ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

Aplicación de la realidad Aumentada y aprendizaje de la geometría en el espacio para tercero de bachillerato de la Unidad Educativa "El Empalme". Periodo 2021-2022

JAIME ALFREDO LÓPEZ CHICA

Trabajo de Titulación modalidad: Proyectos de Investigación y Desarrollo, presentado ante el Instituto de Posgrado y Educación Continua de la ESPOCH como requisito parcial para la obtención del grado de:

MAGÍSTER EN MATEMÁTICA MENCIÓN MODELACIÓN Y DOCENCIA

RIOBAMBA-ECUADOR

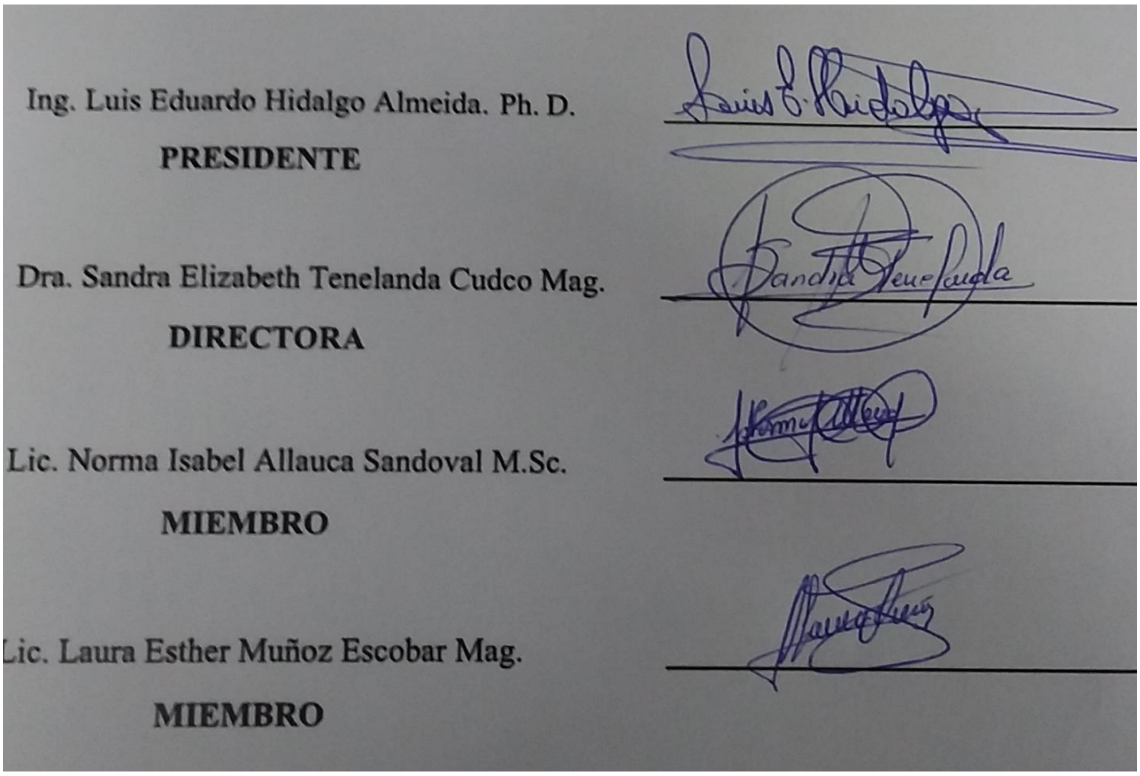
Julio 2022

ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DE CHIMBORAZO

CERTIFICACIÓN:

EL TRIBUNAL DEL TRABAJO DE TITULACIÓN CERTIFICA QUE:

El **trabajo de titulación modalidad proyectos de Investigación y Desarrollo**, titulado: Aplicación de la realidad Aumentada y aprendizaje de la geometría en el espacio para tercero de bachillerato de la Unidad Educativa “El Empalme”. Periodo 2021-2022, de responsabilidad del señor Jaime Alfredo López Chica, ha sido prolijamente revisado y se autoriza su presentación.



Ing. Luis Eduardo Hidalgo Almeida. Ph. D.
PRESIDENTE

Dra. Sandra Elizabeth Tenelanda Cudco Mag.
DIRECTORA

Lic. Norma Isabel Allauca Sandoval M.Sc.
MIEMBRO

Lic. Laura Esther Muñoz Escobar Mag.
MIEMBRO

Riobamba, julio de 2022

DERECHOS INTELECTUALES

Yo, JAIME ALFREDO LÓPEZ CHICA, declaro que soy responsable de las ideas, doctrinas y resultados expuestos en el presente Trabajo de Titulación modalidad Proyectos de Investigación y Desarrollo, y que el patrimonio intelectual generado por la misma pertenece exclusivamente a la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo.

JAIME ALFREDO LÓPEZ CHICA

No. Cédula: 1206053942

DECLARACIÓN DE AUTENTICIDAD

Yo, JAIME ALFREDO LÓPEZ CHICA, declaro que el presente Trabajo de Titulación Proyectos de Investigación y Desarrollo, es de mi autoría y que los resultados del mismo son auténticos y originales. Los textos constantes en el documento que provienen de otra fuente están debidamente citados y referenciados.

Como autor, asumo la responsabilidad legal y académica de los contenidos de este proyecto de investigación de maestría.

JAIME ALFREDO LÓPEZ CHICA

No. Cédula: 1206053942

DEDICATORIA

A mi padre por haberme guiado a lo largo de mi vida siendo un ejemplo de fortaleza y buen juicio. A mis amados hijos que siempre han sido la mayor de mis motivaciones. A mi esposa le dedico con mucho cariño y amor todo mi esfuerzo, fruto del trabajo realizado para el desarrollo de este proyecto, quien a lo largo de los años ha velado por mi bienestar siendo mi apoyo en todo momento, sin dudar ni un solo instante de mi capacidad. Es gracias a ella que pude lograrlo.

Jaime

AGRADECIMIENTO

A mi amada esposa compañera de la maestría y de mi vida, por haber estado siempre a mi lado brindándome su apoyo y amor incondicional, muy en especial a su señora madre doña Isabel Montoya quién fue aliada en los más duros momentos y nunca dejó de creer en mí.

A la M.Sc. Laura Muñoz, M.Sc. Norma Allauca y Mgs. Sandra Tenelanda, a quienes con su experiencia, conocimiento, motivación y paciencia he culminado mis estudios de cuarto nivel con éxito.

Jaime

ÍNDICE DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE ANEXOS

RESUMEN

El presente estudio tuvo como objetivo aplicar la realidad aumentada y aprendizaje de la geometría en el espacio a estudiantes de tercero de bachillerato de la Unidad Educativa "El Empalme". periodo 2021-2022. La investigación tuvo enfoque cuantitativo, en donde se utilizó una investigación aplicada con la utilización de un pre y post test, la muestra estuvo conformada por 42 estudiantes distribuidos en dos grupos de estudio, experimental (paralelo B) y control (paralelo A) con 21 estudiantes cada paralelo, con quienes se desarrollaron secuencias didácticas con contenidos de geometría en el espacio, plano, recta, punto y sus interrelaciones; el instrumento utilizado consistió en una prueba final de preguntas abiertas para evaluar el nivel de comprensión de los tópicos de geometría en el espacio tratados en las clases virtuales. Los resultados obtenidos demostraron una mejora en el grupo experimental (paralelo B), puesto que el promedio de las calificaciones obtenidas por el grupo experimental fue 7,25 puntos y el grupo control fue de 5,60 puntos en el aprendizaje de la geometría en el espacio. Se concluye que con la aplicación del software GeoGebra 3D con realidad aumentada como instrumento didáctico en la aplicación de la realidad aumentada mejora el nivel de comprensión y desarrollo de capacidades en el aprendizaje de la geometría en el espacio de los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa El Empalme, presentando ambos grupos de análisis una distribución normal y varianzas semejantes nos hemos valido de la Prueba "T de Student" para verificar que efectivamente existen variaciones relevantes entre ambas muestras.

Palabras claves: MATEMÁTICAS, REALIDAD AUMENTADA, GEOGEBRA 3D, GEOMETRÍA EN EL ESPACIO, APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO.

LUIS ALBERTO CAMINOS VARGAS

Firmado digitalmente por LUIS ALBERTO CAMINOS VARGAS Nombre de reconocimiento (DN): c=EC, l=RIOBAMBA, serialNumber=0602766974, cn=LUIS ALBERTO CAMINOS VARGAS Fecha: 2022.06.09 15:37:48 -05'00'

0053-DBRA-UPT-IPEC-2022

ABSTRACT

The goal of this study was to apply augmented reality and the learning of geometry in space to third-year high school students of the "El Empalme School" in the academic term 2021-2022. The research had a quantitative approach, where an applied research was taught with the use of a pre and posttest, the sample consisted of 42 students distributed in two study groups, experimental (parallel B) and control (parallel A) with 21 students each parallel, with whom didactic sequences with contents of geometry in space, plane, straight, point and their interrelationships were developed. The instrument used consisted of a final test of open questions to assess the level of understanding of the geometry topics in the space covered in the virtual classes. The results showed an improvement in the experimental group (parallel B), since the average of the fibers obtained by the experimental group was 7.25 points and the control group was 5.60 points in learning geometry in space. It is concluded that the application of the GeoGebra 3D software with augmented reality as a didactic instrument in the application of augmented reality improves the level of understanding and development of skills in the learning of geometry in the space of the high school students of the El Empalme School. It presented both analysis groups with a normal distribution and similar variances. It was used the "Student's T" Test to verify that there are indeed relevant variations between both samples.

Keywords: Mathematics, Augmented Reality, 3d Geogebra, Geometry In Space, Meaningful Learning.

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

1.1. Situación Problemática.

El aumento de la digitalización no solo modifica las demandas profesionales y privadas, sino que también crea importantes posibilidades en el mejoramiento de la enseñanza y aprendizaje en diversas áreas del conocimiento. Para integrar los posibles desarrollos prometedores de la digitalización en las escuelas, es necesario investigar sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos propios de los contenidos de cada disciplina, y a su vez entrenar a los maestros en la implementación de estas nuevas herramientas.

A la hora de enseñar, se requiere la manipulación o visualización de objetos que pueden no ser fácilmente asequibles o tratables, ya sea por su naturaleza abstracta, científica o espacial. Es el caso de la enseñanza de geometría, en donde los recursos tradicionales de los que se ha valido la escuela para enseñar, se ven limitados a la hora de acercar lo abstracto a la realidad. Las TIC ofrecen incontables posibilidades en este aspecto (GÓMEZ CARMONA & LÓPEZ QUINTERO, 2016).

Hacer que las innovaciones tecnológicas estén disponibles para la enseñanza y el aprendizaje, va más allá del equipamiento de hardware y software a las escuelas. En el campo de los medios digitales, la tecnología de realidad aumentada (AR) ha recibido gran atención durante los últimos años. Además, el desarrollo tecnológico de los teléfonos inteligentes y sus cámaras ha hecho accesible estas herramientas tecnológicas para la investigación educativa, en este sentido la realidad aumentada asistida por el software GeoGebra 3D es muy útil y necesaria para mejorar el aprendizaje de los estudiantes de tercero de bachillerato, principalmente en el área de la geometría en el espacio, que es el tema a tratar en el presente estudio.

1.2. Formulación del Problema.

¿Como influye el uso de la realidad aumentada asistida con el software educativo GeoGebra 3D en el aprendizaje de la geometría en el espacio en estudiantes del tercer año del Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa “El Empalme”?

1.3. Preguntas Directrices.

¿Cuál es el efecto de la Realidad Aumentada asistida con GeoGebra 3D en el aprendizaje de geometría en el espacio en estudiantes del tercer año del Bachillerato General??

¿En qué medida la realidad aumentada asistida con GeoGebra 3D como tecnología emergente favorece la comprensión de los tópicos de geometría en el espacio, plano, recta, punto y sus interrelaciones en estudiantes del tercer año del Bachillerato General?

¿De qué manera el uso de la realidad aumentada asistida con el software educativo GeoGebra 3D influye en la capacidad de aplicación de estrategias y procedimientos para medir y orientarse en el espacio del aprendizaje de geometría en el espacio en estudiantes del tercer año del Bachillerato General?

¿Cómo influye el uso de la realidad aumentada asistida con el software educativo GeoGebra 3D en la capacidad de argumentación de afirmaciones sobre relaciones geométricas del aprendizaje de geometría en el espacio en estudiantes del tercer año del Bachillerato General?

¿Puede la Realidad Aumentada asistida con GeoGebra 3D potencializar un aprendizaje significativo de la geometría en el espacio en estudiantes del tercer año del Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa “El Empalme”?

1.4. Justificación de la Investigación.

El desarrollo de las Tecnologías de Información y Comunicación dentro del entorno educativo ofrecen nuevas herramientas, recursos y entornos de trabajo como software aplicados a distintas materias, sin embargo, aún se requiere mucha investigación y estrategias para hacerla una herramienta efectiva para el aprendizaje de los estudiantes, una de las materias que requiere el uso de las TIC es la matemática, es necesario contar con nuevas posibilidades para producir aprendizajes valiosos y significativos haciéndolos más ricos, más atractivos los contenidos para los estudiantes (VILCA PACCO, 2019).

La realidad aumentada (RA) es una tecnología emergente que combina la información física con la información virtual para crear una nueva realidad, esto permite ampliar lo que nuestros sentidos captan permitiendo generar imágenes tridimensionales. Por tal razón se convierte en una gran alternativa de aprendizaje en diferentes áreas del conocimiento, siendo el puente entre el conocimiento teórico y la práctica (LÓPEZ PULIDO, HORMECHEA JIMÉNEZ, GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, & CAMELO QUINTERO, 2019).

El presente proyecto cumple con el requisito de justificación práctica, ya que los resultados que se deriven servirán como insumo para la toma de decisiones por parte de las autoridades y personal académico de la Unidad Educativa "El Empalme" del Cantón El Empalme de la Provincia del Guayas, así como entes gubernamentales como el INEVAL o SITEC. Adicionalmente, tendrá justificación teórica ya que aporta un nuevo conocimiento sobre la implementación de la realidad aumentada por medio del software GeoGebra 3D en el aprendizaje de las matemáticas, específicamente de la geometría en el espacio.

1.5. Objetivos de la Investigación.

1.5.1. Objetivo General.

Aplicar la realidad aumentada asistida con GeoGebra 3D en el aprendizaje de geometría en el espacio con estudiantes de tercer año del bachillerato general unificado de la Unidad Educativa "El Empalme". periodo 2021-2022.

1.5.2. Objetivos Específicos.

a) Determinar el nivel de comprensión de los tópicos de geometría en el espacio, plano, recta, punto y sus interrelaciones.
b) Diseñar una secuencia didáctica para la aplicación de la realidad aumenta con el software GeoGebra 3-D en el aprendizaje del plano, recta, punto y sus interrelaciones.
c) Implementar la secuencia didáctica de la realidad aumenta con el software GeoGebra 3-D en el aprendizaje del plano, recta, punto y sus interrelaciones.
d) Validar el uso de la realidad aumentada con GeoGebra 3-D en el aprendizaje de la geometría en el espacio.

1.6. Hipótesis.

La realidad aumentada asistida con GeoGebra 3D incide en el aprendizaje de geometría en el espacio en estudiantes del tercer año del Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa "El Empalme".

CAPÍTULO II

2. MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes del Problema

En la investigación ‘‘Realidad aumentada, una herramienta para la motivación en el aprendizaje de la Geometría’’ de (OVALLE BARRETO & VÁSQUEZ FONSECA, 2020) concluye dentro de la enseñanza de tecnología la creación de marcas y el conocimiento de la herramienta puede generar en el sujeto mayor creatividad de la mano de la curiosidad y la motivación, que es importante la creatividad del docente en el proceso de enseñanza dado que con actividades adecuadas el niño logra aprendizajes significativos. Si los niños diferencian entre una figura y un cuerpo geométrico, les facilitará la creación y elaboración de objetos de 2 a 3 dimensiones, entender conceptos de espacialidad, y visualizar sus características que los diferencian y los asemejan; además, se logra que el estudiante manifieste motivación a través de características, evidenciadas en la observación participante frente al aprendizaje de geometría con el uso de realidad aumentada, también se comprueba que el estudiante identifica atributos y propiedades de objetos tridimensionales relacionados con elementos de su entorno, por medio de la observación de las figuras y cuerpos geométricos en la realidad aumentada los niños aprenden a través de un estímulo visual directo y pueden desarrollar de manera fácil y dinámica el concepto geométrico espacial, finalmente el estudio concluye que aunque la gestión del docente se debe centrar en el avance de los contenidos, estas actividades pueden contribuir a cambiar la monotonía en la educación y motivar el aprendizaje, para ello se debe implementar este tipo de actividades tecnológicas como la realidad aumentada que funciona como una estrategia motivadora y contribuye a la formación integral del estudiante.

(CHANAGUANO ALTAMIRANO, 2016) en su tesis titulada ‘‘Diseño de realidad aumentada en la enseñanza del dibujo técnico para los estudiantes de primer año de bachillerato de la Unidad Educativa Guayaquil’’ cuyo objetivo fue diseñar una aplicación de realidad aumentada para la enseñanza del dibujo técnico a estudiantes de primer año de bachillerato, entre sus conclusiones finales estableció que el diseño de la realidad aumentada como ayuda en la enseñanza del dibujo técnico, favorece al desarrollo de la creatividad y aumenta las habilidades de visualización espacial que tiene el alumno al momento de realizar el armado de la perspectiva de acuerdo a la temática que el maestro esté abordando, esto se debe a que el estudiante puede interactuar libremente con objetos reales que contienen información digital como lo es la realidad aumentada y esto hace la clase más dinámica e interesante. También determinó que actualmente en el país hay muy pocas aplicaciones realizadas referentes a la realidad aumentada aplicada a la educación y que se puede deducir que la tecnología es un aliado importante para la educación, ya que mediante la implementación de aplicaciones tecnológicas como ayuda a los métodos de enseñanza que imparte el maestro, los estudiantes pueden explorar nuevas formas de aprendizaje.

Para (LÓPEZ PULIDO, HORMECHEA JIMÉNEZ, GONZÁLEZ RODRÍGUEZ, & CAMELO QUINTERO, 2019) en su estudio ‘‘Uso de la Realidad Aumentada como estrategia de aprendizaje para la enseñanza de las Ciencias Naturales’’ concluyen que la inclusión de la Realidad Aumentada (RA) como tecnología emergente, se presenta como un instrumento innovador que permiten adoptar modelos de aprendizaje constructivistas en donde la transmisión del conocimiento se presenta al resolver una situación problemática partiendo de un saber adquirido previamente; y, de esta manera la RA permite visibilizar procesos complejos, que bien por su naturaleza científica, no son fáciles de aprender; los autores de esta construcción son los estudiantes, que en empatía con sus docentes, construyen un pensamiento completo de los diferentes temas dentro de su profesión, elevándolo a un grado superior, esto dado por el vínculo que se tiene entre el conocimiento que trae el docente y la tecnología que es innata en él estudiante, se debe percibir entonces que es ahora cuando el gusto o la percepción del estudiante por lo que se le está enseñando en la asignatura y/o carrera, hace que lo lleve a desarrollar un muy buen trabajo, impulsado primordialmente por el interés y la interactividad que se le vincula en el tema dado, es decir todo lo que permita esa interactividad eficaz y rápida logrará un desarrollo innato en sus responsabilidades, es así como estos requisitos los suple los dispositivos móviles y su forma de ser soporte de teorías, buscador de información e interactividad en tiempo real.

(JARA REINOSO, 2020) en su trabajo de investigación ‘‘Realidad aumentada aplicada a la enseñanza de la física de primero de bachillerato’’ cuyo objetivo planteado fue el de elaborar una propuesta de innovación educativa que mejore las aptitudes y conocimientos de la física en los alumnos de primero de bachillerato mediante la Realidad Aumentada, concluye que la inserción de las nuevas tecnologías en el aprendizaje ha favorecido a la educación, dotándola de un componente motivador que permite a los estudiantes comprometerse en sus procesos cognitivos. La realidad Aumentada como un elemento transversal ha ayudado al estudiante a tener un componente gráfico acercado a la realidad con el cual puede abstraer la información, los conocimientos e interiorizarlos, otorgándoles significados y pertinencia para construir su propio aprendizaje y que a su vez se convierta en significativo y trascendental para la vida del estudiante. El estudio ‘‘El GeoGebra en la enseñanza de la matemática en el Colegio Nacional Andrés Bello’’ (ACARO CALVA, 2021), cuyo objetivo general planteado fue el de diseñar un plan de capacitación para la enseñanza de la matemática mediante la implementación del software GeoGebra, manifiesta que en relación al manejo de los dispositivos como las computadoras y teléfonos inteligentes, asociados a la iniciativa dada por la impartición de clases virtuales en la actualidad en la educación a nivel medio por motivo de la pandemia; se concluye que es parte de la normalidad incorporar nuevas herramientas y estrategias de trabajo en el aula.

(CEVALLOS CHAMBA & HUACHO PAUCAR, 2019) en su trabajo de titulación ‘‘Implementación de GeoGebra para la resolución de problemas de perímetro y área en el décimo B, Unidad Educativa Ricardo Muñoz Chávez’’ planteó como objetivo implementar el software GeoGebra como recurso didáctico para el desarrollo de las destrezas con criterio de desempeño mediante la aplicación de secuencias didácticas para la resolución de problemas relacionados con perímetro y área de figuras planas, entre sus conclusiones manifestaron que el dinamismo del GeoGebra, facilitó la experimentación de los estudiantes para encontrar posibles respuestas y generar conocimiento en el proceso de resolución.

(GUAYTA SAILEMA, 2018) en su proyecto de investigación y desarrollo titulado ‘‘AR-BOOK como estrategia de aprendizaje del razonamiento espacial en educación media’’ concluye y muestra el auge importante que tiene actualmente la realidad aumentada en nuestras vidas, en donde, se ha insertado paulatinamente en entornos que son muy accesibles para muchas personas, como es el caso de las redes sociales, en estos, es donde en la actualidad presentan su mayor expansión, sin embargo, se observó también que aunque existen iniciativas en la implementación pedagógica de la realidad aumentada, está todavía no se encuentra tan expandida, se requiere de más esfuerzos divulgativos e investigativos para lograr sustentar e incorporar esta herramienta en los procesos diarios de aprendizaje en general. Además, manifiesta que el nivel actual real de aprendizaje de razonamiento espacial en la Unidad Educativa Bolívar, es limitado, con los datos con los cuales se cuenta actualmente dificulta ofrecer una valoración real y certera de este dado que la información específica solo se podría limitar a la apreciación de los profesores con respecto al desempeño de sus alumnos en el tema objeto. Sin embargo, una extrapolación de los resultados obtenidos de la última prueba “Ser bachiller” realizada en el país, muestra que los estudiantes en general de la Unidad Educativa Bolívar son poco aceptable.

En el trabajo de investigación titulado ‘‘Realidad aumentada en el proceso de enseñanza – aprendizaje en Química, del primero de Bachillerato General unificado de la Unidad Educativa Juan Montalvo, 2019 – 2020 perteneciente a (GUILLÉN CABAL, 2019) planteó como objetivo principal determinar el aporte de la realidad aumentada en el proceso de enseñanza aprendizaje en Química y concluye principalmente que la realidad aumentada como recurso tecnológico en el proceso de enseñanza – aprendizaje de Química, establece una conexión entre el mundo físico con los contenidos digitales reforzando el aprendizaje basado en el descubrimiento; aporta en la comprensión y desarrollo de la inteligencia espacial; fomenta la apropiación y comprensión de los contenidos científicos abstractos; además, permite que los estudiantes simulen prácticas de laboratorio que en ocasiones pueden ser peligrosas como la manipulación de reacciones químicas. Al docente, le permite integrar materiales interactivos en situaciones, donde la descripción de los objetos y conceptos son complejos de explicar y conllevan más esfuerzo en su aprendizaje.

(CAMPOVERDE CANDO, 2018) en su proyecto educativo ‘‘La realidad aumentada en el aprendizaje significativo en la asignatura ciencias naturales. propuesta. diseño de una aplicación móvil con imágenes de realidad aumentada’’ se plantea como objetivo determinar la incidencia del uso de proyectos de realidad aumentada para el aprendizaje significativo de los estudiantes en la asignatura de Ciencias Naturales con el método científico, por medio de una aplicación móvil con imágenes de realidad aumentada, para fomentar una educación de calidad; y, concluye que la realidad aumentada como herramienta de aprendizaje influye positivamente en el mejoramiento de las metodologías y técnicas de estudio, ya que los estudiantes se sienten atraídos hacia la tecnología, la cual ayuda a tener un mayor grado de atención e interés, viendo la aplicación móvil como algo innovador que permite aprender de manera activa sin recurrir a métodos tradicionales; además, manifiesta que en el transcurso de implementación de la propuesta, se pudo observar que es necesario capacitar al docente para la utilización de este tipo de herramientas digitales, de esta manera poder obtener un mayor grado de productividad al usar la aplicación móvil de realidad aumentada.

(DE LA TORRE, MARTIN DORTA, SAORIN PÉREZ|, CARBONELL CARRERA, & CONTERO GONZÁLEZ, 2013) en su investigación ‘‘Entorno de aprendizaje ubicuo con realidad aumentada y tabletas para estimular la comprensión del espacio tridimensional’’ analizan la adopción de alternativas digitales a modelos físicos mediante las tecnologías de realidad aumentada y las tabletas multitáctiles; y, establecen como objetivo el ofrecer un entorno de aprendizaje ubicuo para estimular la comprensión del espacio tridimensional. Las conclusiones extraídas de la investigación fueron que las dos tecnologías utilizadas como alternativa a los modelos físicos, la realidad aumentada y tabletas digitales, han sido valoradas positivamente por todos los usuarios, con valores medios de 7,10 y 8,00 (sobre 9); evidenciando una preferencia estadísticamente significativa por las tabletas digitales en cuanto a su valoración global. Además, al analizar a cada uno de los colectivos que participaron en el estudio, esta preferencia por las tabletas digitales no se aprecia en los alumnos de 4º de la ESO y en el sector del profesorado, quienes valoran ambas tecnologías digitales de forma similar. Y por último en términos de valoración específica, las tres variables analizadas (mejora de la atención en clase, utilidad y facilidad de uso) obtuvieron valores superiores a 4 (sobre 5), salvo en relación a la facilidad de uso, donde la realidad aumentada obtiene una valoración inferior a 4 (3,66).

2.2. Bases teóricas.

2.2.1. Tecnologías de la Información y comunicación (TIC's).

2.2.1.1. Definición.

Es preciso que antes de definir lo que son las tecnologías de información y comunicación (TIC´s) se analice el concepto de tecnología, información y comunicación; ''La tecnología es un conjunto de conocimientos acerca de técnicas que pueden abarcar tanto el conocimiento en sí como su materialización tangible en un proceso productivo, en un sistema operativo o en la maquinaria y el equipo físico de producción; la información es un conjunto de datos que conforman un mensaje sobre un determinado fenómeno, mientras que la comunicación es el proceso mediante el cual se transmite un mensaje con un propósito específico, a través de un canal determinado y un código reconocido entre emisor y receptor'' (TORRES GARIBAY, 2016). En este sentido para (GUILLÉN CABAL, 2019), ''las tecnologías de información y comunicación son un conjunto de herramientas virtuales (plataformas, redes sociales, blogs, dispositivos móviles) que dinamizan y permiten el intercambio de información entre usuarios que en ocasiones puede requerir de internet'' (p.10).

Las Tecnologías de la Información y Comunicación son un conjunto de elementos compuestos por herramientas, prácticas y técnicas que son utilizados para el tratamiento, procesamiento, almacenamiento y transmisión de datos con la finalidad de estructurarlos en información útil que derive en la solución de problemas y la generación de conocimiento (TORRES GARIBAY, 2016).

Las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC's) es una representación general de la tecnología que va utilizar un hardware, software y telecomunicaciones con todos estos aspectos se logra diseñar, almacenar, intercambiar y distribuir dicha información que se presenta en diferentes formas. Las TIC es un instrumento importante en la construcción de herramientas para el aprendizaje y del desarrollo de habilidades en los individuos (GONZÁLEZ PARRA, 2017).

2.2.1.2. Importancia de las TIC's en la educación.

El uso de las TIC's en la educación en los últimos tiempos es de suma importancia, puesto que, pretenden elevar el nivel de calidad de educación, mejorando las estrategias de enseñanza aprendizaje, captando la atención de los estudiantes e innovando los métodos tradicionales, lo que conlleva a que los alumnos adquieran aprendizajes significativos y desarrollen habilidades y destrezas (GUILLÉN CABAL, 2019).

Las TIC's en el aula proporcionan herramientas útiles, favorecen la interacción en el trabajo colaborativo y también modifican las relaciones dentro del espacio de aprendizaje. Todos los agentes involucrados enfrentan un cambio de paradigma a través del cual asumen nuevos roles. El uso de las TICs tiene un efecto multiplicador en la educación, beneficiando a estudiantes y docentes. Pero también genera incertidumbre, temor y cierta reticencia a sumergirse en un ámbito desconocido (RIZZARDI, y otros, 2019).

En la actualidad, acceder a la información con las capacidades que brindan las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC's) es un gran apoyo para el desarrollo intelectual y cultural de las personas. Varios estudios muestran que diversos aspectos relacionados con el proceso de aprendizaje pueden mejorarse con la ayuda de estas tecnologías siempre que se incorporen al aula para promover cambios en el entorno de aprendizaje.

2.2.1.3. Clasificación de las TIC's.

(GONZÁLEZ PARRA, 2017) detalla que las Tecnologías de la Información y Comunicación pueden ser sensoriales, de despliegue, de análisis, de almacenamiento y de comunicación.

- **TIC's Sensoriales:** Son accesorios que permiten el ingreso de la información a un ordenador (computadora). Mientras tanto la información que es ingresada debe ser necesariamente en digital. Para las TIC sensoriales utilizan dispositivos de entrada como por ejemplo cámara web, scanner, micrófono y teclado. Estos dispositivos captan información con diversas características que pueden ser en movimiento, sonido, distancia, imágenes, etc. (GONZÁLEZ PARRA, 2017).

- **TIC's de despliegue:** Son aquellos que permite mostrar la información digitalizada en un formato conveniente para el receptor de la información. Para enseñar dicha información se realiza a través de los siguientes dispositivos de salida como el monitor, parlantes, impresora. Los dispositivos de salida permiten que la información suele ser presentada en imágenes, texto, sonidos, videos, etc (GONZÁLEZ PARRA, 2017).

- **TIC's de análisis:** Son aquellas que permiten el procesamiento de la información o modificación de la misma, se utiliza un software como procesador de algunos datos, incluso se aplica programas especializados para procesar textos, hojas de cálculo, editar imágenes, etc.

El software que se utilizará en el ordenador (computadora) aparte que ayuda en la modificación también logra calcular y clasificar datos de la información (GONZÁLEZ PARRA, 2017).

- **TIC's de almacenamiento:** Son aquellas que permiten almacenar información en un dispositivo o en el mismo ordenador que se está trabajando. La información puede ser almacenada en un flash memory (USB), disco duro, CD, DVD, tarjeta SD, etc. (GONZÁLEZ PARRA, 2017).

- **TIC's de comunicación:** Este medio consigue transmitir la información y contactar con cualquier persona o institución de diferentes partes del mundo mediante la difusión de información a través del internet como por ejemplo el correo electrónico, los servicios de mensajería inmediata, las videoconferencias, los blogs y las wikis, etc. (GONZÁLEZ PARRA, 2017).

2.2.2. Recursos virtuales.

Son aquellos elementos materiales y tecnológicos que transforman el aula tradicional en un aula innovadora que dispone del Internet y la tecnología a la mano para generar materiales didácticos como plataformas interactivas, realidad virtual, realidad aumentada, juegos electrónicos, búsquedas llamativas, simuladores de laboratorio y procesos biológicos, químicos o físicos. Para ello debe contar con la infraestructura como computadores, pizarras electrónicas, proyectores, materiales y presupuestos adecuados para su generación, al igual que, el mantenimiento adecuado constante (GUILLÉN CABAL, 2019).

2.2.3. Recursos didácticos.

La educación no solo es teoría sino también determina las herramientas para el aprendizaje en el proceso de enseñanza, los mismos que contribuyen a que el estudiante logre dominar el contenido que se está trabajando, pueda poseer mediante la información desarrollando sus habilidades, destrezas, actitudes y valores (SAGÑAY VALENTE, 2017).

2.2.3.1. Funciones de los recursos didácticos.

Según (VARGAS MURILLO, 2017) las funciones que tienen los recursos didácticos deben tomar en cuenta el grupo al que va dirigido, con la finalidad que ese recurso realmente sea de utilidad. Entre las funciones que tienen los recursos didácticos se encuentran: a) proporcionar información, b) cumplir un objetivo, c) guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje, d) contextualizar a los estudiantes, e) factibilizar la comunicación entre docentes y estudiantes, f) acercar las ideas a los sentidos, g) motivar a los estudiantes.

2.2.3.2. Clasificación de los recursos didácticos.

Para (MOYA MARTÍNEZ, 2010) una clasificación de los recursos didácticos podría ser:

a) Textos impresos

- Manual o libro de estudio
- Libros de consulta y/o lectura
- Biblioteca de aula y/o departamento
- Cuaderno de ejercicios
- Impresos varios
- Material específico: prensa, revistas, anuarios.

b) Material audiovisual

- Proyectables
- Videos, películas

c) Tableros didácticos

- Pizarra tradicional

d) Medios informáticos

- Software adecuado
- Medios interactivos
- Multimedia e internet

Los recursos informáticos son medios de comunicación diseñados para interactuar con el usuario, la utilización de estos recursos didácticos supone un gran avance en la didáctica general, son recursos que permiten procesos de aprendizaje autónomos en los que se consolidan los principios del ‘‘aprender a aprender’’, siendo el alumno partícipe directo o guía de su propia formación (MOYA MARTÍNEZ, 2010).

2.2.4. Realidad aumentada (RA).

Consiste en superponer información digital sobre las imágenes reales captadas por una cámara. Esta información añadida puede ser de naturaleza textual, icónica o de cualquier otro tipo, pero siempre permanece solidaria con alguna referencia a la imagen que registra el aparato, ya sea un teléfono inteligente o Smartphone u otro dispositivo fotográfico o de filmación (FOMBONA CADAVIECO & PASCUAL SEVILLANO, 2016)

La realidad aumentada podría definirse como aquella información adicional que se obtiene de la observación de un entorno, captada a través de la cámara de un dispositivo que previamente tiene instalado un software específico. La información adicional identificada como realidad aumentada puede traducirse en diferentes formatos. Puede ser una imagen, un carrusel de imágenes, un archivo de audio, un vídeo o un enlace (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

Por su parte (GUAYTA SAILEMA, 2018) define a la realidad aumentada como la ‘‘tecnología mixta que se encarga de generar percepciones artificiales de carácter mixto, en donde se conjugan elementos de la realidad tangible con información de estos o con otros elementos de interés para el usuario con los cuales puede interactuar’’ (p.10).
En definitiva, se puede definir a la realidad aumentada como una herramienta que ayuda a conectar el mundo físico con el entorno virtual a través de información multimedia, principalmente con modelos 3D en tiempo real; esto significa el requerimiento de un dispositivo móvil para su funcionamiento.

2.2.4.1. Elementos que intervienen en la realidad aumentada.

Los elementos o componentes que intervienen o que son necesarios para acceder al uso de la realidad aumentada son: Dispositivo con cámara, un software y un disparador (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

Dispositivo con cámara:

- PC con webcam
- Ordenador portátil con webcam
- Tablet
- Smartphone
- Wearable con cámara (relojes, gafas, etc.) (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

Un software: Encargado de hacer las transformaciones necesarias para facilitar la información adicional (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

Un disparador: Conocido también como "trigger" o activador de la información:

- Imagen o Entorno físico (paisaje, espacio urbano, medio observado)
- Marcador
- Objeto
- Código QR (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

2.2.4.2. Características y funciones de la realidad aumentada.

Para (RIGUEROS BELLO, 2017) entre las características de la realidad aumentada se pueden mencionar las siguientes:

- Combina objetos reales y virtuales en nuevos ambientes integrados.
- Las señales y su reconstrucción se ejecutan en tiempo real.
- Las aplicaciones son interactivas.
- Los objetos reales y virtuales son registrados y alineados geométricamente entre ellos y dentro del espacio.

Las funciones de la realidad aumentada van más allá de entretener a un público sumergido en la tecnología, pues esta herramienta tecnológica ha permitido diseñar diferentes aplicaciones para solucionar problemas en la educación, medicina, arquitectura, geología y otras disciplinas; es así como, el uso adecuado de este recurso fomenta la capacidad crítica, creativa e innovadora de los usuarios (GUILLÉN CABAL, 2019).

2.2.4.3. Tipos de realidad aumentada.

➢ Realidad aumentada geolocalizada.

La realidad aumentada que se clasifica del tipo "posicionamiento", debe su nombre a que es determinada por activadores, "triggers" o "desencadenantes" de la información que son los sensores que indican el posicionamiento del dispositivo móvil: (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

- **GPS:** Indica la ubicación del dispositivo a través de las coordenadas.

- **Brújula:** Hace referencia a la orientación del dispositivo en la dirección que enfoca la cámara integrada.
- **Acelerómetro:** Identifica la orientación y ángulo del dispositivo al uso.

➢ Realidad aumentada basada en marcadores.

Los marcadores representan el tipo de activador de la información por excelencia en el mundo de la realidad aumentada y podrían englobarse en tres grupos (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

- **Códigos QR:** son un tipo de formas geométricas en blanco y negro que incluyen información del tipo URL, VCard, texto, email, SMS, redes sociales, PDF, MP3 APP stores, imágenes, teléfonos, eventos, wifi y geolocalización. Dentro del propio diseño, algunas aplicaciones que facilitan su creación permiten la inclusión de una imagen o logo en el mismo.
- **Markerless NFT:** los activadores de la información son imágenes u objetos reales.
- **Marcadores:** suelen adoptar formas geométricas en blanco y negro y se enmarcan en un cuadrado. En algunas ocasiones también incluyen siglas o imágenes simples.

2.2.4.4. Niveles de la realidad aumentada.

Son los distintos grados de complejidad que presentan las aplicaciones basadas en realidad aumentada según las tecnologías que implementa; es decir, a mayor nivel de complejidad mayores serán los beneficios y funcionalidades que se obtiene (GUILLÉN CABAL, 2019).

(BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017) clasifica a la realidad aumentada de la siguiente manera:

- **Nivel 0 (enlazado con el mundo físico).** Las aplicaciones hiperenlazan el mundo físico mediante el uso de códigos de barras y 2D (por ejemplo, los códigos QR). Dichos códigos solo sirven como hiperenlaces a otros contenidos, de manera que no existe registro alguno en 3D ni seguimiento de marcadores (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

- **Nivel 1 (RV con marcadores).** Las aplicaciones utilizan marcadores, imágenes en blanco y negro, cuadrangulares y con dibujos esquemáticos, habitualmente para el reconocimiento de patrones 2D. La forma más avanzada de este nivel también permite el reconocimiento de objetos 3D (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

- **Nivel 2 (RV sin marcadores).** Las aplicaciones sustituyen el uso de los marcadores por el GPS y la brújula de los dispositivos móviles para determinar la localización y orientación del usuario y superponer puntos de interés sobre las imágenes del mundo real (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

- **Nivel 3 (Visión aumentada).** Estaría representado por dispositivos como Google Glass, lentes de contacto de alta tecnología u otros que, en el futuro, serán capaces de ofrecer una experiencia completamente contextualizada, inmersiva y personal (BLÁZQUEZ SEVILLA, 2017).

2.2.4.5. La realidad aumentada en la educación.

La realidad aumentada (RA) es una herramienta tecnológica que está abriendo nuevas puertas en el campo educativo, es muy útil ya que se realiza la combinación de la información real con lo virtual mediante un software logrando tener altas expectativas en el campo educativo en la formación del proceso de enseñanza-aprendizaje de los alumnos (GONZÁLEZ PARRA, 2017).

2.2.5. Pedagogía.

La pedagogía es una ciencia la misma que su principal objeto de estudio es la educación, además se encuentra dentro del campo de las Ciencias Sociales y Humanas, la pedagogía se puede apreciar en, en textos académicos y documentos universitarios, la pedagogía abarca las dos ciencias, sociales y humanas, pero se engloba en una categoría universal dentro de las mismas (CHANAGUANO ALTAMIRANO, 2016).

2.2.6. Enseñanza.

(FERNÁNDEZ PUMA, 2019) indica que ‘‘la enseñanza se concibe como un proceso de transmisión de conocimiento, este proceso es mediado por el docente, puesto que es quien debe estimular y sobre todo motivar al estudiante mediante experiencias de aprendizaje, estrategias y recursos que propicien tanto la adquisición de conocimientos como el desarrollo de habilidades que permitan un autoaprendizaje y que toda la información transmitida tenga un significado para él’’ (p.25).

En la pedagogía tradicional, la enseñanza es la tarea central del docente, mediante la cual trasmite a sus alumnos conocimientos particulares y busca el aprendizaje por memorización, a través de un proceso continuo de reproducción de dichos saberes; en la actualidad la enseñanza es entendida como un proceso de ayuda a la construcción que llevan a cabo los discentes (HUERTA, 2020).

En este sentido la enseñanza puede concebirse como un proceso de transferencia de conocimientos, estilos, destrezas o hábitos a una persona que no los posee, para ello se considera un conjunto de componentes como los docentes (facilitadores) y alumnos (objetos del conocimiento) en el contexto donde es desarrollado el proceso de enseñanza.

2.2.7. Aprendizaje.

Se entiende por aprendizaje al proceso a través del cual el ser humano adquiere o modifica sus habilidades, destrezas, conocimientos o conductas, como fruto de la experiencia directa, el estudio, la observación, el razonamiento o la instrucción. Dicho en otras palabras, el aprendizaje es el proceso de formar experiencia y adaptarla para futuras ocasiones: aprender (EQUIPO EDITORIAL, 2021).

(ACOSTA ALAMILLA, 2012) sostuvo que el aprendizaje es un proceso de adquisición de una disposición relativamente duradera para cambiar la percepción o la conducta como resultado de una experiencia.

Proceso de cambio relativamente permanente en el comportamiento de una persona generado por la experiencia (FELDMAN, 2010).

En este sentido el aprendizaje es un proceso de naturaleza constructivista, donde los estudiantes con previo conocimiento adquieren nuevo conocimiento mediante acciones que el docente propone, y lo más importante es que el nuevo conocimiento debe ser significativo.

2.2.8. Enseñanza asistida por ordenador.

La tecnología está inmersa en casi todas nuestras actividades diarias y el campo educativo no es la excepción. En el campo educativo la tecnología ofrece nuevas y mejores formas de que el estudiante aprenda, en las cuales se destacan las TIC´s (FERNÁNDEZ PUMA, 2019).

Por consiguiente, para (RODRÍGUEZ, GAMBOA, RODRÍGUEZ, & DÍAZ, 2016) manifiestan que la enseñanza asistida por ordenador es una “estrategia de Enseñanza- Aprendizaje por la cual interactúan dos o más sujetos para construir aprendizaje, a través de discusión, reflexión y toma de decisión, proceso en el cual los recursos informáticos actúan como mediadores” (p.64).

2.2.8.1. Clasificación de aplicaciones en la enseñanza asistida por ordenador.

La enseñanza asistida por ordenador, permite dar al computador un uso pedagógico y un sentido en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje, esta puede ser aplicada mediante software de simulación, tutoriales y ejercitadores (HUAYTA CATARI, 2015) mencionado por (FERNÁNDEZ PUMA, 2019).

- **Aplicativo de tipo simulador.** Es un software (aplicación) que representa fenómenos del mundo real.
- **Aplicativo de tipo ejercitador**. Es una aplicación que se utiliza para reforzar conocimientos y hechos analizados en una clase expositiva, dicho refuerzo viene dado en forma de ejercicios.
- **Aplicativo de tipo tutorial.** Es un software que se encarga de todo el proceso de Enseñanza-Aprendizaje.

2.2.9. El GeoGebra.

GeoGebra es ‘‘un software matemático interactivo gratuito y de libre acceso, es decir, este programa se puede llevar a cualquier lugar o institución educativa sin problema de licencias y pagos, también los estudiantes pueden utilizarlos en sus casas, para que puedan estudiar por su cuenta o profundizar lo que se ha visto en clase’’ (CALDERÓN ZAMBRANO, 2017).

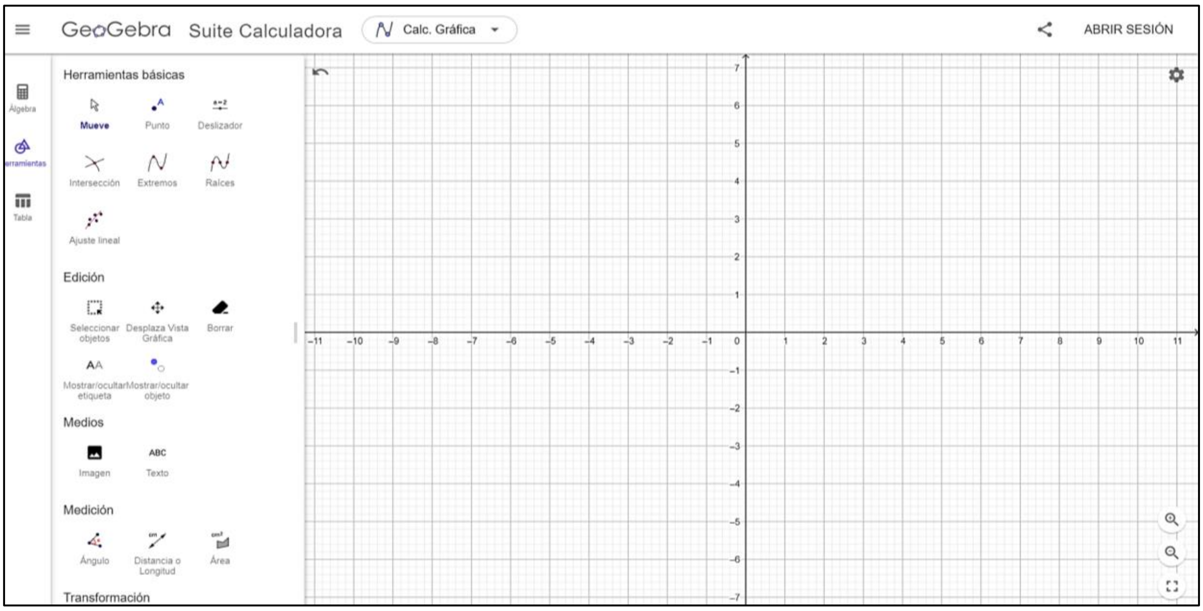


Figura 1-2: Vista preliminar del software GeoGebra para escritorio.
Fuente: https://www.geogebra.org/download

Es un programa de computador infalible de intercambio para ayudar a la educación interactiva que reúne dinámicamente geometría, álgebra y cálculo, es ordenador riguroso y una calculadora algebraica, es decir, un extracto de ciencia con operaciones interactivo (SAGÑAY VALENTE, 2017).

El software GeoGebra es un sistema de Geometría Dinámica. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas y funciones que se pueden modificar dinámicamente, además de utilizar un repertorio de comandos propios del análisis matemático (GARCÍA LÓPEZ & OROZCO MARTÍNEZ, 2019).
Por otra parte, el software GeoGebra ''brinda la posibilidad de variar los problemas de manera que los estudiantes puedan explorar y aprender de manera autónoma, ellos pueden buscar la relación entre las expresiones matemáticas y sus gráficas. Esta herramienta matemática podría estrechar la relación de los alumnos con la matemática'' (CALDERÓN ZAMBRANO, 2017).

En este sentido el software GeoGebra le permite al usuario dibujar estructuras geométricas dinámicas de todo tipo, así como representaciones gráficas, por lo que es útil en temas de geometría analítica como ecuaciones de líneas, círculos, elipses, parábolas y más. Se puede utilizar en los niveles elemental, medio, superior y bachillerato, e incluso puede trabajar con estudiantes con discapacidades motoras, dándoles exposición a los conceptos de geometría. Una forma gratificante para que los niños aprendan, ya que muchas de estas actividades se pueden realizar fácilmente utilizando recursos como reglas, brújulas, bolígrafos de plomo, etcétera, pero si usando los recursos de compilación predeterminados y proporcionados por este software.

De esta manera, el software GeoGebra integra tres tipos de vistas: gráfica, numérica y algebraica, además la vista de hoja de cálculo. Según (AGUILAR HITO, 2015) estas características del GeoGebra "permite apreciar los objetos matemáticos en tres representaciones distintas: gráfica tales como puntos, gráficas de funciones; algebraica, por ejemplo, coordenadas de puntos y ecuaciones; y en formato de celdas como la hoja de cálculo".

Es decir que GeoGebra es una herramienta indispensable y eficaz, que permite a muchos profesores tomar como referencia educativa al momento de dar a conocer un tema específico de Matemática en donde pueden basar sus investigaciones, dándole así un uso extra que ni su propio creador había propuesto antes (GARCÍA LÓPEZ & OROZCO MARTÍNEZ, 2019).

2.2.9.1. El GeoGebra en la Enseñanza-Aprendizaje de la matemática.

Integrar las tecnologías informáticas que sirvan de apoyo como los métodos visuales del análisis matemático, hacen que el proceso de enseñanza-aprendizaje sea más eficiente. De modo que estas tecnologías informáticas permiten poder diferenciar entre la forma tradicional de enseñar la matemática, que principalmente se rige a métodos matemáticos repetitivos.

La integración de GeoGebra en el aula permite dinamizar los contenidos y hacer más atractivo el proceso de enseñanza aprendizaje, ya que se puede representar de manera visual la solución de un determinado problema (FERNÁNDEZ PUMA, 2019). En este sentido el software puede facilitar los procesos de abstracción demostrando como se puede construir una relación entre un modelo geométrico y un modelo algebraico de cualquier situación de la vida real.

2.2.9.2. Consideraciones para aplicar la enseñanza con GeoGebra.

(ARIAS & LEIVA, 2013) manifiestan que para realizar una clase asistida por computadora se deben tener varias consideraciones a la hora de planificar una lección de este tipo, entre las se mencionan:

- Preparar con bastante anticipación la lección: Una lección asistida por computadora requiere mucha planificación, por lo que se recomienda contar con el suficiente tiempo para poner planearla y de ser necesario, tener tiempo para realizar alguna corrección que necesitemos. Una aplicación hecha sin cuidado en un software podría provocar un resultado inverso al que buscamos, ya que podría confundir al estudiante durante su exploración en el software (ARIAS & LEIVA, 2013).

- Realizar una guía de trabajo para el estudiante con las instrucciones a seguir y las preguntas que se desee que el estudiante responda: El objetivo de la guía es justamente la de guiar al estudiante por el camino que lo conducirá a descubrir su conocimiento en donde el docente es un mediador.

- La actividad debe ser lo suficientemente sencilla como para que el estudiante la pueda realizar sin necesidad de tener conocimientos avanzados del GeoGebra: Debemos crear una actividad donde el estudiante no necesite aprender a usar las herramientas de GeoGebra para lograr su conocimiento, sino que la opción más básica como lo es mover y arrastrar, sea más que suficiente (ARIAS & LEIVA, 2013).

- El GeoGebra es un medio, no un fin: Existe una línea muy delgada de los que es enseñar matemática utilizando GeoGebra y lo que es enseñar GeoGebra (error que muchos docentes cometen) (ARIAS & LEIVA, 2013).

- Revisar con anterioridad que la o las computadoras de la institución tengan los programas o herramientas necesarias para utilizar su actividad, así como solicitar permiso al director para realizar la actividad: A veces por falta de una buena planificación puede ocurrir que se nos prohíba o simplemente no tengamos acceso al laboratorio de la institución, por lo que el trabajo que habremos planeado no podrá ser aprovechado. En estos casos, si no se puede utilizar un laboratorio, se podría planificar una lección asistida con GeoGebra con una única computadora y un proyector multimedia (ARIAS & LEIVA, 2013).

- Se debe contar con un plan B: Aunque planeemos de forma adecuada una lección asistida por computadora, eso no significa que todo saldrá como pensamos. Podría pasar que ese día el proyector no funcionó, o se va la luz en la institución o algún otro imprevisto fuera de nuestro control. Por este motivo debemos contar una segunda opción que cubra los contratiempos que puede traer el uso de aparatos electrónicos (ARIAS & LEIVA, 2013).

2.2.9.3. GeoGebra en el trabajo colaborativo.

El software GeoGebra como herramienta tecnológica promueve la actividad colaborativa y constructivista que se basa en la interacción de los distintos equipos de trabajo y el profesor, mediante procesos de aprendizajes internos. El GeoGebra brinda herramientas para el aprendizaje del álgebra, cálculo y la geometría en un contexto de software íntegramente conectado, compacto y de fácil uso (ALDANA TANIGUCHE, 2021).

Aprender juntos es el entorno adecuado para las lecciones de matemáticas. En el caso de las actividades tradicionales de aprendizaje, se deben sustituir por aulas interactivas que ayuden a orientar las tareas. La función principal de la enseñanza no es enseñar, explicar o tratar de 'transferir' conocimientos matemáticos, sino crear situaciones para que los estudiantes los animen a formar las estructuras mentales necesarias (ALDANA TANIGUCHE, 2021). Por esta razón, el software GeoGebra permite tener la excelente oportunidad para aplicar el aprendizaje cooperativo o colaborativo, esto es, enseñanza interactiva a toda el aula de clase o presentaciones individuales y/o grupales de los alumnos de diferentes niveles, y resolver problemas en grupos pequeños.

El GeoGebra impulsa a que los docentes puedan utilizar y evaluar la tecnología en: las investigaciones en matemáticas, visualización de las matemáticas, clases de matemáticas participativas sea de manera presencial o a distancia (virtual); matemáticas y sus prácticas en las diferentes carreras profesionales (ALDANA TANIGUCHE, 2021).

2.2.9.4. Ventajas del uso del GeoGebra.

(HUAYTA CATARI, 2015) manifiesta que entre las principales ventajas del uso del software GeoGebra están:

- GeoGebra es un software muy flexible que es fácil de usar y crea un ambiente de trabajo muy agradable. Los usuarios (estudiantes, profesores, particulares, etc.) pueden crear gráficos de alta calidad que son fáciles de manipular, lo que ayuda a mejorar su rendimiento visual (HUAYTA CATARI, 2015).

- Cuando se trata de funciones, ecuaciones y sistemas de coordenadas, el programa tiene muchas funciones muy útiles, como dibujar tangentes, subproductos, dibujar ecuaciones, diagramas de clase y más (HUAYTA CATARI, 2015).

- Algunos elementos potenciales son los controles deslizantes que le permiten controlar fácilmente las animaciones donde puede rotar triángulos y mover puntos. Usando esta animación puedes definir diferentes características (HUAYTA CATARI, 2015).

- En la ventana de Álgebra puede encontrar los valores propios del objeto construido. Los objetos pueden ser libres ya que se construyen sin depender de otros, dependientes, que son aquellos que parcialmente o totalmente dependen de otros y auxiliares (HUAYTA CATARI, 2015).

2.2.10. *Aprendizaje de la geometría.*

Para (ARAY ANDRADE, PÁRRAGA QUIJANO, & CHUN MOLINA, 2019) la Geometría se caracteriza por presentar una gran adaptabilidad ante el diseño de diversas estrategias. Se trata de una disciplina que acerca al estudiante a vivir la cultura de una forma diferente ya que la propia experiencia del pensar geométricamente presenta características de dominio diferentes a las de otras áreas. El pensamiento geométrico involucra un conocimiento matemático más avanzado, donde quien aprende ha de entrar en contacto con el objeto geométrico que no pertenecen a un espacio físico real sino a un espacio teórico, conceptualizado

‘‘La Geometría modela el espacio que percibimos, es decir, la Geometría es la Matemática del espacio’’. (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

2.2.10.1. Tareas en la enseñanza de la Geometría.

Existen tres tipos de tareas (conceptualización, investigación y demostración) que pueden realizarse dentro del marco del enfoque de resolución de problemas, cuya idea principal radica en el hecho de que los alumnos construyen conocimiento geométrico al resolver problemas (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

- **Tareas de conceptualización.** Como su nombre lo indica, las tareas de conceptualización se refieren a la construcción de conceptos y de relaciones geométricas. Es importante aclarar que no se trata de definir objetos geométricos sino de conceptualizarlos. Por ejemplo, si lo que se desea es que los alumnos construyan el concepto de cuadrilátero no es suficiente, ni deseable, que en principio se dé la definición de cuadrilátero como polígono de cuatro lados y se ilustre dibujando varios cuadriláteros, creyendo que con ello el alumno aprenderá lo que son estas figuras. Es decir, el maestro muestra directamente los contenidos geométricos para que los alumnos observen una realidad sensible o una representación, en el supuesto de que los alumnos son capaces de apropiarse del contenido y de entender su aplicación en otras situaciones. En definitiva, ésta no es la mejor manera para enseñar un contenido geométrico (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

- **Tareas de investigación**. Las actividades o tareas de investigación son aquéllas en las que el alumno indaga acerca de las características, propiedades y relaciones entre objetos geométricos con el propósito de dotarlas de significados. Probablemente es en este tipo de tareas donde se aprecia de mejor manera el enfoque de resolución de problemas en la enseñanza de la Geometría. Un problema se concibe como una situación ante la cual no se cuenta con un proceso de resolución inmediato; si ya se sabe cómo resolverlo, entonces no es un problema. Es decir, podemos plantear a los alumnos problemas para practicar un conocimiento o problemas para construir un conocimiento, estos últimos son los que entran dentro de las tareas de investigación (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

- **Tareas de demostración.** Las actividades de demostración tienden a desarrollar en los alumnos la capacidad para elaborar conjeturas o procedimientos de resolución de un problema que después tendrán que explicar, probar o demostrar a partir de argumentos que puedan convencer a otros de su veracidad. Es en este tipo de actividades donde puede apreciarse la socialización del conocimiento geométrico, ya que desde el enfoque de resolución de problemas se concibe al conocimiento como una construcción social. Las tareas de demostración son esenciales en Geometría y deben estar presentes en la interacción del aula escolar; la construcción de argumentos lógicos es una habilidad que forma parte esencial de la cultura geométrica y es deseable que todos los alumnos la desarrollen (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

2.2.10.2. Habilidades por desarrollar en las clases de Geometría.

(LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019) manifiestan que por medio de las tareas de conceptualización, investigación y demostración que se propongan a los alumnos, las habilidades básicas por desarrollar en las clases de Geometría son: Visuales, de comunicación, de dibujo, lógicas o de razonamiento y de aplicación o transferencia.

- **Habilidades visuales.** En relación con la enseñanza de las Matemáticas, la visualización es una actividad del razonamiento o proceso cognitivo basada en el uso de elementos visuales o espaciales, tanto mentales como físicos, utilizados para resolver problemas o probar propiedades. En este sentido, la Geometría es una disciplina eminentemente visual (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

- **Habilidades de comunicación.** La habilidad de comunicación se refiere a que el alumno sea capaz de interpretar, entender y comunicar información geométrica, ya sea en forma oral, escrita o gráfica, usando símbolos y vocabulario propios de la Geometría. Las habilidades del lenguaje están estrechamente relacionadas con el pensamiento y están presentes en muchos sentidos durante las clases de Matemáticas y de Geometría en particular (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

- **Habilidades de dibujo.** Las habilidades de dibujo están relacionadas con las reproducciones o construcciones gráficas que los alumnos hacen de los objetos geométricos. La reproducción se refiere a la copia de un modelo dado, ya sea del mismo tamaño o a escala, cuya construcción puede realizarse con base en información que se da en forma verbal (oral o escrita) o gráfica (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

- **Habilidades de razonamiento.** Al aprender Matemáticas, los alumnos desarrollan su razonamiento, es decir, aprenden a razonar. Esto es particularmente cierto para el caso de la Geometría, con cuyo estudio pretende desarrollar habilidades de razonamiento como: (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

    - La abstracción de características o propiedades de las relaciones y de los conceptos geométricos.
    - Argumentar.
    - Hacer conjeturas y tratar de justificarlas o demostrarlas.
    - Demostrar la falsedad de una conjetura al plantear un contraejemplo.
    - Seguir una serie de argumentos lógicos.
    - Identificar cuándo un razonamiento no es lógico.
    - Hacer deducciones lógicas.

- **Habilidades de aplicación o transferencia.** Como su nombre lo indica, con las habilidades de aplicación y transferencia se espera que los alumnos sean capaces de aplicar lo aprendido no sólo a otros contextos, al resolver problemas dentro de la misma Geometría, sino también que modelen geométricamente situaciones del mundo físico o de otras disciplinas. Algunos investigadores consideran que la comprensión en Geometría se ha dado sólo si los alumnos son capaces de aplicar el contenido aprendido a problemas nuevos, es decir, a problemas diferentes a los que inicialmente fueron presentados (LÓPEZ ESCUDERO & GARCÍA PEÑA, 2019).

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA DE INVESTIGACIÓN

3.1. Enfoque de investigación.

El enfoque de investigación utilizado en este estudio fue el enfoque cuantitativo, en donde se recolectaron datos para probar la hipótesis respaldada en la medición numérica y análisis estadístico.

3.2. Nivel de investigación.

El nivel de investigación en el presente estudio fue la investigación aplicada.

3.3. Tipo de investigación.

El tipo de investigación que se aplicó en el presente proyecto fue la investigación descriptiva.

3.4. Diseño de la investigación.

El diseño de la investigación fue cuasi experimental, se utilizó un diseño con prueba de conocimiento (pre test y post test). Se trabajó con 2 grupos de estudiantes; la prueba de diagnóstico se la realizó a los dos grupos (A y B), y la prueba final se realizó por separado, un grupo fue de control quienes recibieron sus clases de la manera tradicional (A) y otro grupo (B) fue experimental ya que ellos recibieron sus clases con el software GeoGebra 3D con realidad aumentada.

3.5. Técnica de investigación.

Las técnicas de investigación utilizadas fueron:

- Recopilación de información
- Observación
- Cuestionarios
- Análisis
- Pruebas

3.6. Población y muestra.

3.6.1. Población.

La población de estudio del presente proyecto fueron los estudiantes del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa “El Empalme” del cantón El Empalme, provincia del Guayas, un total de 42 estudiantes pertenecientes a los paralelos A y B con 21 estudiantes cada uno.

3.6.2. Muestra.

La muestra para el presente estudio estuvo constituida por el 100% de la población.

3.7. Procedimiento.

El procedimiento realizado en el presente estudio fue el siguiente:

- Para determinar el nivel de comprensión de los tópicos de geometría en el espacio, plano, recta, punto y sus interrelaciones en la población de estudio se realizó una prueba de diagnóstico de los aprendizajes al grupo de estudio. (Anexo 1)

- El diseño de la secuencia didáctica para la aplicación de la realidad aumentada con el software GeoGebra 3D, se consiguió mediante la revisión bibliográfica y comparativa. Se analizó la información recopilada para la construcción de un referente pedagógico-didáctico que sirvió como fundamento de las actividades de aprendizaje propuestas.

- La implementación de la secuencia didáctica como estrategia para mejorar el aprendizaje de la geometría en el espacio y debido a las restricciones de la pandemia del COVID 19 se realizó a través de la exposición y explicación del uso de la herramienta del GeoGebra 3D con realidad aumentada en las clases virtuales con la población de estudio.

- La validación del nivel de logros de aprendizajes significativos y destrezas alcanzadas por los estudiantes de Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa “El Empalme” se realizó mediante la comparación de las evaluaciones cualitativas y cuantitativas, además de la aplicación de una prueba final de aprendizajes (Anexo 2) a los dos grupos de estudio, en donde el grupo A se consideró como grupo de control y el grupo B se consideró como el experimental para la aplicación de prueba final.

3.8. Descripción de la secuencia didáctica propuesta.

La aplicación de la secuencia didáctica consideró el aprovechamiento del recurso visual aportado por medio del software GeoGebra 3D con realidad aumentada, y de esta manera el estudiante desarrolle aprendizajes significativos a partir de la identificación y análisis de nociones básicas de la geometría en el espacio tales como: punto, recta, plano y sus interrelaciones.

La implementación de la secuencia didáctica propuesta tuvo como objetivo principal promover la adquisición de aprendizajes significativos en el proceso de enseñanza - aprendizaje de los estudiantes que cursan el Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa “El Empalme”, mediante el apoyo del uso del software GeoGebra 3D con realidad aumentada.

CAPÍTULO IV

4. RESULTADOS.

4.1. Nivel de comprensión de los tópicos de geometría en el espacio punto, recta, plano y sus interrelaciones.

4.1.1. Resultados de la evaluación de diagnóstico del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa ''El Empalme'', grupo A.

Tabla 1-4: Resultados de la evaluación de diagnóstico grupo A.

Código Estudiante	Calificación Obtenida
01	6.15
02	5.38
03	4.62
04	3.85
05	4.62
06	5.38
07	4.62
08	5.38
09	5.38
10	6.92
11	1.54
12	7.69
13	6.92
14	4.62
15	4.62
16	4.62
17	5.38
18	6.92
19	4.62
20	6.92
21	4.62
Promedio	**5.27**
Calificación Máxima	**7.69**
Calificación Mínima	**1.54**
Desviación Estándar	**1.36**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

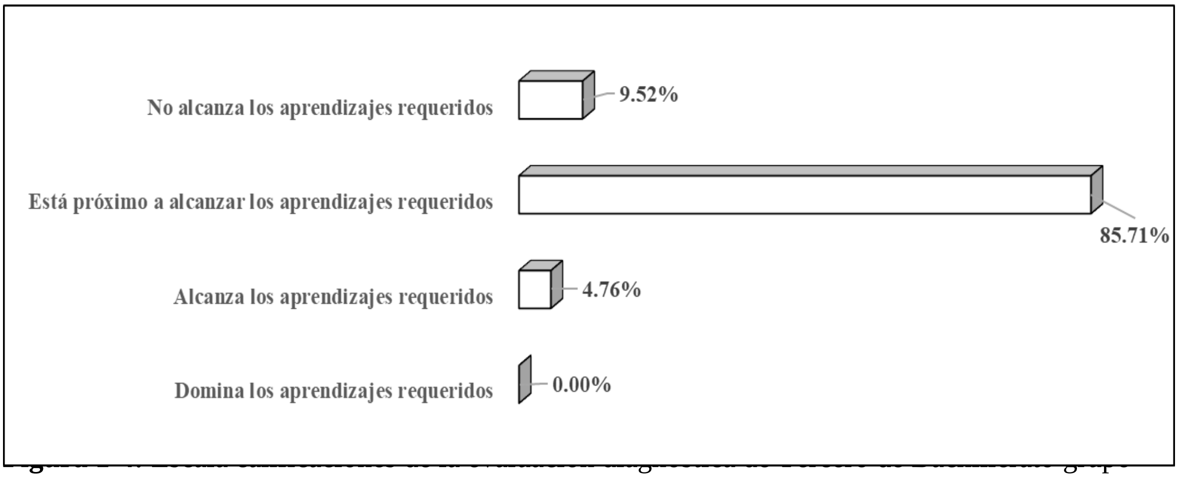
La calificación promedio alcanzada por los estudiantes de Tercero de Bachillerato del grupo A en la prueba de diagnóstico fue de 5,27 puntos, lo que significa que este promedio alcanzado está debajo de los 7 puntos, calificación que es considerada como mínima por el Ministerio de Educación. Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes de la población de estudio alcanzaron aproximadamente un 53% la consecución de las destrezas con criterio de desempeño para la geometría en el espacio.

También se puede indicar que existió una diferencia de 6.15 puntos entre el estudiante que alcanzó la calificación máxima con el estudiante que alcanzó la calificación mínima.

Tabla 2-4: Escala de calificaciones de la evaluación diagnóstica de Tercero de Bachillerato grupo A.

Escala Cualitativa	Escala Cuantitativa	Número de estudiantes	Porcentaje
Domina los aprendizajes requeridos	9,00 – 10,00	0	0,00 %
Alcanzó el aprendizaje requerido	7,00 – 8,99	1	4,76 %
Próximo a alcanzar el aprendizaje requerido	4,01 – 6,99	18	85,71 %
No alcanzó el aprendizaje requerido	≤ 4	2	9,52 %
	Total	**21**	**100 %**

Realizado por: López, Jaime, 2022.



A.

Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la evaluación de diagnóstico, un estudiante (4.76%) de Tercero de Bachillerato grupo A alcanzó los aprendizajes requeridos y está dentro del intervalo 7,00 – 8,99 puntos. De acuerdo a lo establecido por el Ministerio de Educación los estudiantes deben tener calificaciones que sean iguales o mayores a 7 puntos, es decir están prestos para estudiar otros temas de matemáticas. El 95.24% de estudiantes del curso mostraron ciertas dificultades de aprendizaje, según se aprecia en la Tabla 2-4 y Figura 1-4.

4.1.2. Resultados de la evaluación de diagnóstico del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa ‘‘El Empalme’’, grupo B.

Tabla 3-4: Resultados de la evaluación de diagnóstico grupo B.

Código Estudiante	Calificación Obtenida
1	3.85
2	5.38
3	4.62
4	3.85
5	6.15
6	7.69
7	3.85
8	5.38
9	6.92
10	4.62
11	7.69
12	5.38
13	6.92
14	2.31
15	4.62
16	4.62
17	6.92
18	3.08
19	7.69
20	5.38
21	4.62
Promedio	**5.31**
Calificación Máxima	**7.69**
Calificación Mínima	**2.31**
Desviación Estándar	**1.56**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

La calificación promedio alcanzada por los estudiantes de Tercero de Bachillerato del grupo B en la prueba de diagnóstico fue de 5,31 puntos, lo que significa que este promedio alcanzado está debajo de los 7 puntos, de la misma manera esta calificación es considerada como mínima por el Ministerio de Educación. Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes de la población de estudio también alcanzaron aproximadamente un 53% la consecución de las destrezas con criterio de desempeño para la geometría en el espacio.

También se puede indicar que existió una diferencia de 5.38 puntos entre el estudiante que alcanzó la calificación máxima con el estudiante que alcanzó la calificación mínima.

Tabla 4-4: Escala de calificaciones de la evaluación diagnóstica de Tercero de Bachillerato grupo B.

Escala Cualitativa	Escala Cuantitativa	Número de estudiantes	Porcentaje
Domina los aprendizajes requeridos	9,00 – 10,00	0	0,00 %
Alcanzó el aprendizaje requerido	7,00 – 8,99	3	14,29 %
Próximo a alcanzar el aprendizaje requerido	4,01 – 6,99	13	61,90 %
No alcanzó el aprendizaje requerido	≤ 4	5	23,81 %
	Total	**21**	**100 %**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

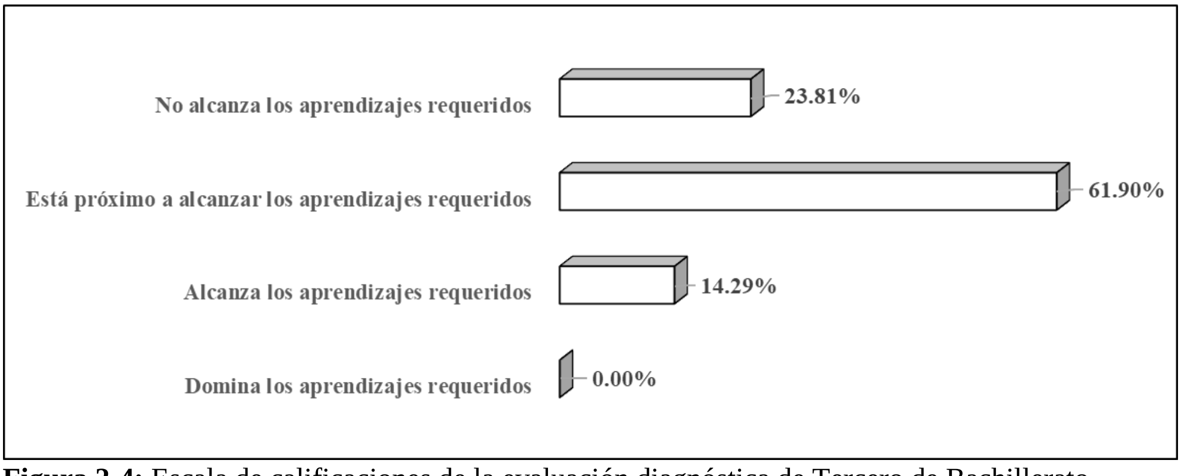


Figura 2-4: Escala de calificaciones de la evaluación diagnóstica de Tercero de Bachillerato grupo B.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la evaluación de diagnóstico, tres estudiantes (14.30%) de Tercero de Bachillerato grupo B alcanzaron los aprendizajes requeridos y está dentro del intervalo 7,00 – 8,99 puntos. De acuerdo a lo establecido por el Ministerio de Educación los estudiantes deben tener calificaciones que sean iguales o mayores a 7 puntos, es decir están prestos para estudiar otros temas de matemáticas. El 85.71% de los estudiantes del curso no superaron la calificación de 7 puntos; los motivos pudieron ser varios como restricciones tecnológicas, dificultades de aprendizaje, entre otros, según se aprecia en la Tabla 4-4 y Figura 2-4.

4.1.3. Comparación de los resultados de la evaluación de diagnóstico del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa ''El Empalme'', grupo A y B.

Tabla 5-4: Comparación de resultados evaluación diagnóstica grupo A y B.

Código Estudiante	**Grupo A**	**Grupo B**
	Calificación Obtenida	**Calificación Obtenida**
01	6.15	3.85
02	5.38	5.38
03	4.62	4.62
04	3.85	3.85
05	4.62	6.15
06	5.38	7.69
07	4.62	3.85
08	5.38	5.38
09	5.38	6.92
10	6.92	4.62
11	1.54	7.69
12	7.69	5.38
13	6.92	6.92
14	4.62	2.31
15	4.62	4.62
16	4.62	4.62
17	5.38	6.92
18	6.92	3.08
19	4.62	7.69
20	6.92	5.38
21	4.62	4.62
Promedio	**5.27**	**5.31**
Calificación Máxima	**7.69**	**7.69**
Calificación Mínima	**1.54**	**2.31**
Desviación Estándar	**1.36**	**1.56**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

La comparación de los resultados obtenidos en la evaluación de diagnóstico realizada a los dos grupos (A y B), con respecto al promedio en las calificaciones, el grupo B obtuvo un mayor promedio en relación al obtenido por el grupo A, se aprecia que respecto a la calificación mayor obtenida en la evaluación en los dos grupos se obtuvo 7.69. La desviación estándar según se aprecia en la Tabla 5-4 y la Figura 3-4 del grupo B es muy parecida.

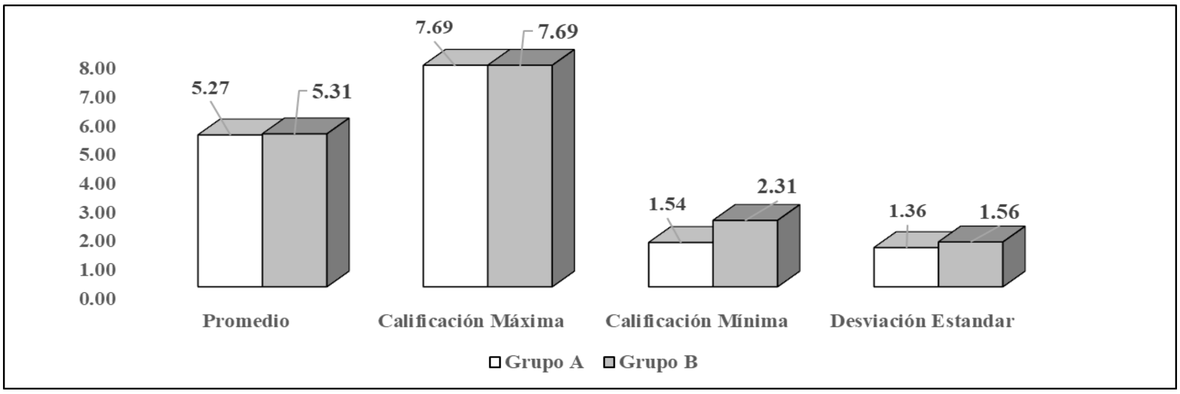


Figura 3-4: Comparación de resultados evaluación diagnóstica grupo A y B.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

Tabla 6-4: Comparación de resultados evaluación diagnóstica grupo A y B en escalas cualitativas.

Escala Cualitativa	Escala Cuantitativa	Grupo A		Grupo B	
		Número de estudiantes	**Porcentaje**	**Número de estudiantes**	**Porcentaje**
Domina los aprendizajes requeridos	9,00 – 10,00	0	0.00%	0	0.00%
Alcanzó el aprendizaje requerido	7,00 – 8,99	1	4.76%	3	14.29%
Próximo a alcanzar el aprendizaje requerido	4,01 – 6,99	18	85.71%	13	61.90%
No alcanzó el aprendizaje requerido	≤ 4	2	9.52%	5	23.81%
Total		**21**	**100.00%**	**21**	**100.00%**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la escala cualitativa en la evaluación diagnóstica solo un estudiante (4.76%) del grupo A y tres estudiantes (14.29%) del grupo B alcanzaron los aprendizajes requeridos, ninguno de los estudiantes domina los aprendizajes, en este sentido 20 estudiantes (95.24%) del grupo A y 18 estudiantes (85.71%) el grupo B están próximos y no alcanzan los aprendizajes requeridos, según se aprecia en la Tabla 6-4 y Figura 4-4.

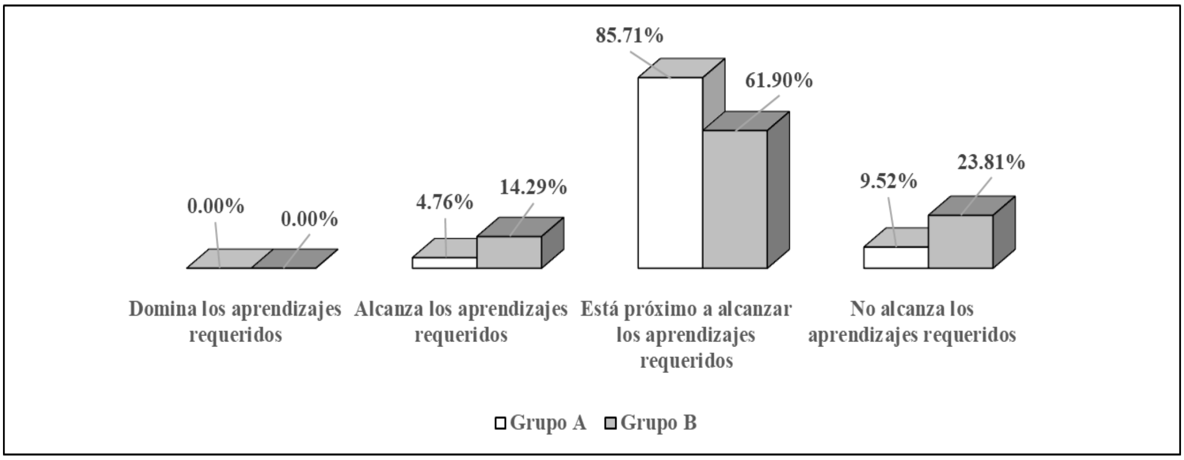


Figura 4-4: Comparación de resultados evaluación diagnóstica grupo A y B en escalas cualitativas.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

4.2. Secuencias didácticas para la aplicación de la realidad aumentada con el software GeoGebra 3D en el aprendizaje del punto, recta, plano y sus interrelaciones.

Para la construcción de las secuencias didácticas se elaboran actividades para el empleo de la realidad aumentada con el software GeoGebra 3D y así facilitar la comprensión de la geometría en el espacio. En la actualidad el uso de los recursos tecnológicos juega un papel importante, ya que en las últimas décadas la tecnología ha avanzado a pasos agigantados. En este sentido en la elaboración de secuencias didácticas hay que considerar todos los parámetros estipulados en el currículo del Ministerio de Educación para Tercero de Bachillerato como son los objetivos de aprendizaje, los indicadores de evaluación, conocimientos previos, las habilidades, y los contenidos, de acuerdo a esto se elaboraron las clases, que en total fueron tres.

Los siguientes objetivos de aprendizaje correspondientes al contenido de geometría en el espacio se encuentran en el programa de estudio de tercero de bachillerato, son los que se utilizaron en el diseño de las secuencias didácticas; haciendo uso de dispositivos electrónicos con sistemas operativos compatibles con el GeoGebra 3D con realidad aumentada(smartphones), que ayudan a desarrollar una comprensión más profunda del tema de la geometría en el espacio y la resolución de problemas de aplicación en otros campos.

Tabla 7-4: Objetivos de aprendizaje, criterios de desempeño e indicadores de evaluación.

Objetivo General del Área de Matemáticas	Destrezas con criterios de desempeño	Indicador de Evaluación
OGM 6. Desarrollar una actitud curiosa y creativa en el uso de herramientas	**M.5.2.20**. Desde un punto en un segmento de línea y un vector de dirección, o desde dos puntos en un	**I.M.5.7.1.** Realizar operaciones analíticas,

matemáticas y demostrar orden, perseverancia y habilidades de investigación para enfrentar y resolver problemas del mundo real en el país.	segmento de línea, escriba y defina las ecuaciones vectoriales y paramétricas del segmento de línea y graficarlas con R^3. **M.5.2.21.** Encuentre la ecuación del vector plano de un punto en el plano y dos vectores de dirección; desde tres puntos en el plano; líneas y puntos en el plano. **M.5.2.22.** Encuentra la ecuación de la recta que forma la intersección de dos planos que es la solución del sistema de ecuaciones representado por la ecuación del plano. **M.5.2.23.** Determine si dos planos son equivalentes (si no hubiese solución) o perpendiculares (si el plano de referencia es perpendicular) para resolver aplicaciones de geometría en R^3 que involucran entornos reales más grandes (por ejemplo, 3D), aumentando su poder computacional para interpretar el mundo.	geométricas y gráficas sobre vectores, líneas y planos en el espacio; presentar ecuaciones de línea en términos de parámetros y vectores; encontrar una ecuación por la cual tres puntos o dos planos se intersecan y determinar su ortogonalidad para hacer aplicaciones de geometría.

Fuente: Currículo priorizado Ministerio de Educación.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

4.2.1. Secuencias didácticas sin uso del GeoGebra 3D con realidad aumentada.

Tabla 8-4: Secuencia didáctica 1 sin uso del GeoGebra 3D con realidad aumentada.

SECUENCIA DIDÁCTICA 1 SIN USO DEL GEOGEBRA 3D CON REALIDAD AUMENTADA	
Área:	Matemática
Tema:	Rectas en el espacio
Curso:	Tercero de Bachillerato
Objetivo Educativo	Desarrollar una actitud curiosa y creativa en el uso de herramientas matemáticas y demostrar orden, perseverancia y habilidades de investigación para enfrentar y resolver problemas del mundo real en el país
Destreza con criterio de desempeño	Desde un punto en un segmento de línea y un vector de dirección, o desde dos puntos en un segmento de línea, escriba y defina las ecuaciones vectoriales y paramétricas del segmento de línea y graficarlas con R^3.

Anticipación:

La dirección de un segmento de línea se puede determinar mediante un vector de dirección o mediante dos puntos. La línea se define entonces por un punto y un vector de dirección, o por dos puntos.

Construcción:

Al igual que en los aviones, se necesita un punto y una dirección para definir una línea en el espacio. Cualquier vector en la misma dirección que un segmento de línea es un vector que representa la dirección del segmento de línea.

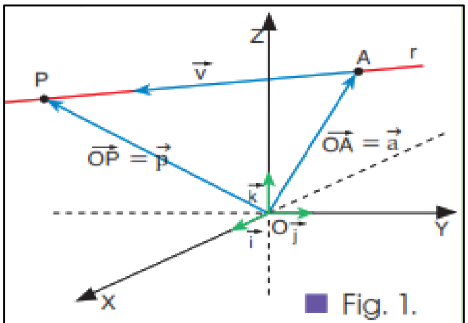


Fig. 1.

Si A = (-1, 1, 3)
y v = (3, -2, 1)

¿Qué es la ecuación vectorial de la recta? Recordar que la definición matemática de una recta es un conjunto de puntos consecutivos que están representados en la misma dirección sin curvas ni ángulos.

En este sentido, la ecuación vectorial de la recta es una manera de expresar matemáticamente cualquier recta; y, para ello, solo es necesario un punto que pertenezca a la recta y el vector director de la recta.

Ecuación vectorial de r $(A;\vec{v})$:

$$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + k\,(3, -2, 1)$$

¿Cuál es la ecuación Paramétrica de la recta? Resultado de imagen para ecuación paramétrica de la recta r3. La ecuación paramétrica de la recta es un número real que nos permitirá conocer cualquier coordenada de la recta según el valor que se le asigne.

Consolidación:

- **Actividad de desarrollo 1.**

Propuesta la recta $r\ (A;\ \vec{v})$, con $A = (2, -1, 4)$ y $\vec{v} = (1, 0, -2)$ determinar:

a. La ecuación vectorial.

b. Dos puntos de r diferentes de A y el vector director distinto de $\vec{v}$.

Resolución:

a. Su igualdad vectorial es $\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v} : (x, y, z) = (2, -1, 4) + k(1, 0, -2)$

b. A **k s**e da dos valores diferentes de cero para la obtención de dos puntos, **B** y **C**, de **r**:

$$k = 1 \rightarrow B = (2, -1, 4) + 1(1, 0, -2) = (3, -1, 2)$$
$$k = 2 \rightarrow C = (2, -1, 4) + 2(1, 0, -2) = (4, -1, 0)$$

Todo vector representado como $k\vec{v}$ es un vector director de **r.,** por ejemplo:

$u = 2 . (1, 01 - 2) = (2, 0, -4)$.

- **Actividad de cierre**

a) ¿Sólo la dirección puede definir una recta?
b) ¿A un solo punto concurren una infinidad de rectas?
c) ¿Pueden dos vectores linealmente independientes coincidir en una recta?
d) ¿Porque es necesario un punto de la recta para poder graficarla?

Heteroevaluación:

- **Explique** qué tienen en común dos diferentes vectores directores en una misma recta.
- **Explique** si $(x, y, z) = (2, -7, 1) + k\ (2, 3, -2)$representa la ecuación vectorial de la recta **r**, establecer:
  - **a)** Los dos puntos en **r**
  - **b)** La nueva ecuación vectorial
- **Represente** la recta con el vector director $\vec{v} = (3, -1, 4)$ que pasa por el punto $A = (-1, 2, 3)$.
- **Escribe** la ecuación paramétrica de una recta que pasa por un punto $A = (7, 2, -3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (1, 0, -2)$.
- **Propuestos** los puntos $A = (2, 1, 4)$ y $B = (3, -1, 2)$, escribir la ecuación paramétrica y continua de una recta que pasa por los puntos A y B, e investigar si el punto $C = (1, 3, 7)$ pertenece a esa recta.

Recursos:

- Pizarra gráfica
- Texto de Matemáticas para bachillerato

Elaborado por:	**Revisado y aprobado por:**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Tabla 9-4: Secuencia didáctica 2 sin uso del GeoGebra 3D con realidad aumentada.

espoch Instituto de Posgrado y Educación Continua	**SECUENCIA DIDÁCTICA 2 SIN USO DEL GEOGEBRA 3D CON REALIDAD AUMENTADA**	"EL EMPALME"

Área:	Matemática
Tema:	Planos en el espacio
Curso:	Tercero de Bachillerato
Objetivo Educativo	Desarrollar una actitud curiosa y creativa en el uso de herramientas matemáticas y demostrar orden, perseverancia y habilidades de investigación para enfrentar y resolver problemas del mundo real en el país
Destreza con criterio de desempeño	Desde un punto en un segmento de línea y un vector de dirección, o desde dos puntos en un segmento de línea, escriba y defina las ecuaciones vectoriales y paramétricas del segmento de línea y graficarlas con R^3.

Anticipación:

Para delimitar cualquier plano en el espacio, se necesita un punto y dos direcciones distintas. Estas direcciones se delimitan por dos vectores no paralelos conocidos también como vectores de dirección.

Construcción:

- **Ecuación vectorial del plano**

Es una ecuación que permite expresar matemáticamente cualquier plano. Para hallar la ecuación vectorial de un plano solo se necesita un punto y dos vectores linealmente independientes que pertenezcan a dicho plano.

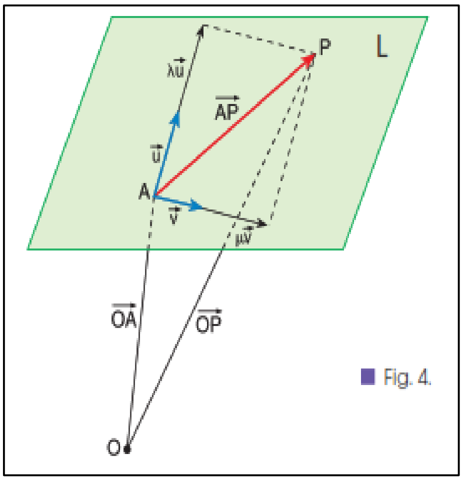


Fig. 4.

Propuesto un punto genérico **P** del plano, el vector $\overrightarrow{AP}$ se obtiene sumando los múltiplos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por tal razón: $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u}$ con λ y μ € ℝ.

De esta manera, se cumple:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Si $\vec{p}$ y $\vec{a}$ son los vectores posición de P y A, correspondientemente. Ya que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, a la igualdad anterior se la puede detallar como:

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

- **Ecuación paramétrica en el plano**

Son ecuaciones que permiten expresar matemáticamente cualquier plano. Para hallar las ecuaciones paramétricas de un plano solo se necesita un punto y dos vectores linealmente independientes que pertenezcan a ese plano.

Desarrollar la ecuación vectorial del plano L expresada en los siguientes elementos:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + u(v_1, v_2, v_3) =$$
$$= (a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1, a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2, \qquad a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

Cuando se tiene que separar los tres elementos de la ecuación vectorial, se obtiene:

$$x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$$
$$x = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$$
$$x = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

Estas ecuaciones pueden denominarse **ecuaciones paramétricas** del plano.

- Ecuación general del plano

Para cada punto del plano, a las tres ecuaciones paramétricas se las puede considerar como un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, λ y μ, la cual debe tener una sola solución.

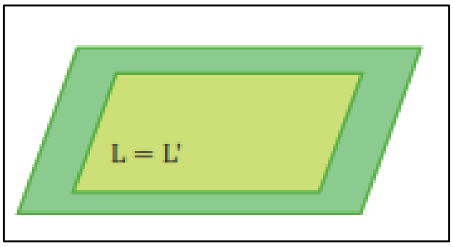
$$\left.\begin{aligned} x - a_1 &= \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y - a_2 &= \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z - a_3 &= \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned}\right\}$$

Para ello, el sistema debe cumplir con la definición; con esto en mente, en el momento de hacer el cálculo y solucionar el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$(u_2\, v_3 - u_3\, v_3)x + (u_3\, v_1 - u_1\, v_3)y + (u_1\, v_2 - u_2\, v_1)z + [-a_1(u_2\, v_3 - u_3\, v_2) - a_2(u_3\, v_1 - u_1\, v_3) - a_3(u_1\, v_2 - u_2\, v_1)]$$

Si A, B y C son los coeficientes respectivos de x, y, z y D se le llama al término independiente, se obtiene la siguiente ecuación lineal:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



- Posición relativa de dos planos

Sistema consistente indeterminado: las soluciones se basan en dos parámetros. Equivalente a:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Dichos planos son **coincidentes.** Así, por ejemplo, los planos L y L':

$L: 0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}4z + 2{,}4 = 0$
$L': 3x - y - 2z + 12 = 0$

Son planos **coincidentes**, puesto que:

$$\frac{0{,}6}{3} = \frac{-0{,}2}{-1} = \frac{-0{,}4}{-2} = \frac{2{,}4}{12}$$

Sistema inconsistente: sin puntos en común. Equivale a:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

Los planos son **paralelos.** Así, por ejemplo, los planos L y L':

$L: 2x + 3y - z + 1 = 0$
$L': 4x + 6y - 2z + 7 = 0$

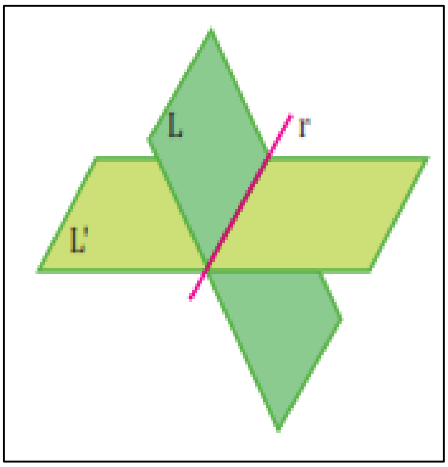
Son planos **paralelos**, puesto que:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{7}$$

Sistema consistente determinado: Las soluciones se basan en un parámetro. Equivale a:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'};\ o\ \frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'};\ o\ \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Los planos son **secantes,** es decir, **se cortan** en una recta**.** Así, por ejemplo, los planos L y L':



$L: 2x - y + 3z + 1 = 0$
$L': x + y + 5z + 4 = 0$

Son planos **secantes**, puesto que:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{5}$$

Consolidación:

- **Actividad de desarrollo 2.**

Dado un plano $\pi\ (A; \vec{u}\ \vec{v})$, con $A = (3, 0, -1)$, $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 0)$; determine:

a. La ecuación vectorial.

b. Los dos puntos de π diferentes de A

c. Los diferentes vectores directores de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d. La expresión de la ecuación vectorial nueva.

Resolución:

a. Su ecuación vectorial es $(x, y, z) = (3, 0, -1) + \lambda(1, 2, -3) + \mu(-2, 3, 0)$

b. Se coloca distintos valores a **λ** y **μ** para la obtención de los otros puntos:

Si, $\lambda = 1$ y $\mu = 0$: $B = (3, 0, -1) + 1(1, 2, -3) + 0(-2, 3, 0) = (4, 2, -4)$

Si, $\lambda = 1$ y $\mu = 1$: $C = (3, 0, -1) + 1(1, 2, -3) + 1(-2, 3, 0) = (2, 5, -4)$

c. Se obtienen dos vectores directores del plano a partir de A, B y C

$\overrightarrow{AB} = (2 - 4, 5 - 2, 4 - (-4)) = (-2, 3, 0) = \vec{u}'$

$\overrightarrow{AC} = (2 - 3, 5 - 0, -4 - (-1)) = (-1, 5, -3) = \vec{v}'$

d. Como los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ son linealmente independientes, se puede utilizar para escribir otra ecuación vectorial. As´, para B = (4, 2, -4):

(x, y, z) $= (4, 2, -4) + \lambda(-2, 3, 0) + \mu(-1, 5, -3)$

- Actividad de cierre

a) ¿Si un plano que es perpendicular a un segundo y a un tercero se puede concluir que los dos últimos también son perpendiculares?

b) ¿La intersección de dos planos se da únicamente entre planos perpendiculares?

c) ¿Tres puntos pueden definir un plano?

d) ¿Dos vectores y un punto pueden definir un vector?

<table>
<tr><td colspan="2">

Heteroevaluación:

- **Estudiar** la posición relativa de los pares de planos siguientes.

a. $\pi: 3x - y + 2z = 0$
$\pi': 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

b. $\pi: 2x - y + 3z + 4 = 0$
$\pi': x + 3y - 2z + 1 = 0$

c. $\pi: 5x - 2y + 3z = 0$
$\pi': 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

d. $\pi: z + 1 = 0$
$\pi': z = 0$

</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Recursos:

- Pizarra gráfica
- Texto de Matemáticas para bachillerato

</td></tr>
<tr><td>Elaborado por:</td><td>Revisado y aprobado por:</td></tr>
</table>

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Tabla 10-4: Secuencia didáctica 3 sin uso del GeoGebra 3D con realidad aumentada.

<table>
<tr><td></td><td>SECUENCIA DIDÁCTICA 3 SIN USO DEL GEOGEBRA 3D CON REALIDAD AUMENTADA</td><td></td></tr>
<tr><td>Área:</td><td colspan="2">Matemática</td></tr>
<tr><td>Tema:</td><td colspan="2">Interrelaciones del plano y la recta</td></tr>
<tr><td>Curso:</td><td colspan="2">Tercero de Bachillerato</td></tr>
<tr><td>Objetivo Educativo</td><td colspan="2">Desarrollar una actitud curiosa y creativa en el uso de herramientas matemáticas y demostrar orden, perseverancia y habilidades de investigación para enfrentar y resolver problemas del mundo real en el país</td></tr>
<tr><td>Destrezas con criterio de desempeño</td><td colspan="2">Desde un punto en un segmento de línea y un vector de dirección, o desde dos puntos en un segmento de línea, escriba y defina las ecuaciones vectoriales y paramétricas del segmento de línea y graficarlas con R^3.</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Anticipación:

Es necesario saber representar la recta paramétrica y vectorialmente. Además, conocer las representaciones del plano.

</td></tr>
<tr><td colspan="3">

Construcción:

- **Ubicación relativa del plano y la recta.**

Para establecer las ubicaciones relativas de una recta $r(A'; \vec{v})$ y un plano $L(P; \vec{u}, \vec{v})$, se manifiesta la recta a través de sus ecuaciones implícitas, y el plano, a través de su ecuación general.

</td></tr>
</table>

$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases} \qquad L: Ax + By + Cz + D = 0$$

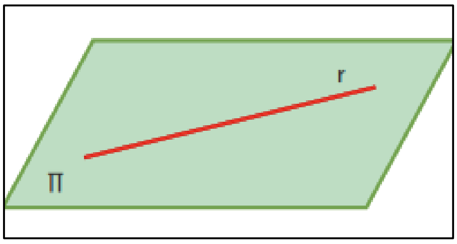
Posteriormente, se considera el sistema construido por las tres ecuaciones y se redacta la matriz **M** y la matriz $\boldsymbol{M'}$, que se asocian a dicho sistema:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right)$$

Reduciendo las matrices:

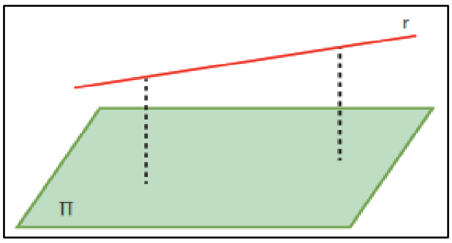
M posee dos filas no nulas
M' posee dos filas no nulas

Se obtiene un **sistema consistente indeterminado:** Las soluciones se derivan de un parámetro. La recta está **contenida** en el plano.



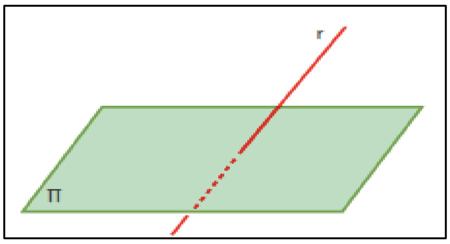
M posee dos filas no nulas
M' posee tres filas no nulas

Se obtiene un **sistema inconsistente:** No existe puntos en común. El plano y la recta son **paralelos**.



M posee tres filas no nulas
M' posee tres filas no nulas

Se consigue un **sistema consistente determinado:** El plano y la recta son **secantes**.

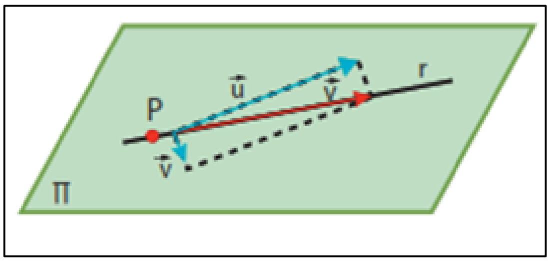


Cuando se infieren rectas y planos a partir de sus vectores o ecuaciones paramétricas, sus posiciones relativas se pueden determinar fácilmente a partir de sus vectores directores.

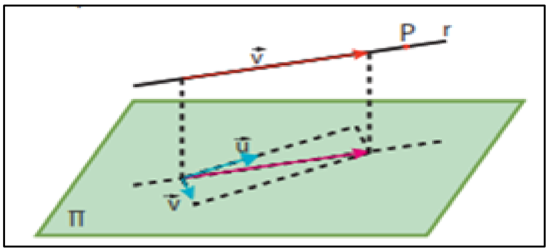
Recta contenida en el plano – recta y plano paralelo:

Una recta se encuentra en un plano o es paralela a él si sus vectores directores son la suma de múltiplos de los vectores directores en el plano. En este sentido, el rango de la matriz formada por las componentes de los tres vectores será 2. Para distinguir cada caso basta con tomar cualquier punto de la recta y sustituir sus coordenadas en la ecuación del plano.

Si se comprueba esa ecuación, la **recta** estará **contenida** en el **plano**

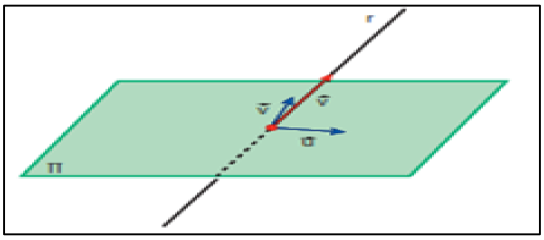


Si no se comprueba esa ecuación, la **recta** será **paralela** al **plano**



Recta y plano secantes

Si el vector director de una recta no puede expresarse como la adición de los vectores directores en el plano, entonces el plano y la recta serán **secantes.**



De esta manera, el rango de la matriz de tres vectores es 3.

- Ángulos entre dos rectas

En el espacio, dos rectas pueden coincidir, ser paralelas, intersecarse o intersecarse. Los ángulos se definen de manera diferente para cada caso, por lo que:

Si dos rectas coinciden o son paralelas, arman un ángulo de 0°.

Si dos líneas son diagonales, marcan cuatro ángulos iguales en pares. El más pequeño de estos se define como el ángulo entre las líneas.

Si dos rectas se cortan, entonces el ángulo entre ellas es el menor de los ángulos formados por la intersección de una recta con la otra.

Si, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, resulta:

$$\cos\alpha = \frac{|u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3|}{\sqrt{u_1^2u_2^2u_3^2}\sqrt{v_1^2v_2^2v_3^2}}$$

Rectas perpendiculares.

Las rectas **r** y **s** serán **perpendiculare**s cuando el **producto escalar** de los **vectores directores** establecidos como $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es **cero.**

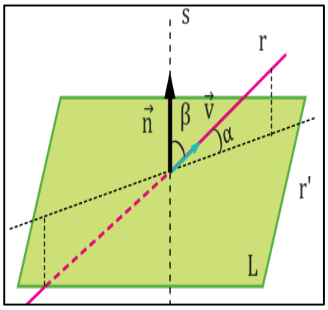
$$\boldsymbol{r \perp s \Leftrightarrow \vec{u}\,.\vec{v} = 0}$$

Planos perpendiculares.

Los planos **L_1** y **L_2**, serán perpendiculares cuando **el producto escalar** de los **vectores normales** establecidos como, $(\vec{n}_1) = (A_1, B_1, C_1)$ y $(\vec{n}_2) = (A_2, B_2, C_2)$ es **cero.**

Ángulo entre recta y plano.

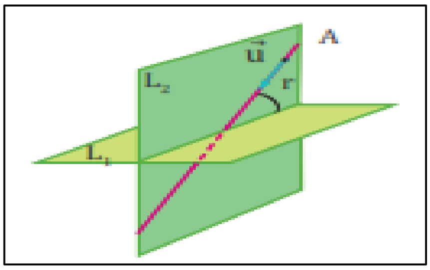
El ángulo ∝ que forma la recta **r** y el plano **L** es el componente del ángulo β que forma la recta **r** con una recta **s** perpendicular al plano. Asimismo, el ángulo entre las rectas **r** y **s** coincide con el ángulo entre el vector director de la recta **r** y el vector normal al plano **L.**



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|v_1A + v_2B + v_3C|}{\sqrt{v_1^2 v_2^2 v_3^2}\sqrt{A^2B^2C^2}}$$

Consolidación:

- **Actividad de desarrollo 3.1**



Halle la ecuación del plano L_2, perpendicular al plano L_1: $x + 3y - z = 0$ y que contiene a la recta $r: (x, y, z) = (1, 3, 4) + k(-1, -2, 5)$

Se detalla en la figura la existencia de solo un plano que contenga a r y sea perpendicular a L_1

- Como L_2 contiene la recta r, cualquier punto y vector director de r será también del plano. Así: $A = (1, 3, 4)$ es un punto de L_2 y $\vec{u} = (-1, -2, 5)$, un vector de L_2
- Como L_2, es perpendicular a L_1, el vector normal relacionado a L_1 será un vector director de L_2 y $\vec{v} = (1, 3, -1)$

Considerando que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, L_2 es el plano determinado por A, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

L_2: $<x, y, z> = <1, 2, 3> + \lambda< -1, -2, 5> + \mu<1, 3, -1>$

Y su ecuación general dada por el sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = 3 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 4 + 5\lambda - \mu \end{cases}$$

$\boldsymbol{L_2: 13x - 4y + z - 5 = 0}$

- **Actividad de desarrollo 3.2**

Calcular el ángulo que forma la recta **r** y el plano $\boldsymbol{\pi}$

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 5 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\pi}: 3x - 4y + 5z - 1 = 0$$

Se escribe un vector normal al plano y un vector director de la recta:

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \qquad \vec{n} = (3, -4, 5)$$

Se halla el ángulo α:

$$\alpha = \text{arc sen}\frac{|v_1A + v_2B + v_3C|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\sqrt{3^2+(-4)^2+5^2}} = \text{arc sen}\frac{1}{10} = 5{,}74°$$

- **Actividad de cierre**

a) ¿Si un plano que es perpendicular a un segundo y a un tercero puedo concluir que los dos últimos también son perpendiculares?
b) ¿existe uno o una familia de planos perpendiculares a una recta?
c) ¿En qué caso no podría encontrar el ángulo entre dos planos?
d) ¿Una recta perpendicular a un plano es también perpendicular a su vector normal?

Heteroevaluación:

- **Calcular** el ángulo que se forma con las rectas **r** y **s** en cada de los siguientes casos:

a. $r: (x, y, z) = (-1, 0, -3) + k(3, 2, 2)$

$s: (x, y, z) = (2, -3, 0) + k(2, -2, -1)$

b. $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$

$s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$

- **Determinar** el ángulo que se forma por la recta **r** y el plano **L**en cada de los siguientes casos:

a. $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + k(1, -2, 4)$

$L: x - y + 3z - 1 = 0$

b.

$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{L}: 3x - z + 1 = 0$

Recursos:

- Pizarra gráfica
- Texto de Matemáticas para bachillerato

Elaborado por:	Revisado y aprobado por:

Realizado por: López, Jaime, 2022.

4.2.2. Secuencias didácticas con el uso del GeoGebra 3D con realidad aumentada.

Tabla 11-4: Secuencia didáctica 1 con uso del GeoGebra 3D con realidad aumentada.

SECUENCIA DIDÁCTICA 1 CON USO DEL GEOGEBRA 3D CON REALIDAD AUMENTADA	
Área:	Matemática
Tema:	Rectas en el espacio
Curso:	Tercero de Bachillerato
Objetivo Educativo	Desarrollar una actitud curiosa y creativa en el uso de herramientas matemáticas y demostrar orden, perseverancia y habilidades de investigación para enfrentar y resolver problemas del mundo real en el país
Destreza con criterio de desempeño	Desde un punto en un segmento de línea y un vector de dirección, o desde dos puntos en un segmento de línea, escriba y defina las ecuaciones vectoriales y paramétricas del segmento de línea y graficarlas con R^3.

Anticipación:

La dirección de un segmento de línea se puede determinar mediante un vector de dirección o mediante dos puntos. La línea se define entonces por un punto y un vector de dirección, o por dos puntos.

Construcción:

Al igual que en los aviones, se necesita un punto y una dirección para definir una línea en el espacio. Cualquier vector en la misma dirección que un segmento de línea es un vector que representa la dirección del segmento de línea.

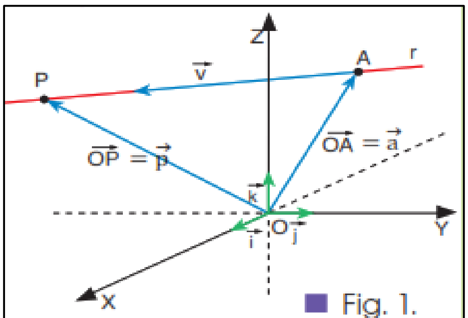


Fig. 1.

Si A = (-1, 1, 3)
y v = (3, -2, 1)

Ecuación vectorial de r $(A;\vec{v})$:

$$\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v}$$

$$(x, y, z) = (-1, 1, 3) + k\,(3, -2, 1)$$

¿Qué es la ecuación vectorial de la recta? Recordar que la definición matemática de una recta es un conjunto de puntos consecutivos que están representados en la misma dirección sin curvas ni ángulos.

En este sentido, la ecuación vectorial de la recta es una manera de expresar matemáticamente cualquier recta; y, para ello, solo es necesario un punto que pertenezca a la recta y el vector director de la recta.

¿Cuál es la ecuación Paramétrica de la recta? Resultado de imagen para ecuación paramétrica de la recta r3. La ecuación paramétrica de la recta es un número real que nos permitirá conocer cualquier coordenada de la recta según el valor que se le asigne.

Consolidación:

- **Actividad de desarrollo 1.**

Propuesta la recta $r\ (A;\ \vec{v})$, con $A = (2, -1{,}4)$ y $\vec{v} = (1, 0, -2)$ determinar:

a. La ecuación vectorial.

b. Dos puntos de r diferentes de A y el vector director distinto de $\vec{v}$.

Resolución:

a. Su ecuación vectorial es $\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v} : (x, y, z) = (2, -1, 4) + k(1, 0, -2)$

b. A **k** se dos valores diferentes de cero para la obtención de dos puntos, **B** y **C**, de **r**:

$$k = 1 \rightarrow B = (2, -1, 4) + 1(1, 0, -2) = (3, -1, 2)$$
$$k = 2 \rightarrow C = (2, -1, 4) + 2(1, 0, -2) = (4, -1, 0)$$

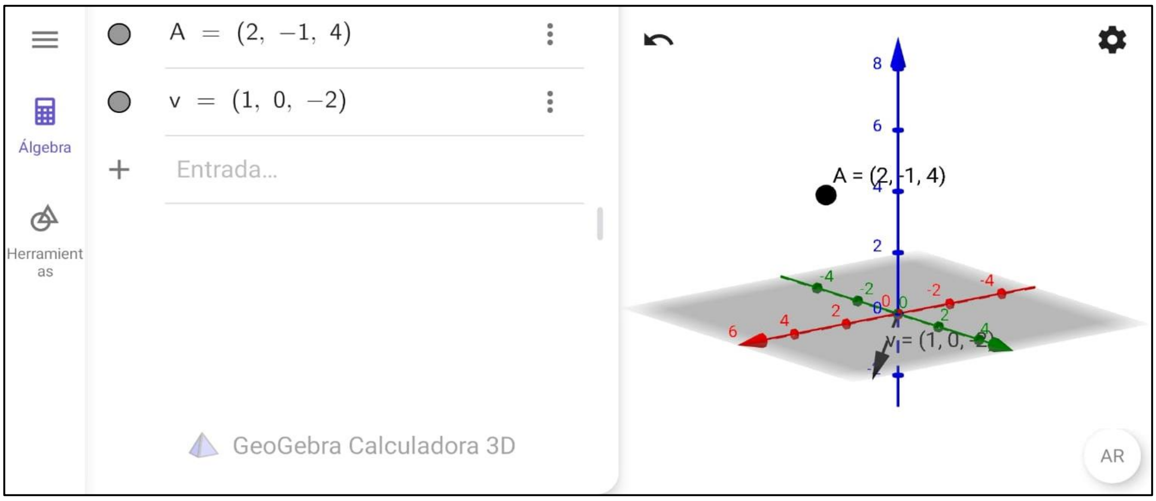
Todo vector representado como $k\vec{v}$ es un vector director de **r.**, por ejemplo:

$u = 2\,.\,(1, 01 - 2) = (2, 0, -4).$

A partir de los datos anteriores realizar el gráfico respectivo, para lo cual se utilizará la aplicación del software GeoGebra, siguiendo los siguientes pasos:

1. En el comando de **Entrada** se ingresan los puntos y dirección, diferenciando que para declarar puntos se utilizan letras mayúsculas y vectores con letras minúsculas.

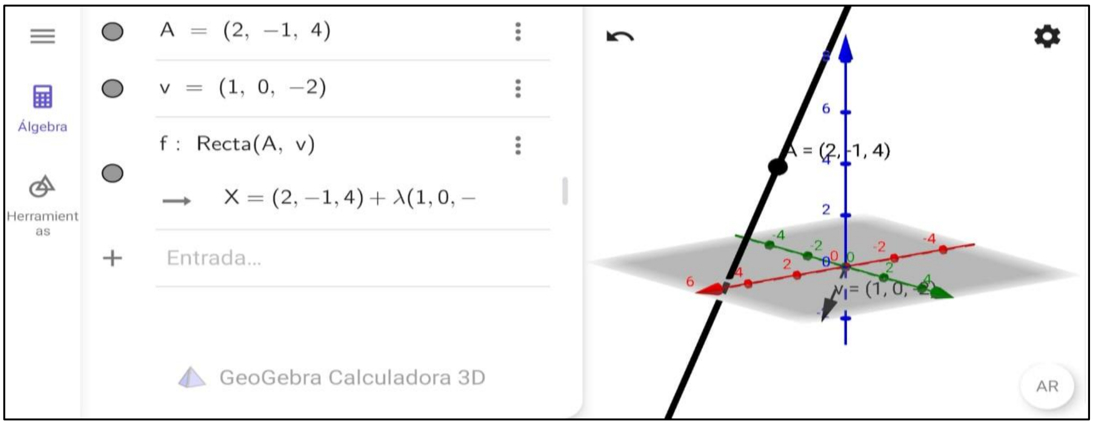
Punto: $A = (2, -1, 4)$
Dirección: $\vec{v} = (1, 0, -2)$



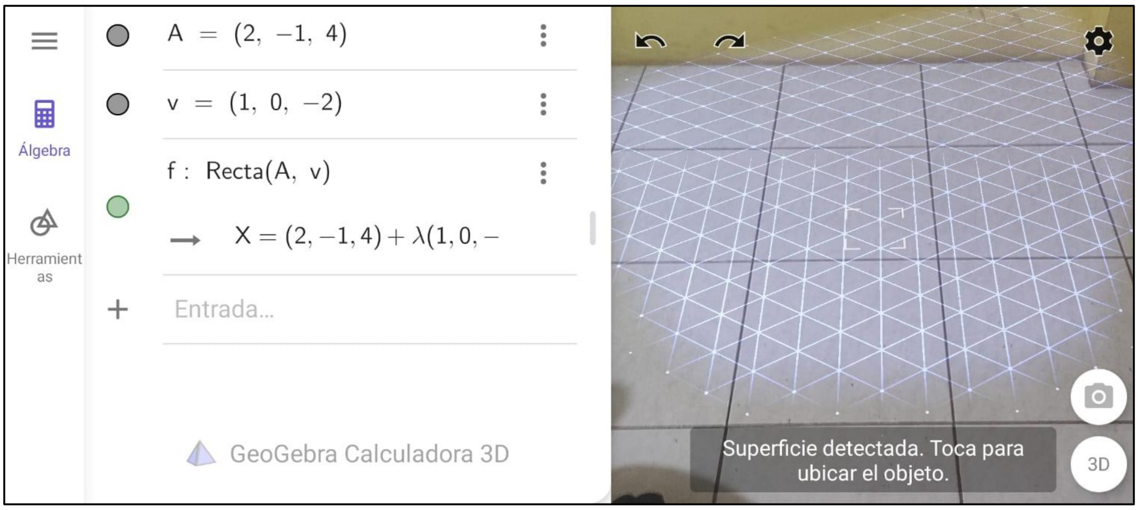
2. Una vez que la aplicación muestra tanto el punto como la dirección, en la barra de entrada se crea una recta utilizando la sentencia; $recta < Punto, Vector >$.

   Recta: $Recta = (A, v)$

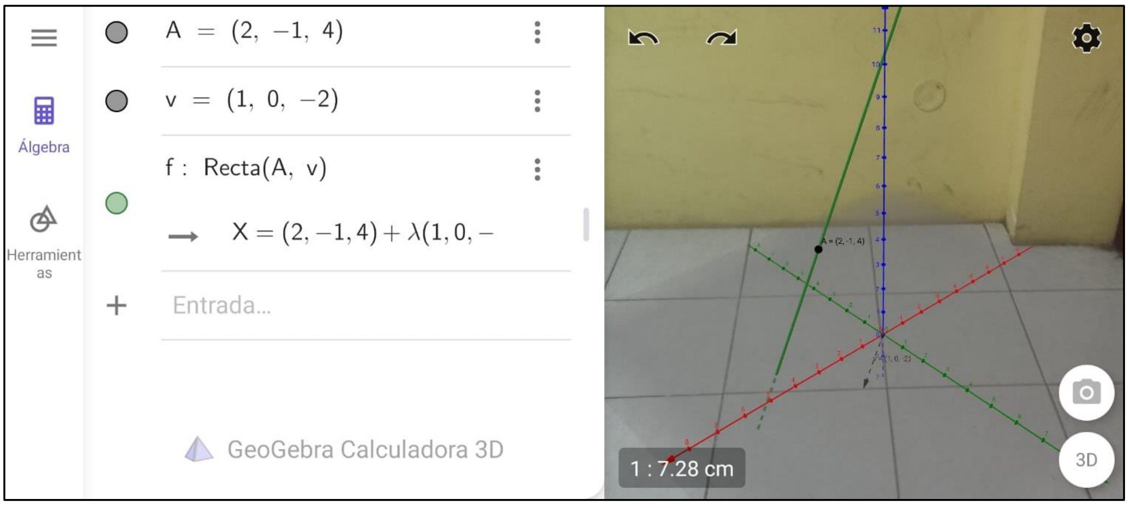
   La aplicación generará la recta y entrará la ecuación vectorial de la misma.



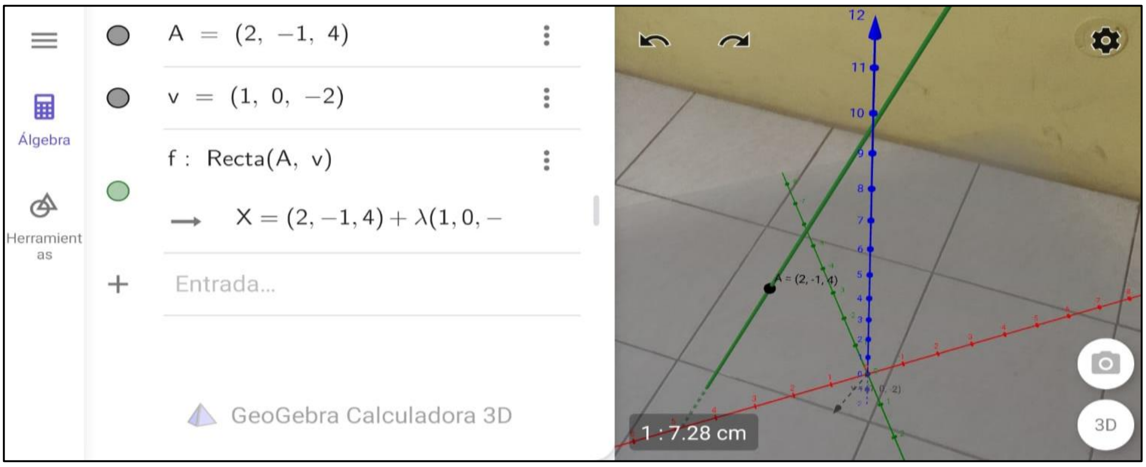
3. Se pulsa el botón AR ubicado en la parte inferior derecha de la pantalla para pasar a realidad aumentada (AR) por sus siglas en inglés y se procede a seleccionar el área del entorno donde se alzarán los ejes y las gráficas ingresadas.

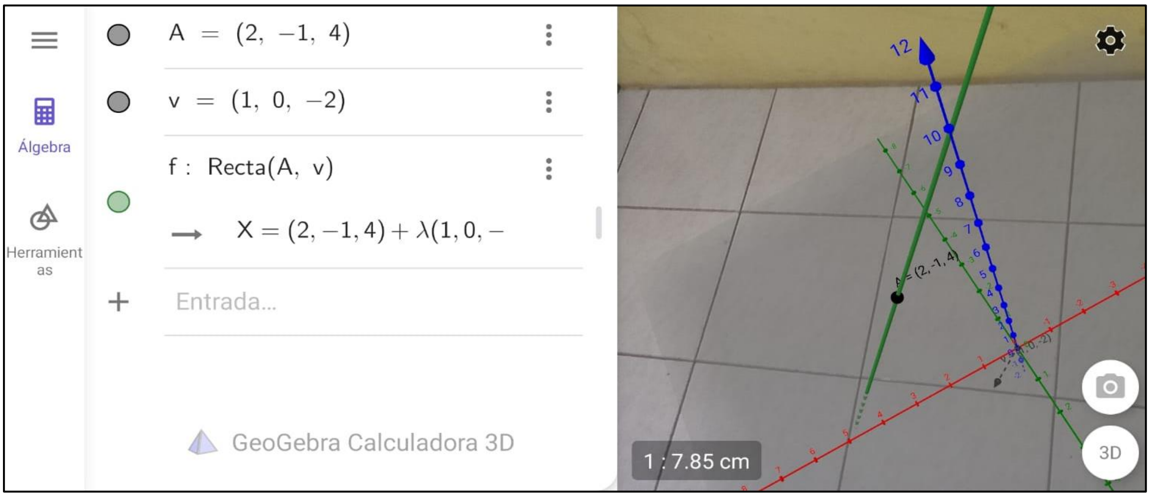


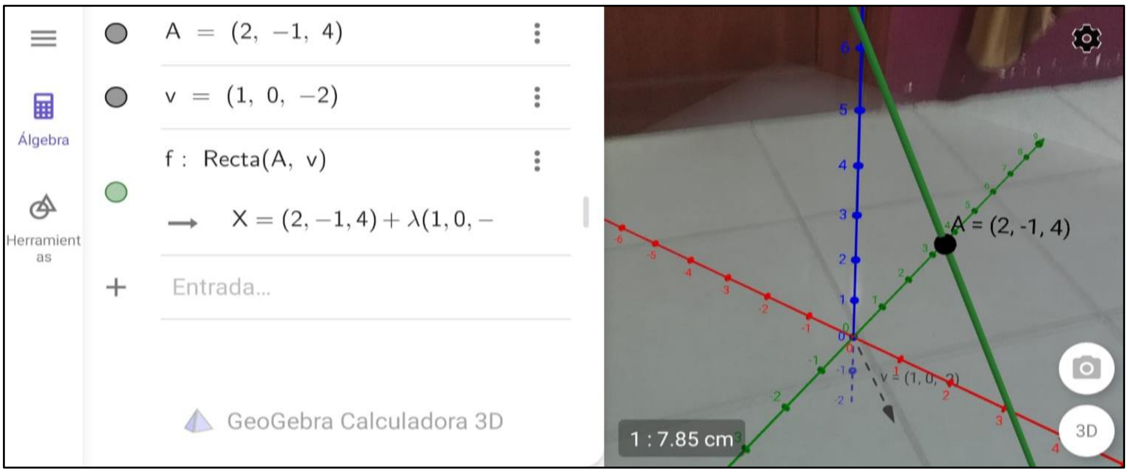
4. Se toca la pantalla en el punto donde se desea que sea el origen de las coordenadas y se cargará la gráfica.



5. Sin tocar la pantalla se empieza a mover alrededor de la gráfica para inspeccionarla a detalle.







- **Actividad de cierre**

a. ¿Sólo la dirección puede definir una recta?

b. ¿A un solo punto concurren una infinidad de rectas?

c. ¿Pueden dos vectores linealmente independientes coincidir en una recta?

d. ¿Porque es necesario un punto de la recta para poder graficarla?

Heteroevaluación: - **Explique** qué tienen en común los diferentes vectores directores de una misma recta. - **Explique** si $(x, y, z) = (2, -7, 1) + k\ (2, 3, -2)$representa la ecuación vectorial de la recta **r**, establecer: **a)** Los dos puntos de **r** **b)** La nueva ecuación vectorial - **Represente** la recta con vector director $\vec{v} = (3, -1, 4)$ que pasa por el punto $A = (-1, 2, 3)$. - **Escribe** la ecuación paramétrica de una recta que pasa por un punto $A = (7, 2, -3)$ y tiene la dirección del vector $\vec{v} = (1, 0, -2)$. - **Propuestos** los puntos $A = (2, 1, 4)$ y $B = (3, -1, 2)$, escribir la ecuación paramétrica y continua de la recta que pasa por los A y B, e investigar si el punto $C = (1, 3, 7)$ pertenece a esa recta.
Recursos: ▪ Pizarra gráfica ▪ Texto de Matemáticas para bachillerato ▪ Software GeoGebra 3D

Elaborado por:	**Revisado y aprobado por:**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Tabla 12-4: Secuencia didáctica 2 con uso de GeoGebra 3D con realidad aumentada.

espoch Instituto de Posgrado y Educación Continua	**SECUENCIA DIDÁCTICA 2 CON USO DE GEOGEBRA 3D CON REALIDAD AUMENTADA**	"EL EMPALME"
Área:	Matemática	
Tema:	Planos en el espacio	
Curso:	Tercero de Bachillerato	
Objetivo Educativo	Desarrollar una actitud curiosa y creativa en el uso de herramientas matemáticas y demostrar orden, perseverancia y habilidades de investigación para enfrentar y resolver problemas del mundo real en el país	
Destreza con criterio de desempeño	Determine la ecuación del vector plano con un punto en el plano y dos vectores de dirección; desde tres puntos en el plano; de una recta y un punto del plano.	
Anticipación: Para delimitar cualquier plano en el espacio, se necesita un punto y dos direcciones distintas. Estas direcciones se delimitan por dos vectores no paralelos conocidos también como vectores de dirección.		

Construcción:

- Ecuación vectorial del plano

Es una ecuación que permite expresar matemáticamente cualquier plano. Para hallar la ecuación vectorial de un plano solo se necesita un punto y dos vectores linealmente independientes que pertenezcan a dicho plano.

Propuesto un punto genérico **P** del plano, el vector $\overrightarrow{AP}$ se obtiene sumando los múltiplos de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Por tal razón: $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u}$ con λ y µ € $\mathbb{R}$.

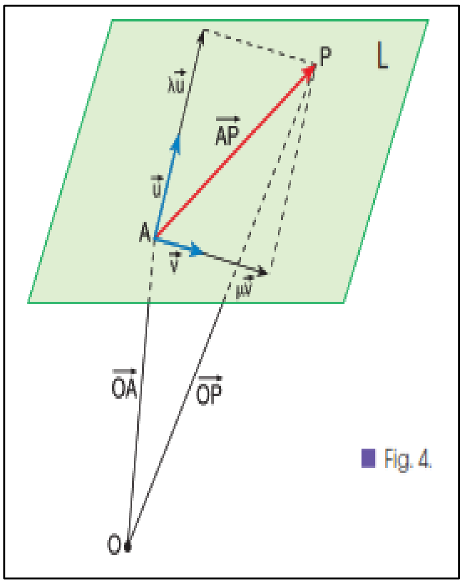


Fig. 4.

Asimismo, se cumple:

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

Si $\vec{p}$ y $\vec{a}$ son los vectores posición de P y A, correspondientemente. Ya que $\overrightarrow{AP} = \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$, a la igualdad anterior se la puede escribir como:

$$\vec{p} = \vec{a} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$$

- Ecuación paramétrica en el plano

Son ecuaciones que permiten expresar matemáticamente cualquier plano. Para hallar las ecuaciones paramétricas de un plano solo se necesita un punto y dos vectores linealmente independientes que pertenezcan a ese plano.

Desarrollar la ecuación vectorial del plano L expresada en los siguientes elementos:

$$(x, y, z) = (a_1, a_2, a_3) + \lambda(u_1, u_2, u_3) + u(v_1, v_2, v_3) =$$
$$= (a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1, a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2, \qquad a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

Cuando se tiene que separar los tres elementos de la ecuación vectorial, se obtiene:

$$x = a_1 + \lambda u_1 + \mu v_1$$
$$x = a_2 + \lambda u_2 + \mu v_2$$
$$x = a_3 + \lambda u_3 + \mu v_3$$

Estas ecuaciones pueden denominarse **ecuaciones paramétricas** del plano.

- Ecuación general del plano

Para cada punto del plano, a las tres ecuaciones paramétricas se las puede considerar como un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, λ y μ, la cual debe tener una sola solución.

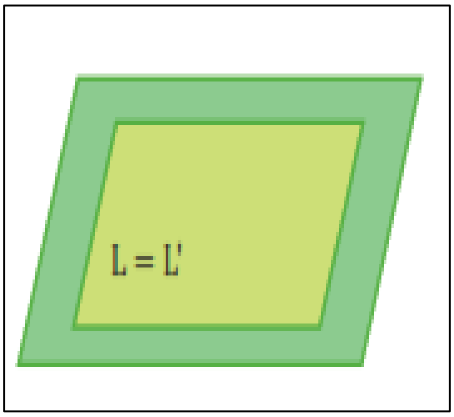
$$\left.\begin{aligned} x - a_1 &= \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y - a_2 &= \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z - a_3 &= \lambda u_3 + \mu v_3 \end{aligned}\right\}$$

Para ello, el sistema debe cumplir con la definición; con esto en mente, en el momento de hacer el cálculo y solucionar el sistema de ecuaciones, se obtiene:

$$(u_2\, v_3 - u_3\, v_3)x + (u_3\, v_1 - u_1\, v_3)y + (u_1\, v_2 - u_2\, v_1)z + [-a_1(u_2\, v_3 - u_3\, v_2) - a_2(u_3\, v_1 - u_1\, v_3) - a_3(u_1\, v_2 - u_2\, v_1)]$$

Si A, B y C son los coeficientes respectivos de x, y, z y D se le llama al término independiente, se obtiene la siguiente ecuación lineal:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$



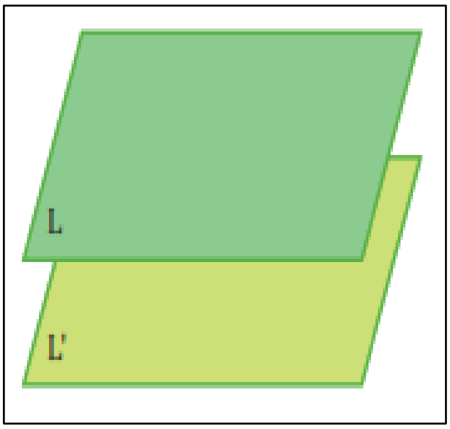
- **Posición relativa de dos planos**

Sistema consistente indeterminado: las soluciones se basan en dos parámetros. Equivale a:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{D}{D'}$$

Dichos planos son **coincidentes.** Así, por ejemplo, los planos L y L':

$L: 0{,}6x - 0{,}2y - 0{,}4z + 2{,}4 = 0$
$L': 3x - y - 2z + 12 = 0$



Son planos **coincidentes**, puesto que:

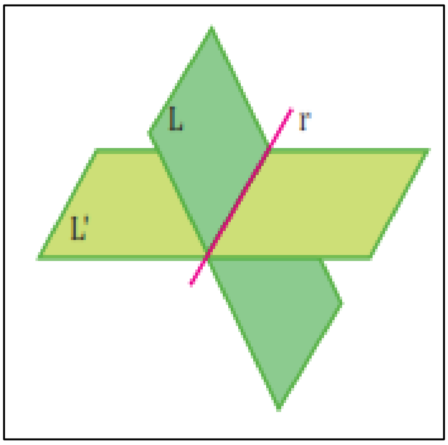
$$\frac{0{,}6}{3} = \frac{-0{,}2}{-1} = \frac{-0{,}4}{-2} = \frac{2{,}4}{12}$$

Sistema inconsistente: sin puntos en común. Equivale a:

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} \neq \frac{D}{D'}$$

Los planos son **paralelos.** Así, por ejemplo, los planos L y L':

$L: 2x + 3y - z + 1 = 0$
$L': 4x + 6y - 2z + 7 = 0$



Son planos **paralelos**, puesto que:

$$\frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{-1}{-2} \neq \frac{1}{7}$$

Sistema consistente determinado: Las soluciones se basan en un parámetro. Equivale a:

$$\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'};\ o\ \frac{A}{A'} \neq \frac{C}{C'}; o\, \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$$

Los planos son **secantes,** es decir, **se cortan** en una recta**.** Así, por ejemplo, los planos L y L':

$L: 2x - y + 3z + 1 = 0$
$L': x + y + 5z + 4 = 0$

Son planos **secantes**, puesto que:

$$\frac{2}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{5}$$

Consolidación:

- Actividad de desarrollo 2.

Dado un plano $\pi\ (A; \vec{u}\ \vec{v})$, con $A = (3, 0, -1)$, $\vec{u} = (1, 2, -3)$, $\vec{v} = (-2, 3, 0)$; determine:

a. La ecuación vectorial.

b. Los dos puntos de π diferentes de A

c. Los diferentes vectores directores de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d. La expresión de la ecuación vectorial nueva.

Resolución:

a. Su ecuación vectorial es $(x, y, z) = (3, 0, -1) + \lambda(1, 2, -3) + \mu(-2, 3, 0)$

b. Se coloca distintos valores a **λ** y **μ** para la obtención de los otros puntos:

Si, $\lambda = 1\ y\ \mu = 0$: $B = (3, 0, -1) + 1(1, 2, -3) + 0(-2, 3, 0) = (4, 2, -4)$

Si, $\lambda = 1\ y\ \mu = 1$: $C = (3, 0, -1) + 1(1, 2, -3) + 1(-2, 3, 0) = (2, 5, -4)$

c. Se obtienen dos vectores directores del plano a partir de A, B y C

$$\overrightarrow{AB} = (2 - 4, 5 - 2, 4 - (-4)) = (-2, 3, 0) = \vec{u}'$$

$$\overrightarrow{AC} = (2 - 3, 5 - 0, -4 - (-1)) = (-1, 5, -3) = \vec{v}'$$

d. Como los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ son linealmente independientes, se puede utilizar para escribir otra ecuación vectorial. As´, para B = (4, 2, -4):

$$(x, y, z) = (4, 2, -4) + \lambda(-2, 3, 0) + \mu(-1, 5, -3)$$

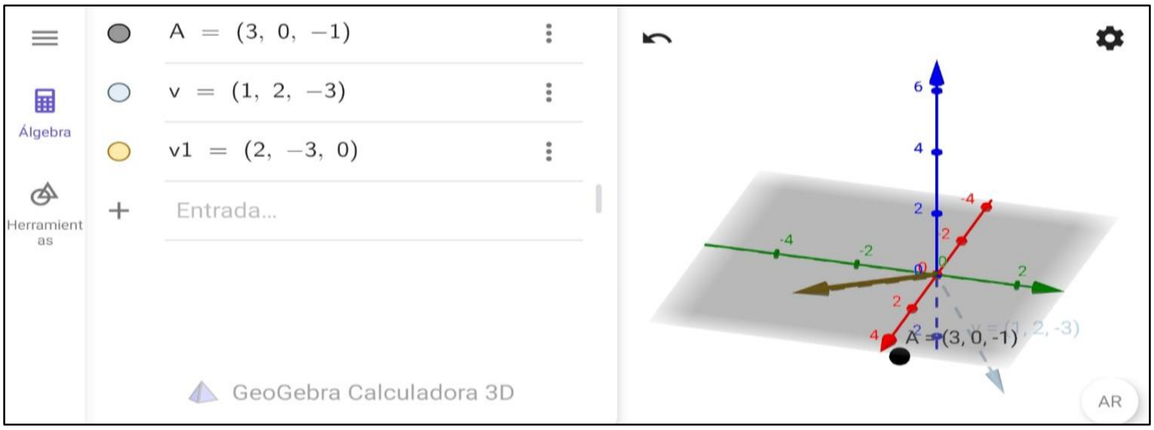
A partir de los datos anteriores realizar la modelación respectiva, para lo cual se utilizará la aplicación del software GeoGebra 3D con realidad aumentada, se ingresan los datos disponibles siguiendo los siguientes pasos:

1. Se declara el punto y las direcciones en la aplicación.

Punto: $A = (3,0,-1)$

Dirección 1: $\vec{v}_1 = (1,2,-3)$

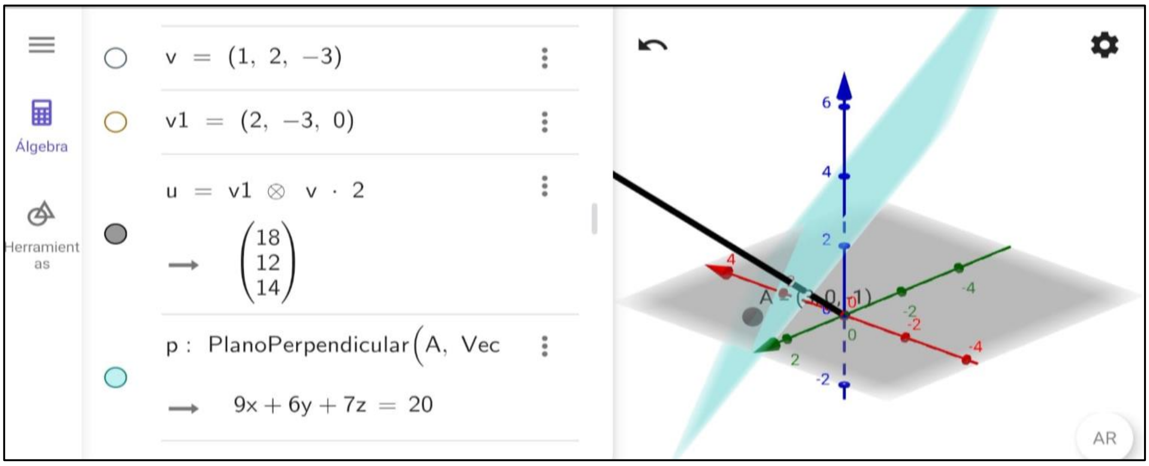
Dirección 2: $\vec{v}_2 = (-2,3,0)$



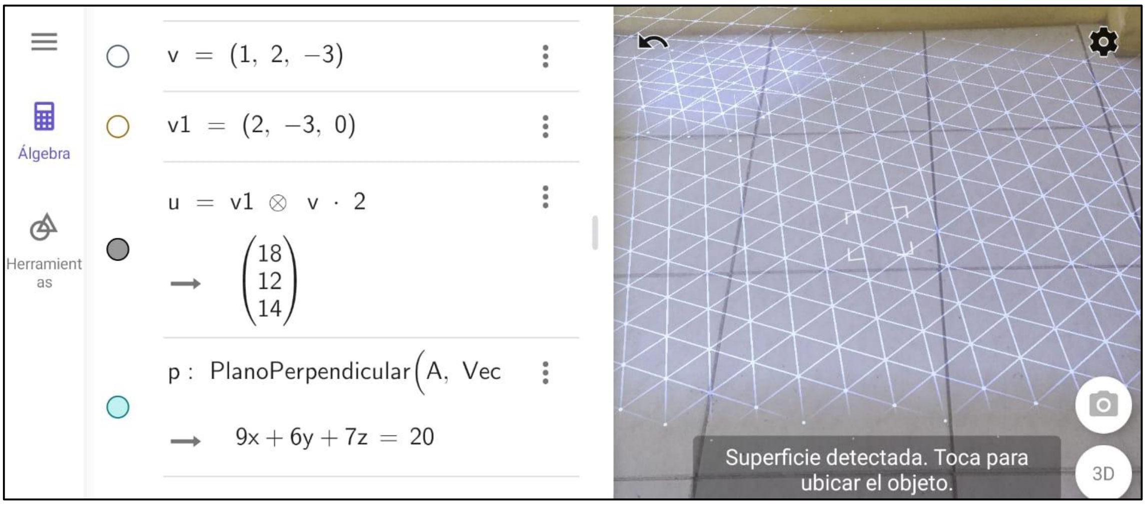
2. Una vez que la aplicación muestra tanto el punto como las direcciones, en la barra de entrada se crea un plano utilizando la sentencia; $Plano < Punto, Vector, Vector >$. Siendo esta solo una de las formas de sentenciar el plano.

Plano: $Recta = (A, v_1, v_2)$

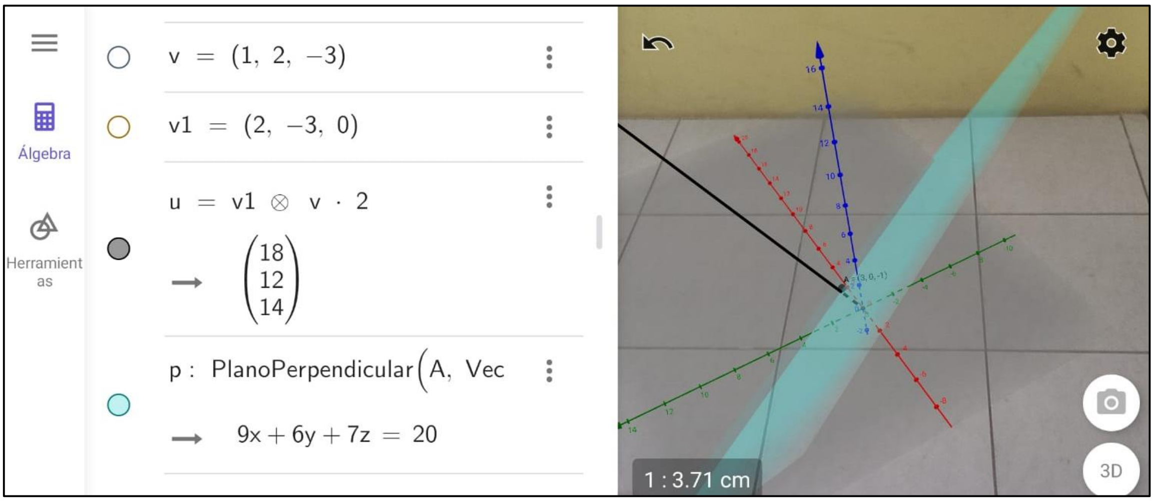
La aplicación generará el plano único que tiene la dirección del plano en que están los vectores (v_1, v_2) y pasa por el punto A, y además, mostrará la ecuación general del plano.



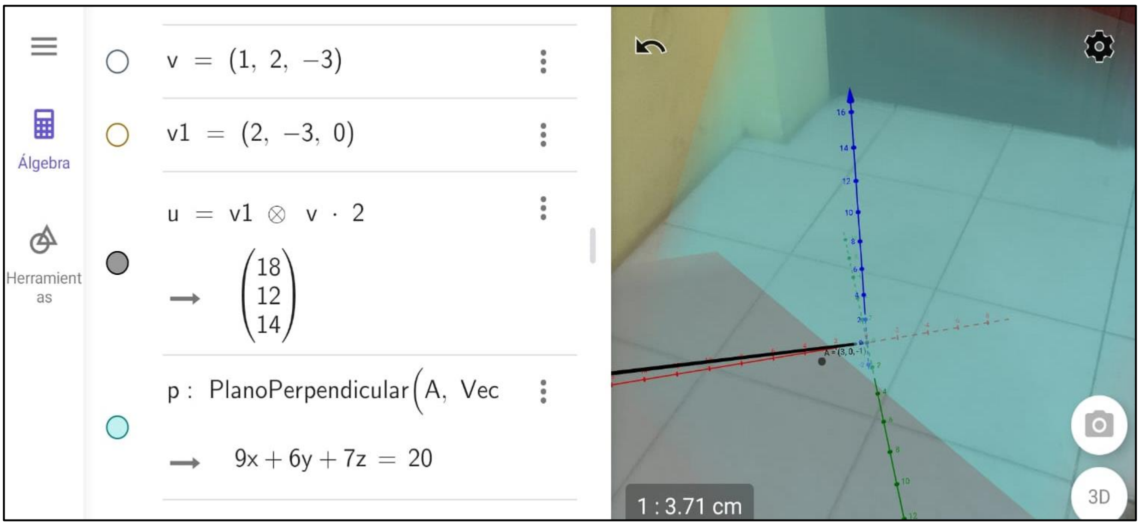
3. Se selecciona nuevamente luego de pulsar y activar el comando AR.

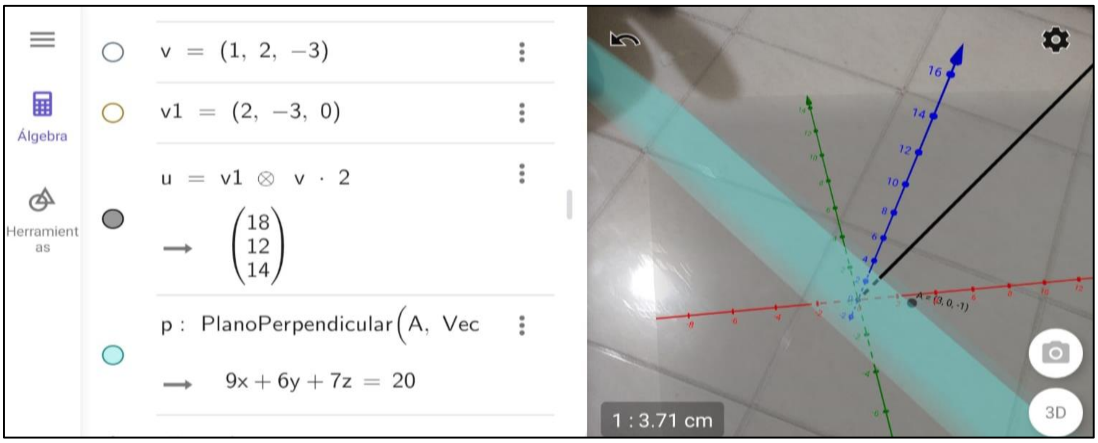


4. Se selecciona el origen de las coordenadas en el espacio que se considere apropiado.



5. Se procede a inspeccionar el objeto para visualizar la disposición del plano, el punto y los vectores que lo direccionan.





- **Actividad de cierre**

a. ¿Si un plano que es perpendicular a un segundo y a un tercero se puede concluir que los dos últimos también son perpendiculares?
b. ¿La intersección de dos planos se da únicamente entre planos perpendiculares?
c. ¿Tres puntos pueden definir un plano?
d. ¿Dos vectores y un punto pueden definir un vector?

Heteroevaluación:

- **Estudiar** la posición relativa de los pares de planos siguientes.

a. $\pi: 3x - y + 2z = 0$
$\pi': 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

b. $\pi: 2x - y + 3z + 4 = 0$
$\pi': x + 3y - 2z + 1 = 0$

c. $\pi: 5x - 2y + 3z = 0$
$\pi': 6x - 2y + 4z - 1 = 0$

d. $\pi: z + 1 = 0$
$\pi': z = 0$

Recursos:

- Pizarra gráfica
- Texto de Matemáticas para bachillerato
- Software GeoGebra 3D

Elaborado por:	**Revisado y aprobado por:**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Tabla 13-4: Secuencia didáctica 3 con el uso de GeoGebra 3D con realidad aumentada.

	SECUENCIA DIDÁCTICA 3 CON USO DE GEOGEBRA 3D CON REALIDAD AUMENTADA
Área:	Matemática
Tema:	Interrelaciones del plano y la recta
Curso:	Tercero de Bachillerato
Objetivo Educativo	Desarrollar una actitud curiosa y creativa en el uso de herramientas matemáticas y demostrar orden, perseverancia y habilidades de investigación para enfrentar y resolver problemas del mundo real en el país
Destrezas con criterio de desempeño	Desde un punto en un segmento de línea y un vector de dirección, o desde dos puntos en un segmento de línea, escriba y defina las ecuaciones vectoriales y paramétricas del segmento de línea y graficarlas con R^3. Determinar la posición relativa de dos líneas (paralelas, intersecadas, ortogonales) en R^3 en R^3 Resolver problemas (por ejemplo, determinar la trayectoria de un avión o barco para determinar si ha sido capturado).

Anticipación:

Es necesario saber representar la recta paramétrica y vectorialmente. Además, conocer las representaciones del plano.

Construcción:

- **Posición relativa de recta y plano**

Para establecer las ubicaciones relativas de una recta $r(A'; \vec{v})$ y un plano $L(P; \vec{u}, \vec{v})$, se manifiesta la recta a través de sus igualdades implícitas, y el plano, mediante su ecuación general.

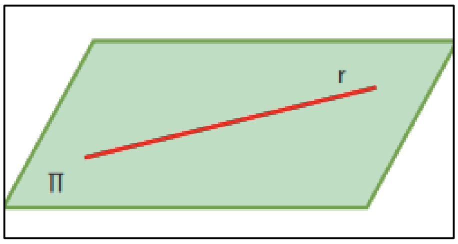
$$r: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D = 0 \end{cases} \qquad L: Ax + By + Cz + D = 0$$

Posteriormente, se considera el sistema construido por las tres ecuaciones y se redacta la matriz **M** y la matriz $\boldsymbol{M'}$, que se asocian a dicho sistema:

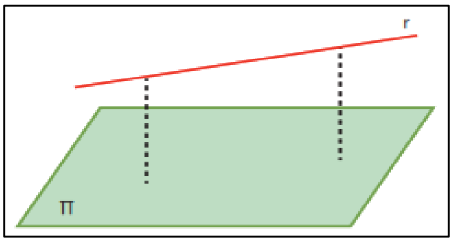
$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix} \qquad M' = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & -D_3 \end{array}\right)$$

Reduciendo las matrices:

M posee dos filas no nulas
M' posee dos filas no nulas

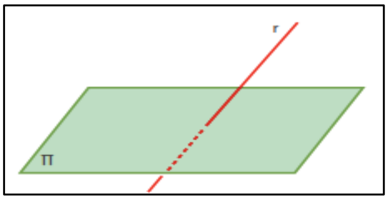


Se obtiene un **sistema consistente indeterminado:** Las soluciones se derivan de un parámetro. La recta está **contenida** en el plano.



M posee dos filas no nulas
M' posee tres filas no nulas

Se obtiene un **sistema inconsistente:** No existe puntos en común. El plano y la recta son **paralelos**.



M posee tres filas no nulas
M' posee tres filas no nulas

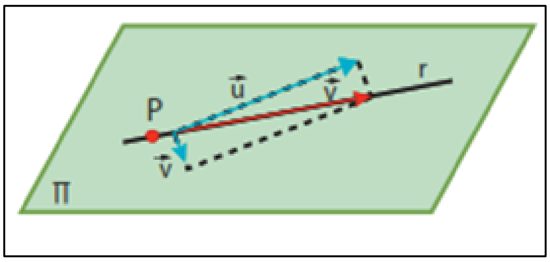
Se consigue un **sistema consistente determinado:** El plano y la recta son **secantes**.

Cuando se infieren rectas y planos a partir de sus vectores o ecuaciones paramétricas, sus posiciones relativas se pueden determinar fácilmente a partir de sus vectores de control.

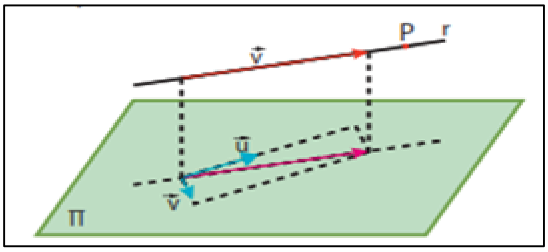
Recta contenida en el plano – recta y plano paralelo:

Una recta se encuentra en un plano o es paralela a él si sus vectores directores son la suma de múltiplos de los vectores directores del plano. En este sentido, el rango de la matriz formada por las componentes de los tres vectores será 2. Para distinguir cada caso basta con tomar cualquier punto de la recta y sustituir sus coordenadas en la ecuación del plano.

Si se comprueba esa ecuación, la **recta** estará **contenida** en el **plano**

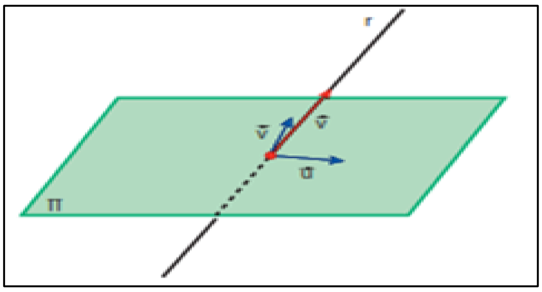


Si no se comprueba esa ecuación, la **recta** será **paralela** al **plano**



Recta y plano secantes

Si al vector director de la recta no puede expresarse como la adición de los vectores directores del plano, entonces el plano y la recta serán **secantes.**



De esta manera, el rango la matriz de tres vectores es 3.

- **Ángulos entre dos rectas**

En el espacio, dos rectas pueden coincidir, ser paralelas, intersecarse o intersecarse. Los ángulos se definen de manera diferente para cada caso, por lo que:

Si dos rectas coinciden o son paralelas, arman un ángulo de 0°.

Si dos líneas son diagonales, marcan cuatro ángulos iguales en pares. El más pequeño de estos se define como el ángulo entre las líneas.

Si dos rectas se cortan, entonces el ángulo entre ellas es el menor de los ángulos formados por la intersección de una recta con la otra.

Si, $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, resulta:

$$\cos \alpha = \frac{|u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3|}{\sqrt{u_1^2 u_2^2 u_3^2}\sqrt{v_1^2 v_2^2 v_3^2}}$$

Rectas perpendiculares.

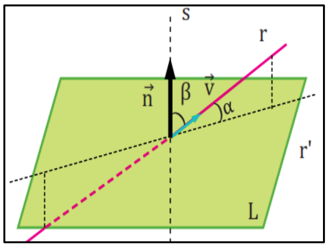
Las rectas **r** y **s serán perpendiculare**s cuando el **producto escalar** de los **vectores directores** establecidos $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es **cero.**

$$\boldsymbol{r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} . \vec{v} = 0}$$

Planos perpendiculares.

Los planos **L_1** y **L_2**, serán perpendiculares cuando el **producto escalar** de los **vectores normales** establecidos, $(\vec{n}_1) = (A_1, B_1, C_1)$ y $(\vec{n}_2) = (A_2, B_2, C_2)$ es **cero.**

Ángulo entre recta y plano.

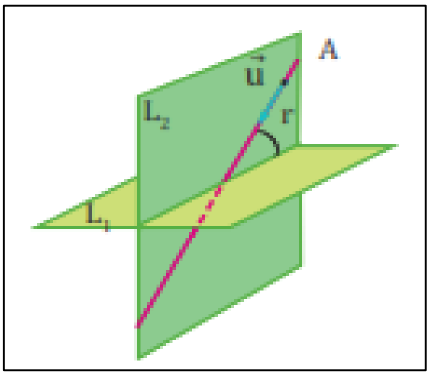


El ángulo $\propto$ que forma la recta **r** y el plano **L** es el componente del ángulo β que forma la recta **r** con una recta **s** perpendicular al plano. Asimismo, el ángulo entre las rectas **r** y **s** coincide con el ángulo entre el vector director de la recta **r** y el vector normal al plano **L.**

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{|v_1 A + v_2 B + v_3 C|}{\sqrt{v_1^2 v_2^2 v_3^2}\sqrt{A^2 B^2 C^2}}$$

Consolidación:

- **Actividad de desarrollo 3.1**



Halle la ecuación del plano L_2, perpendicular al plano $L_1: x + 3y - z = 0$ y que contiene a la recta $r: (x, y, z) = (1, 3, 4) + k(-1, -2, 5)$

Se detalla en la figura la existencia de solo un plano que contenga a r y sea perpendicular a L_1

- Como L_2 contiene la recta r, cualquier punto vector director de r será también del plano. Así: $A = (1, 3, 4)$ es un punto de L_2 y $\vec{u} = (-1, -2, 5)$, un vector de L_2
- Como L_2, ha de ser perpendicular a L_1, el vector normal asociado a L_1 será un vector director de L_2 y $\vec{v} = (1, 3, -1)$

Considerando que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, L_2 es el plano determinado por A, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

L_2: $<x, y, z> = <1, 2, 3> + \lambda< -1, -2, 5> + \mu<1, 3, -1>$

Y su ecuación general dada por el sistema de ecuaciones es:

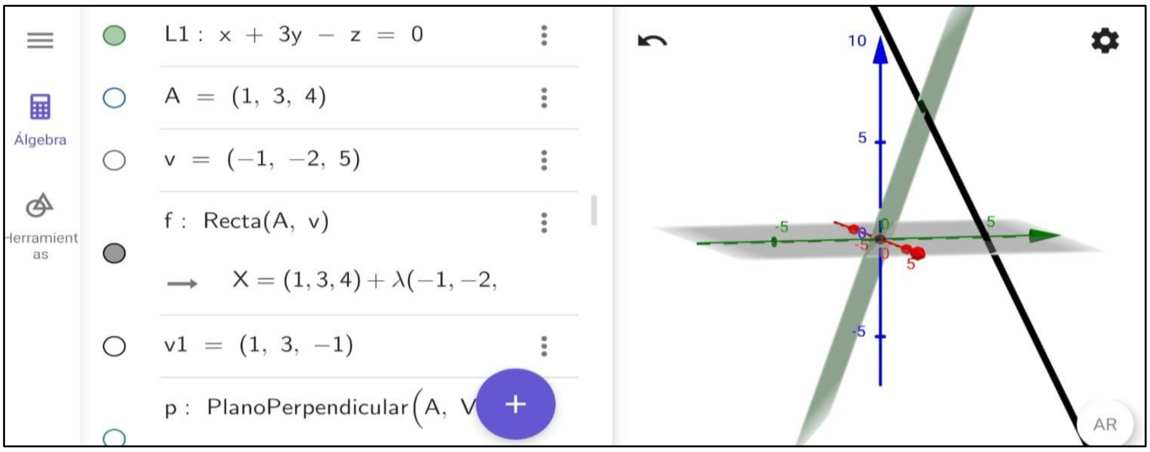
$$\begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = 3 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 4 + 5\lambda - \mu \end{cases}$$

$\boldsymbol{L_2: 13x - 4y + z - 5 = 0}$

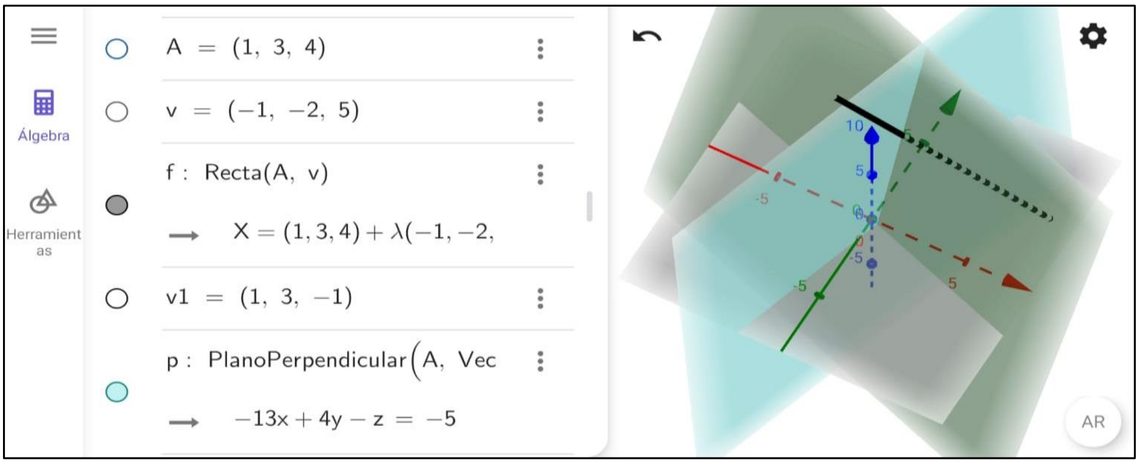
A partir de los datos anteriores se procede a realizar la modelación respectiva, para lo cual se utilizará la aplicación del software GeoGebra, se ingresan los datos disponibles siguiendo los siguientes pasos:

1. Se declara el plano (en su forma general) y la recta en la aplicación.

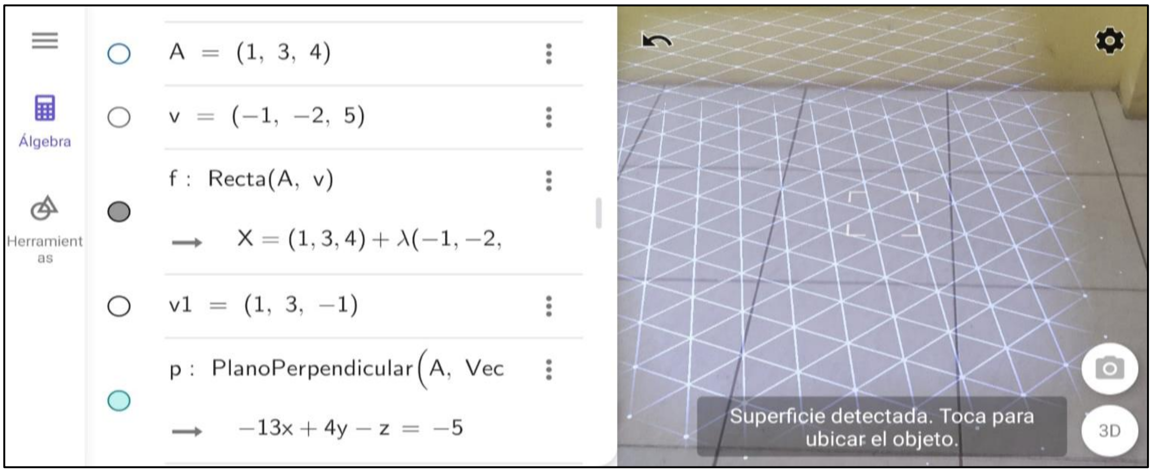
Plano L_1:	$x + 3y - z = 0$
Recta r:	recta (A, v)
	$A = (1, 3, 4)$
	$v = (-1, -2, 5)$



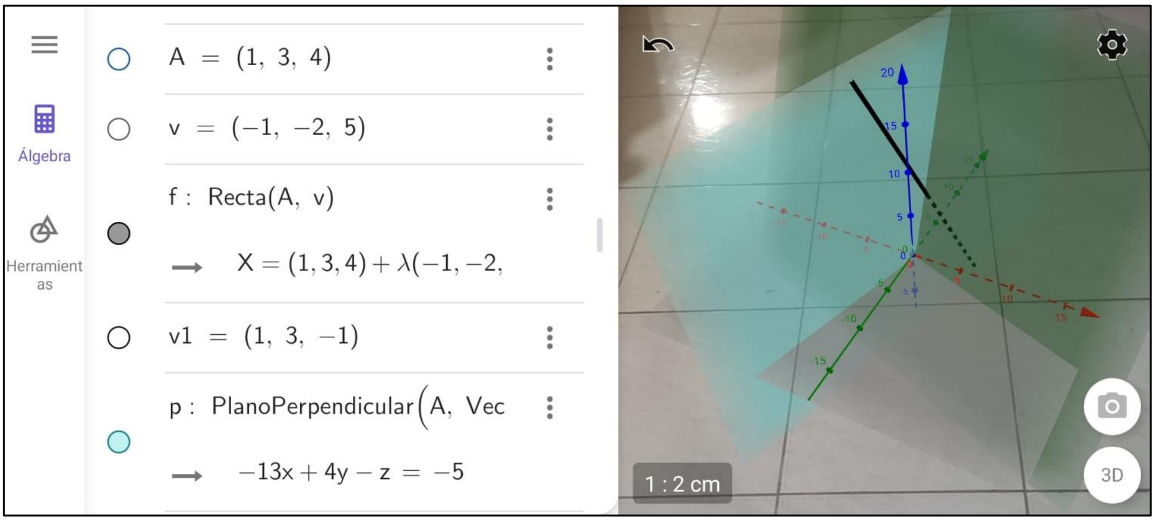
2. Ya habiendo graficado tanto la recta como el plano y sabiendo que el plano L_2 es perpendicular a L_1 que incluye a la recta r incluirá al punto A y contendrá a los vectores v (dirección de la recta) y v_1 (vector normal a L_1) podremos declarar el plano.



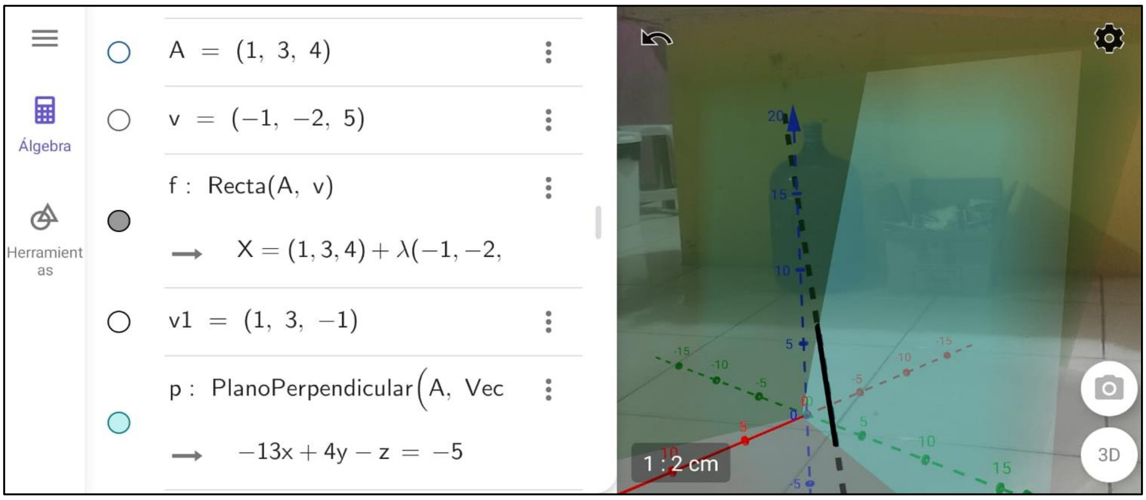
3. Se selecciona el área nuevamente luego de pulsar y activar el comando AR.

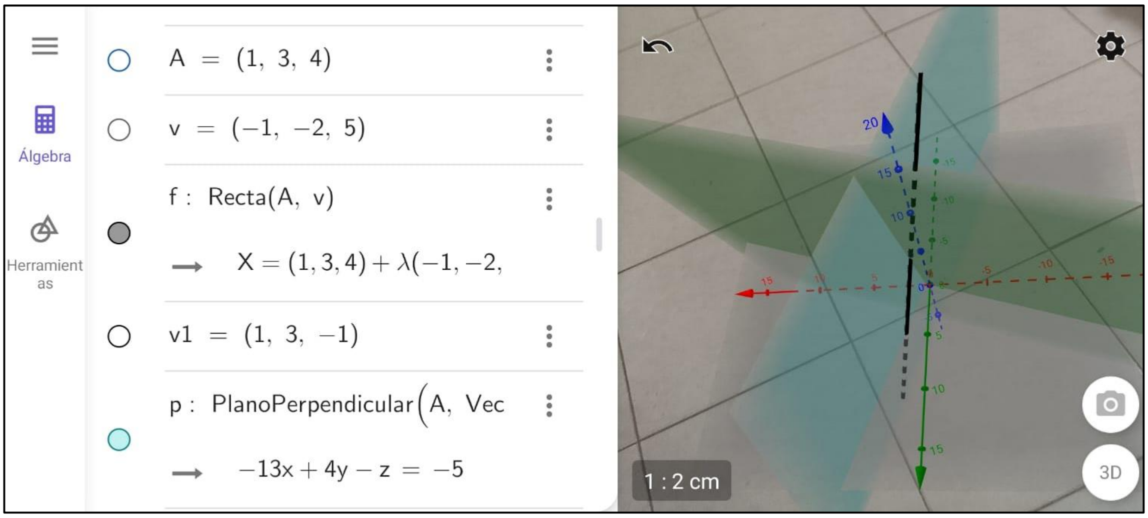


4. Se selecciona el origen de las coordenadas en el espacio que se considere apropiado.



5. Se procede a inspeccionar el objeto para visualizar la disposición del plano, el punto y los vectores que lo direccionan.





- **Actividad de desarrollo 3.2**

Calcular el ángulo que forma la recta **r** y el plano $\boldsymbol{\pi}$

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 5 \end{cases} \qquad \boldsymbol{\pi}: 3x - 4y + 5z - 1 = 0$$

Se escribe un vector normal al plano y vector director de la recta:

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \qquad \vec{n} = (3, -4, 5)$$

Se halla el ángulo α:

$$\alpha = \text{arc sen}\frac{|v_1 A + v_2 B + v_3 C|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\,\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \text{arc sen}\frac{1}{10} = 5{,}74°$$

A partir de los datos anteriores se procede a realizar la modelación respectiva, para lo cual se utilizará la aplicación del software GeoGebra, se ingresan los datos disponibles siguiendo los siguientes pasos:

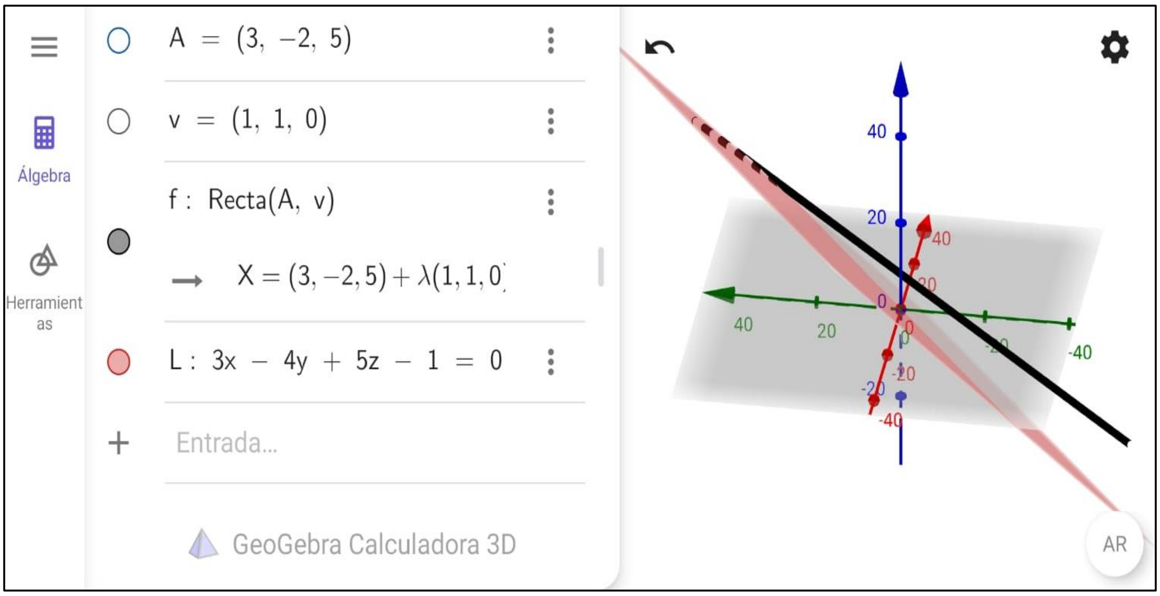
1. Se declara el plano (en su forma general) y la recta.

Plano L_1: $3x - 4y + 5z - 1 = 0$

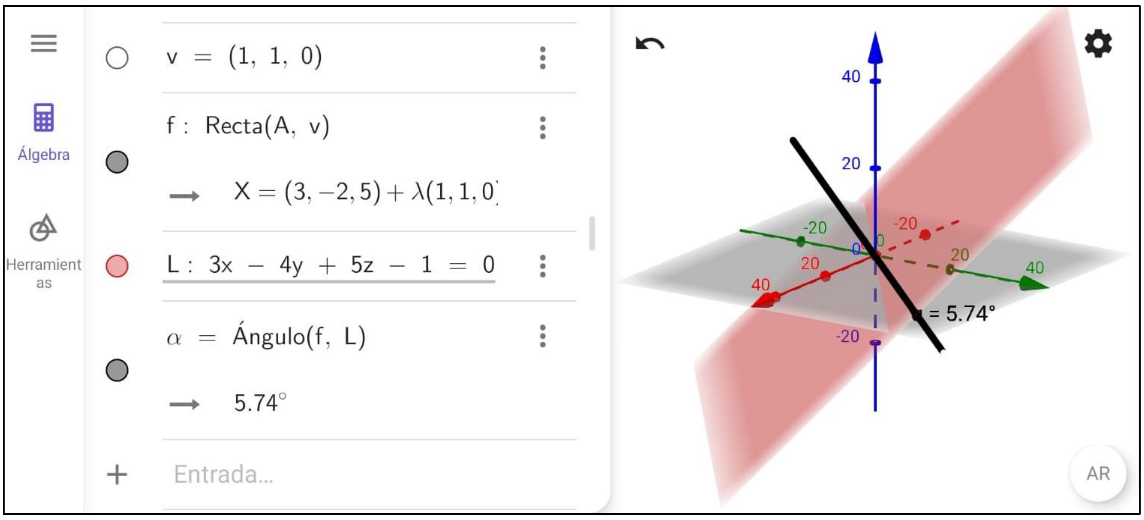
Recta r: recta (A, v)

$A = (3, -2, 5)$

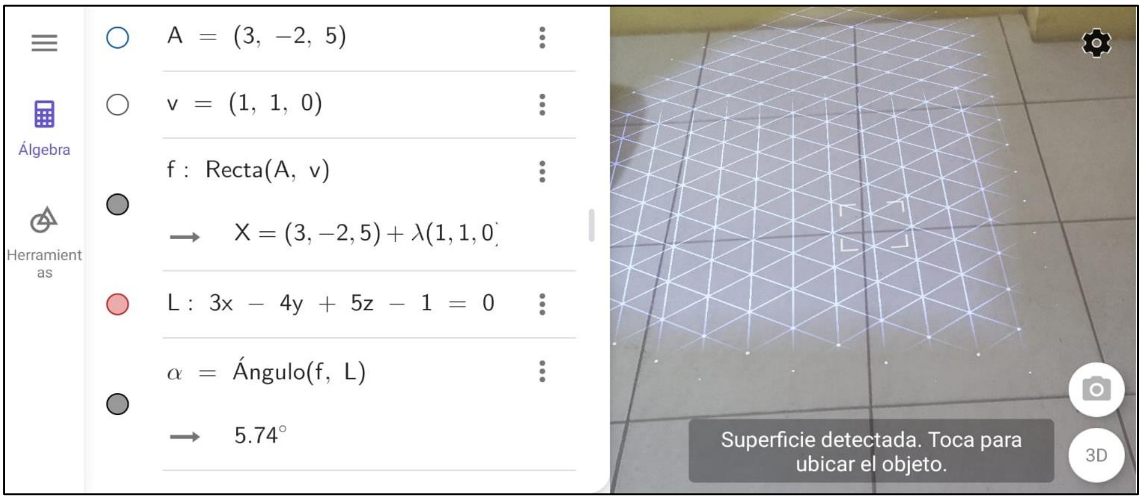
$v = (1, 1, 0)$



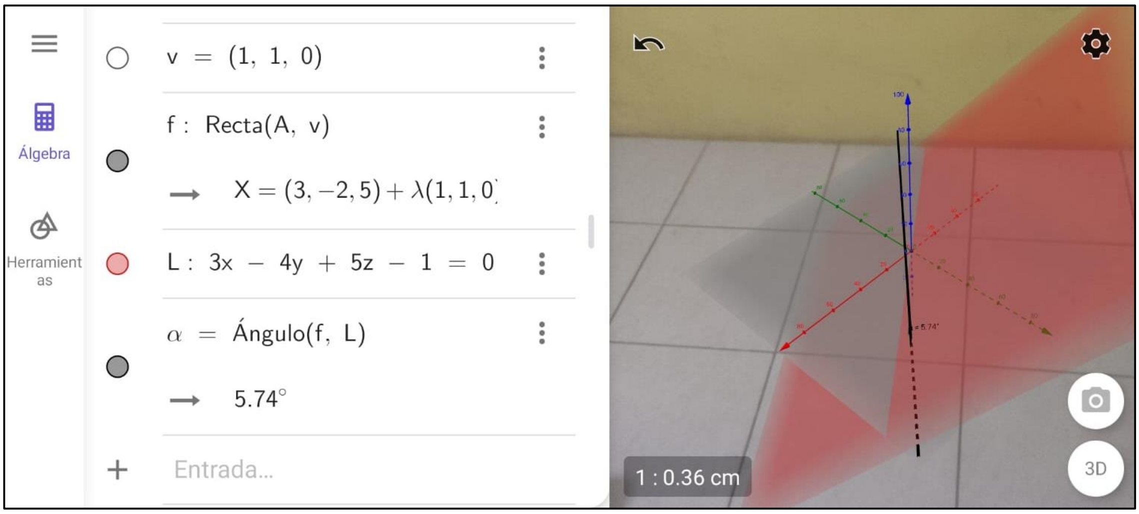
2. Luego de graficar la recta y el plano, se utiliza la función **ángulo** con la sentencia Ángulo<Recta, Plano> y se encuentra el ángulo que forman. $Ángulo(f, L)$



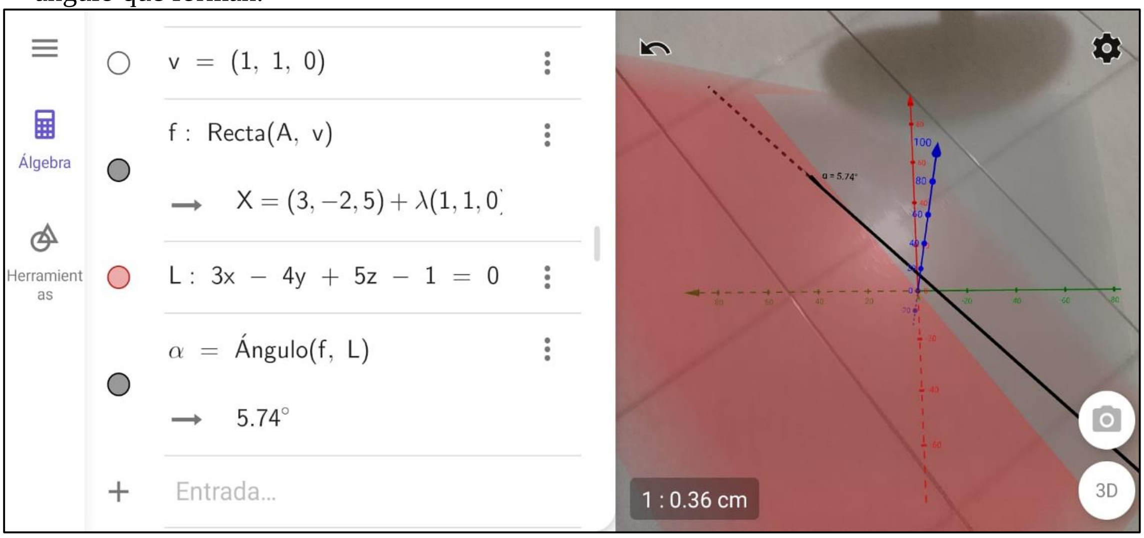
3. Se selecciona el área nuevamente para activar el comando AR.

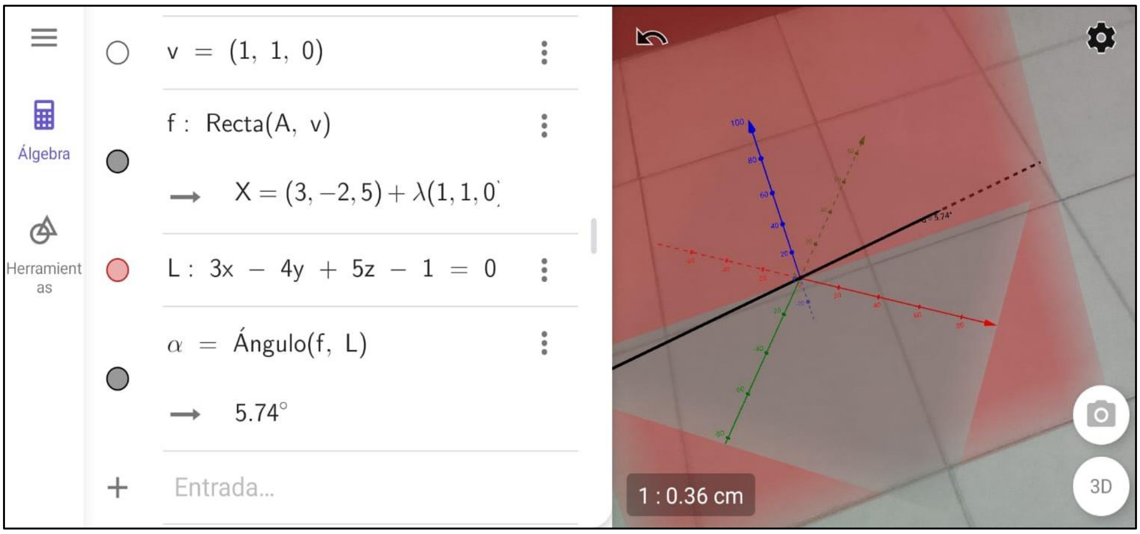


4. Se selecciona el origen de las coordenadas en el espacio que se considere apropiado



5. Se procede a inspeccionar el objeto para visualizar la disposición del plano, la recta y el ángulo que forman.





- **Actividad de cierre**

a. ¿Si un plano que es perpendicular a un segundo y a un tercero puedo concluir que los dos últimos también son perpendiculares?

b. ¿existe uno o una familia de planos perpendiculares a una recta?

c. ¿En qué caso no podría encontrar el ángulo entre dos planos?

d. ¿Una recta perpendicular a un plano es también perpendicular a su vector normal?

Heteroevaluación:

- **Calcular** el ángulo que se forma con las rectas **r** y **s** en cada de los siguientes casos:

a. $r: (x, y, z) = (-1, 0, -3) + k(3, 2, 2)$

$s: (x, y, z) = (2, -3, 0) + k(2, -2, -1)$

b. $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-1}{1}$

$s: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{1}$

- **Determinar** el ángulo que se forma con la recta **r** y el plano **L**en cada de los siguientes casos:

a. $r: (x, y, z) = (2, 1, 0) + k(1, -2, 4)$

$L: x - y + 3z - 1 = 0$

b.

$\boldsymbol{r}: \begin{cases} x + y - 3 = 0 \\ 2x + z - 1 = 0 \end{cases}$ $\boldsymbol{L}: 3x - z + 1 = 0$

<table>
<tr><td colspan="2">Recursos:
▪ Pizarra gráfica
▪ Texto de Matemáticas para bachillerato
▪ Software GeoGebra 3D</td></tr>
<tr><th>Elaborado por:</th><th>Revisado y aprobado por:</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Realizado por: López, Jaime, 2022.

4.3. Implementación de la secuencia didáctica con el software GeoGebra 3D con realidad aumentada en el aprendizaje del punto, recta, plano y sus interrelaciones.

Por motivos de la pandemia del COVID-19, las actividades académicas en la Unidad Educativa ‘‘El Empalme’’ en el periodo lectivo 2021-2022 se ejecutaron de manera virtual (online), dentro de este marco la aplicación de las secuencias didácticas elaboradas para la aplicación del software GeoGebra 3D con realidad aumentada para el aprendizaje de la geometría en el espacio con los estudiantes de bachillerato se las desarrolló a través de clases virtuales (online).

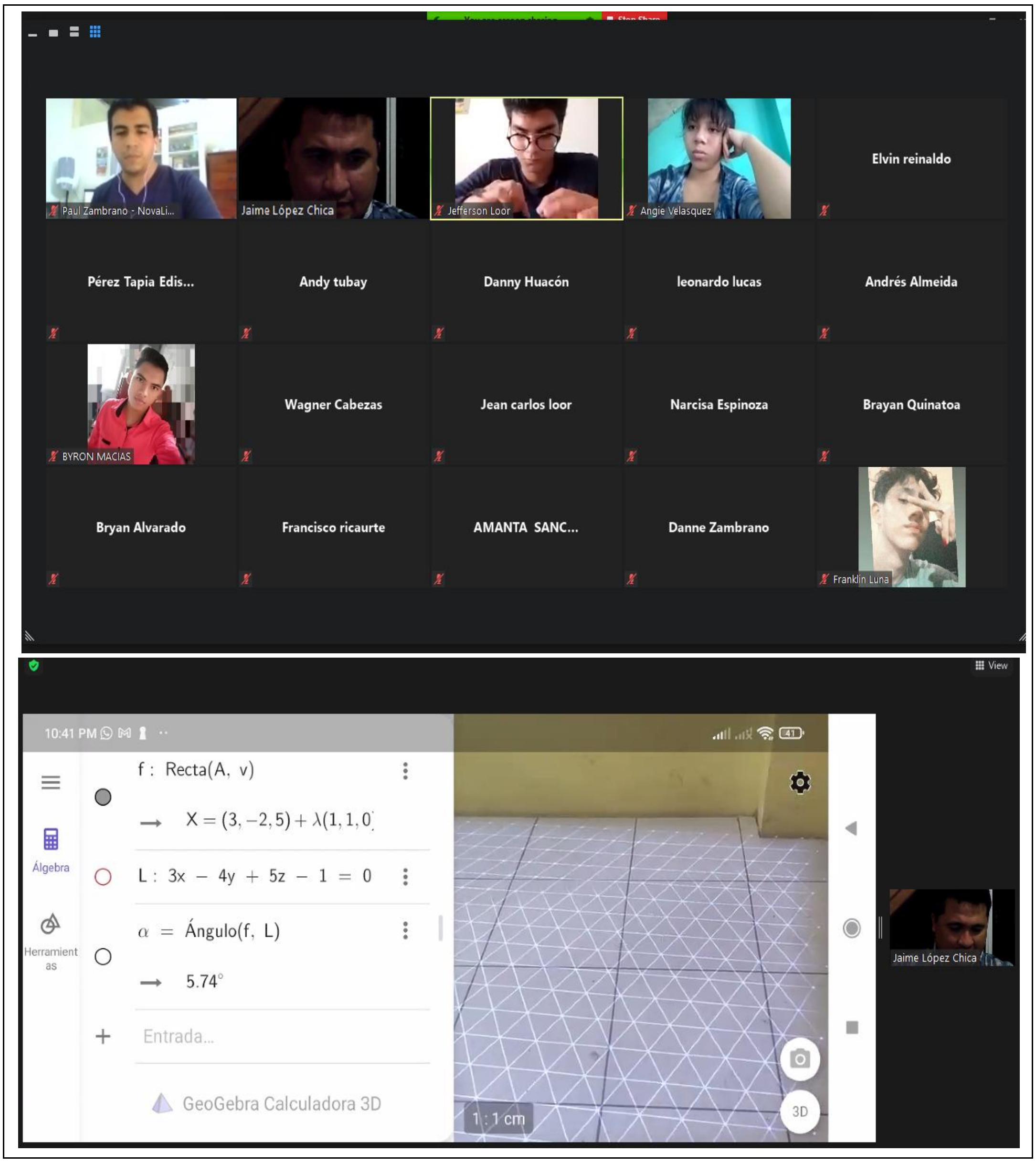


Figura 5-4: Clase 1, explicación de secuencia didáctica.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la Figura 5-4 (clase 1) se presenta a los estudiantes la secuencia didáctica que incorpora el uso del software GeoGebra 3D con realidad aumentada para resolver problemas. En las Figura 6-4 y Figura 7-4 (clase 2 y clase 3) se desarrollaron las clases a través de la resolución de ejercicios de recta, punto y plano en el espacio aplicando el GeoGebra 3D con realidad aumentada.

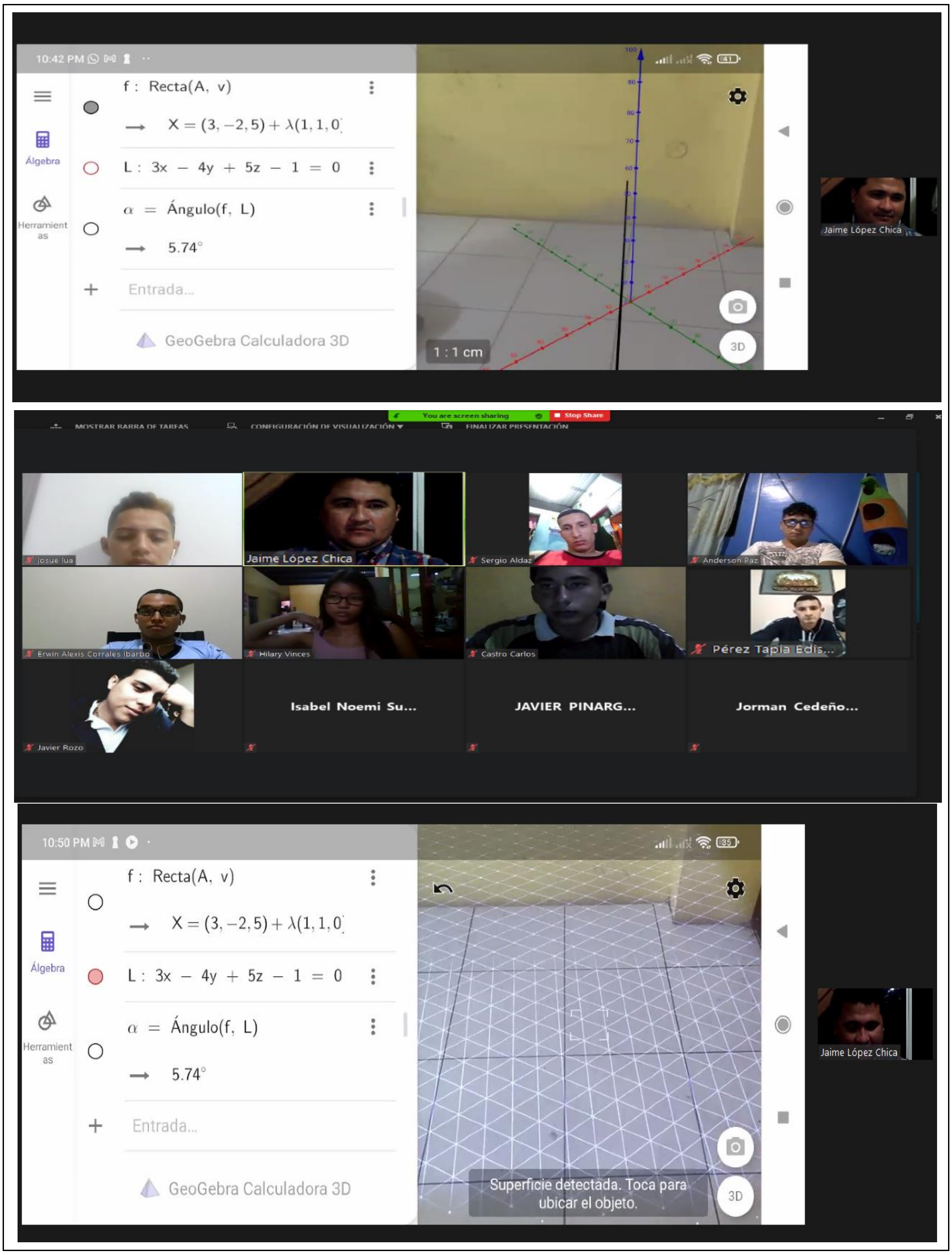


Figura 6-4: Clase 2, representación del plano y sus elementos con GeoGebra 3D con realidad aumentada.

Realizado por: López, Jaime, 2022.

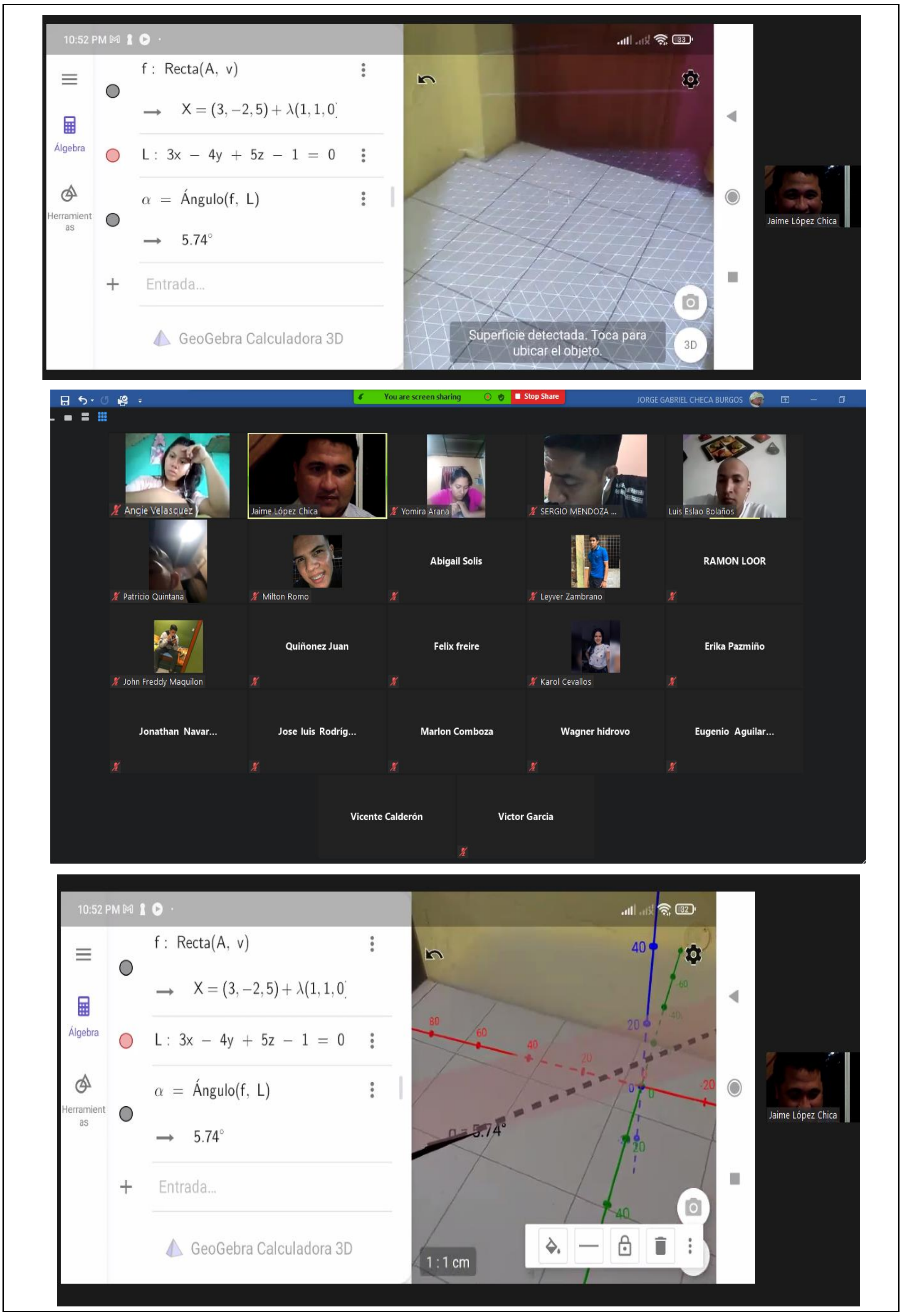


Figura 7-4: Clase 3, resolución de ejercicios de geometría en el espacio con GeoGebra 3D con realidad aumentada.

Realizado por: López, Jaime, 2022.

4.4. Validación del uso GeoGebra 3D con realidad aumentada en el aprendizaje de la geometría en el espacio.

4.4.1. Resultados de la evaluación final del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa ''El Empalme'', (grupo A).

Tabla 14-4: Resultados de la evaluación final (grupo A).

Código Estudiante	Calificación Obtenida
01	5.60
02	7.20
03	6.80
04	6.00
05	6.00
06	6.00
07	5.20
08	5.60
09	4.00
10	6.00
11	5.20
12	6.00
13	6.80
14	5.60
15	4.80
16	5.20
17	4.80
18	5.20
19	4.80
20	5.60
21	5.20
Promedio	**5.60**
Calificación Máxima	**7.20**
Calificación Mínima	**4.00**
Desviación Estándar	**0.76**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

La calificación promedio alcanzada por los estudiantes de Tercero de Bachillerato del grupo A en la prueba final fue de 5,60 puntos, el promedio alcanzado está debajo de los 7 puntos, calificación que es considerada como mínima por el Ministerio de Educación. Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes del grupo A alcanzaron aproximadamente un 56% la consecución de las destrezas con criterio de desempeño para la geometría en el espacio.

También se observa que existió una diferencia de 3.20 puntos entre el estudiante que alcanzó la calificación máxima con el estudiante que alcanzó la calificación mínima.

Tabla 15-4: Escala de calificaciones de la evaluación final grupo A.

Escala Cualitativa	**Escala Cuantitativa**	**Número de estudiantes**	**Porcentaje**
Domina los aprendizajes requeridos	9,00 – 10,00	0	0.00%
Alcanzó el aprendizaje requerido	7,00 – 8,99	1	4.76%
Próximo a alcanzar el aprendizaje requerido	4,01 – 6,99	19	90.48%
No alcanzó el aprendizaje requerido	≤ 4	1	4.76%
Total		**21**	**100.00%**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

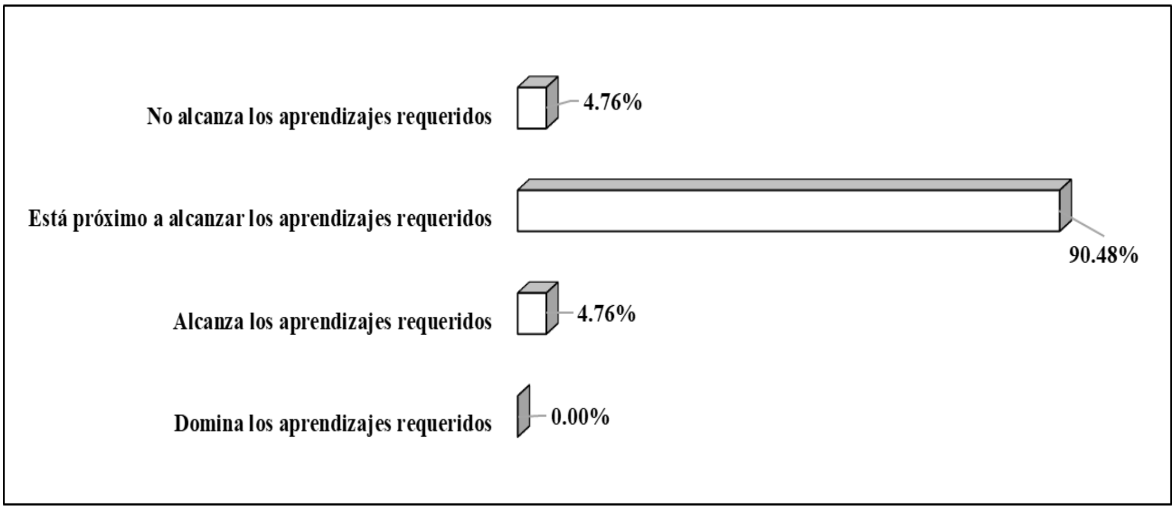


Figura 8-4: Escala de calificaciones de la evaluación final grupo A.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la evaluación final del grupo A, ningún estudiante de Tercero de Bachillerato domina los aprendizajes requeridos estando dentro del intervalo 9,00 – 10,00 puntos, un estudiante (4.76%) alcanzó los aprendizajes requeridos y está dentro del intervalo 7,00 – 8,99 puntos. De acuerdo a lo establecido por el Ministerio de Educación los estudiantes deben tener calificaciones que sean iguales o mayores a 7 puntos para ser promovido al siguiente nivel, es decir están prestos para estudiar otros temas de matemáticas. El 95.24% de estudiantes del curso no superaron la calificación de 7 puntos en la evaluación final según se aprecia en la Tabla 15-4 y Figura 8-4.

4.4.2. Resultados de la evaluación final del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa ‘‘El Empalme’’, luego de las clases de GeoGebra 3D con realidad aumentada (grupo B).

Tabla 16-4: Resultados de la evaluación final grupo B.

Código Estudiante	Calificación Obtenida
01	7.50
02	8.70
03	5.90
04	7.90
05	7.50
06	6.30
07	7.90
08	7.10
09	7.50
10	7.10
11	7.50
12	7.10
13	5.90
14	7.50
15	6.30
16	7.90
17	8.30
18	6.70
19	7.50
20	6.70
21	7.50
Promedio	**7.25**
Calificación Máxima	**8.70**
Calificación Mínima	**5.90**
Desviación Estándar	**0.74**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

La calificación promedio alcanzada por los estudiantes de Tercero de Bachillerato del grupo B fue de 7,25 puntos, el promedio alcanzado está por encima de los 7 puntos, calificación que es considerada como mínima por el Ministerio de Educación. Los resultados obtenidos evidencian que los estudiantes del grupo B alcanzaron aproximadamente un 73% la consecución de las destrezas con criterio de desempeño para la geometría en el espacio.

También se observa que existió una diferencia de 2.80 puntos entre el estudiante que alcanzó la calificación máxima con el estudiante que alcanzó la calificación mínima.

Tabla 17-4: Escala de calificaciones de la evaluación final luego de las clases de GeoGebra 3D con realidad aumentada (grupo B).

Escala Cualitativa	Escala Cuantitativa	Número de estudiantes	Porcentaje
Domina los aprendizajes requeridos	9,00 – 10,00	0	0.00%
Alcanzó el aprendizaje requerido	7,00 – 8,99	15	71.43%
Próximo a alcanzar el aprendizaje requerido	4,01 – 6,99	6	28.57%
No alcanzó el aprendizaje requerido	≤ 4	0	0.00%
	Total	**21**	**100.00%**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

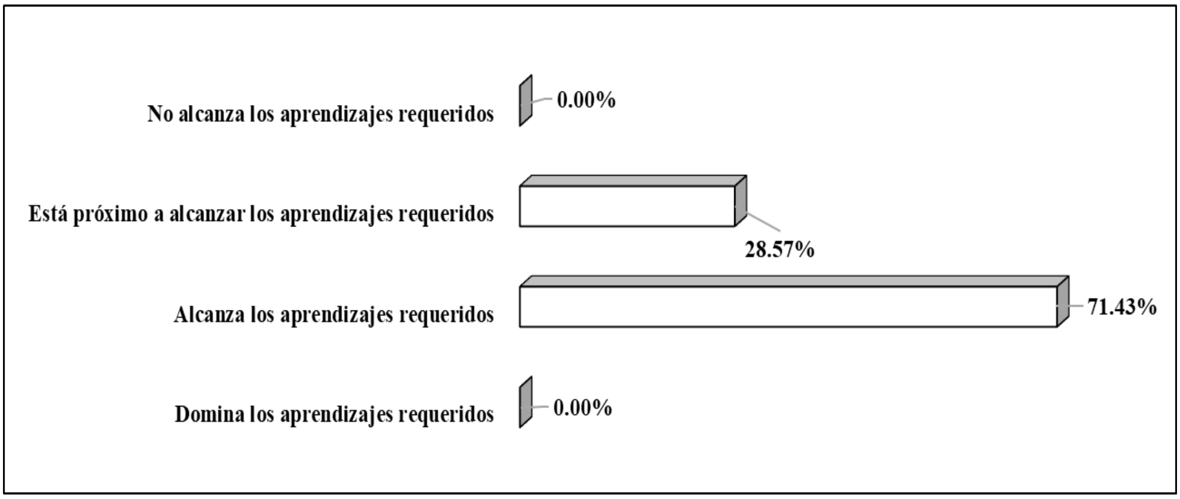


Figura 9-4: Escala de calificaciones de la evaluación final luego de la clase de GeoGebra 3D con realidad aumentada, grupo B.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la evaluación final después de la clase con el uso del GeoGebra 3D con realidad aumentada, ningún estudiante de Tercero de Bachillerato grupo B domina los aprendizajes requeridos estando dentro del intervalo 9,00 – 10,00 puntos, 15 estudiantes (71.43%) alcanzaron los aprendizajes requeridos y están dentro del intervalo 7,00 – 8,99 puntos. De acuerdo a lo establecido por el Ministerio de Educación los estudiantes deben tener calificaciones que sean iguales o mayores a 7 puntos, es decir están prestos para estudiar otros temas de matemáticas. El restante 28.57% de estudiantes del curso no superaron la calificación de 7 puntos según se aprecia en la Tabla 17-4 y Figura 9-4.

4.4.3. Comparación de los resultados de la evaluación final entre el grupo A y el grupo B del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa ‘‘El Empalme’’.

Tabla 18-4: Comparación de resultados evaluación final grupo A y B.

Código Estudiante	**Calificación Obtenida Grupo A**	**Calificación Obtenida Grupo B**
01	5.60	7.50
02	7.20	8.70
03	6.80	5.90
04	6.00	7.90
05	6.00	7.50
06	6.00	6.30
07	5.20	7.90
08	5.60	7.10
09	4.00	7.50
10	6.00	7.10
11	5.20	7.50
12	6.00	7.10
13	6.80	5.90
14	5.60	7.50
15	4.80	6.30
16	5.20	7.90
17	4.80	8.30
18	5.20	6.70
19	4.80	7.50
20	5.60	6.70
21	5.20	7.50
Promedio	**5.60**	**7.25**
Calificación Máxima	**7.20**	**8.70**
Calificación Mínima	**4.00**	**5.90**
Desviación Estándar	**0.76**	**0.74**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

La comparación de los resultados obtenidos en la evaluación final realizada al grupo A y al grupo B con respecto al promedio en las calificaciones el grupo B obtuvo un mayor promedio (7.25) en relación a lo obtenido por el grupo A (5.60), se aprecia también que respecto a la calificación mayor obtenida en el grupo A fue de 7.20 y del grupo B fue de 8.70, respecto con la calificación mínima el grupo A obtuvo 4.00 y el grupo B 5.90. La desviación estándar según se aprecia en la Tabla 18-4 y Figura 10-4 la del grupo B es menor.

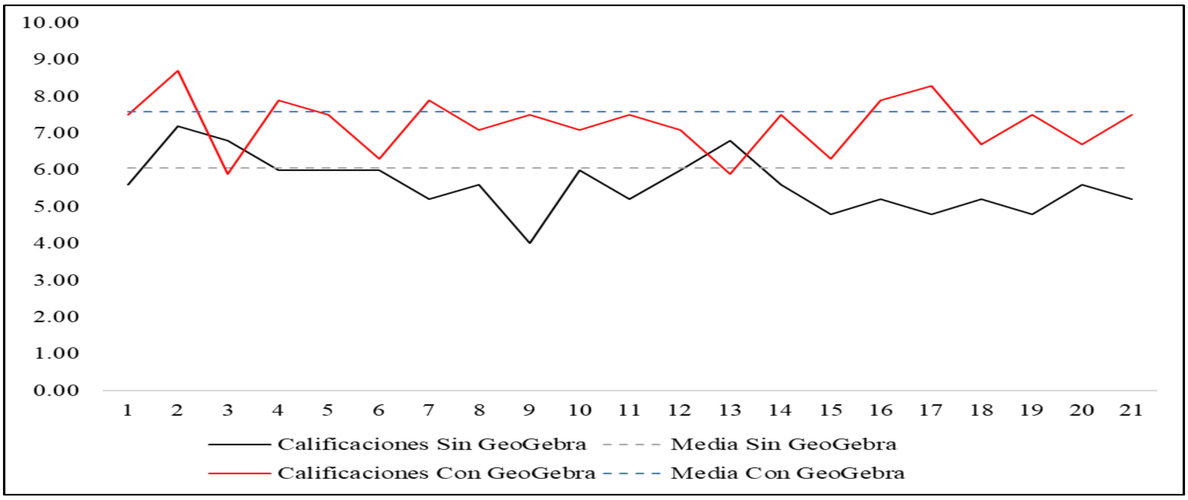


Figura 10-4: Comparación de resultados evaluación final grupo A y B.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la escala cualitativa la evaluación final ningún estudiante tanto del grupo A y del grupo B dominan los aprendizajes requeridos, los que alcanzaron los aprendizajes requeridos fue un estudiante (4.76%) del grupo A y 15 estudiantes (71.43%) del grupo B, en este sentido solo un estudiante (4.76%) del grupo A está próximo y no alcanzan los aprendizajes requeridos, según se aprecia en la Tabla 19-4 y Figura 11-4.

Tabla 19-4: Comparación de resultados evaluación final grupo A y B en escalas cualitativas.

Escala Cualitativa	**Escala Cuantitativa**	**Grupo A - Sin GeoGebra 3D**		**Grupo B - Con GeoGebra 3D**	
		Número de estudiantes	**Porcentaje**	**Número de estudiantes**	**Porcentaje**
Domina los aprendizajes requeridos	9,00 – 10,00	0	0.00%	0	0.00%
Alcanzó el aprendizaje requerido	7,00 – 8,99	1	4.76%	15	71.43%
Próximo a alcanzar el aprendizaje requerido	4,01 – 6,99	19	90.48%	6	28.57%
No alcanzó el aprendizaje requerido	≤ 4	1	4.76%	0	0.00%
Total		**21**	**100.00%**	**21**	**100.00%**

Realizado por: López, Jaime, 2022.

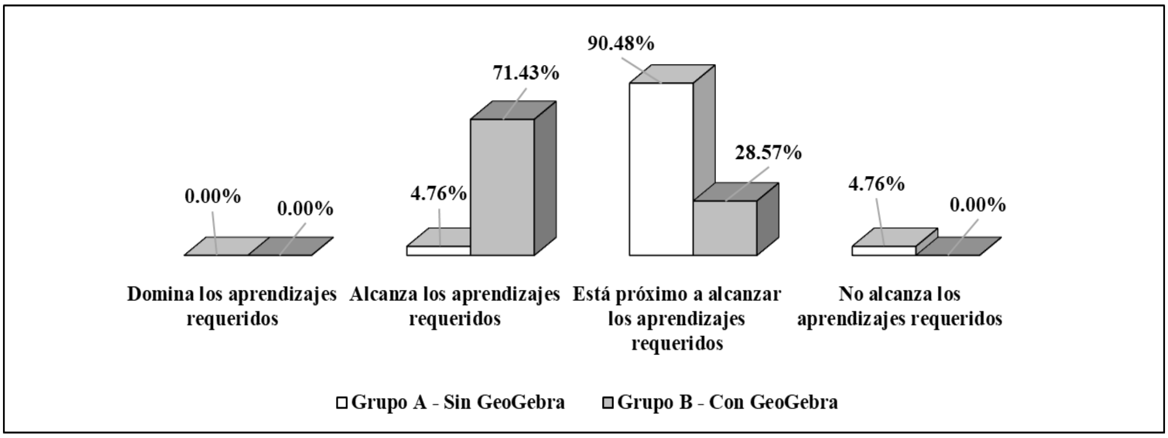


Figura 11-4: Comparación de resultados evaluación final grupo A y B en escalas cualitativas.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

4.4.4. Significancia de las calificaciones obtenidas en la evaluación final entre el grupo A y el grupo B del Tercero de Bachillerato de la Unidad Educativa ''El Empalme''.

La aplicación y uso del software GeoGebra 3D con realidad aumentada muestra una mejora en cuanto al alcance de logros de aprendizaje con respecto a la prueba de diagnóstico inicial y la evaluación final en el grupo A, puesto que antes de la aplicación la mayoría de los estudiantes no habían alcanzado un nivel de logro, ya que presentaban dificultades al identificar las características de la geometría en el espacio.

Para validar si existe diferencias entre las medias de las calificaciones obtenidas por los dos grupos (A y B), primero se verificó el comportamiento de los datos de cada grupo a través de pruebas de normalidad de los mismos, se procedió a verificar la distribución de frecuencias, el test de Shapiro-Wilk para confirmar la normalidad, la prueba F para la comparación de varianzas y posteriormente se aplicó la Prueba t Student para comprobar la diferencia significativa entre los datos.

4.4.4.1. Comportamiento de los datos grupo A.

Tabla 20-4: Datos Estadísticos Grupo A.

Estadístico	Valores
Media	5,60
Desviación Estándar	0,75
Valor Mínimo	4,00
Valor Máximo	7,20
Moda	6,00
Mediana	5,60

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Intervalos	Frecuencia
4,6 – 5,4	1
5,4 – 6,2	8
6,2 – 7,0	9
7,0 – 7,8	2
7,8 – 8,6	1

Tabla 21-4: Distribución de Frecuencia Grupo A.

Realizado por: López, Jaime, 2022.

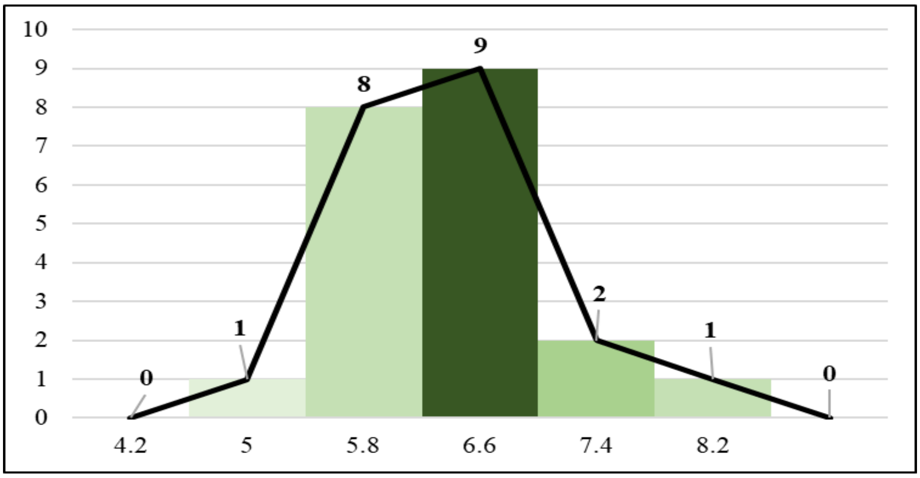


Figura 12-4: Distribución de Frecuencia Grupo A.

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Los datos estadísticos de la media, moda y mediana son semejantes y la forma del polígono de frecuencias sugiere una distribución normal, se realiza la prueba de Shapiro-Wilk para confirmar su normalidad.

El test de Shapiro-Wilk plantea la hipótesis nula que una muestra proviene de una distribución normal, luego se procede a elegir el nivel de significancia (0,05), y se plantea la hipótesis alternativa en donde que la distribución de los datos no es normal.

$H_0 = La\ distribución\ de\ los\ datos\ es\ normal$ (Hipótesis nula)

$H_1 = La\ distribución\ de\ los\ daros\ no\ es\ normal$ (Hipótesis alternativa)

Tabla 22-4: Test de Shapiro-Wilk Grupo A.

Descripción	Valores
p-value	0,445
alpha	0,05
normal	Yes

Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la prueba de Shapiro-Wilk (Tabla 22-4) se aprecia que el p-valor es mayor al valor de alfa (nivel de significancia) 0,05, en este sentido la hipótesis nula se acepta, concluyéndose que los datos del grupo A se comportan bajo una distribución normal.

4.4.4.2. Comportamiento de los datos grupo B.

Tabla 23-4: Datos Estadísticos Grupo B.

Estadístico	Valores
Media	7,25
Desviación Estándar	0,74
Valor Mínimo	5,90
Valor Máximo	8,70
Moda	7,50
Mediana	7,50

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Tabla 24-4: Distribución de Frecuencia Grupo B.

Intervalos	Frecuencia
6,1 – 6,7	2
6,7 – 7,3	4
7,3 – 7,9	3
7,9 – 8,5	10
8,5 – 9,1	1
9,1 – 9,1	1

Realizado por: López, Jaime, 2022.

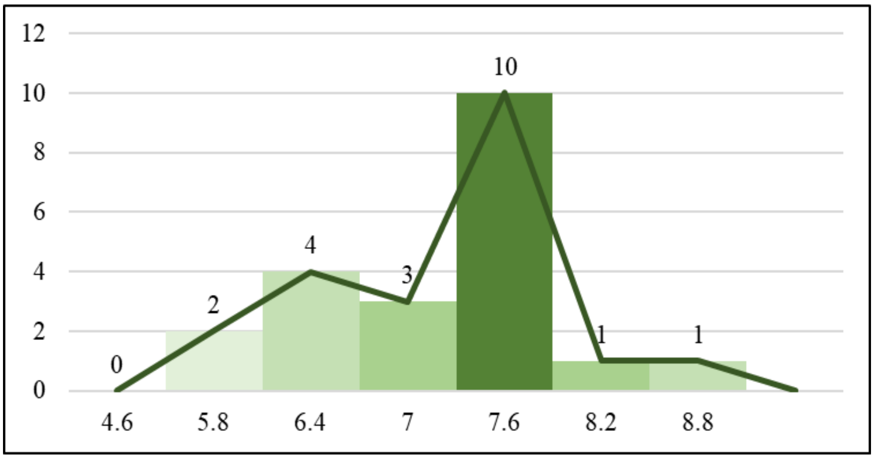


Figura 13-4: Distribución de Frecuencia Grupo B.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

Los datos estadísticos de la media, moda y mediana son semejantes y la forma del polígono de frecuencias sugiere una distribución normal, se realiza la prueba de Shapiro-Wilk para confirmar su normalidad.

El test de Shapiro-Wilk plantea la hipótesis nula que una muestra proviene de una distribución normal, luego se procede a elegir el nivel de significancia (0,05), y se plantea la hipótesis alternativa en donde que la distribución de los datos no es normal.

$H_0 = La\ distribución\ de\ los\ datos\ es\ normal$ (Hipótesis nula)
$H_1 = La\ distribución\ de\ los\ daros\ no\ es\ normal$ (Hipótesis alternativa)

Tabla 25-4: Test de Shapiro-Wilk Grupo B.

Descripción	Valores
p-value	0,436
Alpha	0,05
Normal	Yes

Realizado por: López, Jaime, 2022.

En la prueba de Shapiro-Wilk (Tabla 25-4) se aprecia que el p-valor es mayor al valor de alfa (nivel de significancia) 0,05, en este sentido la hipótesis nula se acepta, concluyéndose que los datos del grupo B se comportan bajo una distribución normal.

4.4.4.3. Prueba F y Prueba t Student.

Previo a la decisión sobre el método apropiado para comparar ambas poblaciones (datos grupo A y datos grupo B), se realiza la comparación de varianzas, para lo cual se utilizó la Prueba F, con una confianza del 95%, por tanto $\propto = 0.05$

El estadístico F es simplemente un cociente de dos varianzas.

$H_0 = Las\ varianzas\ de\ los\ datos\ son\ semejantes$ (hipótesis nula)
$H_1 = Las\ varianzas\ de\ los\ datos\ no\ son\ semejantes$ (hipótesis alternativa)

Tabla 26-4: Prueba F para varianza de dos muestras.

Descripción	Grupo A	Grupo B
Media	5,60	7,25
Varianza	0,57	0,55

Observaciones	21	21
Grados de Libertad	20	20
F	1,044	
P(F<=f) una cola	0,461	
Valor crítico para F (una cola)	2,124	

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Se observa que el estadístico F es menor que el valor crítico, en este sentido se acepta la hipótesis nula, es decir que las varianzas de los datos de los grupos son semejantes.

Aplicando la regla de decisión de la prueba de hipótesis t de student para dos muestras independientes con N<30 con distribución normal varianzas semejantes:

$H_0 = No\ hay\ diferencias\ significativas$ (Hipótesis Nula)

$H_1 = Existen\ diferencias\ significativas$ (Hipótesis Alternativa)

Tabla 27-4: Prueba t de Student para las calificaciones obtenidas del grupo A y B.

	Grupo A	Grupo B
Media	5,60	7,25
Varianza	0,57	0,55
Observaciones	21	21
Varianza Agrupada	0,56	
Diferencia hipotética de las medias	0	
Grados de Libertad	40	
Estadístico t	**-7,1308061**	
P(T<=t) una cola	6,1694E-09	
Valor crítico de t (una cola)	1,68385101	
P(T<=t) dos colas	1,2339E-08	
Valor crítico de t (dos colas)	**2,02107539**	

Realizado por: López, Jaime, 2022.

Como el valor del “estadístico t” es menor que el “valor critico de t (zona de rechazo en dos colas)”, se puede desechar la hipótesis nula y aceptar la hipótesis alternativa que comprueba la existencia de diferencias significativas entre las medias, ya que presenta un valor de significancia menor a 0.05, según se detalla en la Tabla 27-4 y Figura 14-4. Considerando los datos estadísticos del resultado de la evaluación final, la media de las calificaciones alcanzado por el grupo B es 7.25 puntos frente a los del grupo A que es de 5,60 puntos, observándose una diferencia positiva de 1.65 puntos, por tanto, se confirma que la enseñanza con la aplicación del software GeoGebra 3D con realidad aumentada como instrumento didáctico incide significativamente en el aprendizaje de la geometría en el espacio en los estudiantes de tercero de bachillerato de la Unidad Educativa El Empalme.

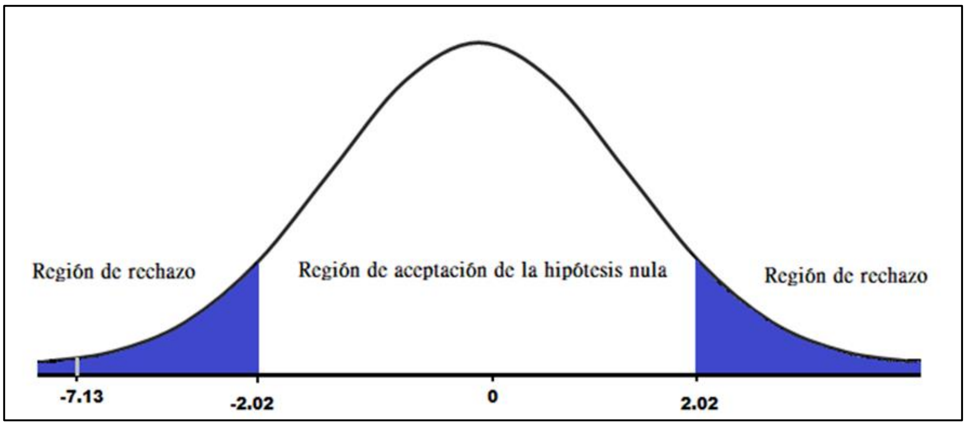


Figura 14-4: Prueba t de Student para las calificaciones obtenidas del grupo A y B.
Realizado por: López, Jaime, 2022.

CONCLUSIONES

Una vez realizado el diagnostico a los estudiantes se notó una carencia de conocimientos básicos para incursionar en la geometría en el espacio, los mismos en su mayoría no alcanzaban los aprendizajes requeridos, estaban próximos a alcanzarlos un gran porcentaje no alcanzó los mismos, ambos grupos A y B sin embargo mostraron muchas similitudes en el desempeño, tanto como el promedio y la dispersión de los datos.

Las secuencias didácticas elaboradas permiten a los estudiantes mejorar la experiencia visual, desarrollar la calidad de percepción, aplicar procedimientos para medir y orientarse en el espacio, y en este sentido elevar los niveles de comprensión de los tópicos básicos y generales de geometría en el espacio, como punto, recta, plano y sus interrelaciones con la asistencia del software GeoGebra 3D con realidad aumentada. Por lo tanto como herramienta tecnológica la Realidad Aumentada incentiva y ayuda a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en el estudiante, ya que esta herramienta brinda momentos de atención hacia el objeto que se está observando, evidenciándose el desarrollo creativo y aplicando diferentes técnicas para la resolución de problemas de la geometría en el espacio, el docente desarrolla la temática de la clase mientras se muestran los objetos virtuales elaborados en el software de realidad aumentada, y de esta manera la clase se hace más dinámica e interactiva a su vez.

La coyuntura ocasionada por la pandemia del COVID-19, en la Unidad Educativa ‘‘El Empalme’’ en el periodo lectivo 2021-2022 las actividades académicas de la institución se desarrollaron de manera virtual, por tal razón la implementación de las secuencias didácticas elaboradas para la aplicación del software GeoGebra 3D con realidad aumentada como herramienta tecnológica en el aprendizaje de la geometría en el espacio de los estudiantes de bachillerato se las desarrolló, implementó y explicó a través de clases virtuales.

La aplicación del software GeoGebra 3D con realidad aumentada como instrumento didáctico mejoró el nivel de compresión de los tópicos de geometría en el espacio, punto, recta, plano y sus interrelaciones en los estudiantes de bachillerato de la Unidad Educativa ‘‘El Empalme’’, al analizar estadísticamente los resultados y obedeciendo ambos grupos a una distribución normal con dispersiones en sus datos semejantes se decidió realizar una Prueba T de Student para corroborar si efectivamente existían diferencias significativas, mostrando resultados afirmativos.

RECOMENDACIONES

En la prueba de diagnóstico realizada a los dos grupos de estudiantes se mostraron varias falencias; para mejorar este escenario es necesario implementar nuevos recursos tecnológicos y metodológicos de enseñanza.

Es muy importante que los docentes se capaciten en temas relacionados a la tecnología virtual, debido a que, en la actualidad en las etapas de formación de los estudiantes, estos manipulan medios digitales, tecnología que es de gran ayuda para los docentes al momento de facilitar al estudiante un mejor entendimiento por los temas o tópicos que se tratan en las clases de cada asignatura.

Los resultados obtenidos después de la implementación de las secuencias didácticas elaboradas y propuestas fueron satisfactorios; sin embargo, se pueden mejorar si antes de desarrollar las secuencias didácticas se realizara una nivelación de los conocimientos en los tópicos necesarios para mejorar el nivel de comprensión de la geometría en el espacio, plano, recta, punto y sus interrelaciones. Asimismo, los docentes del área de matemáticas del nivel de bachillerato que se interesen en utilizar las secuencias didácticas diseñadas en el presente estudio, seleccionen técnicas e instrumentos de evaluación adecuados para evaluar de manera eficiente el proceso de enseñanza-aprendizaje respecto a los logros alcanzados.

El presente estudio, refuerza el proceso de enseñanza-aprendizaje en las instituciones educativas, especialmente el papel que juegan los docentes, siendo los principales agentes del cambio para el proceso de integración de las tecnologías de la información y comunicación en la educación; de este modo es importante una adecuada planificación de estrategias en la formación y capacitación de los docentes.

BIBLIOGRAFÍA

Acaro calva, o. (2021). *El GeoGebra en la enseñanza de la matemática en el Colegio Nacional Andrés Bello.* Quito: Facultad de Ciencias de la Educación. Pontificia Universidad Católica del Ecuador. Obtenido de http://repositorio.puce.edu.ec/bitstream/handle/22000/18917/ACARO%20CALVA-%20TESIS.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Acosta Alamilla, S. (2012). *Pedagogía por Competencias. Aprender a pensar.* México: Trillas.

aguilar hito, a. (2015). *Metodología con el software GeoGebra para desarrollar la capacidad de comunicar y representar ideas matemáticas con funciones lineales.* Piura: Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Piura.

Aldana Taniguche, N. (2021). *Aplicación del software GeoGebra en el desarrollo de capacidades en el aprendizaje de la función lineal en estudiantes de economía de la Universidad Nacional Daniel Alcides Carrión. Pasco-2018.* Lima: Universidad San Martín de Porres. Instituto para la Calidad de la Educación. Obtenido de https://repositorio.usmp.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12727/7622/aldana_tnt.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Aray Andrade, C., Párraga Quijano, o., & Chun Molina, R. (2019). *La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: análisis del proceso de nivelación dela Universidad Técnica de Manab.* Portoviejo: Revista de Ciencias Humanísiticas y Sociales. Obtenido de https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1622/1817

Arias, r., & Leiva, e. (2013). *Construcciones dinámicas con GeoGebra para el aprendizaje-enseñanza de la matemática.* Santo Domingo, República Dominicana: I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe. Obtenido de http://ciaem-redumate.org/memorias-icemacyc/297-547-1-DR-T.pdf

Blázquez Sevilla, A. (2017). *Realidad Aumentada en Educación.* Madrid: Universidad Politécnica de Madrid. Gabinete de Tele-Educación. Obtenido de https://oa.upm.es/45985/1/Realidad_Aumentada__Educacion.pdf

Calderón Zambrano, R. (2017). *Logros de aprendizaje en funciones lineales y cuadráticas mediante secuencia didáctica con el apoyo del GeoGebra.* Cuenca: Universidad de Cuenca. Facultad de Filosofía, Leras y Ciencias de la Educación. Obtenido de https://dspace.ucuenca.edu.ec/bitstream/123456789/27378/1/Tesis.pdf

Campoverde Cando, R. (2018). *Realidad aumentada en el aprendizaje significativo en la asignatura ciencias naturales. Propuesta diseño de una aplicación móvil con imagines de realidad aumentada.* Guayaquil: Universidad de Guyaquil. Facultad de Filosofía, letras y Ciencias de la Educación. Obtenido de http://repositorio.ug.edu.ec/bitstream/redug/33566/1/BFILO-PSM-18P101.pdf

Cevallos Chamba, D., & Huacho Paucar, J. (2019). *Implementación de GeoGebra para la resolución de problemas de perímetro y área en el décimo B, Unidad Educativa Ricardo Muñoz Chávez.* Azogues: Carrera de Educación básica. Universidad Nacional de Educación. Obtenido de http://repositorio.unae.edu.ec/bitstream/56000/1076/1/TESIS.pdf

Chanaguano Altamirano, J. (2016). *Diseño de realidad aumentada enla enseñanza del dibujo técnico para los estudiantes de primer año de bachillerato de la Unidad Educativa Guayaquil.* Ambato: Facultad de Diseño gráfico Publicitario. Universiad Técnica de Ambato. Obtenido de https://repositorio.uta.edu.ec/bitstream/123456789/23724/1/Proyecto%20Realidad%20Aumentada%20Listo%20para%20empastar%20final.pdf

De La Torre, J., Martin Dorta, N., Saorin Pérez|, J., Carbonell Carrera, C., & Contero González, M. (2013). *Entorno de aprendizaje ubicuo con realidad aumentada y tabletas para estimular la comprensión del espacio tridimensional.* Revista de Educación a Distancia. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/236259757_Entorno_de_aprendizaje_ubicuo_con_realidad_aumentada_y_tabletas_para_estimular_la_comprension_del_espacio_tridimensional

Equipo Editorial, E. (5 de Agosto de 2021). *Concepto*. Recuperado el 24 de Octubre de 2021, de Concepto.de.: https://concepto.de/aprendizaje-2/

Feldman, R. (2010). *Psicología con aplicaciones en países de habla hispana.* México: McGrawHill educación.

Fernández Puma, F. (2019). *Enseñanza - Aprendizaje del a función lineal mediante GeoGebra en 10mo año de EGB de la Unidad Educativa Luis Cordero de la ciudad de Azoguez.* Azoguez: Univeesidad Nacional de Educación. Carrera de Educación Básica. Obtenido de http://repositorio.unae.edu.ec/bitstream/123456789/1439/1/FABIAN%20FERNANDES%20TT.pdf

Fombona Cadavieco, J., & Pascual Sevillano, M. (2016). *La producción científica sobre Realidad Aumentada, un análisis de la situación educativa desde la perspectiva SCOPUS.* Revista de Educación Mediática y TIC.

García López, H. E., & Orozco Martínez, I. J. (2019). *Uso de GeoGebra como recurso didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de funciones lineales, Noveno grado, turno vespertino, Centro Escolar Público Rubén Darío, San Dionisio, Matagalpa, segundo semestre 2018.* Managua: Univwesidad Nacional Autónoma de Nicaragua, Managua. Facultad Regional Multidisciplinaria, Matagalpa. Obtenido de https://repositorio.unan.edu.ni/12131/1/7084.pdf

Gómez Carmona, J., & López Quintero, D. (2016). *Realidad aumentada como herramienta que potencialice el aprendizaje significativo en geometría básica del grado tercero de la Institución educativa Instituto Estrada.* Pereira: Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Tecnológica Pereira.

González Parra, M. (2017). *Realidad aumentada en el proceso de enseñanaza-aprendizaje en la asignatura de Ciencias Naturales, unidad 4 de décimo año de EGB, en la Unidad Educativa "Gran Bretaña", periodo 2016-2017.* Quito: Universidad Central del Ecuador. Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación. Obtenido de http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/11523/1/T-UCE-0010-1855.pdf

Guayta Sailema, C. (2018). *AR-BOOK como estrategia de aprendizaje del razonamiento espacial en educación media.* Ambato: Pontificia Universidad Católica del Ecuador|. Obtenido de https://repositorio.pucesa.edu.ec/bitstream/123456789/2417/1/76700.pdf

Guillén Cabal, C. (2019). *Realidad aumentada en el proceso de enseñanza - aprendizaje en Química, del primero de Bachillerato General Unificado de la Unidad Educativa Juan Montalvo, 2019 - 2020.* Quito: Universidad Central del Ecuador. Facultad de Filosofía, Letras y Ciencias de la Educación. Obtenido de http://www.dspace.uce.edu.ec/bitstream/25000/22080/1/T-UCE-0010-FIL-986.pdf

Huayta Catari, E. (2015). *Aplicación del software GeoGebra y su influencia en el aprendizaje de las funciones lineales en los estudiantes del segundo grado de educación secundaria de la I.E. ´´Clorinda Matto de Turner´´, Distrito Suykutambo, provincia Espinar, Cusco - 2015.* Arequipa: Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de San Agustín.

Huerta M. (3 de Marzo de 2020). *Magisterio*. Obtenido de ¿Qué es la enseñanza?: https://www.magisterio.com.co/articulo/que-es-la-ensenanza

Jara Reinoso, A. (2020). *Realidad Aumentada aplicada a la enseñanza de la Física de Primero de Bachilerato.* Logroño: Universidad Internacional de la Rioja. Obtenido de https://reunir.unir.net/bitstream/handle/123456789/9955/Jara%20Reinoso%2C%20Andr%C3%A9s.pdf?sequence=1&isAllowed=y

López Escudero, O., & García Peña, S. (2019). *La enseñanza de la Geometría.* México: Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. Obtenido de https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf

López Pulido, C., Hormechea Jiménez, K., González Rodríguez, L., & Camelo Quintero, Y. (2019). *Uso de la realidad aumentada como estrategia de aprendizaje para la enseñanza de las ciencias naturales.* Bogotá: Facultad de Educación. Universidad Cooperativa de Colombia. Obtenido de https://repository.ucc.edu.co/bitstream/20.500.12494/14569/1/2019_realidad_aumentada_estrategia..pdf

Moya Martínez, A. (2010). *Recursos didácticos en la enseñanza.* Obtenido de https://archivos.csif.es/archivos/andalucia/ensenanza/revistas/csicsif/revista/pdf/Numero_26/ANTONIA_MARIA_MOYA_MARTINEZ.pdf

Ovalle Barreto, S., & Vásquez Fonseca, J. (2020). *Realidad aumentada, una herramienta para la motivación en el aprendizaje de la Geometría.* Obtenido de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442020000400056

Rigueros Bello, C. (2017). *La realidad aumentada: lo que debemos saber.* Bogotá. Obtenido de https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/tia/article/view/11278/pdf

Rizzardi, S., Carzola, L., Solari, F., Calvo, G., Viceconte, F., Ávalos, A., & Gamboa, P. (Agosto de 2019). *Uso e importancia de las TIC's en la enseñanza Universitaria - Parte 1.* Obtenido de Didáctica y TIC. Blog de la Comunidad virtual de práctica "Docentes en línea": https://blogs.ead.unlp.edu.ar/didacticaytic/2019/08/06/uso-e-importancia-de-las-tics-en-la-ensenanza-universitaria-parte-3/

Rodríguez, H., Gamboa, M., Rodríguez, M., & Díaz, O. (2016). *La geometría asistida por GeoGebra.* Obtenido de https://revista.redipe.org/index.php/1/article/view/34/32

Sagñay Valente, J. A. (2017). *La utilización de GEOGEBRA, como recurso didáctico en el aprendizaje de funciones, para el décimo año de la Unidad Educativa Amelia Gallegos*

Díaz. Periodo 2016 – 2017. Riobamba: Facultad de Ciencias de la Educación, Humanas y Tecnologías. Universidad Nacional del Chimborazo.

Torres Garibay, R. (2016). Las Tecnologías de Informarción y Comunicación en las Organizaciones. En D. Reyes, G. Bribiesca, V. Carrillo, A. Corona, R. Cruz, Y. Ramírez, . . . R. Torres, *Tecnologías de Informarción y Comunicación en las Organizaciones*. México: Universidad Nacional Autónoma de México. Obtenido de https://docplayer.es/58405013-Tecnologias-de-informacion-y-comunicacion-en-las-organizaciones.html

Vargas Murillo, G. (2017). *Recursos educativos didácticos en el procesos enseñanza aprendizaje.* Obtenido de http://www.scielo.org.bo/pdf/chc/v58n1/v58n1_a11.pdf

Vilca Pacco, R. (2019). *Aplicación del software GeoGebra y su influencia en el aprendizaje de áreas y volúmenes de sólidos de revolución en el cálculo integral en los estudiantes del primer año de la facultad de ingenirías de la Universidad Continental Arequipa - 2017.* Arequipa: Escuels de Posgrado. Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa. Obtenido de http://repositorio.unsa.edu.pe/bitstream/handle/UNSA/8427/EDMvipar.pdf?sequence=1&isAllowed=y

ANEXOS

ANEXO A

FORMATO EVALUACIÓN DE DIAGNÓSTICO

espoch Instituto de Posgrado y Educación Continua	**EVALUACIÓN DE DIAGNÓSTICO**		
Nivel: Bachillerato General	**Área**: Matemática	**Asignatura:** Matemática	**Periodo Lectivo:** 2021 - 2022
Grado: Tercero Bachillerato	**Jornada:** Nocturna	**Quimestre:** Segundo	
Docente: Ing. Jaime López		**Bloque Curricular:**	
Criterio esencial de evaluación	Efectúa operaciones en el espacio (tres dimensiones) con vectores, rectas y planos; identifica si son paralelos o perpendiculares, y halla sus intersecciones. (Ref. CE.M.5.7.)		
Indicadores de evaluación	Opera analítica, geométrica y gráficamente, con vectores, rectas y planos en el espacio; expresa la ecuación de la recta de forma paramétrica y vectorial; y determina la ortogonalidad de los mismos, para efectuar aplicaciones geométricas. (Ref. I.M.5.7.1.)		
Estudiante:		**Fecha:**	

Destreza con Criterio de desempeño (DCD)	**Ítems a evaluar**	**Logros alcanzados**
Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la	Marco con una X, sobre la celda adyacente que corresponda a la respuesta correcta de los siguientes enunciados: **1. ¿Al eje de las ordenadas se le conoce también como eje de las…?** **a.** X [ ] **b.** Y [ ] **c.** Z [ ] **d.** P [ ]	____/9

recta, y graficarlas en R3. (Ref. M.5.2.20.)	**2. ¿Al punto cuyas coordenadas son (0, 0, 0) se le llama como…?** **a.** Abscisas ☐ **b.** Origen ☐ **c.** Ordenadas ☐ **d.** Punto final ☐ **3. ¿Los signos del octante III son…?** **a.** (+ , - , +) ☐ **b.** (- , - , +) ☐ **c.** (+ , + , -) ☐ **d.** (- , - , -) ☐ **4. ¿La característica principal de las rectas perpendiculares es…?** **a.** Son líneas que siempre se cortan ☐ **b.** Son líneas que se cortan formando un ángulo de 90° ☐ **c.** Son líneas que se cortan en cualquier punto ☐ **d.** Son líneas que nunca se cortan ☐ **5. En su orden, los puntos A (-1 , -4 , 1); B (2 , -9 , 3) y C (-7 , 3 , 3), ¿están en los octantes…..?** **a.** III , IV , VII ☐ **b.** III , VI , II ☐ **c.** V , IV , II ☐ **d.** III , IV , II ☐	

	6. Responda Verdadero (V) o Falso (F) a los siguientes enunciados. **V** **F** **a.** ¿Dos rectas en el espacio que no son paralelas necesariamente tienen un punto en común? **b.** ¿La intersección de dos planos no paralelos generan una recta? **7. Completar los siguientes enunciados.** **a.** El vector dirección de dos rectas paralelas necesariamente será……. **b.** Para poder definir una recta a más de la dirección se necesita por lo menos un….	
Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar la distancia entre dos puntos A y B en R3 como la norma del vector. (Ref. M.5.2.19.)	**8. Dados $\boldsymbol{A = (2, -1, 4)}$ y $\boldsymbol{\vec{v} = (1, 0, -2)}$, encuentre la ecuación vectorial $\boldsymbol{\vec{m}}$** **a.** $\vec{m} = (1,0,-2) + \propto (2,-1,4)$ **b.** $\vec{m} = (2,-1,4) + \propto (1,0,-2)$ **c.** $\vec{m} = (3,-1,2) + \propto (1,0,-2)$ **d.** $\vec{m} = (2,-1,4) + \propto (3,-1,2)$ **9. ¿Un punto P que pasa por la recta $\boldsymbol{\vec{v} = (2, -1, 2) + \propto (0, 0, -2)}$ es…?** **a.** P = (2 , -1 , 2) **b.** P = (2 , -1 , 2) **c.** P = (2 , -1 , 2) **d.** P = (2 , -1 , 2)	____/4

	10. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A = (3, 1, -2)$ y $B = (5, 2, -1)$ **11. Escriba las ecuaciones implícitas de la recta que pasa por el punto $A = (1, -1, 1)$ y comparte la misma dirección del vector $\vec{v} = (3, 3, -2)$**	
	Puntaje Total	**_____/13**
	Equivalencia sobre 10	**_____/10**

Elaborado por:	**Revisado y aprobado por:**
Ing. Jaime López Chica	
Fecha:	Fecha:
Firma:	Firma:

ANEXO B

FORMATO EVALUACIÓN FINAL

espoch · Instituto de Posgrado y Educación Continua	**EVALUACIÓN FINAL**		
Nivel: Bachillerato General	**Área**: Matemática	**Asignatura:** Matemática	**Periodo Lectivo:** 2021 - 2022
Grado: Tercero Bachillerato	**Jornada:** Nocturna	**Quimestre:** Segundo	
Docente: Ing. Jaime López		**Bloque Curricular:**	
Criterio esencial de evaluación	Efectúa operaciones en el espacio (tres dimensiones) con vectores, rectas y planos; identifica si son paralelos o perpendiculares, y halla sus intersecciones. (Ref. CE.M.5.7.)		
Indicadores de evaluación	Opera analítica, geométrica y gráficamente, con vectores, rectas y planos en el espacio; expresa la ecuación de la recta de forma paramétrica y vectorial; y determina la ortogonalidad de los mismos, para efectuar aplicaciones geométricas. (Ref. I.M.5.7.1.)		
Estudiante:		**Fecha:**	

Destreza con Criterio de desempeño (DCD)	**Ítems a evaluar**	**Logros alcanzados**
Escribir y reconocer la ecuación vectorial y paramétrica de una recta a partir de un punto de la recta y un vector dirección, o a partir de dos puntos de la recta, y graficarlas en	Marco con una X, sobre la celda adyacente que corresponda a la respuesta correcta de los siguientes enunciados: **1. ¿Una recta puede estar definida por …?** **a.** Un punto ☐ **b.** Dos puntos ☐ **c.** Tres puntos ☐ **2. La ecuación vectorial de la recta puede expresarse en forma** **a.** Solo si corta el eje x ☐ **b.** Solo si corta el eje y ☐ **c.** Solo si corta el eje z ☐ **d.** En todos los casos ☐	**____/9**

R3. (Ref. M.5.2.20.)	**3. Identificar cuál de las siguientes rectas son paralelas a la recta:** $\boldsymbol{r} = (\mathbf{5}, -\mathbf{5}, \mathbf{2}) + \propto (\mathbf{0}, \mathbf{1}, -\mathbf{2})$**:** **a.** $m = (5, -5,2) + k(1,1, -3)$ **b.** $d = (1, -7,2) + t(0,1, -2)$ **c.** $r = (0,1, -2) + \propto (5, -5,2)$ **4. ¿Cuál de las siguientes respuestas es consistente con la ecuación general del plano?** **a.** $\pi(M, \vec{v}, \vec{p})$ donde $M = (2, -1,4), \vec{v} = (1,0, -2), \vec{p} = (0,3, -2)$ **b.** $\pi(M, \vec{v},)$ donde $M = (2, -1,4), \vec{v} = (1,0, -2)$ **c.** $3x + 12y - z + 3 = 0$ **d.** $P = (1, -9,2) + \propto (0,1, -2)$ **5. Dados** $\boldsymbol{A} = (\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{4})$ **y** $\vec{\boldsymbol{v}} = (\mathbf{1}, \mathbf{0}, -\mathbf{2})$**, encuentre la ecuación vectorial** $\overrightarrow{\boldsymbol{m}}$**:** **a.** $\vec{m} = (1,0, -2) + \propto (2, -1,4)$ **b.** $\vec{m} = (2, -1,4) + \propto (1,0, -2)$ **c.** $\vec{m} = (3, -1,2) + \propto (1,0, -2)$ **d.** $\vec{m} = (2, -1,4) + \propto (3, -1,2)$ **6. Responda Verdadero (V) o Falso (F) a los siguientes enunciados.** **V F** **a.** ¿Dos vectores que no son linealmente dependientes pueden definir la dirección de un plano? **b.** ¿La intersección de dos planos paralelos generan una recta? **7. Completar los siguientes enunciados.**	

<table>
<tr>
<td></td>
<td>

a. El vector normal de dos planos paralelos necesariamente es …….

----

b. Con un punto y dos vectores puedo definir …………………. en el espacio

</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>Calcular el producto escalar entre dos vectores y la norma de un vector para determinar la distancia entre dos puntos A y B en R3 como la norma del vector. (Ref. M.5.2.19.)</td>
<td>

8. Identifique y selección el punto P que pasa por la recta: $\boldsymbol{m = (5,-1,1) + \propto (2,1,0)}$ **; ¿es?**

a. $P = (-9,-1-1)$

b. $P = (5,-1,1)$

c. $P = (2,-1,0)$

d. $P = (9,1,1)$

9. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{A = (2\,,1\,,-3)}$ **y** $\boldsymbol{B = (4\,,2\,,-1)}$

10. Encuentre la ecuación paramétrica y vectorial de la recta que tiene como dirección el vector $\boldsymbol{\vec{v} = (3,3,-2)}$ **y pasa por el origen.**

11. El plano $\boldsymbol{\pi}$ **pasa por el punto** $\boldsymbol{A = (2,-1,4)}$ **y es paralelo al plano que contiene a los vectores** $\boldsymbol{\vec{v} = (1,6,-2)}$, $\boldsymbol{\vec{u} = (0,1,3)}$**, encuentre dos puntos que contenga el plano y otra expresión de la ecuación vectorial.**

12. Hallar el plano L perpendicular al plano L1; $\boldsymbol{2x + 2y - 5z + 3 = 0}$ **y que contiene a la recta** $\boldsymbol{f = (0,-1,1) + \propto (5,1,3)}$

</td>
<td>____/6</td>
</tr>
</table>

	13. Calcular el ángulo formado por el plano $x - 5y - 2z + 4 = 0$ y la recta: $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 2 \\ z = t - 1 \end{cases}$	
Puntaje Total		**_____/15**
Equivalencia sobre 10		**_____/10**

Elaborado por:	**Revisado y aprobado por:**
Ing. Jaime López Chica	
Fecha:	Fecha:
Firma:	Firma:

ANEXO 3

GUIA DE USO DE GEOGEBRA 3D CON REALIDAD AUMENTADA (AR)

Usa GeoGebra 3D con AR para explorar tus figuras geométricas en tu entorno y observarlas desde diferentes puntos. Modela la matemática en el mundo real y revisa a detalle el comportamiento de las superficies

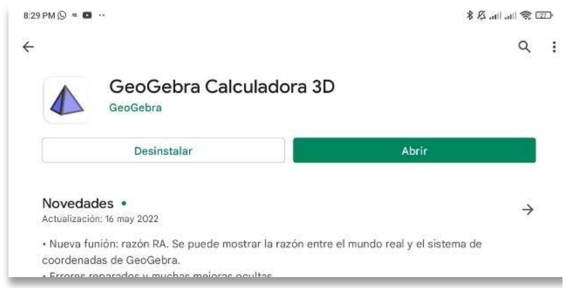
Realidad Aumentada con GeoGebra 3D

La aplicación GEOGEBRA 3D entre en sus complementos tiene una modelación de realidad aumentada, la misma está disponible solo para dispositivos móviles sean estos; teléfonos inteligentes y tablets.

Esta disponible para la mayoría de dispositivos actuales:

Sistema operativo ANDROID; Las aplicaciones de GeoGebra están disponibles para Android 4.4 pero es recomendable Android 5.0 o posterior. Para 3D, es necesario Android 4.1.

Sistema operativo iOS; Las aplicaciones requieren iOS 9,3 o posterior. El control aporta resultados positivos en iPad de tercera o cuarta generación.



Al ejecutar la aplicación procederemos a ingresar las ecuaciones de las superficies de interés para al final ejecutar el comando AR donde empieza la simulación

Actividad de desarrollo 1

Dada la recta r (A; $\vec{v}$), con A = (2, -1, 4) y $\vec{v}$ = (1, 0, -2) determinemos:

a. Su ecuación vectorial.

b. Dos puntos de r distintos de A y un vector director distinto de $\vec{v}$.

Resolución:

a. La ecuación vectorial es $\vec{p} = \vec{a} + k\vec{v}$: (x , y , z) = (2, -1, 4) + k (1 0, -2)

b. Damos a k dos valores distintos de cero para obtener otros dos puntos, B y C, de r :

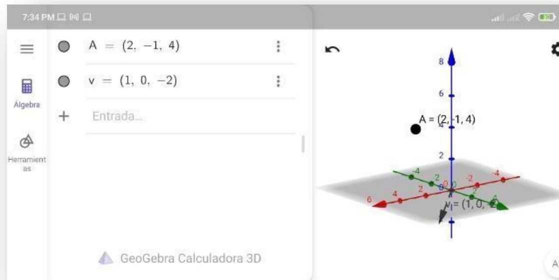
$$k = 1 \Rightarrow B = (2, -1, 4) + 1\,(1, 0, -2) = (3, -1, 2)$$
$$k = 2 \Rightarrow C = (2, -1, 4) + 2\,(1, 0, -2) = (4, -1, 0)$$

Cualquier vector de la forma $k\vec{v}$ es un vector director de r. Así, cogeremos, por ejemplo, u = 2 · (1, 0, -2) = (2, 0, -4).

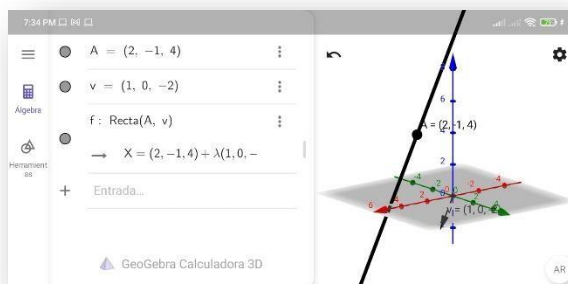
A partir de los datos anteriores realice un gráfico. Para ello vamos a ayudarnos de la aplicación GeoGebra.

1. En el comando de **Entrada** ingresamos los puntos y dirección diferenciando que para declarar puntos utilizaremos letras mayúsculas y vectores con letra minúscula.

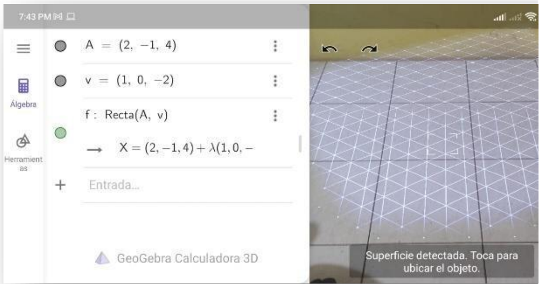
Punto: $A = (2, -1{,}4)$
Dirección: $v = (1{,}0, -2)$



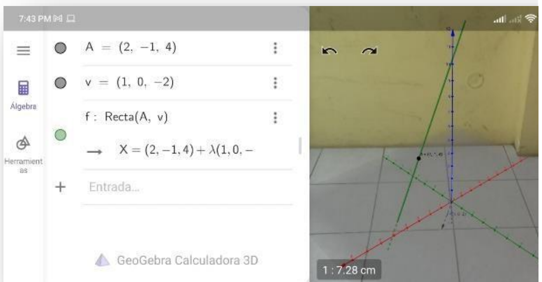
2. Una vez que la aplicación nos ha mostrado tanto el punto como la dirección, en la barra de entrada creamos una recta utilizando la sentencia; recta<Punto, Vector>.
   Recta: $\text{Recta} = (A, v)$
   La aplicación generará la recta y entrará la ecuación vectorial de la misma.



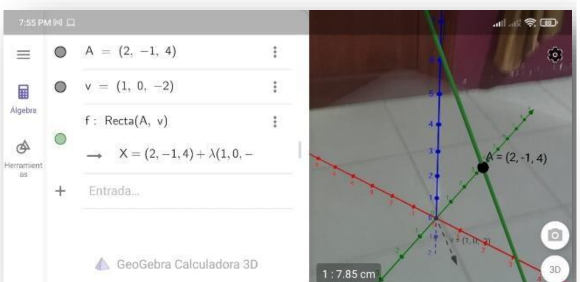
3. Pulsamos en el botón AR ubicado en la parte inferior derecha de la pantalla para pasar a realidad aumentada (AR) por sus siglas en inglés y procedemos a seleccionar el área nuestro entorno donde se alzarán nuestros ejes y las gráficas ingresadas.



4. Tocamos la pantalla en el punto donde deseamos que sea nuestro origen de coordenadas y se cargará la gráfica.



5. Sin tocar la pantalla empezamos movernos alrededor de la gráfica para inspeccionarla a detalle.



Actividad de desarrollo 2

Sea el plano π (A; $\vec{u}$, $\vec{v}$) con A = (3, 0, -1) $\vec{u}$ = (1, 2 , -3), $\vec{v}$ = (-2, 3, 0). Determinemos:

a. Su ecuación vectorial

b. Dos puntos de π distintos de A

c. Dos vectores directores distintos de $\vec{u}$ y $\vec{v}$

d. Otra expresión de la ecuación vectorial

Resolución:

a. $(x, y, z) = (3, 0, -1) + \lambda\,(1, 2, -3) + \mu\,(-2, 3, 0)$

b. Damos diferentes valores a λ y μ para obtener otros puntos:

Si $\lambda = 1$ y $\mu = 0$: $B = (3, 0, -1) + 1(1, 2, -3) + 0\,(-2, 3, 0) = (4, 2, -4)$

Si $\lambda = 1$ y $\mu = 1$: $C = (3, 0, -1) + 1(1, 2, -3) + 1(-2, 3, 0) = (2, 5, -4)$

c. Obtenemos dos vectores directores del plano a partir de A, B y C:

$\overrightarrow{BC} = (2 - 4, 5 - 2, 4 - (-4)) = (-2, 3, 0) = \vec{u}'$

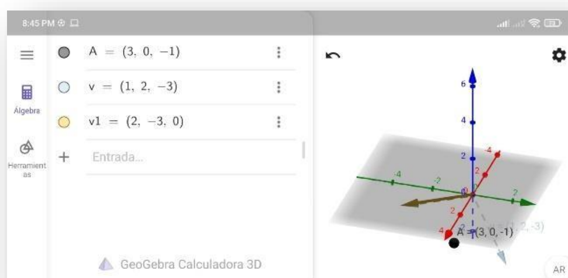
$\overrightarrow{AC} = (2 - 3, 5 - 0, -4 - (-1)) = (-1, 5, -3) = \vec{v}'$

d. Como los vectores $\vec{u}'$ y $\vec{v}'$ son linealmente independientes, podemos utilizarlos para escribir otra ecuación vectorial. Así, para B = (4, 2, -4):

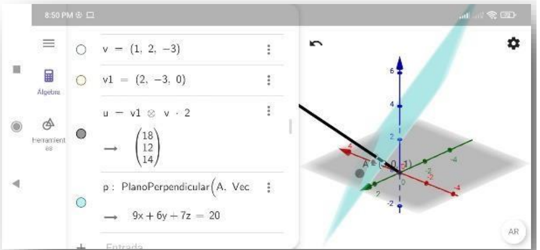
$(x, y, z) = (4, 2, -4) + \lambda\,(-2, 3, 0) + \mu\,(-1, 5, -3)$

iciamos la aplicación e ingresamos los datos sponibles para la modelación

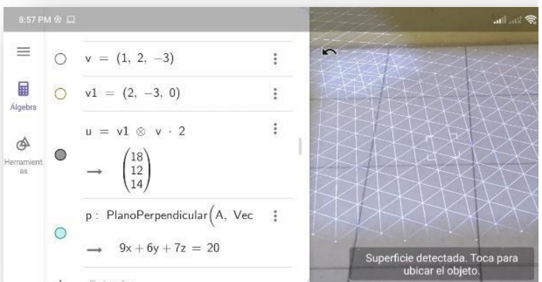
1. Declaramos el punto y las direcciones en la aplicación
   Punto: $A = (3,0,-1)$
   Dirección 1: $v1 = (1,2,-3)$
   Dirección 2: $v2 = (-2,3,0)$



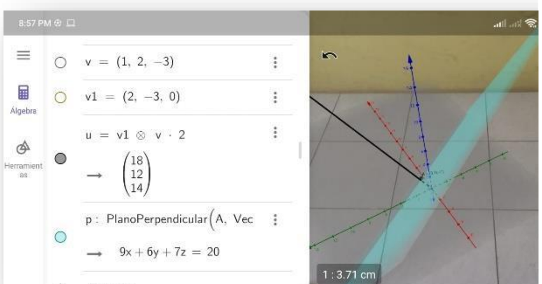
2. Una vez que la aplicación nos ha mostrado tanto el punto como las direcciones, en la barra de entrada creamos un plano utilizando la sentencia; Plano<Punto, Vector,Vector>. Siendo esta solo una de las formas de sentenciar el plano.
   Plano: $\text{Recta} = (A, v1, v2)$
   La aplicación generará el plano único que tiene la dirección del plano en que están los vectores (v1, v2) y para por el punto A y además mostrará la ecuación general del plano.



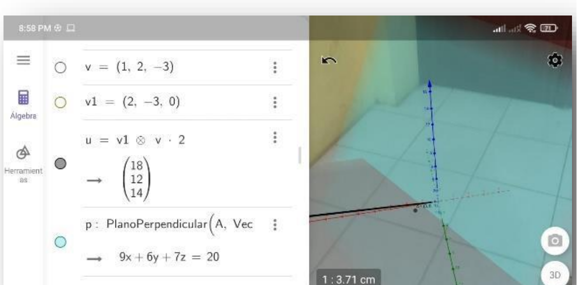
3. Seleccionamos el área nuevamente luego de activar el comando AR.



4. Seleccionamos el origen de coordenadas en el espacio que consideremos apropiado.

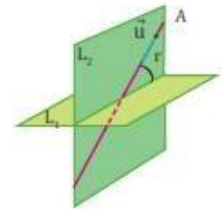


5. Procedemos a inspeccionar el objeto para visualizar la disposición del plano, el punto y los vectores que lo direccionan.



<u>Actividad de desarrollo 3.1</u>

Hallemos la ecuación de un plano L_2, perpendicular al plano L_1: $x + 3y - z + 1 = 0$ y que contiene a la recta r:(x, y, z) = (1, 3, 4) + k(-1, -2, 5).



Observamos en la figura que solo existe un plano que contenga a r y sea perpendicular a L_1.

- Como L_2 ha de contener la recta r, cualquier punto y cualquier vector director de r lo serán también del plano. Así, A=(1, 3, 4) es un punto de L_2 y $\vec{u}$ = (-1, -2, 5), un vector de L_2.
- Como L_2 ha de ser perpendicular a L_1, el vector normal asociado a L_1 será un vector director de L_2, $\vec{v}$ =(1, 3, -1).

Puesto que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no son paralelos, L_2 es el plano determinado por A, $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

L_2: $\langle x, y, z\rangle = \langle 1, 3, 4\rangle + \lambda\langle -1, -2, 5\rangle + \mu\langle 1, 3, -1\rangle$

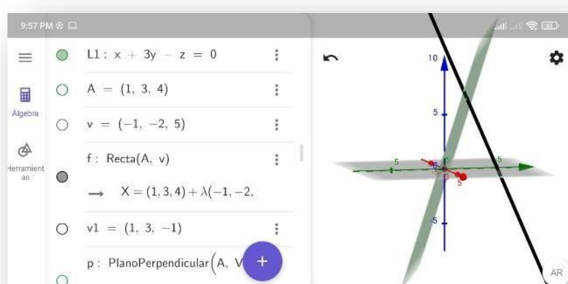
Y su ecuación general dada por el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = 3 - 2\lambda + 3\mu \\ z = 4 + 5\lambda - \mu \end{cases}$$

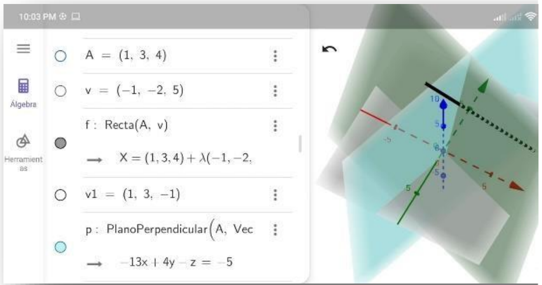
L_2: $13x - 4y + z - 5 = 0$.

Iniciamos la aplicación e ingresamos los datos disponibles para la modelación

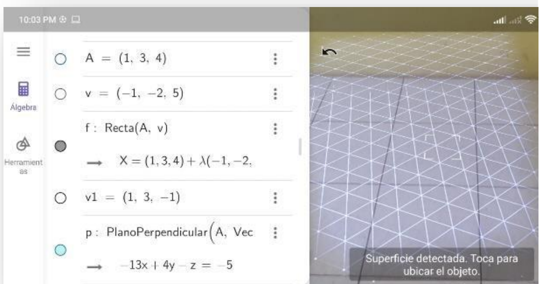
1. Declaramos el plano (en su forma general) y la recta.
   Plano L1: $x + 3y - z = 0$
   Recta r: $recta(A, v)$
   $A = (1,3,4)$
   $v = (-1,-2,5)$



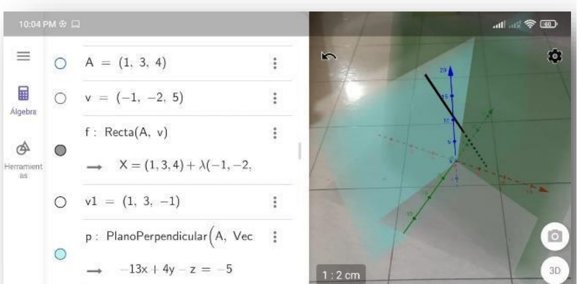
2. Ya habiendo graficado tanto la recta como el plano y sabiendo que el plano L2 perpendicular a L1 que incluye a la recta r incluirá al punto A y contendrá a los vectores v (dirección de la recta) y v1 (vector normal a L1) podremos declarar el plano.



3. Seleccionamos el área nuevamente luego de activar el comando AR.



4. Seleccionamos el origen de coordenadas en el espacio que consideremos apropiado.



5. Procedemos a inspeccionar el objeto para visualizar la disposición del plano, el punto y los vectores que lo direccionan.

Calcula el ángulo que forman la recta r y el plano π.

$$r: \begin{cases} x = 3 + k \\ y = -2 + k \\ z = 5 \end{cases} \qquad \pi: 3x - 4y + 5z - 1 = 0$$

Escribimos un vector director de la recta y un vector normal al plano:

$$\vec{v} = (1, 1, 0) \qquad \vec{n} = (3, -4, 5)$$

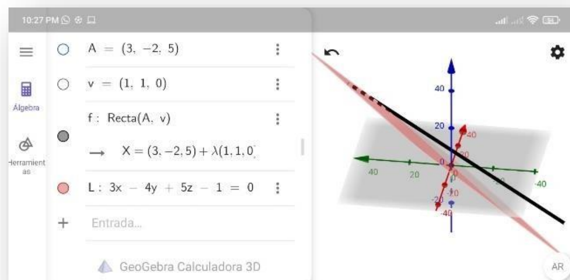
Hallamos el ángulo α :

$$\alpha = \text{arc sen}\ \frac{|v_1A + v_2B + v_3C|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\ \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 5^2}} = \text{arc sen}\ \frac{1}{10} = 5{,}74^{o}$$

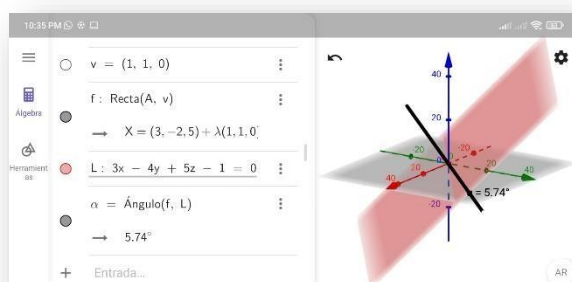
iciamos la aplicación e ingresamos los datos sponibles para la modelación

Actividad de desarrollo 3.2

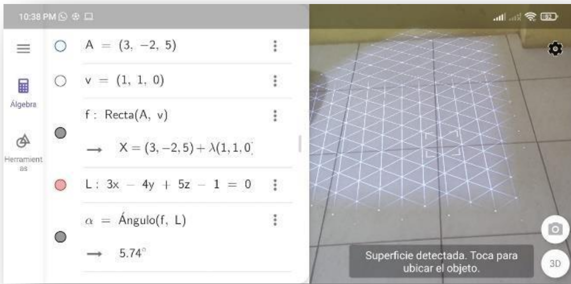
1. Declaramos el plano (en su forma general) y la recta.
   Plano L1: $3x - 4y + 5z - 1 = 0$
   Recta f: $recta(A, v)$
   $A = (3, -2, 5)$
   $v = (1, 1, 0)$



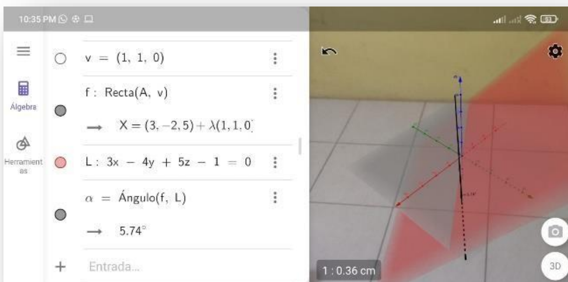
2. Ya habiendo graficado tanto la recta como el plan, utilizamos la función **Ángulo** con la sentencia Ángulo<Recta, Plano> encontramos el ángulo que forman.



3. Seleccionamos el área nuevamente luego de activar el comando AR.



4. Seleccionamos el origen de coordenadas en el espacio que consideremos apropiado, deberá ser una superficie preferentemente plana con la amplitud suficiente.



5. Procedemos a inspeccionar el objeto para visualizar la disposición del plano, la recta y ángulo que forman.