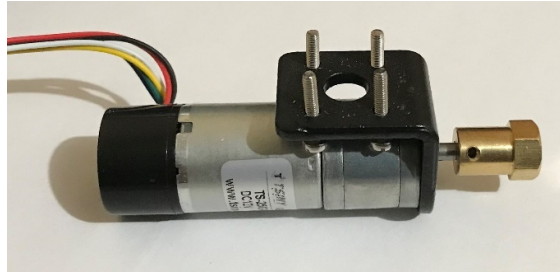


**Figura 21-3:** Placa superior y soporte para encoder del equipo

Realizado por: Orozco D. 2022

Para montar los motorreductores en el soporte de montaje primero se debe colocar los cuatro tornillos superiores que permiten acoplarse con la placa base, posterior a esto se coloca y ajusta

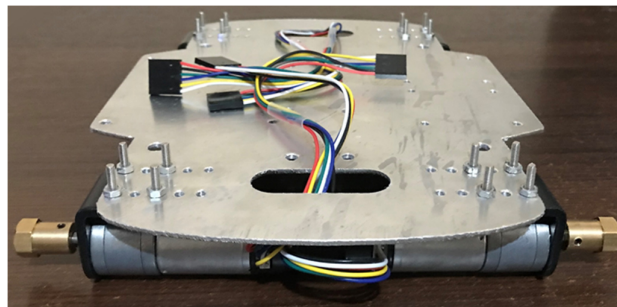
el motorreductor con dos tornillos M3x1, luego de esto se monta el acople neumático-motorreductor en el eje y se ajusta con los prisioneros como se muestra en la figura 22-3.



**Figura 22-3:** Montaje del motorreductor y acople en el soporte

Realizado por: Orozco D. 2022

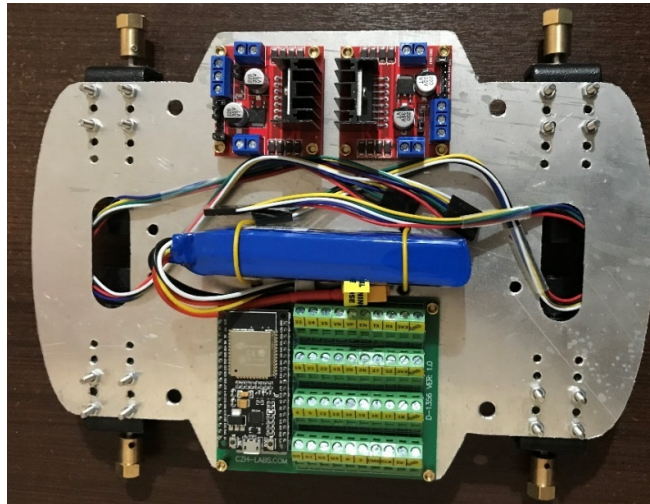
Una vez montado los 4 motorreductores en los soportes de montaje, se acopla este conjunto en la placa base donde los 4 tornillos se deben ajustar en sus respectivos agujeros con sus tuercas de medida M3x1.



**Figura 23-3:** Montaje de los 4 motorreductores en la placa base

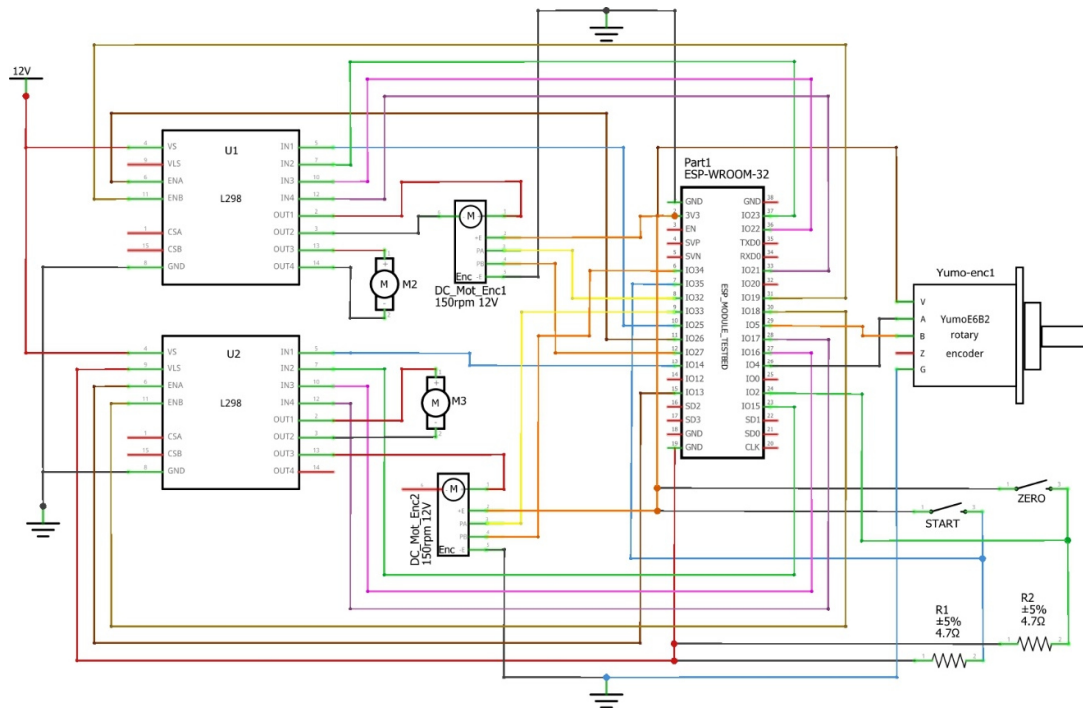
Realizado por: Orozco D. 2022

En los agujeros de los elementos electrónicos se coloca elevadores que se pueden conseguir en cualquier electrónica, cada elevador tiene dos piezas las cuales se ajustan una por la parte superior del elemento y otro por la inferior, esto se utiliza para evitar que los elementos electrónicos tengan contacto con la base y se produzca algún corto circuito. Se ajusta estos elementos electrónicos con tornillos M3x1 por la parte inferior de la placa base y se asegura la batería LiPo con correas de amarre plásticas como se muestra en la Figura 24-3.



**Figura 24-3:** Montaje de los elementos electrónicos en la placa base

Realizado por: Orozco D. 2022

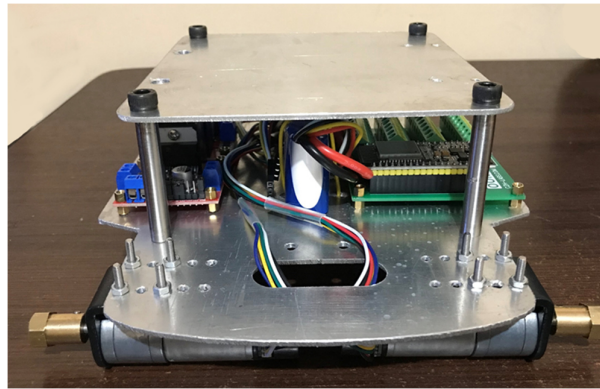


**Figura 25-3:** Diagrama de conexión de los elementos electrónicos

Realizado por: Orozco D. 2022

Posterior a esto se realiza el cableado de todos los elementos electrónicos utilizando cables para Arduino y cable solido 32 AWG como se observa en la Figura 25-3.

Se coloca los 4 elevadores de acero para la placa superior asegurándolos con tornillo allen de cabeza cilíndrica de medida M6X1 tanto por la parte superior de la placa superior como de la placa base como se muestra en la Figura 26-3.



**Figura 26-3:** Ensamblaje de la placa superior y elevadores

Realizado por: Orozco D. 2022

Una vez montada la placa superior se ajusta el soporte del encoder en la placa superior con 4 tornillos M3x1 con sus respectivas tuercas, así mismo se coloca la placa topes y se ajusta con los 4 tornillos, posterior a esto se colocan los pernos dentro de los agujeros de la chumacera donde se colocan los elevadores, luego se insertan estos dentro de agujero de la placa superior, a su vez se monta el eje del péndulo junto con el eje de unión en las chumaceras y pasando por los topes ajustando los prisioneros de este, posterior a esto se coloca las tuercas y se monta en la placa base.



**Figura 27-3:** Ensamblaje del soporte del encoder, encoder, eje del encoder y chumacera

Realizado por: Orozco D. 2022

Posterior a esto se monta el acople dentro del eje de unión quedando a 5mm del borde ajustando los prisioneros, luego se coloca el encoder rotacional en el soporte del encoder y se coloca dentro

del acople a 5mm del borde, posterior se ajusta con tres tornillos M3x1 como muestra la figura 27-3.

Por último, se coloca los neumáticos en los acoples con su respectivo tornillo M4x0,7 y se ajusta el péndulo en su agujero roscado como se observa en la Figura 27-3.



**Figura 28-3:** Sistema péndulo invertido - carro móvil ensamblado completamente

Realizado por: Orozco D. 2022

Se verifica el peso total del carro móvil y del péndulo, mostrados en la tabla 4-3, esto para utilizar los valores reales en el espacio de estado, así como en la sintonización del control obteniendo un regulador más exacto del péndulo invertido.

**Tabla 4-3:** Peso de las partes del equipo

M (carro móvil)	1,980kg
m (péndulo)	0,646 kg

Realizado por: Orozco D. 2022

### 3.7 Costos

La tabla 5-3 detalla el costo de cada componente y muestra el costo total para la construcción del equipo.

**Tabla 5-3:** Detalle de costos

Detalle	Unidades requeridas	Valor unitario	Costo total
1. Costos Directos			
Placa aluminio 20x56cm e=2mm	1	15\$	15\$
Soporte motorreductor $\varnothing=25\text{mm}$	4	3.5\$	14\$
Motorreductor con encoder Pololu 4843 HP 12V-500RPM-20.4:1	2	40\$	80\$
Motorreductor Pololu 3203 HP 12V-500RPM-20.4:1	2	30\$	60\$
Tornillo M3 x 0.5 x 16	16	0,10\$	1,6\$
Batería LiPo 3S Turnigy 1600mAh 30-40C	1	35\$	35\$
Controlador de motor L298 DC Motor Drive	2	3.5\$	7\$
Eje acero inox. $\varnothing=5/16\text{in}$ L=30cm (Elevador)	1	3\$	3\$
Eje acero inox. $\varnothing=3/8\text{in}$ L=65cm (Péndulo)	1	3\$	3\$
Eje acero inox. $\varnothing=5/8\text{in}$ L=12cm (Encoder)	1	3\$	3\$
Eje acero inox. $\varnothing=1-1/4\text{in}$ L=5cm (Cilindro)	1	2\$	2\$
Encoder OMRON E6B2-CWZ3E 1000P/R	1	45\$	45\$
Neumático $\varnothing=85\text{mm}$	4	6\$	24\$
Chumacera MiSUMi P-001 $\varnothing=12\text{mm}$	2	7\$	14\$
Perno Cabeza Hexagonal M7 x 1.0 x 30	4	1\$	4\$
Tuerca Hexagonal M7 x 1.0	4	0,5\$	2\$
Bloque de montaje CZH-LABS.COM D-1356	1	22\$	22\$
Columna hexagonal macho-hembra M3X0.5X4	12	0.25\$	3\$
Tornillo M3 x 0.5 x 4	15	0.1\$	1,5\$
Módulo ESP32	1	13\$	13\$
Tornillo M3 x 0.5 x 10	4	0.1\$	0.4\$
Tuerca Hexagonal M3 x 0.5	20	0,1\$	2\$
Tornillo M3 x 0.5 x 6	8	0.1\$	0.8\$
Tornillo M4 x 0.7 x 6	4	0,1\$	0,4\$
Tuerca M8 x 1.25	1	0.5\$	0.5\$
Switch KCD1-B2-3P-Off	1	0,5\$	0,5\$
Push button SWITCH 12x12mm	2	0.8	1,6\$
Perno cabeza allen M - 6 x 1.0 x 16	8	0.75\$	6\$
Acople eje interno $\varnothing=4\text{mm}$	4	2\$	8\$

Cargador de baterías lipo 2S y 3S IMAX B3	1	13\$	13\$
Cable para Arduino 20 cables	1	2\$	2\$
Estaño	1	1\$	1\$
Correas de amarre plásticas	1	2\$	2\$
Corte CNC			20\$
Torneado y Fresado			60\$
Herramientas (Llave hexagonal, llave allen, etc)			7\$
<b>2. Costos indirectos</b>			
Servicio de servientrega	3	5,75\$	17,25\$
Importación			46,71\$
<b>TOTAL</b>			<b>541,26\$</b>

Realizado por: Orozco D. 2022

### 3.8 Programación del control automático en ESP32 mediante Arduino

Arduino permite la programación de distintos módulos, uno de ellos es ESP32 y para ello es necesario instalar bibliotecas para su programación. Para ello se necesita descargar del Boards Manager el paquete esp32 y posteriormente se selecciona como placa ESP32 Wrover Module.

En Arduino se definen las constantes y pines a utilizar correspondientes a los encoders y a los módulos de control LM298 además de las constantes y variables a utilizar. Se utiliza una librería llamada BluetoothSerial.h la cual permitirá el uso del bluetooth transmitiendo los datos para el análisis de estos.

En la programación se realiza la obtención de las variables de estado en tiempo real, las cuales van a ser realimentadas como son: el ángulo theta del péndulo, la velocidad angular del péndulo, la posición del carro móvil y la velocidad lineal del carro móvil. Estas variables se multiplicarán por la matriz de realimentación de estados  $-K$  con la cual se obtiene el valor de  $U = -K * x$  que es la señal de entrada, en este caso es el voltaje que se aplicará a los motores para lograr la estabilidad del péndulo invertido. Además de esto se utiliza el Bluetooth para realizar una comunicación serial con un dispositivo el cual permita el análisis y comportamiento de las variables de estado, para la comunicación y tabulación de datos por medio de un computador se utilizó el programa PuTTY el cual muestra un terminal con los datos transmitidos por la máquina. La programación se adjunta en el ANEXO S.

### 3.9 Guía de práctica

El documento de la práctica de laboratorio en la cual se utiliza el modelo y se compara diferentes métodos de control automático se adjunta en el ANEXO T.

## CAPITULO IV

### 4. RESULTADOS

#### 4.1 Pruebas de funcionamiento

Para verificar si el modelo físico cumple con los requerimientos planteados se sigue un plan de pruebas con el cual se sabe si la máquina cumple dichos requerimientos y si funciona correctamente.

##### 4.1.1 Pruebas mecánicas

En estas pruebas se verificará si el modelo cumple con su material, forma, elementos eléctricos, elementos mecánicos y su ensamblaje para su correcto funcionamiento.

###### 4.1.1.1 Prueba 1: Dimensiones y material de la estructura.

Tipo de Prueba: observación y verificación

Formato de Registro: Formato F1

Anexo: F

Procedimiento:

- 1) Establecer el inicio de la prueba
- 2) Establecer el tiempo de la prueba
- 3) Verificar si los diferentes elementos que conforman la estructura son del material especificado.
- 4) Verificar si los diferentes elementos de la estructura tienen la forma y dimensiones conforme a los planos de los ANEXOS O, P, Q y R.

###### 4.1.1.2 Prueba 2: Elementos y ensamblaje de la máquina.

Tipo de Prueba: Observación y verificación

Formato de Registro: Formato F1

Anexo: G

Procedimiento:

- 1) Establecer el inicio de la prueba
- 2) Establecer el tiempo de la prueba



- 3) Proceder a verificar si el modelo cuenta con todos los elementos electrónicos y mecánicos conforme al plano de conjunto del ANEXO N.
- 4) Verificar que el ensamblaje de la maquina no sea forzado.

#### **4.1.2 Pruebas electrónicas**

En este apartado se verifica el correcto funcionamiento de los elementos electrónicos utilizados en la máquina.

##### *4.1.2.1 Prueba 1: Funcionamiento de ESP32, placa D-1356 y de la batería LIPO*

Tipo de prueba: Toma de datos y verificación

Formato de registro: Formato F2

Anexo: H

Procedimiento:

- 1) Establecer el inicio de la prueba
- 2) Establecer el tiempo de la prueba
- 3) Verificar mediante un multímetro el voltaje de salida de la batería
- 4) Energizar la maquina mediante el switch de la batería
- 5) Verificar con un multímetro el voltaje de salida en la placa D-1356 correspondiente al pin 3V3.
- 6) Verificar que el led de la placa eps32 parpadee.

##### *4.1.2.2 Prueba 2: Funcionamiento de controladores L298 y motorreductores*

Tipo de prueba: Toma de datos y verificación.

Formato de registro: Formato F2

Anexo: I

Procedimiento:

- 1) Establecer el inicio de la prueba
- 2) Establecer el tiempo de la prueba
- 3) Energizar el ESP32 y los módulos L298 mediante el switch de la batería
- 4) Levantar por el centro de la base la máquina y girar en sentido horario y antihorario el eje del péndulo invertido.
- 5) Verificar el funcionamiento de los 4 motorreductores, verificando que estos giren en sentido horario y antihorario.

- 6) Verificar con un multímetro en el módulo L298, el voltaje de salidas hacia los motores.

#### 4.1.2.3 *Prueba 3: Funcionamiento de encoder de motorreductores y E6B2*

Tipo de prueba: Toma de datos y verificación

Formato de registro: Formato F2

Anexo: J

Procedimiento:

- 1) Establecer el inicio de la prueba
- 2) Establecer el tiempo de la prueba
- 3) Desconectar la alimentación del pin 5V5 del módulo ESP32
- 4) Conectar el ESP32 mediante un USB al computador.
- 5) Energizar la maquina mediante el switch de la batería
- 6) Levantar por el centro de la base la máquina y girar en sentido horario y antihorario el eje del péndulo invertido.
- 7) Verificar mediante monitor serial la velocidad en rpm de los 4 motorreductores.
- 8) Verificar mediante el monitor serial el ángulo arrojado por el encoder E6B2.

#### 4.1.3 *Pruebas del equipo en funcionamiento*

Una vez verificado el funcionamiento de los elementos mecánicos y eléctricos se procede a la verificación del funcionamiento del modelo físico.

##### 4.1.3.1 *Prueba 1: Funcionamiento del equipo*

Tipo de prueba: Observación y verificación

Formato de registro: Formato F1

Anexo: K

Procedimiento:

- 1) Establecer el inicio de la prueba
- 2) Establecer el tiempo de la prueba
- 3) Energizar la maquina mediante el switch de la batería
- 4) Dar un pequeño impulso al péndulo invertido
- 5) Verificar que el modelo físico avance, los motores deben poder mover todo el peso de la máquina.
- 6) Verificar que los neumáticos no se deslicen con respecto al piso.

#### 4.1.3.2 Prueba 2: Funcionamiento del control LQR

Tipo de prueba: Toma de datos y verificación.

Formato de registro: Formato F2

Anexo: L

Procedimiento:

- 1) Establecer el inicio de la prueba
- 2) Establecer el tiempo de la prueba
- 3) Energizar la maquina mediante el switch de la batería manteniendo manualmente el péndulo invertido en su posición vertical estable.
- 4) Conectar mediante Bluetooth el ESP32 con la computadora
- 5) Abrir el programa PuTTY y configurar el puerto COM correspondiente al Bluetooth asignado por la computadora además de la velocidad de transmisión, en este caso 115200. Una vez configurado esto, dar clic en open y verificar que se reciba datos.
- 6) Colocar al péndulo invertido en un ángulo diferente de cero observando en el programa.
- 7) Presionar el botón y soltar el péndulo al mismo tiempo.
- 8) Después de un tiempo de 5 segundos apagar el equipo mediante el switch y copiar todos los datos arrojados del programa PuTTY para posteriormente pasarlos a Matlab.
- 9) Graficar las variables de estado para comparar con el control simulado en Simulink.
- 10) Verificar las gráficas de las variables de estado.

## 4.2 Análisis de resultados

Las dimensiones de la placa base y sus elementos estructurales son exactas permitiendo un correcto ensamblaje de todos los elementos tanto mecánicos como electrónicos y esto se debe a que se realizó mediante un CNC que da esta exactitud.

La batería LIPO, al estar cargada completamente, arroja un voltaje de 11,1V ya que cada celda tiene un voltaje de 3,7V y es suficiente para accionar el equipo.

La placa placa D-1356 en su pin de 3,3V arroja dicho valor de voltaje, esto ocurre también en el pin de 5V.

El módulo ESP32 enciende mediante la alimentación de 5V el cual se obtiene del controlador L298 verificando el encendido del led de dicho módulo.

El controlador L298 enciende correctamente y controla los motorreductores cambiándolos de giro, se mide el voltaje de salida hacia los motorreductores el cual varía según la señal de control hasta llegar a su máximo voltaje el cual es un poco menor al nominal de la batería.

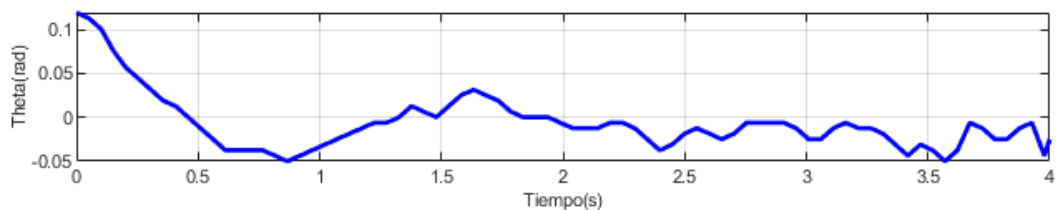
Los motorreductores giran en los dos sentidos según la señal de control y funcionan correctamente. El motorreductor arranca a los 2,5V aproximadamente hasta vencer la inercia.

El encoder del motorreductor marca a un voltaje nominal un máximo de 420rpm.

El encoder incremental E6B2 marca 1000 pulsos por cada revolución generando los 6,2832 rad captados por el monitor serial.

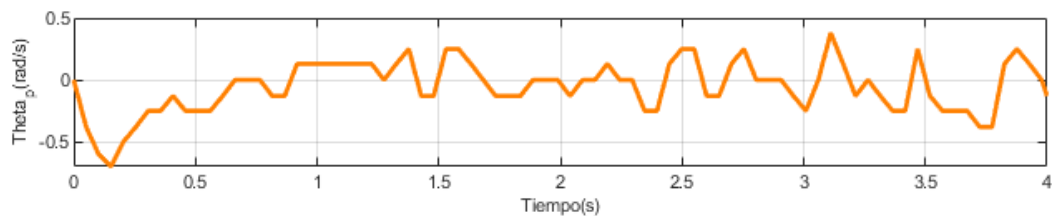
La matriz de realimentación de estados  $K$  obtenida mediante el software Matlab no responde correctamente en el equipo real por lo que se realizó un ajuste con un valor de  $K = [-67,1766, -16,8570, -0,1, -11,5563]$  en la programación permitiendo que el equipo se comporte de mejor manera.

Los datos recopilados de la prueba de funcionamiento se graficaron en Matlab. En el gráfico 1-4, 2-4, 3-4, y 4-4 se muestran las cuatro variables de estado que muestran el comportamiento real de la máquina y del control LQR. Aquí se muestra el inicio del control en un tiempo de 4 segundos donde se aplica un ángulo diferente de cero al péndulo invertido en su estado estable para verificar su comportamiento.



**Gráfico 1-4:** Ángulo del péndulo vs tiempo del regulador LQR real

**Realizado por:** Orozco D. 2022

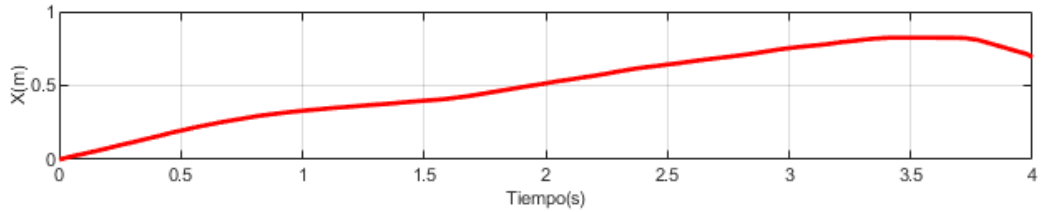


**Gráfico 2-4:** Velocidad angular del péndulo vs tiempo del regulador LQR real

**Realizado por:** Orozco D. 2022

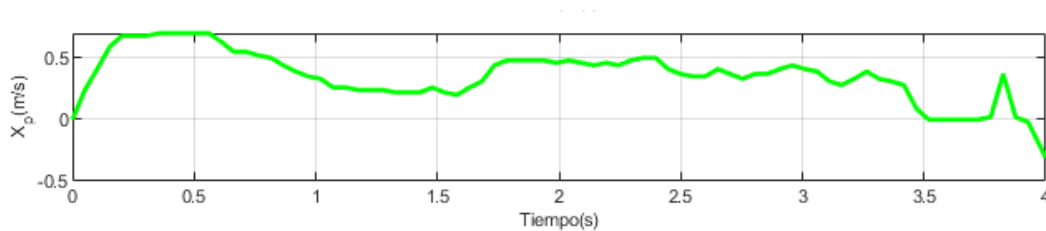
La velocidad angular depende del sentido de giro del péndulo, desde el segundo cero hasta alrededor de 0,7 segundos es negativo y esto se debe a que, al aplicar el control, el péndulo gira rápidamente para compensar la variación del ángulo generando este cambio brusco de velocidad. Luego, al igual que el ángulo, la velocidad angular varía alrededor del cero.

La posición de la máquina aumenta progresivamente mientras se realiza el control del ángulo desde una posición de cero hasta aproximadamente 0,8m en el tiempo de muestreo observando que este valor seguirá aumentando después de dicho tiempo. Se observa que el movimiento de control inicia aproximadamente a los 0,7s.



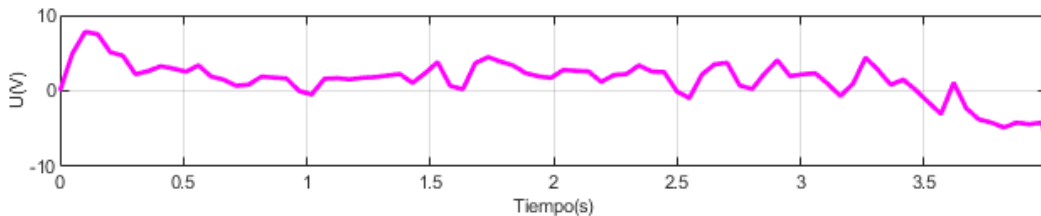
**Gráfico 3-4:** Desplazamiento del carro móvil vs tiempo del regulador LQR real

Realizado por: Orozco D. 2022



**Gráfico 4-4:** Velocidad lineal del carro móvil vs tiempo del regulador LQR real

Realizado por: Orozco D. 2022



**Gráfico 5-4:** Señal de voltaje vs tiempo del regulador LQR real

Realizado por: Orozco D. 2022

La variación de voltaje en su pico máximo es de 8V y posteriormente varía alrededor de los 2,5V para mantener el péndulo en su punto estable.

### 4.3 Discusión

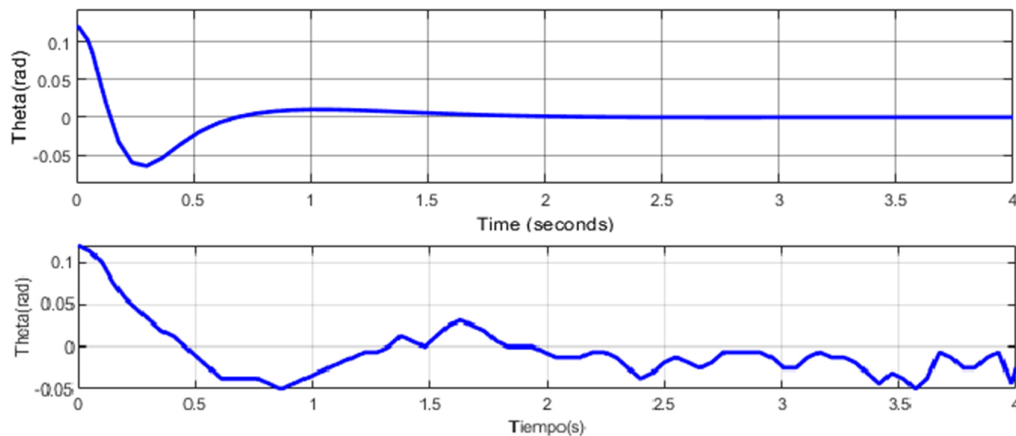
Todos los elementos mecánicos como electrónicos funcionan correctamente, así como su ensamblaje lo que permite que el control automático tenga un buen desempeño.

Los motorreductores se accionan al aplicar un voltaje de 2,5V por lo que al momento que el control envía la señal de un voltaje menor a este, los motorreductores no se accionan permitiendo

que el ángulo del péndulo aumente aún más hasta que la señal alcance este voltaje y se accionen los motorreductores, esta condición causa que el control sea más grosero.

Comparado las curvas del ángulo del péndulo tanto del modelo simulado con el equipo real mostrado en el gráfico 6-4, la curva inferior correspondiente al equipo real tiene un parecido a la curva simulada, existen pequeñas variaciones alrededor de cero grados siendo estas muy normales en un sistema físico real, esto se debe a varios factores del sistema como la masa, inercia, rozamiento, ruido, y otros por lo que la curva del modelo real no responderá de igual manera que la simulada.

La curva simulada inicia con un ángulo aproximado de  $0,12\text{rad}$  y reacciona de manera rápida al momento que actúa el regulador, pasando por el cero a los  $0,20$  segundos y alcanzando un valor de ángulo negativo de  $-0,05\text{rad}$  posteriormente alcanzando nuevamente el cero y regulándose a los  $0,75$  segundos. La curva del equipo real de igual manera inicia con un ángulo aproximado de  $0,12\text{rad}$ , al iniciar el control se observa que el ángulo del péndulo pasa por el cero a los  $0,5$  segundos hasta llegar a un ángulo negativo de  $-0,05\text{rad}$  para posteriormente llegar al cero regulándose a los  $1,3$  segundos donde empieza su pequeña variación alrededor del cero con valores entre  $0,05\text{rad}$  y  $-0,05\text{rad}$ . Se tarda  $0,5$  segundos más de la curva simulada debido a los diferentes efectos que actúan en el modelo real antes explicado.

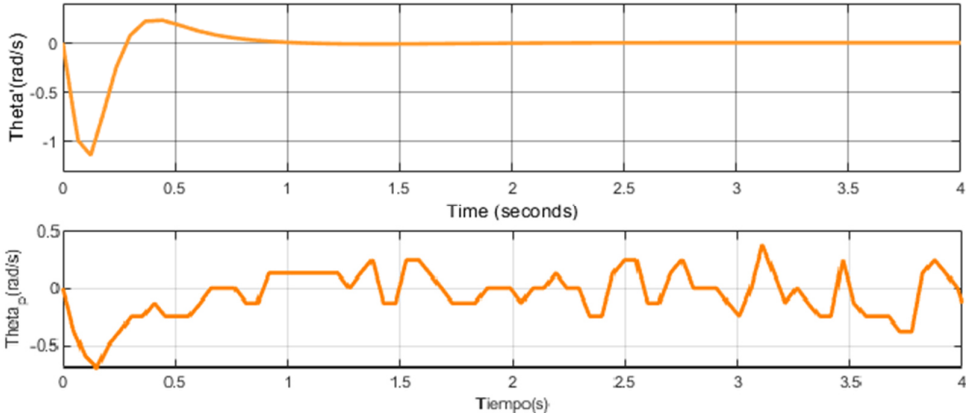


**Gráfico 6-4:** Ángulo del péndulo del modelo simulado y del equipo real.

Realizado por: Orozco D. 2022

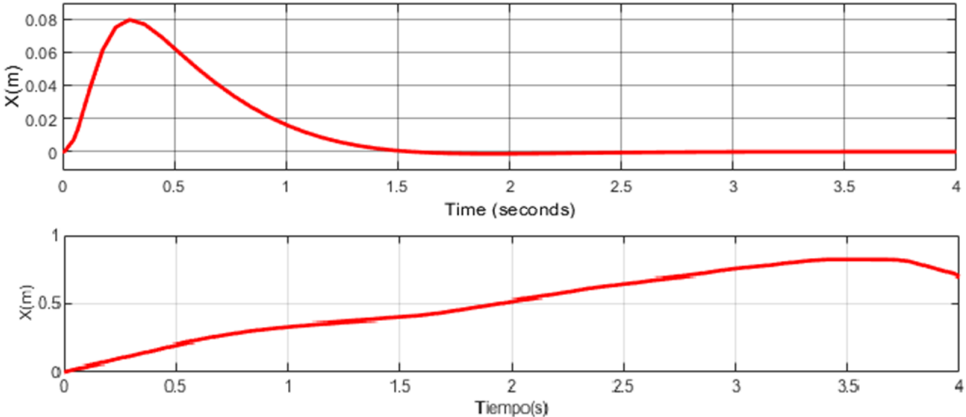
El gráfico 7-4 muestra la curva de la velocidad angular del péndulo del modelo simulado y del equipo real donde se observa que la curva simulada inicia desde cero para descender hasta un valor negativo máximo de alrededor de  $-1\text{rad/s}$  en  $0,2$  segundos reaccionando de manera rápida al momento que actúa el regulador, este quiere decir que el péndulo gira en sentido contrario al ángulo que marco inicialmente para regular, como se observa posterior a este valor máximo, vuelve a aumentar su valor hasta un valor de  $0,25\text{rad/s}$  donde luego se regula llegando a cero

tardándose alrededor de 0,75 segundos. La curva del equipo real de igual manera inicia desde cero, al iniciar el control se observa que la rapidez angular desciende rápidamente hasta un valor máximo de  $-0,7\text{rad/s}$  a los 0,25 segundos para posteriormente aumentar hasta llegar a cero regulándose, tardando alrededor de 1,25 segundos donde empieza su pequeña variación alrededor del cero con una variación entre  $0,25\text{rad/s}$  y  $-0,25\text{rad/s}$ . Se tarda 0,5 segundos más de la curva simulada debido a los diferentes efectos que actúan en el modelo real antes explicado.



**Gráfico 7-4:** Comparación de la velocidad angular entre el modelo simulado y el experimental.

Realizado por: Orozco D. 2022



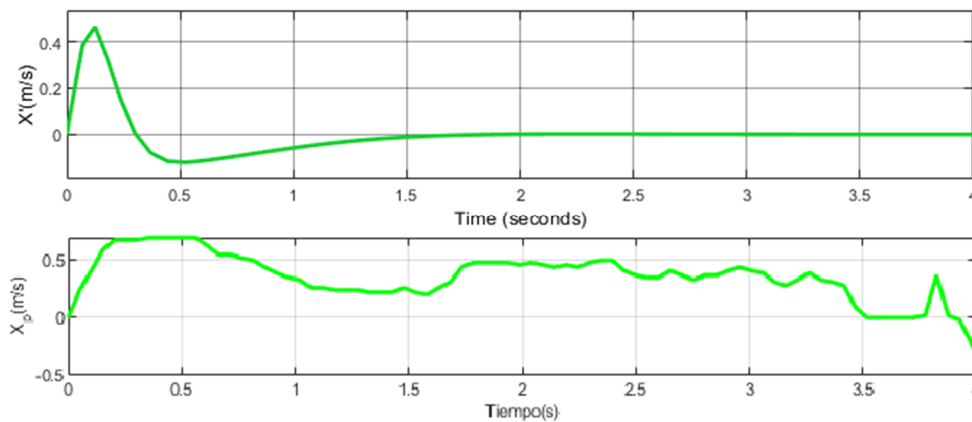
**Gráfico 8-4:** Comparación de la posición entre el modelo simulado y el experimental

Realizado por: Orozco D. 2022

El gráfico 8-4 muestra la curva la posición del carro del modelo simulado y del equipo real donde se observa que la curva simulada inicia desde el reposo, aumentando rápidamente hasta un valor de  $0,08\text{m}$  en 0,3 segundos al momento que actúa el regulador, este valor es positivo ya que avanza en sentido positivo para lograr que el péndulo con ángulo positivo gire en sentido contrario

regulándose. Posterior a esto la posición disminuye el valor hasta el cero donde se regula demorándose alrededor de 1,5 segundos. La curva del equipo real inicia desde la posición cero, al iniciar el control se observa que aumenta lentamente hasta llegar a un valor de 0,4m a los 1,5segundos donde las demás variables ya se han regulado, posteriormente se observa que este valor sigue aumentado y esto se debe al sistema de control ya que busca estabilizar los estados pero al no tener una etapa integradora, el control no elimina el error en estado estable y esto produce que se siga desplazando el equipo, es decir, nunca se llega a un valor de cero por lo que este estado es difícil de regular.

El gráfico 4-9 muestra la curva la velocidad lineal del carro del modelo simulado y del equipo real donde se observa que la curva simulada inicia desde el reposo, aumentando rápidamente hasta un valor de 0,5m/s en 0.2 segundos al momento que actúa el regulador, posterior a esto la velocidad disminuye drásticamente hasta un valor negativo de 0.1m/s cambiando el sentido de movimiento para posteriormente aumentar hasta mantenerse regulándose aproximadamente a los 1,5 segundos. La curva del equipo real inicia desde la posición cero, al iniciar el control se observa que la aumenta rápidamente hasta llegar a un valor de 0,7m/s a los 0.2segundos manteniéndose hasta un tiempo de 0,6segundos para posteriormente disminuir hasta los 0.25m/s del segundo 1 hasta el 1,5 segundos donde las demás variables ya se han regulado, posteriormente se observa que este valor se mantiene alrededor de este y esto se debe a las variaciones alrededor de cero de las demás variables permitiendo que se siga desplazando el equipo permitiendo que no se llegue a regular esta variable.



**Gráfico 9-4:** Comparación de la velocidad lineal entre el modelo simulado y el experimental

Realizado por: Orozco D. 2022



## CONCLUSIONES

En este trabajo se diseñó un péndulo invertido montado en un carro móvil mediante un software 3D y se seleccionó los elementos eléctricos, electrónicos y mecánicos. Lo más importante al modelar fue que el centro de gravedad del modelo quede en el mismo punto XY que el péndulo ya que de este modo no existe problema con el control del péndulo invertido. Ayudó mucho al diseño que los elementos seleccionados electrónicos ya disponen de modelos en 3D proporcionados por sus fabricantes con lo que se redujo enormemente el tiempo de diseño del prototipo. Lo más difícil de seleccionar los elementos electrónicos fue calcular el torque mínimo que los motorreductores deben cumplir ya que se tiene un peso aproximado obtenido del modelo 3D, también se dificultó encontrar 4 motorreductores que cuenten con las mismas características.

Se implementó un regulador cuadrático lineal para la estabilidad del péndulo invertido. Un factor determinante para implementar el control fue realizar el modelo dinámico del sistema, así como la caracterización de los motorreductores que se usaron. Ayudó mucho la utilización del software Simulink donde se probaron diferentes valores de matrices Q y R encontrando diferentes ganancias de realimentación de estado que permitió comparar diferentes respuestas y seleccionar la que mejor responda con el sistema. La parte complicada de implementar el control LQR fue la programación ya que en la misma se debe obtener y calcular las variables de estado del modelo por medio de los diferentes sensores y se comprobó que con un valor de  $K = [-67,1766, -16,8570, -0,1, -11,5563]$  responde de mejor manera el modelo real.

De igual forma, se construyó y comprobó la funcionalidad del prototipo en donde, lo principal de construir el modelo fue la manera de fabricación de las placas base ya que al realizarlas mediante corte CNC se obtuvo alta exactitud dimensional permitiendo un correcto ensamblaje de los elementos. Lo más difícil de comprobar la funcionalidad del modelo fue la recepción de datos enviados por la placa ESP32 ya que éste se conecta mediante bluetooth con la computadora utilizando un puerto COM para receptar los datos en una terminal con el cual se comparó las gráficas de todas las variables de estado obteniéndose gráficas aproximadas a las simuladas.

Las curvas del sistema de control automático simulado no son iguales a las obtenidas en el equipo real sin embargo tienen mucha similitud por lo que responde bien y se logra el objetivo de mantener el péndulo en su posición vertical, se debe mejorar el control sobre la variable de la posición ya que esta es la que más variación tuvo además de que no se la pudo regresar a su posición inicial debido a que el control busca estabilizar los estados pero al no tener una etapa integradora, el control no elimina el error en estado estable.

Por último, se realizó una guía de práctica para la aplicación de distintas técnicas de control con la finalidad de que los estudiantes apliquen los conocimientos teóricos y complementen con la aplicación de dichas técnicas y sus diferentes reacciones fortaleciendo su formación profesional.

## RECOMENDACIONES

Los motorreductores deben reaccionar desde voltajes bajos para que el control del péndulo invertido sea más estable y suave, evitando que se generen cambios abruptos en las distintas variables de estado.

Utilizar elementos electrónicos y mecánicos más livianos para reducir el torque mínimo necesario para mover el equipo ya que de esto también depende del voltaje con el que el motor reaccione y pueda generar un mejor desempeño en la estabilidad del péndulo invertido.

Comprobar por separado la funcionalidad de cada sensor y elemento para posteriormente probarlo en conjunto ya que de esta manera se puede identificar algún tipo de falla.

Al obtener experimentalmente las características del motorreductor se debe utilizar una fuente estable además de que se debe evitar utilizar en medio algún elemento electrónico ya que se puede tener alguna interferencia al obtener las mediciones de corriente, voltaje y velocidad angular.

Se recomienda agregar un integrador al control LQR para que la posición del carro móvil pueda mantenerse en el origen, además de que esta aplicación mejorará aún más el control de las demás variables, este método es conocido como diseño de servosistemas tipo 1.

Si se va a grabar un programa en el módulo ESP32 se debe desmontar de la placa y proceder a grabarlo ya que, si se lo quiere realizar montado, puede ocasionar que se quemen los otros elementos electrónicos.

Siempre al encender el equipo se debe colocar el péndulo invertido manualmente en su posición vertical o estable y presionar el botón ZERO para que el encoder rotacional se encere en esa posición. El programa está diseñado para que a una inclinación del ángulo del péndulo invertido de 0.25radianes, el equipo se detenga y no se golpee ya que esto puede ocasionar daños, dicho valor se puede modificar, pero no se recomienda.

Se debe tener un lugar suficientemente amplio para encender el equipo ya que el desplazamiento del equipo suele ser grande, alrededor de 5 metros. El programa está diseñado para que a un valor de 3 metros, el equipo se detenga y no se golpee, este valor debe ser modificado según el espacio disponible al momento de la experimentación.

El equipo tiene un botón START el cual inicia el control y movimiento del equipo, esto permite que el equipo y el usuario tengan suficiente tiempo para establecer la conexión bluetooth o wi-fi con la computadora.

Se recomienda colocar un peso (máximo 1 kg) en la plataforma del péndulo ya que este control está diseñado para mantener dicho peso estable y con esto el equipo se desempeña de mejor

manera. Además, se debe asegurar que dicho objeto no resbale de la superficie ya que esto puede afectar el funcionamiento del control.

Se recomienda desarrollar una interfaz en algún software como Simulink o LabVIEW que permita y muestre los resultados de todos los espacios de estados del control de forma gráfica.

Utilizar solo el cargador proporcionado o específicos para cargar la batería LiPo. al cargarla, siempre se debe vigilarlas para poder evitar algún problema que pudiera surgir. Si se observa que la batería se hincha o arroja líquido, desconéctela de inmediato y obsérvela alrededor de 15 minutos en un área segura en donde no exista material inflamable ya que esta puede incendiarse debido a sus componentes químicos. Nunca utilizar inmediatamente la batería después de cargarla, esperar un tiempo mínimo de 15 minutos. Nunca dejar que alguna celda de la batería LiPo descienda de 3,6Volts, es decir, un voltaje total de 10,8V ya que, si esto ocurriese, la batería podría estropearse. Además de esto, Evite que la batería se golpee o que los terminales de la batería se junten y causen un cortocircuito ya que podría incendiarse. No almacenar la batería en lugares donde puedan alcanzar temperaturas altas como un automóvil o cerca de elementos que desprendan calor. Nunca dejar cargada la batería si no se va a utilizar inmediatamente, si se va a almacenar el equipo, dejar cargadas al 40% de la capacidad, es decir a un voltaje alrededor de 3,7 Volts por cada celda dando un voltaje total de 11,1V.

## BIBLIOGRAFÍA

**ALEXANDER, Charles K. y SADIKU, Matthew N.O.** *Fundamentos de Circuitos eléctricos*. 3ed. México: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2006. ISBN 970105606X, pp. 7-226.

**ARACIL, José y GORDILLO, Francisco.** "El Péndulo Invertido: Un Desafío Para El Control No Lineal". *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* [en línea], 2005, (España) 2(2), pp. 8-19. [Consulta: 15 junio 2021]. DOI 10.4995/riai.v2i2.10501. Disponible en: <http://recyt.fecyt.es/index.php/RIAI/article/view/10501/7300>.

**ARDUINO.** *What is Arduino*. 2018. [Consulta: 11 junio 2021]. Disponible en: <https://www.arduino.cc/en/Guide/Introduction>.

**AVNER, Sidney H.** *Introducción a la metalurgia física*. 2ed. México D,F: McGraw-Hill/Interamericana, 1988. ISBN 9686046011, pp. 477.

**BEER, Ferdinand; JOHNSTON, Russell; MAZUREK, David y EISENBERG, Elliot.** *Mecánica Vectorial para Ingenieros Estatica*. 9ed. México D,F: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2010. ISBN 13: 978-607-15-0277-3, pp. 414.

**BLANCHARD, Benjamin S. y BLYLER, John E.** *System Engineering Management* [en línea]. 5ed. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, Inc, 2016. [Consulta: 22 julio 2021]. ISBN 9781119178798, Disponible en: <http://doi.wiley.com/10.1002/9781119178798>. pp. 74-76.

**BOYLESTAD, Robert L.** *Introducción al análisis de circuitos*. México: PEARSON EDUCACIÓN, 2004. ISBN 9702604486, pp. 39-130.

**CHAPMAN, Stephen J.** *MÁQUINAS ELÉCTRICAS*. 5ed. México: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2012. ISBN 9786071507242, pp. 301-364.

**CORONA, Leonel G.; ABARCA, Griselda S. y MARES, Jesús.** *Sensores y actuadores. Aplicaciones con Arduino*. 1ed. Azcapotzalco, México D. F: GRUPO EDITORIAL PATRIA, S.A, 2014. ISBN 9786074389364, pp. 79-80.

**CRUZ, Antonio; SÁNCHEZ, Márquez; ORTIGOZA, Silva y ZAPATA, Merlo.** *Sistemas Mecánicos Subactuados: Péndulos Invertidos*. 2014. [Consulta: 10 junio 2021]. Disponible en: <http://www.boletin.upiita.ipn.mx/index.php/ciencia/553-cyt-numero-41/840-sistemas-mecanicos-subactuados-pendulos-invertidos1>.

**DASSAULT SYSTÈMES.** *SolidWorks. Qué es y para qué sirve*. 2021. [Consulta: 15 junio 2021]. Disponible en: <https://solid-bi.es/solidworks/>.

**DEBNEY, P.** *Computational Engineering* [en línea]. 1ed. London: The Institution of Structural Engineers, 2018. [Consulta: 15 junio 2021]. ISBN 9781906335441, Disponible en:

<https://app.knovel.com/hotlink/toc/id:kpCE000052/computational-engineering/computational-engineering>. pp. 31.

**DUNCAN, William y LUFTIG.** *TOTAL QUALITY Key Terms and Concepts*. New York: Lufting & Warren Internacional, 1995. ISBN 0-8144-7876-X, pp. 144.

**FERRÉ, Rafael.** *Fabricación asistida por computador-CAM*. 1ed. Barcelona: MARCOMBO, S. A., 2009. ISBN 978-84-267-0677-5, pp. 12-15.

**GINDIS, Elliot.** *Up and Running with AutoCAD 2012 2D and 3D Drawing and Modeling*. Waltham: Elsevier, 2012. ISBN 9780123870292, pp. xxi.

**HERNÁNDEZ, Alberto; LEGASPI, Marco y PELÁEZ, Jaime.** Control Inteligente del Péndulo Invertido (Trabajo de titulación) (Maestría). Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Informática. Madrid, España. 2012. pp. 9. [Consulta: 9 junio 2021]. Disponible en: <https://eprints.ucm.es/id/eprint/16096/>.

**MILOSEVIC, Dragan Z.** *Project Management ToolBox*. New Jersey: John Wiley & Sons, 2003. ISBN 0471208221, pp. 113-120.

**OGATA, Katsuhiko.** *Sistemas de Control en Tiempo Discreto*. 2ed. México: Prentice Hall Hispanoamericana S.A., 1996. ISBN 9688805394, pp. 567-568.

**OGATA, Katsuhiko.** *Ingeniería de control moderna*. 5ed. Madrid: Pearson Educación, S.A., 2010. ISBN 9788483226605, pp. 3-793.

**PALM, William J.** *System Dynamics*. 2ed. New York: The McGraw-Hill Companies, Inc., 2010. ISBN 978-0-07-352927-1, pp. 43-302.

**PARASKEVOPOULOS, P.N.** *Modern control engineering*. New York: Marcel Dekker, Inc, 2002. ISBN 0-8247-8981-4, pp. 479.

**POSCH, M.** *Hands-On Embedded Programming with C++17* [en línea]. 1ed. Birmingham: Packt Publishing Ltd, 2019. [Consulta: 13 junio 2021]. ISBN 9781788834322, Disponible en: <https://books.google.hu/books?id=DmSGDwAAQBAJ>. pp. 28.

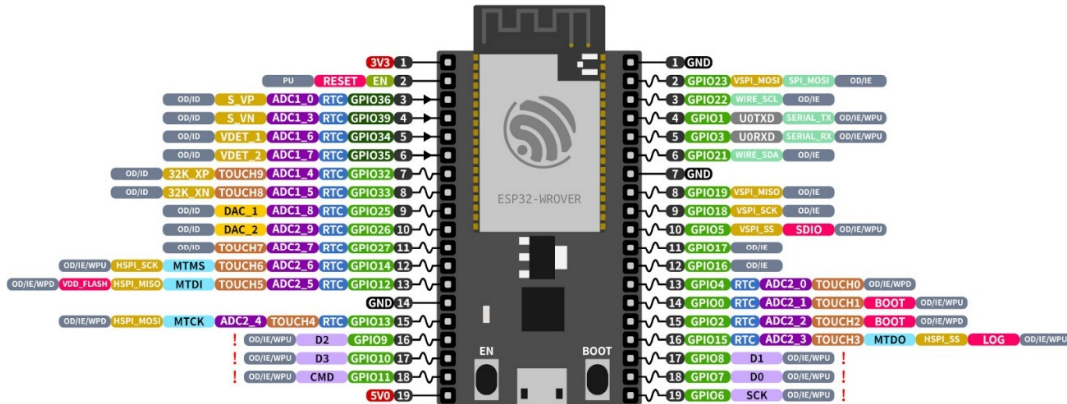
**ROCA, Jorge.** Diseño e implementación de un péndulo invertido sobre un carro móvil para el laboratorio de mecatrónica de la FIMCP aplicando estrategias de control Proporcional Integral Derivativo(PID) (Trabajo de titulación) (Maestría). Escuela Superior Politecnica del Litoral, Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación. Guayaquil, Ecuador. 2015. pp. 1. [Consulta: 12 junio 2021]. Disponible en: <http://www.dspace.espol.edu.ec/xmlui/handle/123456789/31526>.

**TORRENTE, Óscar.** *Arduino Curso Práctico de formación*. 1ed. México: Alfaomega Grupo Editor, S.A., 2013. ISBN 9786077076483, pp. 67.

# ANEXOS

## ANEXO A: Clasificación de pines de ESP32

ESP32-DevKitC



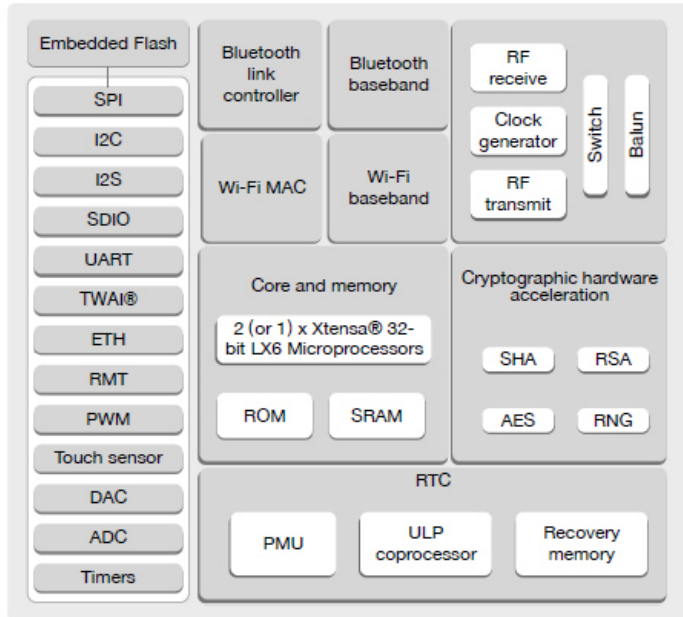
**ESP32 Specs**  
 32-bit Xtensa® dual-core @240MHz  
 Wi-Fi IEEE 802.11 b/g/n 2.4GHz  
 Bluetooth 4.2 BR/EDR and BLE  
 520 KB SRAM (16 KB for cache)  
 448 KB ROM  
 34 GPIOs, 4x SPI, 3x UART, 2x I2C,  
 2x I2S, RMT, LED PWM, 1 host SD/eMMC/SDIO,  
 1 slave SDIO/SPI, TWAI®, 12-bit ADC, Ethernet

**Legend:**



- PWM Capable Pin
- GPIOX GPIO Input Only
- GPIOX GPIO Input and Output
- DAC X Digital-to-Analog Converter
- JTAG/USB JTAG for Debugging and USB
- FLASH External Flash Memory (SPI)
- AD2X-CHX Analog-to-Digital Converter
- TOUCHX Touch Sensor Input Channel
- OTHER Other Related Functions
- SERIAL Serial for Debug/Programming
- ARDUINO Arduino Related Functions
- STRAP Strapping Pin Functions

**GPIO STATE:**

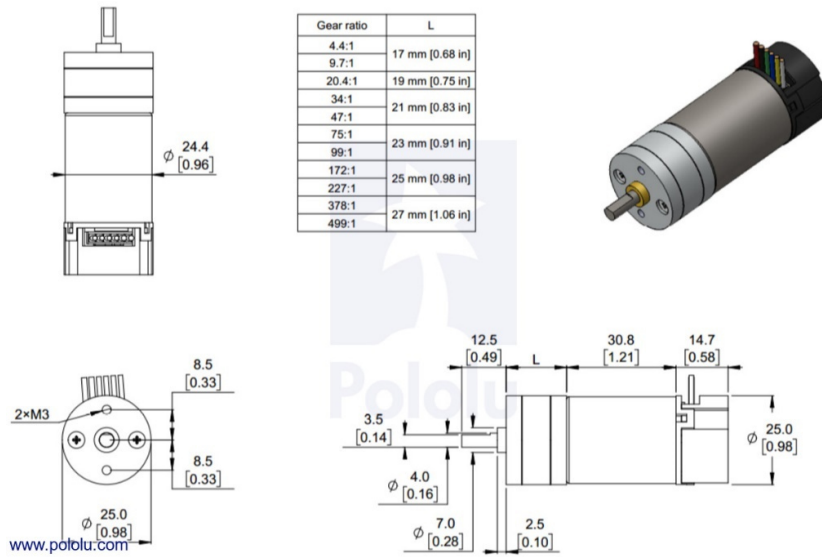
- RTC RTC Power Domain (VDD3P3\_RTC)
- GND Ground
- GND Power Rails (3V3 and 5V)
- ! Pin Shared with the Flash Memory Can't be used as regular GPIO
- WPU: Weak Pull-up (Internal)
- WPD: Weak Pull-down (Internal)
- PU: Pull-up (External)
- IE: Input Enabled (After Reset)
- ID: Input Disabled (After Reset)
- OE: Output Enabled (After Reset)
- OD: Output Disabled (After Reset)



## ANEXO B: Características de motorreductor

Motor Type	Rated Voltage	Stall Current	No-Load Current	Gear Ratio	No-Load Speed (RPM)	Extrapolated Stall Torque		Max Power (W)		
						(kg · cm)	(oz · in)		Without Encoder	With Encoder
High-Power (HP) 12 V	12 V	5.0 A	250 mA w/o encoder	1:1 (no gearbox)	10,000	0.4	5.5	10	-	<a href="#">item #484</a>
				4.4:1	2200	1.7	24	9.4	<a href="#">item #3201</a>	<a href="#">item #484</a>
				9.7:1	1000	3.9	54	10	<a href="#">item #3202</a>	<a href="#">item #484</a>
				20.4:1	500	7.4	100	9.4	<a href="#">item #3203</a>	<a href="#">item #484</a>
			300 mA with encoder	34:1	300	11	150	8.9	<a href="#">item #3204</a>	<a href="#">item #484</a>
				47:1	220	15	210	8.4	<a href="#">item #3205</a>	<a href="#">item #484</a>
				75:1	130	22	310	-	<a href="#">item #3206</a>	<a href="#">item #484</a>
				99:1	100	29	400	-	<a href="#">item #3207</a>	<a href="#">item #484</a>

voltage	no-load performance	stall extrapolation
12 V	500 RPM, 300 mA	7.4 kg·cm (100 oz·in), 5.0 A



Color	Function
Red	motor power (connects to one motor terminal)
Black	motor power (connects to the other motor terminal)
Green	encoder GND
Blue	encoder Vcc (3.5 V to 20 V)
Yellow	encoder A output
White	encoder B output

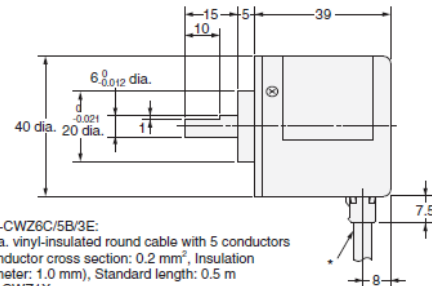
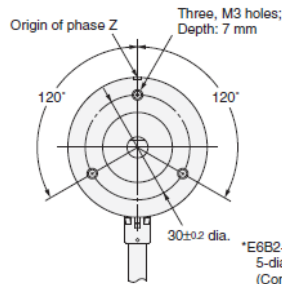
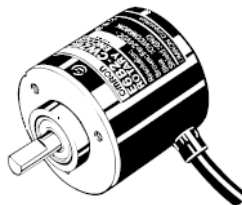
## ANEXO C: Características del encoder rotacional E6B2-CWZ3E

Item	Model	E6B2-CWZ6C	E6B2-CWZ5B	E6B2-CWZ3E	E6B2-CWZ1X
Power supply voltage		5 VDC -5% to 24 VDC +15%, ripple (p-p): 5% max.	12 VDC -10% to 24 VDC +15%, ripple (p-p): 5% max.	5 VDC -5% to 12 VDC +10%, ripple (p-p): 5% max.	5 VDC ±5%, ripple (p-p): 5% max.
Current consumption *1		80 mA max.	100 mA max.		160 mA max.
Resolution (pulses/rotation)		10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600, 720, 800, 1,000, 1,024, 1,200, 1,500, 1,800, 2,000	100, 200, 360, 500, 600, 1,000, 2,000	10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600, 1,000, 1,200, 1,500, 1,800, 2,000	10, 20, 30, 40, 50, 60, 100, 200, 300, 360, 400, 500, 600, 1,000, 1,024, 1,200, 1,500, 1,800, 2,000
Output phases		Phases A, B, and Z			Phases A, $\bar{A}$ , B, $\bar{B}$ , Z, and $\bar{Z}$
Phase difference between outputs		90°±45° between A and B (1/4 T ± 1/8 T)			
Output configuration		NPN open-collector output	PNP open-collector output	Voltage output (NPN output)	Line driver output *2
Output capacity		Applied voltage: 30 VDC max. Sink current: 35 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at sink current of 35 mA)	Applied voltage: 30 VDC max. Source current: 35 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at source current of 35 mA)	Output resistance: 2 kΩ Sink current: 20 mA max. Residual voltage: 0.4 V max. (at sink current of 20 mA)	AM26LS31 equivalent Output current High level: $I_o = -20$ mA Low level: $I_s = 20$ mA Output voltage: $V_o = 2.5$ V min. $V_s = 0.5$ V max.
Starting torque		0.98 mN·m max.			
Moment of inertia		1×10 <sup>-6</sup> kg·m <sup>2</sup> max.; 3 × 10 <sup>-7</sup> kg·m <sup>2</sup> max. at 600 P/R max.			
Shaft loading	Radial	30 N			
	Thrust	20 N			
Maximum permissible speed		6,000 r/min			

Color	Terminal
Brown	Power supply (+Vcc)
Black	Output phase A
White	Output phase B
Orange	Output phase Z
Blue	0 V (common)

### Encoder

#### E6B2-C

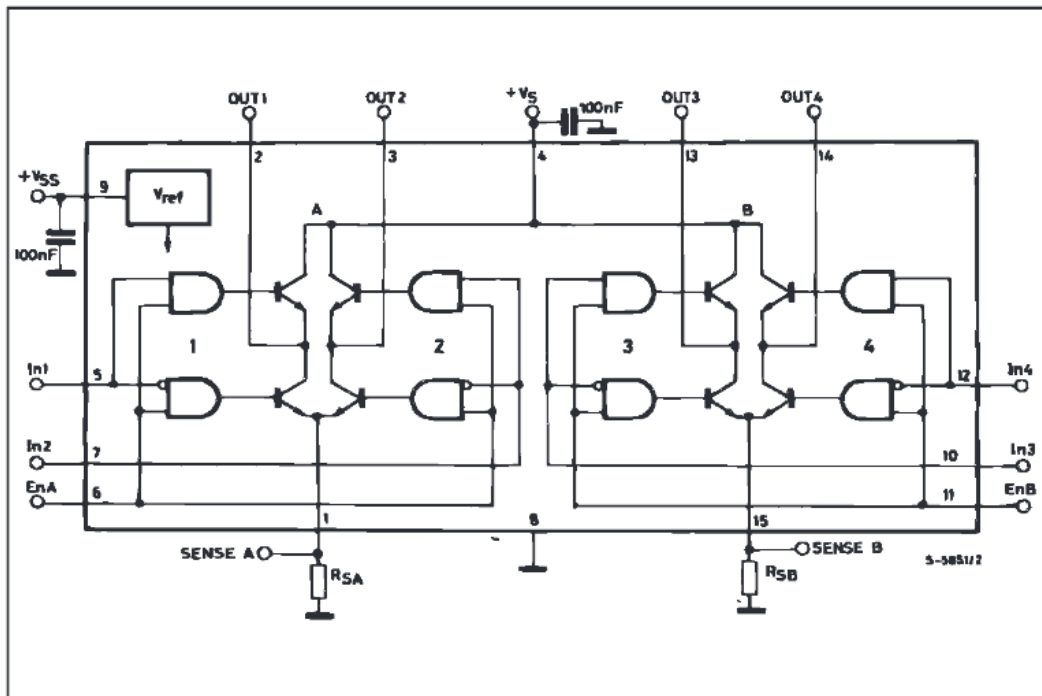


\*E6B2-CWZ6C/5B/3E:  
5-dia. vinyl-insulated round cable with 5 conductors  
(Conductor cross section: 0.2 mm<sup>2</sup>, Insulation diameter: 1.0 mm), Standard length: 0.5 m

E6B2-CWZ1X:  
5-dia. vinyl-insulated round cable with 8 conductors  
(Conductor cross section: 0.2 mm<sup>2</sup>, Insulation diameter: 1.0 mm), Standard length: 0.5 m



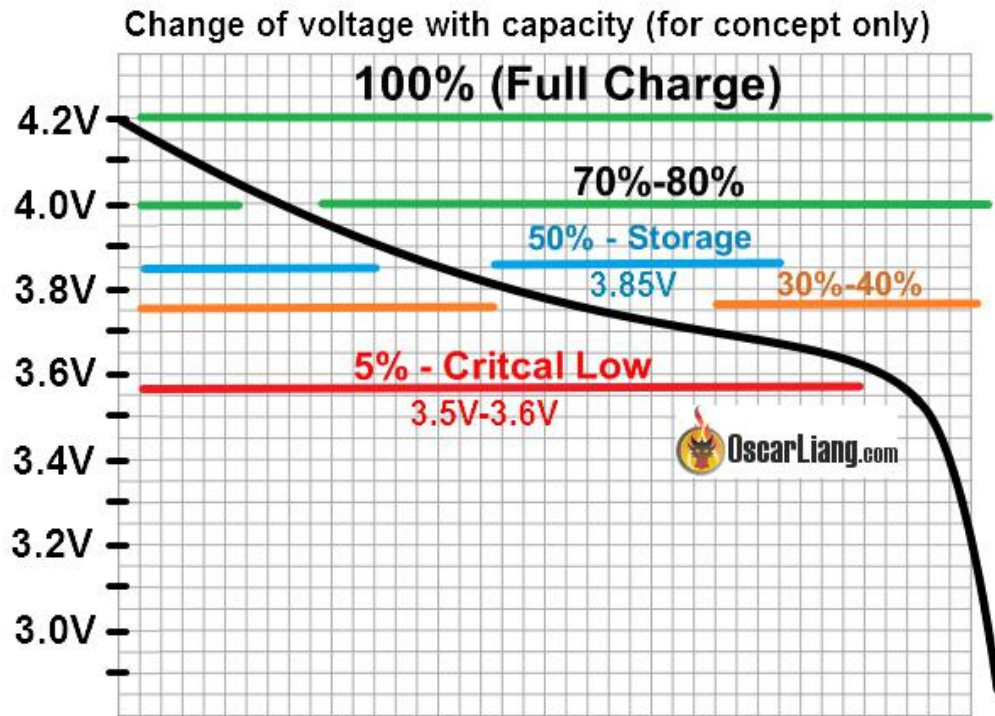
## ANEXO D: Características del controlador L298N



### ABSOLUTE MAXIMUM RATINGS

Symbol	Parameter	Value	Unit
V <sub>S</sub>	Power Supply	50	V
V <sub>SS</sub>	Logic Supply Voltage	7	V
V <sub>I</sub> , V <sub>En</sub>	Input and Enable Voltage	-0.3 to 7	V
I <sub>O</sub>	Peak Output Current (each Channel)		A
	- Non Repetitive (t = 100μs)	3	A
	- Repetitive (80% on -20% off; t <sub>on</sub> = 10ms)	2.5	A
	- DC Operation	2	A
V <sub>sens</sub>	Sensing Voltage	-1 to 2.3	V
P <sub>tot</sub>	Total Power Dissipation (T <sub>case</sub> = 75°C)	25	W
T <sub>op</sub>	Junction Operating Temperature	-25 to 130	°C
T <sub>stg</sub> , T <sub>j</sub>	Storage and Junction Temperature	-40 to 150	°C

ANEXO E: Curva característica de descarga de una celda de batería LiPo



**ANEXO F: Dimensiones y material de la estructura.**

<b>FORMATO F1</b>					
<b>Lugar:</b>	Riobamba		<b>Hora inicio:</b>	10h00	
<b>Fecha:</b>	2021-09-15		<b>Hora Fin:</b>	10h30	
<b>Responsable de la prueba:</b>					
		Daniel Orozco			
<b>Tipo de Prueba:</b>					
		Mecánica			
<b>Prueba:</b>	Dimensiones y material de la estructura.		<b>N°</b>	1	
<b>Control de Conformidad</b>					
Aprueba:	A	No aprueba:	NA	Con observación:	CO
<b>Parte</b>					
		<b>Descripción</b>			<b>Conformidad</b>
Placa Base		Hecho de aluminio y geometría igual al plano.			A
Placa superior		Hecho de aluminio y geometría igual al plano.			A
Elevadores		Hecho de acero inox. y geometría exacta.			A
Soporte de Encoder		Hecho de aluminio y geometría igual al plano.			A
Eje de encoder		Eje de acero inox. y medidas igual al plano.			A
Péndulo		Eje de acero inox. y medidas igual al plano.			A
<b>Aprobado por:</b>					
Ing. Gabriel Moreano			Ing. Miguel Escobar		

**ANEXO G: Elementos y ensamblaje de la máquina**

<b>FORMATO F1</b>					
<b>Lugar:</b>	Riobamba	<b>Hora inicio:</b>	11h00		
<b>Fecha:</b>	2021-09-15	<b>Hora Fin:</b>	11h30		
<b>Responsable de la prueba:</b>					
		Daniel Orozco			
<b>Tipo de Prueba:</b>					
		Mecánica			
<b>Prueba:</b>	Elementos y ensamblaje de la máquina	<b>N°</b>	2		
<b>Control de Conformidad</b>					
Aprueba:	A	No aprueba:	NA	Con observación:	CO
<b>Parte</b>					
		<b>Descripción</b>			<b>Conformidad</b>
Placa Base		1 unidad			A
Motorreductores 500rpm		2 con encoder, y 2 sin encoder			A
Soporte de Motorreductores		4 unidades			A
Acople para neumático		4 unidades			A
Neumáticos $\phi 85\text{mm}$		4 unidades			A
Elevadores hexagonales		24 unidades			A
Modulo L298		2 unidades			A
Batería LiPo 3C 1600mAh		1 unidad			A
Módulo ESP32		1 unidad			A
Placa D-1356		1 unidad			A

Switch ON/OFF	1 unidad	A
Elevadores cilíndricos	4 unidades	A
Placa superior	1 unidad	A
Soporte de Encoder	1 unidad	A
Encoder E6B2-CWZ3E	1 unidad	A
Eje de encoder	1 unidad	A
Chumacera $\phi$ 12mm	1 unidad	A
Péndulo	1 unidad	A
Tornillo $\phi$ 3mmx1	43 unidades	A
Tuercas $\phi$ 3mmx1	20 unidades	A
Perno $\phi$ 8x	2 unidades	A
Tuerca $\phi$ 8x	7 unidades	A
Tornillo allen $\phi$ 6x	8 unidades	A
Ensamblaje	El ensamblaje es robusto y se ajusta correctamente a todos los elementos.	A
<b>Aprobado por:</b>		
Ing. Gabriel Moreano	Ing. Miguel Escobar	

**ANEXO H: Funcionamiento del módulo ESP32, placa D-1356 y de la batería LIPO**

<b>FORMATO F2</b>					
<b>Lugar:</b>	Riobamba	<b>Hora inicio:</b>	15h00		
<b>Fecha:</b>	2021-09-15	<b>Hora Fin:</b>	15h30		
<b>Responsable de la prueba:</b>		Daniel Orozco			
<b>Tipo de Prueba:</b>		Electrónica			
<b>Prueba:</b>	Funcionamiento del módulo ESP32, placa D-1356 y de la batería LIPO	<b>N°</b>	1		
<b>Control de Conformidad</b>					
Aprueba:	A	No aprueba:	NA	Con observación:	CO
Parte	Medición	Referencia	Conformidad		
Batería LiPo 1600mAh	12,4V	12,6V	A		
Placa D-1356	3,3 V	3,3V	A		
Módulo Esp32	El led parpadea			A	
<b>Aprobado por:</b>					
Ing. Gabriel Moreano			Ing. Miguel Escobar		

**ANEXO I: Funcionamiento de controladores L298 y motorreductores**

<b>FORMATO F2</b>					
<b>Lugar:</b>	Riobamba	<b>Hora inicio:</b>	16h00		
<b>Fecha:</b>	2021-09-15	<b>Hora Fin:</b>	16h30		
<b>Responsable de la prueba:</b>		Daniel Orozco			
<b>Tipo de Prueba:</b>		Electrónica			
<b>Prueba:</b>	Funcionamiento de controladores L298 y motorreductores	<b>N°</b>	2		
<b>Control de Conformidad</b>					
Aprueba:	A	No aprueba:	NA	Con observación:	CO
Parte	Medición	Referencia	Conformidad		
Controlador L298 (1)	12,32V	12,6V	A		
Controlador L298 (2)	12,3V	12,6V	A		
Motorreductor 1	Gira en los dos sentidos		A		
Motorreductor 2	Gira en los dos sentidos		A		
Motorreductor 3	Gira en los dos sentidos		A		
Motorreductor 4	Gira en los dos sentidos		A		
<b>Aprobado por:</b>					
Ing. Gabriel Moreano			Ing. Miguel Escobar		

**ANEXO J: Funcionamiento de encoder de motorreductores y E6B2**

<b>FORMATO F2</b>					
<b>Lugar:</b>	Riobamba	<b>Hora inicio:</b>	10h00		
<b>Fecha:</b>	2021-09-16	<b>Hora Fin:</b>	10h30		
<b>Responsable de la prueba:</b>		Daniel Orozco			
<b>Tipo de Prueba:</b>		Electrónica			
<b>Prueba:</b>	Funcionamiento de encoder de motorreductores y E6B2	N°	3		
<b>Control de Conformidad</b>					
Aprueba:	A	No aprueba:	NA	Con observación:	CO
Parte	Medición	Referencia	Conformidad		
Motorreductor 1	485 rpm	500 rpm	A		
Motorreductor 2	490 rpm	500 rpm	A		
Motorreductor 3	487 rpm	500 rpm	A		
Motorreductor 4	492 rpm	500rpm	A		
Encoder E6B2-CWZ3E	360°	360°	A		
<b>Aprobado por:</b>					
Ing. Gabriel Moreano			Ing. Miguel Escobar		



**ANEXO K: Funcionamiento del equipo**

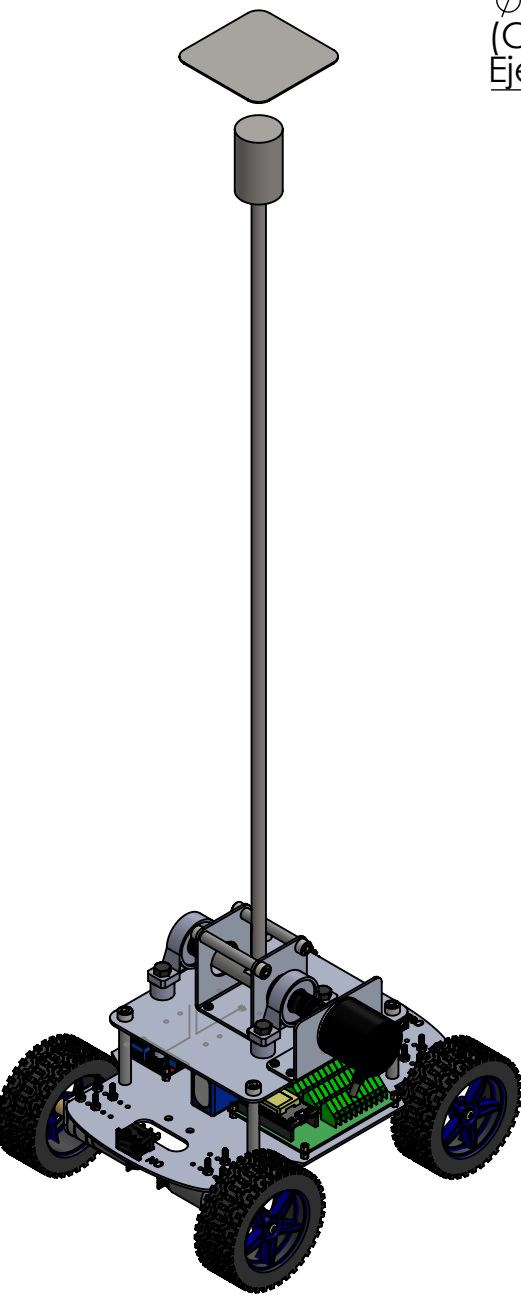
<b>FORMATO F1</b>					
<b>Lugar:</b>	Riobamba		<b>Hora inicio:</b>	11h00	
<b>Fecha:</b>	2021-09-16		<b>Hora Fin:</b>	11h30	
<b>Responsable de la prueba:</b>					
		Daniel Orozco			
<b>Tipo de Prueba:</b>					
		Funcionamiento			
<b>Prueba:</b>	Funcionamiento del equipo		<b>N°</b>	1	
<b>Control de Conformidad</b>					
<b>Aprueba:</b>	A	<b>No aprueba:</b>	NA	<b>Con observación:</b>	CO
<b>Parte</b>					
		<b>Descripción</b>			<b>Conformidad</b>
Equipo completo		El equipo avanza o retrocede estabilizando el péndulo invertido.			A
Motorreductores		Los motorreductores pueden mover sin problema todo el equipo.			A
Neumáticos		Los neumáticos no se deslizan respecto al piso.			A
<b>Aprobado por:</b>					
Ing. Gabriel Moreano			Ing. Miguel Escobar		

**ANEXO L: Funcionamiento del control LQR**

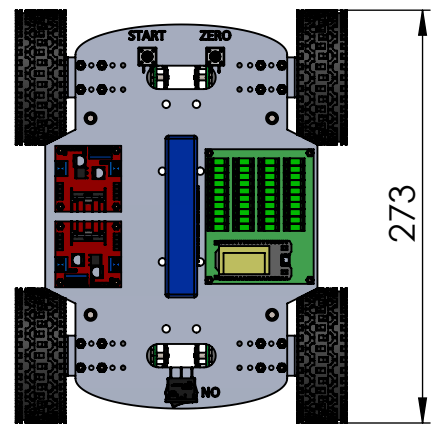
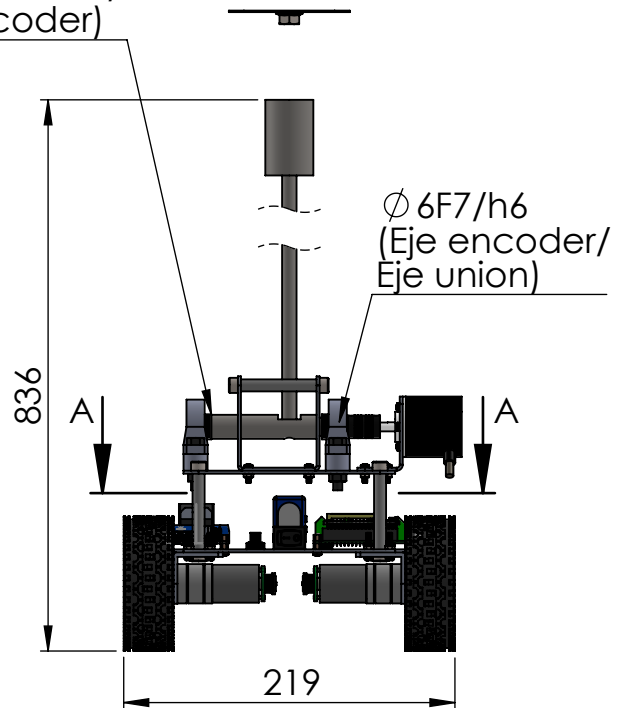
<b>FORMATO F3</b>					
<b>Lugar:</b>	Riobamba	<b>Hora inicio:</b>	10h00		
<b>Fecha:</b>	2021-09-16	<b>Hora Fin:</b>	10h30		
<b>Responsable de la prueba:</b>		Daniel Orozco			
<b>Tipo de Prueba:</b>		Electrónica			
<b>Prueba:</b>	Funcionamiento del control LQR	<b>N°</b>	2		
<b>Control de Conformidad</b>					
Aprueba:	A	No aprueba:	NA	Con observación:	CO
<b>Tiempo (s)</b>	<b>Theta (rad)</b>	<b>Theta_p (rad/s)</b>	<b>X (m)</b>	<b>X_p (m/s)</b>	<b>U (V)</b>
0	0.1194	0	0	0	0
0.051	0.1131	-0.38	0.021	0.24	4.98
0.102	0.1005	-0.6	0.039	0.41	7.81
0.153	0.0754	-0.7	0.058	0.59	7.5
0.204	0.0565	-0.5	0.078	0.68	5.12
0.255	0.044	-0.38	0.099	0.68	4.65
0.306	0.0314	-0.25	0.118	0.68	2.2
0.357	0.0188	-0.25	0.139	0.7	2.62
0.408	0.0126	-0.25	0.158	0.7	3.26
0.459	0	-0.13	0.18	0.7	2.96
0.51	-0.0126	-0.25	0.199	0.7	2.54
0.561	-0.0251	-0.25	0.218	0.7	3.39
0.612	-0.0377	-0.25	0.235	0.63	1.91
0.663	-0.0377	-0.13	0.251	0.55	1.49
0.714	-0.0377	0	0.266	0.55	0.69
0.765	-0.0377	0	0.28	0.52	0.83
0.816	-0.044	0	0.294	0.5	1.89
0.867	-0.0503	-0.13	0.305	0.44	1.76
0.918	-0.044	-0.13	0.315	0.39	1.64
0.969	-0.0377	0.13	0.324	0.35	-0.01

1.02	-0.0314	0.13	0.333	0.33	-0.47
1.071	-0.0251	0.13	0.34	0.26	1.6
1.122	-0.0188	0.13	0.348	0.26	1.69
1.173	-0.0126	0.13	0.354	0.24	1.52
1.224	-0.0063	0.13	0.361	0.24	1.73
1.275	-0.0063	0.13	0.368	0.24	1.82
1.326	0	0	0.374	0.22	2.03
1.377	0.0126	0.13	0.38	0.22	2.24
1.428	0.0063	0.25	0.388	0.22	1.06
1.479	0	-0.13	0.395	0.26	2.33
1.53	0.0126	-0.13	0.401	0.22	3.8
1.581	0.0251	0.25	0.408	0.2	0.67
1.632	0.0314	0.25	0.418	0.26	0.21
1.683	0.0251	0.13	0.429	0.31	3.68
1.734	0.0188	0	0.443	0.44	4.48
1.785	0.0063	-0.13	0.457	0.48	3.88
1.836	0	-0.13	0.471	0.48	3.37
1.887	0	-0.13	0.485	0.48	2.35
1.938	0	0	0.499	0.48	1.93
1.989	-0.0063	0	0.512	0.46	1.72
2.04	-0.0126	0	0.527	0.48	2.78
2.091	-0.0126	-0.13	0.539	0.46	2.65
2.142	-0.0126	0	0.552	0.44	2.57
2.193	-0.0063	0	0.565	0.46	1.18
2.244	-0.0063	0.13	0.579	0.44	2.11
2.295	-0.0126	0	0.594	0.48	2.23
2.346	-0.0251	0	0.609	0.5	3.38
2.397	-0.0377	-0.25	0.621	0.5	2.57
2.448	-0.0314	-0.25	0.631	0.41	2.49
2.499	-0.0188	0.13	0.642	0.37	-0.05
2.55	-0.0126	0.25	0.652	0.35	-0.97
2.601	-0.0188	0.25	0.664	0.35	2.16
2.652	-0.0251	-0.13	0.675	0.41	3.51
2.703	-0.0188	-0.13	0.685	0.37	3.72
2.754	-0.0063	0.13	0.695	0.33	0.72
2.805	-0.0063	0.25	0.706	0.37	0.26
2.856	-0.0063	0	0.717	0.37	2.33
2.907	-0.0063	0	0.731	0.41	4.06
2.958	-0.0126	0	0.744	0.44	1.95
3.009	-0.0251	-0.13	0.755	0.41	2.2
3.06	-0.0251	-0.25	0.764	0.39	2.33
3.111	-0.0126	0	0.772	0.31	0.93
3.162	-0.0063	0.38	0.781	0.28	-0.67
3.213	-0.0126	0.13	0.793	0.33	0.94
3.264	-0.0126	-0.13	0.802	0.39	4.41

3.315	-0.0188	0	0.812	0.33	2.76
3.366	-0.0314	-0.13	0.819	0.31	0.81
3.417	-0.044	-0.25	0.824	0.28	1.49
3.468	-0.0314	-0.25	0.824	0.09	0.09
3.519	-0.0377	0.25	0.824	0	-1.51
3.57	-0.0503	-0.13	0.824	0	-3.06
3.621	-0.0628	-0.25	0.823	0	1.09
3.672	-0.0817	-0.25	0.823	0	-2.3
3.723	-0.1068	-0.25	0.821	0	-3.77
3.774	-0.1257	-0.38	0.809	-0.02	-4.2
3.825	-0.1194	-0.38	0.785	-0.37	-4.83
3.876	-0.1068	0.13	0.761	0.02	-7.91
3.927	-0.0754	0.25	0.736	-0.02	-9.5
3.978	-0.044	0.13	0.713	-0.22	-7.32
4	-0.0251	0	0.69	-0.31	-6.47
<b>Conformidad</b>					
A					
<b>Aprobado por:</b>					
Ing. Gabriel Moreano			Ing. Miguel Escobar		



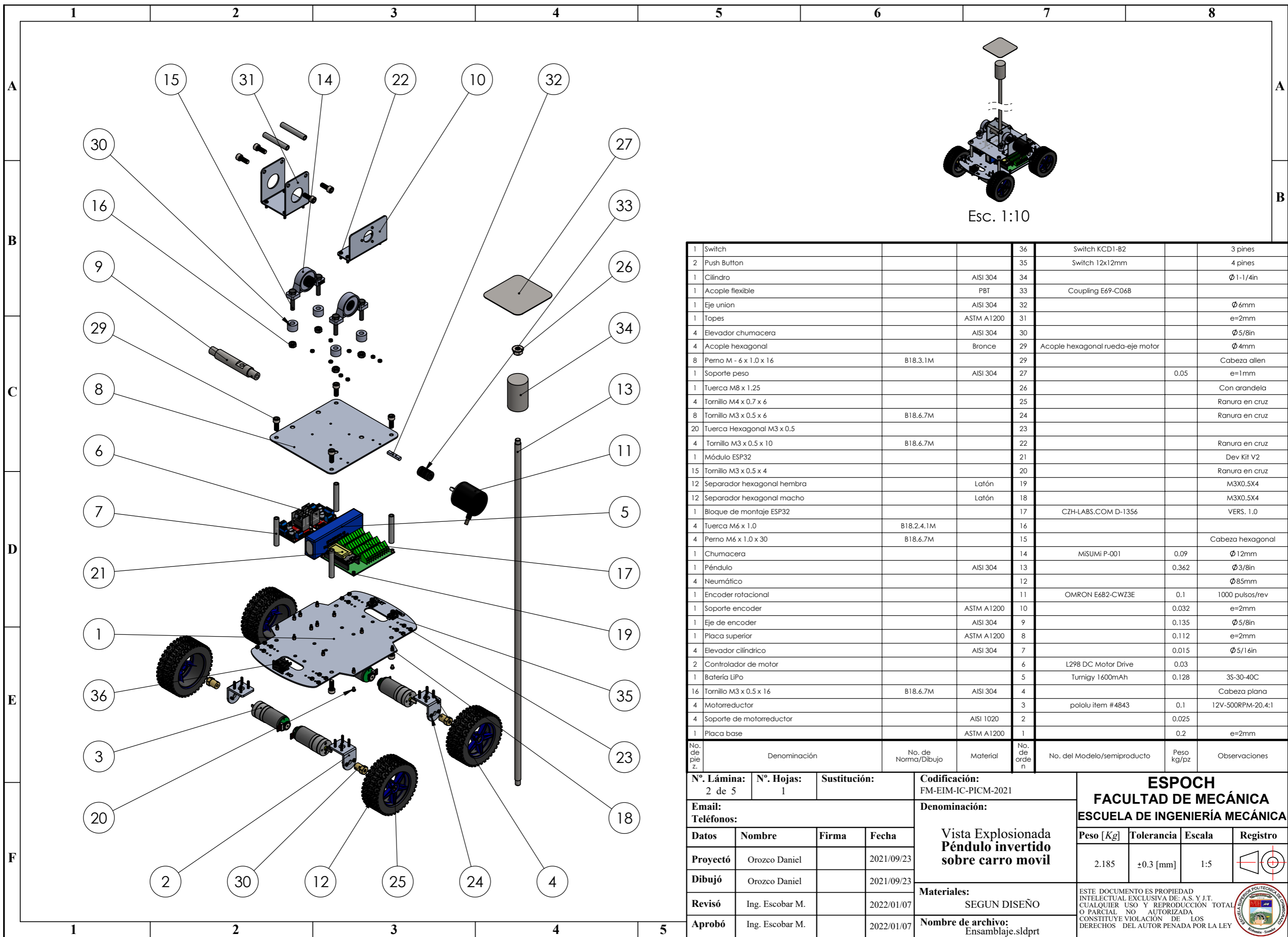
$\varnothing 12H7/f7$   
(Chumacera/  
Eje encoder)



Sección A-A

Ajuste fino de juego libre			
Diámetro	Ajuste	Valor máximo	Valor mínimo
12	H7/f7	0.052	0.016
6	F7/h6	0.030	0.010

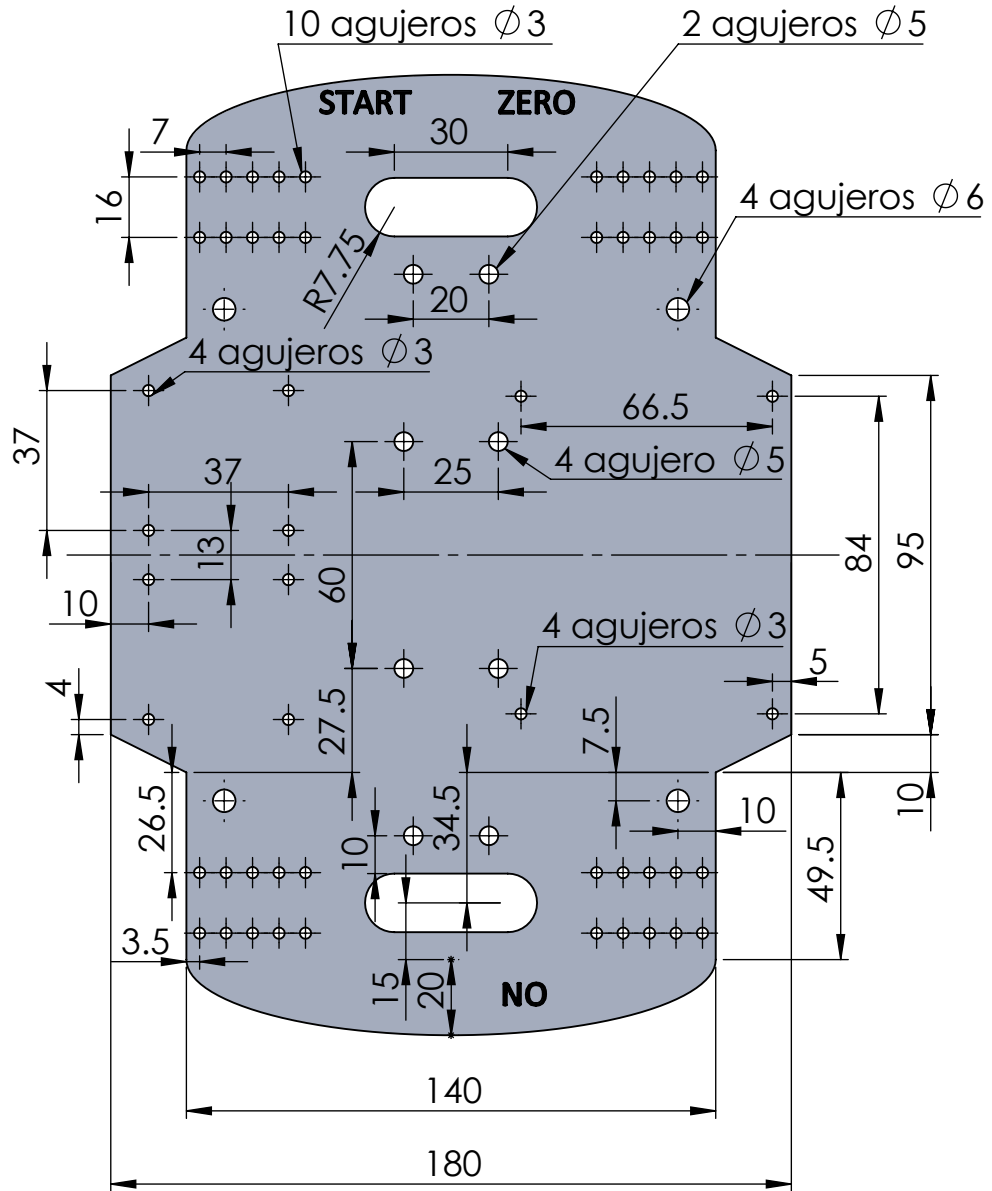
Nº. Lámina: 1 de 5	Nº. Hojas: 1	Sustitución:	Codificación: FM-EIM-IC-PICM-2021	<b>ESPOCH</b> <b>FACULTAD DE MECÁNICA</b> <b>ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA</b>				
Email: Teléfonos:			Denominación:  <b>Vista de Conjunto          Péndulo Invertido          sobre carro móvil</b>					Peso [Kg]
Datos	Nombre	Firma	Fecha	<b>Materiales:</b> SEGUN DISEÑO	2.185	±0.3 [mm]	1:5	
Proyectó	Orozco Daniel		2021/09/23					
Dibujó	Orozco Daniel		2021/09/23					
Revisó	Ing. Escobar M.		2022/01/07	<b>Nombre de archivo:</b> Ensamblaje.sldprt	ESTE DOCUMENTO ES PROPIEDAD INTELLECTUAL EXCLUSIVA DE: A.S. Y J.T. CUALQUIER USO Y REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL NO AUTORIZADA CONSTITUYE VIOLACIÓN DE LOS DERECHOS DEL AUTOR PENADA POR LA LEY			
Aprobó	Ing. Escobar M.		2022/01/07					



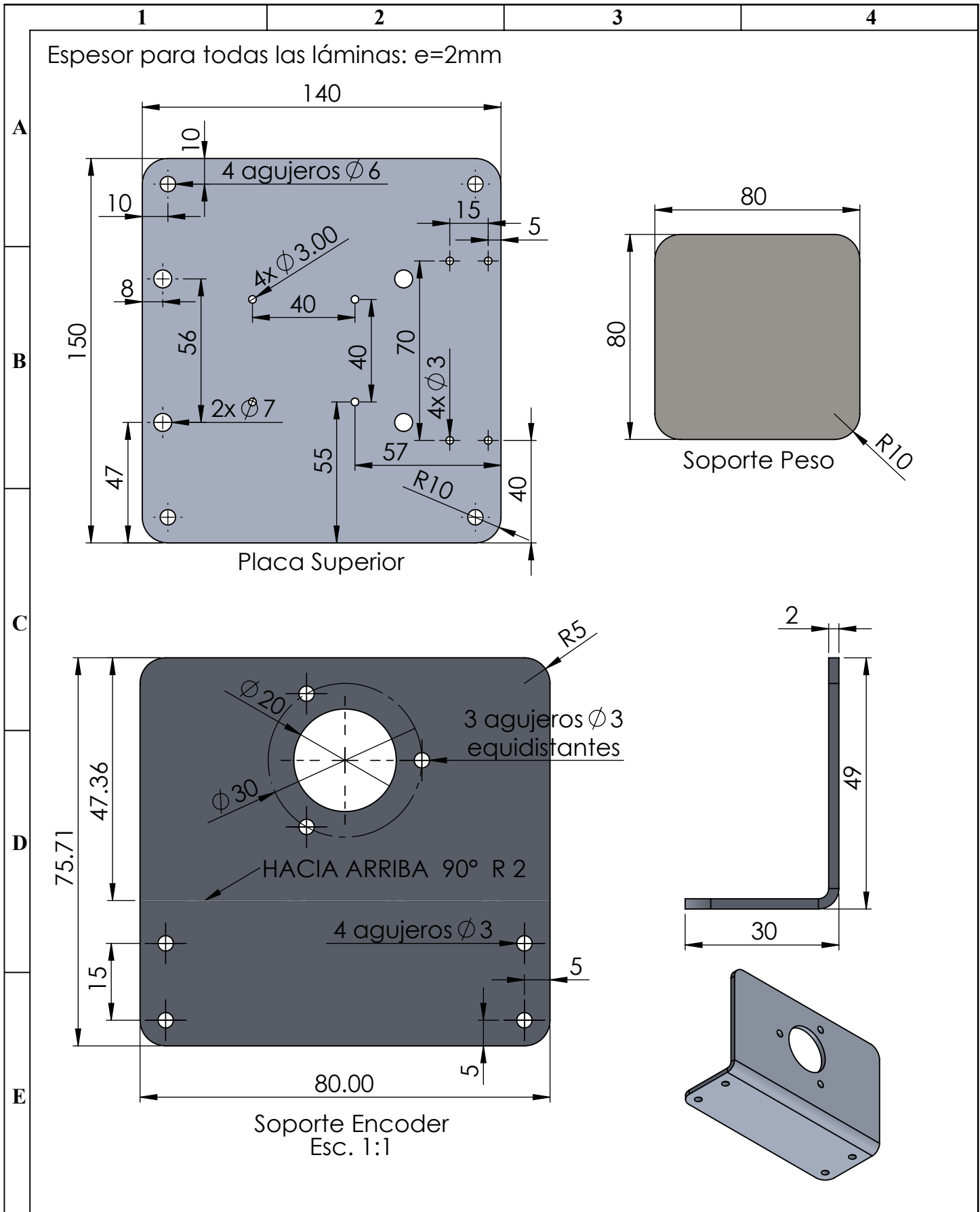
1	Switch			36	Switch KCD1-B2		3 pines
2	Push Button			35	Switch 12x12mm		4 pines
1	Cilindro	AISI 304		34			Ø 1-1/4in
1	Acople flexible	PBT		33	Coupling E69-C06B		
1	Eje union	AISI 304		32			Ø 6mm
1	Topes	ASTM A1200		31			e=2mm
4	Elevador chumacera	AISI 304		30			Ø 5/8in
4	Acople hexagonal	Bronce		29	Acople hexagonal rueda-eje motor		Ø 4mm
8	Perno M - 6 x 1.0 x 16	B18.3.1M		29		0.05	Cabeza allen e=1mm
1	SopORTE peso	AISI 304		27			
1	Tuerca M8 x 1.25			26			Con arandela
4	Tornillo M4 x 0.7 x 6			25			Ranura en cruz
8	Tornillo M3 x 0.5 x 6	B18.6.7M		24			Ranura en cruz
20	Tuerca Hexagonal M3 x 0.5			23			
4	Tornillo M3 x 0.5 x 10	B18.6.7M		22			Ranura en cruz
1	Módulo ESP32			21			Dev Kit V2
15	Tornillo M3 x 0.5 x 4			20			Ranura en cruz
12	Separador hexagonal hembra	Latón		19			M3X0.5X4
12	Separador hexagonal macho	Latón		18			M3X0.5X4
1	Bloque de montaje ESP32			17	CZH-LABS.COM D-1356		VERS. 1.0
4	Tuerca M6 x 1.0	B18.2.4.1M		16			
4	Perno M6 x 1.0 x 30	B18.6.7M		15			Cabeza hexagonal
1	Chumacera			14	MISUMI P-001	0.09	Ø 12mm
1	Péndulo	AISI 304		13		0.362	Ø 3/8in
4	Neumático			12			Ø 85mm
1	Encoder rotacional			11	OMRON E6B2-CWZ3E	0.1	1000 pulsos/rev
1	SopORTE encoder	ASTM A1200		10		0.032	e=2mm
1	Eje de encoder	AISI 304		9		0.135	Ø 5/8in
1	Placa superior	ASTM A1200		8		0.112	e=2mm
4	Elevador cilindrico	AISI 304		7		0.015	Ø 5/16in
2	Controlador de motor			6	L298 DC Motor Drive	0.03	
1	Batería LiPo			5	Turnigy 1600mAh	0.128	3S-30-40C
16	Tornillo M3 x 0.5 x 16	B18.6.7M	AISI 304	4			Cabeza plana
4	Motorreductor			3	pololu item #4843	0.1	12V-500RPM-20.4:1
4	SopORTE de motorreductor	AISI 1020		2		0.025	
1	Placa base	ASTM A1200		1		0.2	e=2mm

No. de pie z.	Denominación	No. de Norma/Dibujo	Material	No. de orde n	No. del Modelo/semiproducto	Peso kg/pz	Observaciones
Nº. Lámina: 2 de 5		Nº. Hojas: 1		Sustitución:		Codificación: FM-EIM-IC-PICM-2021	
Email: Orozco Daniel				Denominación: Vista Explosionada Péndulo invertido sobre carro movil			
Teléfonos:							
Datos	Nombre	Firma	Fecha				
Proyectó	Orozco Daniel		2021/09/23				
Dibujó	Orozco Daniel		2021/09/23				
Revisó	Ing. Escobar M.		2022/01/07	Materiales: SEGUN DISEÑO			
Aprobó	Ing. Escobar M.		2022/01/07	Nombre de archivo: Ensamblaje.sldprt			
<b>ESPOCH</b>						<b>FACULTAD DE MECÁNICA</b>	
<b>ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA</b>						<b>Registro</b>	
Peso [Kg]		Tolerancia		Escala		Registro	
2.185		±0.3 [mm]		1:5			
ESTE DOCUMENTO ES PROPIEDAD INTELLECTUAL EXCLUSIVA DE: A.S. Y J.T. CUALQUIER USO Y REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL NO AUTORIZADA CONSTITUYE VIOLACIÓN DE LOS DERECHOS DEL AUTOR PENADA POR LA LEY							

Espesor de la lámina: e=2mm

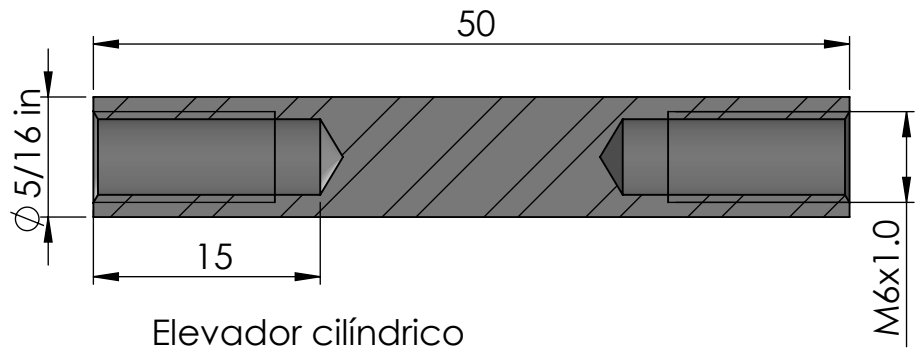
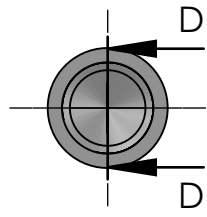


N°. Lámina: 3 de 6		N°. Hojas: 1		Sustitución:		Codificación: FM-EIM-IC-PICM-2021		<b>ESPOCH</b> <b>FACULTAD DE MECÁNICA</b> <b>ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA</b>											
Email: Teléfonos:						Denominación:						Peso [Kg]		Tolerancia		Escala		Registro	
Datos		Nombre		Firma		Fecha		<b>Placa base</b> <b>Péndulo invertido</b> <b>sobre carro móvil</b>				0.2		±0.3 [mm]		1:2			
Proyectó		Orozco Daniel				2021/09/23													
Dibujó		Orozco Daniel				2021/09/23													
Revisó		Ing. Escobar M.				2022/01/07		<b>Materiales:</b> ASTM A 1200				ESTE DOCUMENTO ES PROPIEDAD INTELLECTUAL EXCLUSIVA DE: A.S. Y J.T. CUALQUIER USO Y REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL NO AUTORIZADA CONSTITUYE VIOLACIÓN DE LOS DERECHOS DEL AUTOR PENADA POR LA LEY							
Aprobó		Ing. Escobar M.				2022/01/07		<b>Nombre de archivo:</b> base1.sldprt											

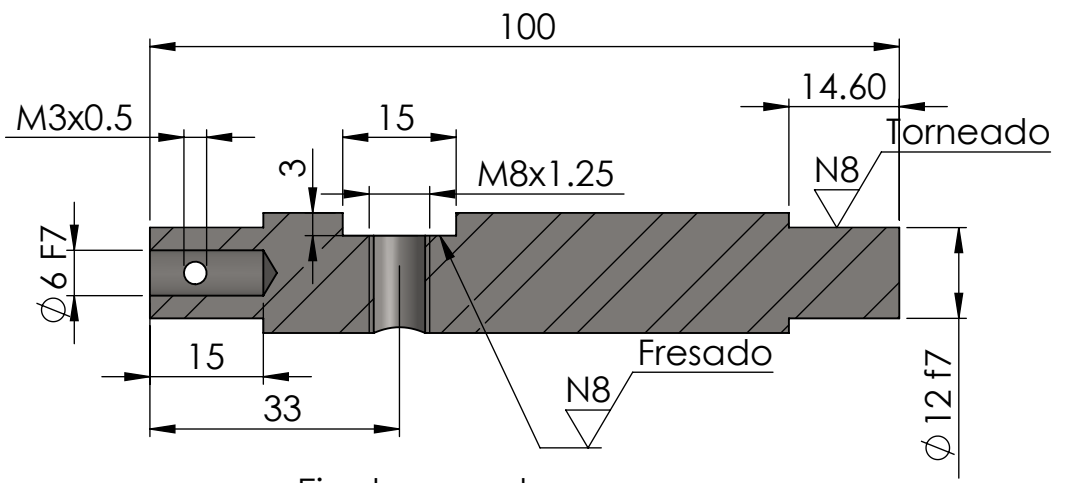
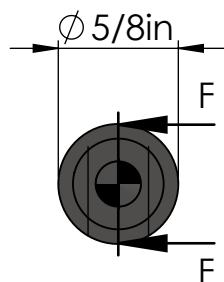


Nº. Lámina: 4 de 6		Nº. Hojas: 1		Sustitución:		Codificación: FM-EIM-IC-PICM-2021		<b>ESPOCH</b> <b>FACULTAD DE MECÁNICA</b> <b>ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA</b>			
Email: Teléfonos:						Denominación:  Placa superior, Soporte peso y Soporte encoder <b>Péndulo invertido sobre carro móvil</b>					
Datos	Nombre	Firma	Fecha			Materiales: SEGUN DISEÑO		±0.3 [mm]	1:2		
Proyectó	Orozco Daniel		2021/09/23			Nombre de archivo:		ESTE DOCUMENTO ES PROPIEDAD INTELLECTUAL EXCLUSIVA DE: A.S. Y J.T. CUALQUIER USO Y REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL NO AUTORIZADA CONSTITUYE VIOLACIÓN DE LOS DERECHOS DEL AUTOR PENADA POR LA LEY			
Dibujó	Orozco Daniel		2021/09/23								
Revisó	Ing. Escobar M.		2022/01/07								
Aprobó	Ing. Escobar M.		2022/01/07								

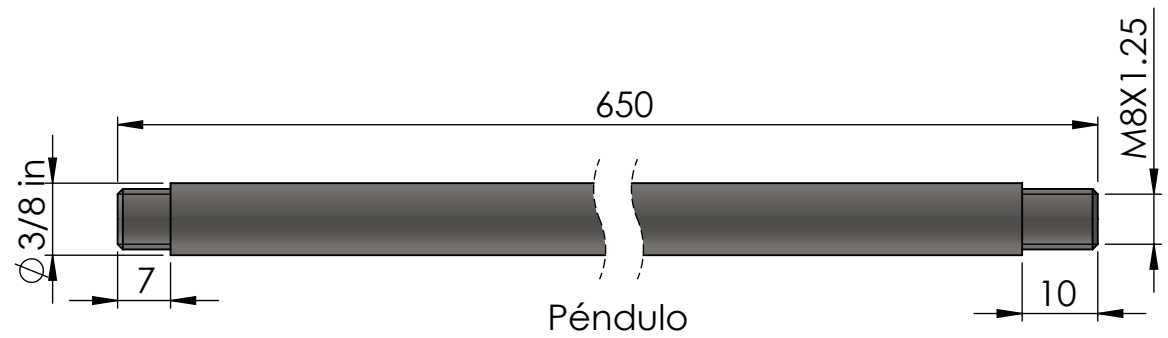




Elevador cilíndrico  
Esc. 2:1



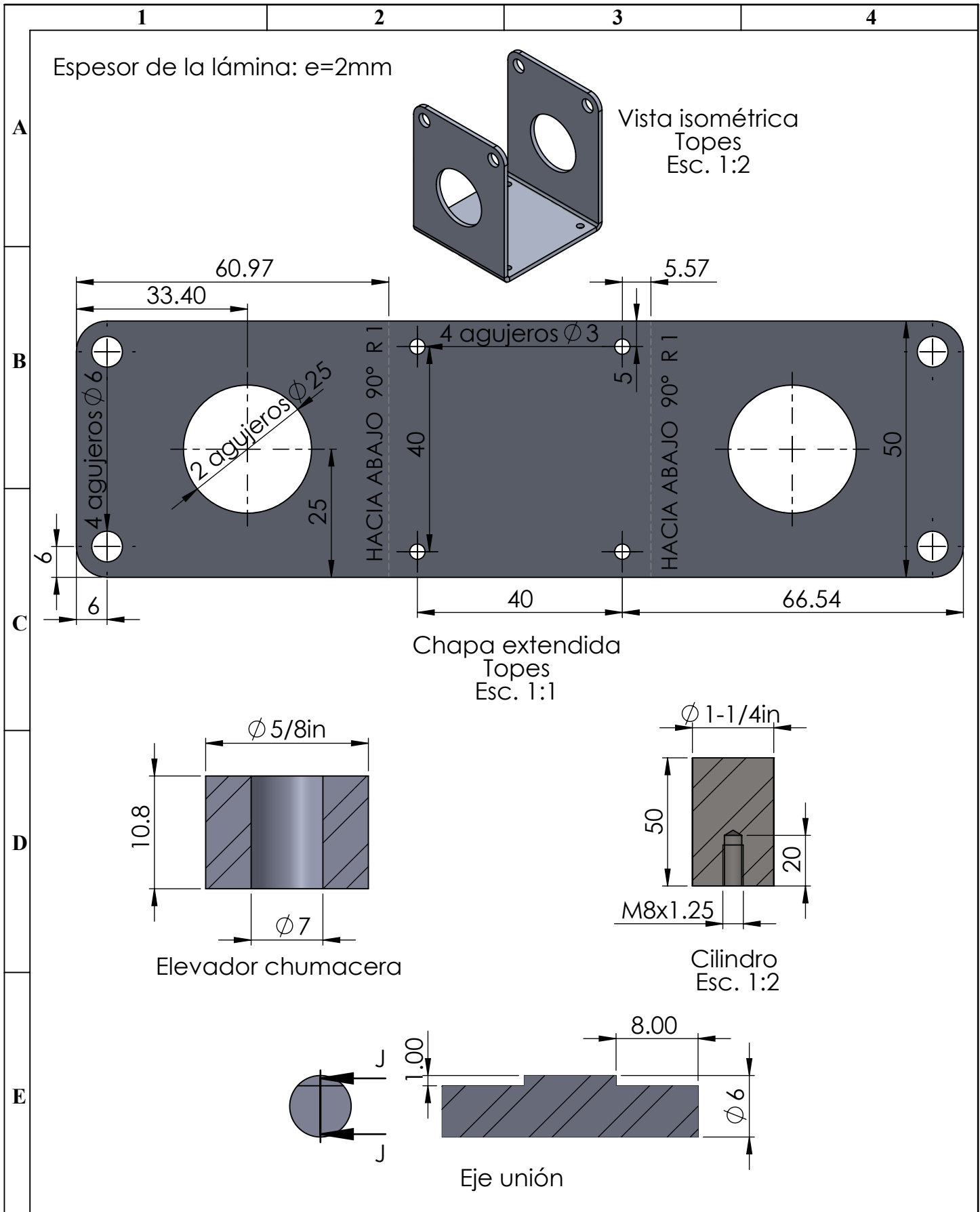
Eje de encoder



Péndulo

Tolerancias			
Diámetro	Símbolo	Valor máximo	Valor mínimo
12	f7	11.984	11.966
6	F7	6.022	6.010

N°. Lámina: 5 de 6		N°. Hojas: 1		Sustitución:		Codificación: FM-EIM-IC-PICM-2021		<b>ESPOCH</b> <b>FACULTAD DE MECÁNICA</b> <b>ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA</b>			
Email: Teléfonos:						Denominación: Elevador cilíndrico, Eje de encoder y Péndulo <b>Péndulo invertido sobre carro móvil</b>					
Datos	Nombre	Firma	Fecha			Materiales: AISI 304			±0.3 [mm]	1:1	
Proyectó	Orozco Daniel		2021/09/23			Nombre de archivo:		<small>ESTE DOCUMENTO ES PROPIEDAD INTELLECTUAL EXCLUSIVA DE: A.S. Y J.T. CUALQUIER USO Y REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL NO AUTORIZADA CONSTITUYE VIOLACIÓN DE LOS DERECHOS DEL AUTOR PENADA POR LA LEY</small>			
Dibujó	Orozco Daniel		2021/09/23								
Revisó	Ing. Escobar M.		2022/01/07								
Aprobó	Ing. Escobar M.		2022/01/07								



N°. Lámina: 6 de 6		N°. Hojas: 1		Sustitución:		Codificación: FM-EIM-IC-PICM-2021		<b>ESPOCH</b> <b>FACULTAD DE MECÁNICA</b> <b>ESCUELA DE INGENIERÍA MECÁNICA</b>			
Email: Teléfonos:						Denominación: Topes, Elevador chumaceras, Cilindro y Eje unión					
Datos	Nombre	Firma	Fecha	<b>Péndulo invertido sobre carro móvil</b>		<b>Materiales:</b> SEGUN DISEÑO		±0.3 [mm]	2:1		
Proyectó	Orozco Daniel		2021/09/23								
Dibujó	Orozco Daniel		2021/09/23								
Revisó	Ing. Escobar M.		2022/01/07	Nombre de archivo:		ESTE DOCUMENTO ES PROPIEDAD INTELLECTUAL EXCLUSIVA DE: A.S. Y J.T. CUALQUIER USO Y REPRODUCCIÓN TOTAL O PARCIAL NO AUTORIZADA CONSTITUYE VIOLACIÓN DE LOS DERECHOS DEL AUTOR PENADA POR LA LEY					
Aprobó	Ing. Escobar M.		2022/01/07								

## ANEXO S: Programacion del ESP32 en arduino

```
1 #include <Arduino.h>
2 #include "BluetoothSerial.h"
3
4 #if !defined(CONFIG_BT_ENABLED) || !defined(CONFIG_BLUEDROID_ENABLED)
5 #error Bluetooth is not enabled! Please run `make menuconfig` to and enable it
6 #endif
7 BluetoothSerial SerialBT;
8
9 //MATRIZ DE CONTROL
10 const float K1=-67.056; //a)-67.056 b)
11 const float K2=-16.8262; //a)-16.8262 b)
12 const float K3=-0.0605; //a)-0.0605 b)
13 const float K4=-11.522; //a)-11.522 b)
14
15 //LIMITACIONES DEL ANGULO Y ESPACIO
16 const float ang_max=0.24; //rad
17 const float espac_max=3; //maximo espacio(m)
18 const float V_bateria = 11.6; //Voltaje de bateria
19
20 ///Variables
21 float Ulqr = 0;
22 float U = 0;
23 const float r = 0.0425;
24 const int boton_start=35; //pin para inicio de control
25 const int boton_zero=2; //pin para zero en pendulo
26 int start=0;
27
28 //DEFINIMOS LOS PINES DEL PRIMER L298
29 const int ENA_1 = 26;
30 const int IN1_1 = 25;
31 const int IN2_1 = 23;
32 const int IN3_1 = 22;
33 const int IN4_1 = 21;
34 const int ENB_1 = 19;
35
36 //DEFINIMOS LOS PINES DEL SEGUNDO L298
37 const int ENA_2 = 13;
38 const int IN1_2 = 14;
39 const int IN2_2 = 15;
40 const int IN3_2 = 16;
41 const int IN4_2 = 17;
42 const int ENB_2 = 18;
43
44 //PROPIEDADES PARA LA SEÑAL PMW
45 const int frecuencia = 500;
46 const int canal = 0;
47 const int resolucion = 8;
48 int PWM_calc = 0;
49 int PWM = 0;
50 int PWM_min = 0;
51
52 //CONFIGURACION PARA VELOCIDAD DEL ENCODER DEL MOTOR
53 const int CANAL_A1 = 32;
54 const int CANAL_B1 = 27;
```

```

55 volatile long contador1 = 0;
56 volatile long contador2 = 0;
57 volatile long Contador = 0;
58 double Tiempo_Actual = 0;
59 double Conteo_Ant = 0;
60 double Tiempo = 0;
61 long Conteo_Actual = 0;
62 long Conteo_Actual2 = 0;
63 long Conteo_Actual1 = 0;
64 float Pulso_s = 0;
65 float Pulso_min = 0;
66 float RPM_Encoder = 0;
67 float RPM_Motor = 0;
68 float rads_motor = 0;
69 int interruptPin = 32;
70 int Toma_Muestra = 1;
71 float velocidad = 0;
72
73 //CONFIGURACION PARA POSICION DEL CARRO
74 const int CANAL_A2 = 33;
75 const int CANAL_B2 = 34;
76 int pos1 = 0;
77 int pos2 = 0;
78 float posicion = 0;
79
80 //encoder rotacional
81 const int CANAL_A3 = 4;
82 const int CANAL_B3 = 5;
83 int ang = 0;
84 float angulo = 0;
85 double Angu_ant = 0;
86 long Angu_Actual = 0;
87 float vel_angular = 0;
88 volatile long angu = 0;
89
90 void setup() {
91     //CONECCION BLUETOOTH
92     Serial.begin(115200);
93     SerialBT.begin("Pendulo1"); //Bluetooth device name
94     pinMode(boton_start, INPUT_PULLDOWN);
95     pinMode(boton_zero, INPUT_PULLDOWN);
96     pinMode(ENA_1, OUTPUT);
97     pinMode(IN1_1, OUTPUT);
98     pinMode(IN2_1, OUTPUT);
99     pinMode(IN3_1, OUTPUT);
100    pinMode(IN4_1, OUTPUT);
101    pinMode(ENB_1, OUTPUT);
102
103    pinMode(ENA_2, OUTPUT);
104    pinMode(IN1_2, OUTPUT);
105    pinMode(IN2_2, OUTPUT);
106    pinMode(IN3_2, OUTPUT);
107    pinMode(IN4_2, OUTPUT);
108    pinMode(ENB_2, OUTPUT);
109
110    //configuramos las funcionalidades del PMW

```

```

111 ledcSetup(canal,frecuencia,resolucion);
112 ledcAttachPin(ENA_1,canal);
113 ledcAttachPin(ENB_1,canal);
114 ledcAttachPin(ENA_2,canal);
115 ledcAttachPin(ENB_2,canal);
116
117 //configuracion para velocidad del encoder del motor
118 pinMode(CANAL_A1, INPUT);
119 pinMode(CANAL_B1, INPUT);
120 attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(interruptPin),Lectura_Encoder, RISING);
121
122 //configuracion para posicion del carro
123 pinMode(CANAL_A2, INPUT);
124 pinMode(CANAL_B2, INPUT);
125 attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(CANAL_A2),posiCarro,RISING);
126
127 //configuracion para posicion del pendulo
128 pinMode(CANAL_A3, INPUT);
129 pinMode(CANAL_B3, INPUT);
130 attachInterrupt(digitalPinToInterrupt(CANAL_A3),angPen,RISING);
131
132 }
133
134 void loop() {
135 ///////////////////////////////////////////////////CONDICION BOTON INICIO DE CONTROL//////////////////////////////////////
136 if(digitalRead(boton_start) == HIGH){
137     start=1;
138     delay(250);
139 }
140
141 ///////////////////////////////////////////////////CONDICION CALIBRACION DE CERO DE PENDULO//////////////////////////////////////
142 if(digitalRead(boton_zero) == HIGH){
143     ang=0;
144     angu=0;
145     pos1=0;
146     pos2=0;
147     delay(50);
148 }
149
150 ///////////////////////////////////////////////////TOMA DE VARIABLES DE ESTADO//////////////////////////////////////
151 if (Toma_Muestra == 1){
152     Tiempo_Actual = millis();
153     Conteo_Ant = abs(Contador);
154     Angu_ant= abs(angu);
155     Toma_Muestra = 0;
156 }
157
158 Tiempo = millis() - Tiempo_Actual;
159
160 if (Tiempo >= 50) { // 15000 Microsegundos
161     Conteo_Actual1 = contador1 - Conteo_Ant;
162     Conteo_Actual2 = contador2 - Conteo_Ant;
163     Conteo_Actual=(Conteo_Actual1+Conteo_Actual2)/2;
164     Pulso_s =Conteo_Actual/(Tiempo/1000); // Pulso/segundo
165     Pulso_min = Pulso_s * 60; // Pulso/min
166     RPM_Encoder = Pulso_min/12;// depende del encoder 48/4=12

```

```

167 RPM_Motor = RPM_Encoder*(0.04901960784); // caja reductora 1/20.4=0.049...
168 rads_motor=RPM_Motor*2*PI/60;
169 Toma_Muestra = 1;
170
171 Angu_Actual=angu-Angu_ant;
172 vel_angular=(Angu_Actual*2*PI/1000)/(Tiempo/1000); // Pulso/segundo
173 angulo = ang*2*PI/1000;
174 posicion = ((pos1+pos2)/2)*(2*PI/408)*r; //(radio) [m]
175 velocidad=rads_motor*r; //(radio) [m/s]
176
177 contador1 = 0;
178 contador2 = 0;
179 angu = 0;
180
181 ///////////////////////////////////APLICACION DEL CONTROL////////////////////////////////////
182 Ulqr=K1*angulo+K2*vel_angular+K3*posicion+K4*velocidad;
183
184 if (start==1){
185 U=(-Ulqr)*0.6; //a) 0.6
186
187 if (U>0) {
188 //CONTROL DE LOS L298
189 digitalWrite(IN1_1,HIGH);
190 digitalWrite(IN2_1,LOW);
191 digitalWrite(IN3_1,HIGH);
192 digitalWrite(IN4_1,LOW);
193 digitalWrite(IN1_2,HIGH);
194 digitalWrite(IN2_2,LOW);
195 digitalWrite(IN3_2,HIGH);
196 digitalWrite(IN4_2,LOW);
197 }
198
199 else{
200 digitalWrite(IN1_1,LOW);
201 digitalWrite(IN2_1,HIGH);
202 digitalWrite(IN3_1,LOW);
203 digitalWrite(IN4_1,HIGH);
204 digitalWrite(IN1_2,LOW);
205 digitalWrite(IN2_2,HIGH);
206 digitalWrite(IN3_2,LOW);
207 digitalWrite(IN4_2,HIGH);
208 }
209
210 //SEÑAL PWM A los motores
211 PWM_calc=abs(U)*255/V_bateria;
212 if(PWM_calc>255) PWM=255;
213 if(PWM_calc<=255&&PWM_calc>=0) PWM=PWM_calc;
214 if(PWM_calc<0) PWM=0;
215 ledcWrite(canal,PWM); //señal pmw 0 - 255
216
217 }
218
219 //MOSTRAMOS RESULTADOS////////////////////////////////////
220 SerialBT.print(Tiempo_Actual,4);
221 SerialBT.print(";");
222 //SerialBT.print("Angulo:");

```

```

223 SerialBT.print(angulo,4);
224 SerialBT.print(";");
225 //SerialBT.print(" vel_ang:");
226 SerialBT.print(vel_angular,4);
227 SerialBT.print(";");
228 //SerialBT.print(" posicion:");
229 SerialBT.print(posicion,3);
230 SerialBT.print(";");
231 //SerialBT.print(" velocidad:");
232 SerialBT.print(velocidad,4);
233 SerialBT.print(";");
234 //SerialBT.print(" U:");
235 SerialBT.println(U,2);
236 }
237
238 //////////CONDICION DE ANGULO Y POSICION MAXIMA//////////
239 if ((abs(angulo)>ang_max) || (abs(posicion)>(espac_max/2))) {
240     exit(0);
241 }
242 }
243
244 //////////FUNCIONES PARA ENCODER//////////
245 void Lectura_Encoder() {
246     if (digitalRead(CANAL_A1) == HIGH) {
247         if (digitalRead(CANAL_B1) == LOW) {
248             contador1++;
249             pos1++;
250         }
251         else {
252             contador1--;
253             pos1--;
254         }
255     }
256     else {
257         if (digitalRead(CANAL_B1) == LOW) {
258             contador1--;
259             pos1--;
260         }
261         else {
262             contador1++;
263             pos1++;
264         }
265     }
266 }
267
268 void posiCarro() {
269     if(digitalRead(CANAL_B2) > 0) {
270         pos2++;
271         contador2++;
272     }
273     else{
274         pos2--;
275         contador2--;
276     }
277 }
278

```

```
279 void angPen() {
280     if(digitalRead(CANAL_B3) > 0) {
281         ang++;
282         angu++;
283     }
284     else{
285         ang--;
286         angu--;
287     }
288 }
```



**ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO**

**VICERRECTORADO ACADÉMICO**

**DIRECCIÓN DE DESARROLLO ACADÉMICO**



**FACULTAD: MECÁNICA**

**CARRERA: INGENIERÍA MECÁNICA**

**GUÍA DE PRÁCTICAS DE LABORATORIOS,  
TALLERES Y CENTROS DE SIMULACIÓN DE  
INSTRUMENTACIÓN Y CONTROL AUTOMÁTICO**

**MECIP37**

**LUGAR DONDE SE REALIZA LA PRÁCTICA:**



**PRÁCTICA No. 08**

**SINTONIZACION DE UN CONTROL AUTOMÁTICO LQR y CONTROL POR REALIMENTACION DE ESTADOS POR ASIGNACION DE POLOS SOBRE UN PÉNDULO INVERTIDO MONTADO EN UN CARRO MÓVIL**

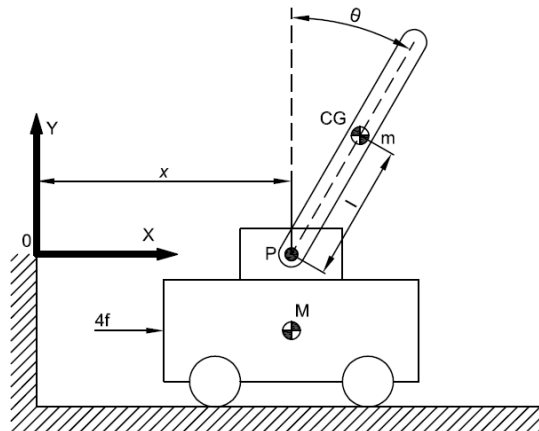
**FECHA:**

**1. OBJETIVO:**

- Diseñar un controlador de realimentación de estados por asignación de polos y un control LQR de un sistema péndulo invertido montado en un carro móvil para comparar como se desempeña en el modelo real y sus diferencias.

**2. INTRODUCCION**

El péndulo invertido montado en un carro móvil consta de tres subsistemas los cuales son: el carro móvil, el péndulo invertido y los actuadores. Al generar las diferentes ecuaciones que describen el movimiento de cada parte y combinarlas, obtenemos las ecuaciones que describen el movimiento dinámico del sistema.



Las ecuaciones lineales que rigen el sistema péndulo invertido - carro móvil son las siguientes:

$$\ddot{\theta} = \left[ \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{MlR_a r^2} \left( 1 - \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} \right) \right] \dot{x} + \left[ \frac{(M + m)g}{Ml} - \frac{4I_m m g}{Ml(Mr^2 + 4I_m)} \right] \theta + \left[ \frac{4k}{MlR_a r} \left( \frac{4I_m}{Mr^2 + 4I_m} - 1 \right) \right] v(t) \quad (1)$$

$$\ddot{x} = \frac{4rk}{R_a(Mr^2 + 4I_m)} v(t) - \left( \frac{4k^2 + 4R_a B_m}{R_a(Mr^2 + 4I_m)} \right) \dot{x} - \frac{mgr^2}{(Mr^2 + 4I_m)} \theta \quad (2)$$



**Tabla 0-1.** Constantes del sistema

Parámetro	Valor numérico
$M$	1,980 kg
$m$	0,646 kg
$l$	0,63 m
$r$	0,0425 m
$g$	9,81 m/s <sup>2</sup>
$R_a$	3,5Ω
$k$	0,2237 V. s/rad
$B_m$	0,001282 Nm. s
$I_m$	0,004363 kg. m <sup>2</sup>

**Donde:**

$M$ : masa del carro móvil

$m$ : masa del péndulo y objeto agregado

$l$ : longitud del péndulo

$r$ : radio del neumático

$g$ : gravedad

$R_a$ : resistencia de la armadura del motorreductor

$k$ : constante contraelectromotriz del motorreductor

$R_a$ : constante de fricción viscosa del motorreductor

$I_m$ : momento de inercia del motorreductor

$v(t)$ : voltaje aplicado a los motorreductores

Las variables para considerar en el diseño de un control son:

$x$ : posición del sistema

$\dot{x}$ : velocidad lineal del sistema

$\theta$ : ángulo del péndulo invertido

$\dot{\theta}$ : velocidad angular del péndulo invertido

### 3. INSTRUCCIONES

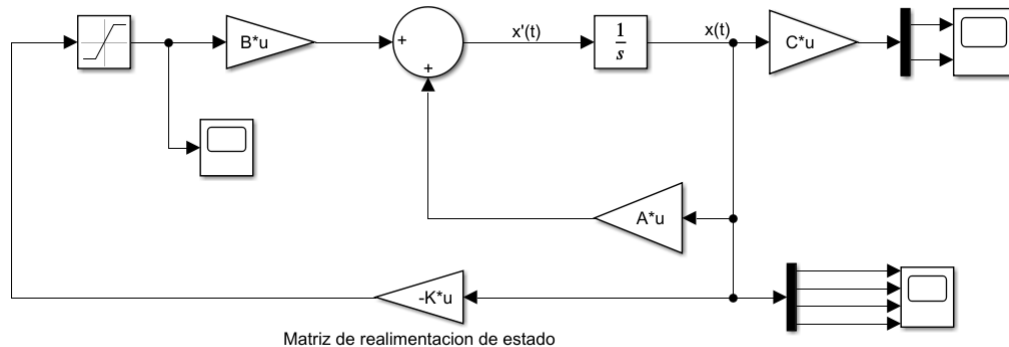
2.1 Según el modelo matemático obtenido, diseñar un controlador de realimentación de estados por asignación de polos.



2.2 Según el modelo matemático obtenido, diseñar un controlador LQR

2.3 Comparar la respuesta de los dos controladores.

2.4 Análisis de respuesta de los dos controladores implementándolo en Simulink con el siguiente diagrama de bloques donde A,B,C son las matrices del espacio de estado.



2.5 Implemente los dos controles en el modelo real. Tomar en cuenta las siguientes sugerencias para un correcto uso del equipo:

- Cargar completamente la batería lipo mediante el cargador especial de baterías lipo para obtener un buen desempeño del equipo. Cuando la carga se haya completado se mostrará tres leds en color verde. Antes de utilizar la batería se debe esperar 15 minutos para que se estabilice la carga y no se dañe la batería.
- Para cargar el programa de Arduino se debe sacar el módulo ESP32 de su placa para evitar daños y posteriormente conectarlo por su conexión USB a la computadora.
- Dentro del script se deben modificar las constantes de **K1, K2, K3 y K4** correspondiente a la matriz de realimentación de estados, además de que se debe ingresar el valor de voltaje actual de la batería LiPo y también colocar el espacio disponible máximo en la constante **posi\_max** para el libre funcionamiento del equipo ya que el equipo se apagará si supera este valor evitando golpes y daños al equipo. No modificar el valor del ángulo máximo.
- Colocar el módulo ESP32 cuidadosamente dentro de la placa verificando que concuerden todos sus pines.
- Verificar que todos los neumáticos se encuentren bien ajustados.
- Colocar el equipo en el centro de la un área amplia sin obstáculos.
- Encender el switch ON y verificar que se enciendan los leds rojos de los drivers, luego emparejamos o conectamos el bluetooth del equipo (con nombre Péndulo) y la computadora para posteriormente abrir el programa PuTTY. Se debe seleccionar la conexión tipo serial y colocamos el puerto COM asignador por la computadora además de la velocidad de 115200, el número de puerto se puede ver por medio de Administrador de dispositivos en la subsección Puertos COM, finalmente dar clic en OPEN y se debe verificar que se esté recibiendo los valores de las variables de estado.

	<p><b>ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO</b>  <b>GUÍA DE PRÁCTICAS DE LABORATORIOS,</b>  <b>TALLERES Y CENTROS DE SIMULACIÓN</b></p> <p><b>INTRUMENTACIÓN Y CONTROL AUTOMÁTICO</b></p>	
---	--	---

- h) Posterior a esto, colocar el péndulo invertido de manera vertical, es decir a cero grados del eje vertical y presionamos el botón ZERO para encerrar el encoder del péndulo y el encoder de los motorreductores.
- i) Luego presionar el botón START para que se dé inicio al control.
- j) Una vez utilizado el equipo, apagar el switch y sacar el péndulo del equipo.
- k) Para guardar el equipo por largo tiempo se debe descargar el equipo hasta que la batería mantenga un voltaje de alrededor 11,1 volts ya que, si no se cumple esto, la batería lipo se estropea o puede incendiarse.
- l) Nunca permita el que el voltaje en la batería baje de 3,5Volts en cada celda o 10,5Volts total ya que este voltaje es el crítico y podría causar que la batería se incinere y estropee.

#### **4. RESULTADOS:**

4.1 Presentar el informe en un solo archivo comprimido que incluya:

- a. El informe en formato PDF
- b. Los archivos que contengan la simulación creada en la práctica.

#### **5. CONCLUSIONES**

En base a lo realizado en la práctica y en la teoría aprendida en clase elabore sus conclusiones

#### **6. RECOMENDACIONES**

Describir las diversas recomendaciones para la realización exitosa de la práctica.