

# DESARROLLO DE UNA FUNCIÓN EN MATLAB PARA EL CAMBIO DE BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL

## Development of a function in MATLAB for the change of basis of a Vector Space

Francisco Carreras García

Facultad de Ciencia/Escuela de Física y Matemática, Escuela Superior Politécnica de Chimborazo (ESPOCH), Riobamba (Ecuador)

francisco.carreras@esepoch.edu.ec

### Resumen

En este trabajo desarrollamos una función en MATLAB para el cálculo del cambio de base en un Espacio Vectorial, este es un tema fundamental en un curso de Álgebra Lineal que debido a su complejidad debemos decir que se le ha prestado poca atención en la investigación en educación matemática. En el cambio de base por ser el cálculo muchas veces bastante tedioso, solo se hacen en el aula de clase ejemplos en  $\mathbb{R}^2$  y con la función "cbase2(A,B)" que hemos desarrollado para cambiar de una base a otra, la dimensión del Espacio Vectorial no es una restricción. Se muestra la versatilidad de MATLAB para hacer cálculos para comprobar fácilmente los resultados obtenidos de forma manual en el ejemplo 2. Podemos concluir que esta función permitirá aligerar los cálculos en el aula de clase y sería bueno hacer una nueva investigación para comprobar su versatilidad en un curso de Álgebra Lineal.

**Palabras claves:** Álgebra Lineal, Espacio Vectorial, Cambio de base, MATLAB.

### Abstract

In this work we develop a function in MATLAB for the calculation of change of basis in a Vector Space, this is a fundamental issue in a Linear Algebra course that due to its complexity we must say that little attention has been paid in education research math. In the change of basis due to the calculation, which is often quite tedious, only examples in  $\mathbb{R}^2$  are made in the classroom and with the function "cbase2 (A, B)" that we have developed to change from one basis to another, the dimension of the Vector Space is not a restriction. It shows the versatility of MATLAB to make calculations to easily check the results obtained manually in the example 2. We can conclude that this function will allow to lighten the calculations in the classroom and it would be good to do a new investigation to check its versatility in a Linear Algebra course.

**keywords:** Linear Algebra, Vector Space, Change of basis, MATLAB

**Fecha de recepción:** 06-08-2018

**Fecha de aceptación:** 17-06-2019

## I. INTRODUCCIÓN

El estudio y la enseñanza del Álgebra Lineal utilizando herramientas tecnológicas ha sido poco aprovechado por que los conceptos, en su mayoría, son muy teóricos. Sin embargo, tenemos conceptos como las matrices, sistemas de ecuaciones, autovalores que necesitan, según la dimensión de los mismos, un cálculo mas laborioso

y en algunos casos extenso, lo cual si se hace sin el uso de la tecnología puede llevar al aburrimiento del estudiante y por lo tanto la falta de interés en su aprendizaje.

Por este último motivo es que el objetivo de este artículo es desarrollar una

función en MATLAB para el cálculo de la Matriz de cambio de base de un Espacio Vectorial, ya que este tema no es sencillo de enseñar y crea cierta dificultad en el estudiante para su aprendizaje.

Hemos utilizado la versión R2015a de MATLAB y programado en dicho software debido a la utilidad que tiene este lenguaje en las carreras de Ingeniería y a la facilidad para programar por la gran cantidad de funciones internas que reducen la programación. También, de alguna forma se quiere motivar a los estudiantes para que puedan desarrollar otras funciones que les ayuden en los cálculos que tengan que hacer en las diferentes asignaturas de matemáticas, así como mostrar a los docentes que desarrollando estas funciones pueden mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje en los conceptos matemáticos que requieran de cálculos que harían su entendimiento algo confuso.

El concepto de cambio de base no es fácil de explicar y su cálculo es bastante tedioso debido a la dimensión que tenga la matriz del Espacio Vectorial, sin embargo con la función que hemos desarrollado "`cbase2(A, B)`" mostramos la facilidad del computo realizado en MATLAB que el ejemplo que se presenta donde el cálculo manual es algo largo con la aplicación de la función el resultado es inmediato pudiéndose de alguna manera extender a Matrices de cualquier dimensión, es decir, a Espacios Vectoriales de mayor dimensión. De igual forma la comprobación de los resultados resultan bastante fáciles de hacer utilizando el MATLAB.

## II. MATERIALES Y MÉTODOS

### LA ENSEÑANZA DEL ALGEBRA LINEAL

El Algebra Lineal actualmente es uno de los principales temas de estudio en los currículos de las Ingenierías, sin embar-

go, no se le presta el interés que el tema tiene. El Algebra Lineal es una rama de las matemáticas que estudia diferentes conceptos como vectores, matrices, sistemas de ecuaciones, transformaciones lineales, espacios vectoriales y las diversas propiedades que cada concepto comprenda. Dentro de los espacios vectoriales tenemos conceptos que son bastante abstractos como el de subespacio, las bases, las transformaciones lineales, los autovalores y los autovectores. El Algebra Lineal ha cobrado una mayor importancia con el desarrollo de las computadoras porque permiten hacer un número mayor de operaciones. Por lo general, la mayoría de las ciencias básicas y la computación requieren de los fundamentos que conforman el Algebra Lineal.

Una de las aplicaciones del Algebra Lineal la encontramos en el buscador Google [15], quien subraya que el éxito de Google se debe a un algoritmo llamado "Page Rank" que tiene mucho que ver con el Algebra Lineal. De igual forma el formato JPEG, de una imagen digital es una matriz, se indica en [15] que en el formato JPEG se divide la imagen en bloques 8x8 y se somete cada bloque a una transformación matricial ortogonal.

En 1997 Dubinsky [3] publicó un artículo donde advertía que las dificultades que tienen los estudiantes con los conceptos de Algebra Lineal no pueden y no deben evitarse concentrándose en los aspectos computacionales de esta materia y eludiendo la abstracción, sin embargo, es de hacer notar que el aligerar los cálculos que se deben realizar permite dedicar una mayor cantidad de tiempo al razonamiento abstracto de los problemas.

Un concepto difícil de enseñar es el de base de un Espacio Vectorial, para el cual la investigación en educación matemática le ha dedicado poca atención [3]. Sin embargo, el aprendizaje de este concepto es fundamental en la estructura de los Espacios Vectoriales y se relaciona directamente con otros conceptos del Algebra Lineal como las Transformaciones Lineales.

Tratando de resaltar la dificultad que presenta el concepto de base, Oktac y Trigueros [11] señalan que aun cuando los estudiantes intentan articular las propiedades del concepto de base, no son capaces de verificar cuando un conjunto es base de un Espacio Vectorial, ni de coordinar los elementos conceptuales involucrados en su construcción. Esto nos hace pensar que al introducir el concepto de cambio de base presentará una mayor complejidad la realización de los cálculos correspondientes.

Una gran cantidad de procedimientos de Algebra Lineal necesitan de cálculos largos y en algunos casos tediosos, tales como la inversa de una matriz para lo cual se usa el método de Gauss-Jordan, el cual también se puede utilizar para resolver un sistema de ecuaciones, sin embargo, para este último muchas veces, por la reducción de los cálculos, se usa el método de eliminación Gaussiana o método de Gauss. Otros procedimientos para los cual es difícil realizar las operaciones es el cálculo de autovalores y autovectores.

Por el motivo anterior es que se han desarrollado una serie de programas comerciales como MATLAB, MAPLE, DERIVE y de software libre como GEOGEBRA, SAGE, que se utilizan para aligerar los cálculos en la enseñanza de las matemáticas y que encuadran en los denominados Sistemas de Cálculo Algebraico (SCA). Sin embargo, aunque con algunos se puede reducir una matriz aplicando el método de Gauss-Jordan (DERIVE) y con otros se puede calcular el polinomio característico y los autovalores y autovectores (SAGE), ninguno de ellos tiene alguna función interna que permita el cambio de base de un Espacio Vectorial.

Las posibilidades simbólicas, numéricas y gráficas que ofrecen estos programas están provocando numerosos cambios en la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina [8]. Según Guzmán [5] el uso de los SCA en el aula permite prescindir del esfuerzo rutinario de cálculo y esto puede favorecer a que el estudiante se dedique más a la exploración y el razonamiento de los problemas matemáticos que se le presentan.

El uso de los SCA está basado en la metodología: *la construcción del conocimiento matemático por medio de la exploración y la experimentación*. Esta es una metodología basada en la adquisición de aprendizajes por medio de la experimentación, la exploración y la observación del alumno en base a unos conocimientos previos y denominada aprendizaje significativo [1].

Una experiencia positiva ha tenido [12] al utilizar el programa DERIVE en la enseñanza de Algebra Lineal, quien señala que el programa DERIVE ha permitido que los alumnos realicen con menos esfuerzo los cálculos repetitivos y rutinarios, así como no ha generado barreras adicionales para el aprendizaje de los principales contenidos de Algebra Lineal. Por otra parte, [12] también señala que dicho programa ha sido un elemento motivador para el aprendizaje porque les ha facilitado el cálculo, lo cual

les ha permitido llegar al final en la resolución de muchos problemas.

Nosotros hemos escogido MATLAB para el desarrollo de una función para el cálculo de la matriz del cambio de base, porque el mismo es un programa diseñado para el uso de vectores y matrices, y ha desarrollado algunos algoritmos internos que realizan los cálculos de algunos conceptos del Algebra Lineal, por ejemplo: el determinante de una matriz ( $\det(A)$ ), la inversa de una matriz ( $\text{inv}(A)$ ), el cálculo de los autovalores y autovectores y otros.

Por otra parte, MATLAB es un programa versátil y fácil de aprender, también nos permite establecer un balance entre la teoría y la práctica. Los estudiantes pueden aprender los conceptos teóricos en el aula de clase y luego pueden implementar y probar con MATLAB los conocimientos adquiridos. Muchas de las funciones necesarias para implementar los conceptos son funciones internas del programa y pueden ser llamadas desde el script y no tienen que implementarlas ellos mismos, pero en este último caso también se pueden construir algunas funciones por la facilidad de su lenguaje dinámico de programación.

## EL CONCEPTO DE CAMBIO DE BASE

El cambio de base es un concepto fundamental en la teoría de los espacios vectoriales, ya que involucra los conceptos de independencia lineal y combinación lineal. Comenzaremos viendo la definición de **Espacio Vectorial**, según [6]

Sea  $(K, +, \cdot)$  un cuerpo. Sea  $V$  un conjunto no vacío, sea  $+$  una operación en  $V$  y sea  $\cdot$  una acción de  $K$  en  $V$ . Se dice que  $(V, +, \cdot)$  es un  $K$ -espacio vectorial si se cumplen las siguientes condiciones:

- i.  $(V, +)$  es un grupo abeliano
- ii. La acción  $\cdot$ :  $K \times V \rightarrow V$  satisface:

- a)  $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$   
 $\forall \alpha \in K; \forall v, w \in V$
- b)  $(\alpha + \beta) \cdot v = \alpha \cdot v + \beta \cdot v$   
 $\forall \alpha, \beta \in K; \forall v \in V$
- c)  $1 \cdot v = v$   
 $\forall v \in V$
- d)  $(\alpha \cdot \beta) \cdot v = \alpha \cdot (\beta \cdot v)$   
 $\forall \alpha, \beta \in K; \forall v \in V$

Siguiendo al mismo autor [6] tenemos la definición del concepto de **base**

Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial. Una familia  $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$  se llama una base del espacio vectorial  $V$  si  $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$  es una familia linealmente independiente de  $V$  y que genera a  $V$ .

La propiedad fundamental del concepto de base es que cualquier vector del espacio vectorial se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base, así sea  $\{v_i\}$  una base de  $V$ , para cada  $v \in V$

existe  $\{\alpha_i\} \in K$  tal que  $v = \sum_{i \in I} \alpha_i v_i$

Esta propiedad nos permite escribir cada uno de los vectores en función de los vectores de la base y el vector que se forma con los escalares de la combinación lineal se llama **vector coordinado** respecto a la base correspondiente.

De igual manera definimos lo que es la coordenada de un vector en una base determinada

Sea  $V$  un  $K$ -espacio vectorial de dimensión finita y sea

$B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  una base de  $V$ . Dado

$v \in V$ , existen únicos  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \in K$

tales que  $v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n$ . El vector

$(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in K^n$  se llama vector coordenadas de  $v$  en

la base  $B$  y se denota por

$$(v)_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo 1

Sea la base  $B = \left\{ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$  y consideremos el vec-

tor  $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$  al hacer la combinación lineal tenemos

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} = (1) \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + (2) \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \Rightarrow (v)_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}. (1)$$

Ya al saber cómo se escribe el vector coordinado respecto a una base podemos establecer la matriz del cambio de base o matriz de transición de una base a otra [7]. Para ello supongamos que tenemos las bases  $B_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  y  $B_2 = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  del espacio  $n$ -dimensional  $V$ .

Ahora consideremos un vector  $v \in V$  y escribimos el vec-

tor coordinado respecto a la base  $B_2$

$$v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n \Rightarrow (v)_{B_2} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Entonces

$$(v)_{B_1} = (\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n)_{B_1}$$

$$(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \dots + \alpha_n w_n)_{B_1} = \alpha_1 (w_1)_{B_1} + \alpha_2 (w_2)_{B_1} + \dots + \alpha_n (w_n)_{B_1}$$

Ahora escribamos al vector  $w_j$  en las coordenadas res-

pecto a la base  $B_1$  como

$$(w_j)_{B_1} = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{pmatrix}$$

Entonces

$$(v)_{B_1} = \alpha_1 \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{n2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \begin{pmatrix} b_{1n} \\ b_{2n} \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$(v)_{B_1} = P_{B_2, B_1} (v)_{B_2} \quad (2)$$

donde

$$P_{B_1, B_2} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} = ((w_1)_{B_1} \ (w_2)_{B_1} \ \dots \ (w_n)_{B_1})$$

es la matriz del cambio de la base  $B_2$  a la base  $B_1$ .

### Ejemplo 2

Sean  $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$  y  $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$  bases del espacio vectorial  $R^3$ , donde

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ahora calculamos la matriz de cambio de base  $P_{B_2, B_1}$ , para ello buscamos el vector coordenado para cada uno de los vectores  $w_i$  respecto de la base  $B_1$ . Así, resolvemos el sis-

tema de ecuaciones  $w_i = \sum_1^3 \alpha_{ij} v_j$  para cada uno de los vectores.

Esto es

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \\ \alpha_{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{31} \\ \alpha_{32} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

lo cual nos da los siguientes vectores coordenados

$$(w_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, (w_2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (w_3)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

y formamos la matriz de cambio de base

$$P_{B_2, B_1} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Consideremos el vector  $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$ , del

ejemplo 1, donde sus coordenadas respecto a la base  $B_2$  es  $(v)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$  y

para determinar sus coordenadas respecto a la base  $B_1$  aplicamos la ecuación señalada en (2), es decir,

$$(v)_{B_1} = P_{B_2, B_1} (v)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ahora podemos comprobar utilizando los vectores de la base  $B_1$  que

$$v = (4) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (-5) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

De esta forma, podemos pasar de una base a la otra y viceversa, eso nos muestra que la matriz de cambio de base de la base  $B_1$  a la base  $B_2$  se puede construir de la misma forma o mediante la inversa de la matriz de cambio de base de la base  $B_2$  a la base  $B_1$ . Así

$$P_{B_1, B_2} = (P_{B_2, B_1})^{-1} \quad (3)$$

### Ejemplo 3

Sea la matriz de cambio de base de  $B_2$  a  $B_1$  del ejemplo anterior. Podemos comprobar que  $(P_{B_2, B_1})^{-1}$  es la matriz de cambio de base de  $B_1$  a  $B_2$ , ya que

$$\begin{aligned} (P_{B_2, B_1})^{-1} (v)_{B_1} &= \begin{pmatrix} 3/2 & 1/2 & -5/2 \\ -1/2 & -1/2 & 3/2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = (v)_{B_2} \end{aligned}$$

## III. RESULTADOS

### DESARROLLO DE LA FUNCIÓN CAMBIO DE BASE EN MATLAB

Para construir la función de cambio de base utilizamos el programa de MATLAB por la ventaja que tiene en sus funciones internas como, por ejemplo, la función “`rref(A)`” que permite escalar la matriz  $A$  y la cual utilizamos para la obtención de las coordenadas de un vector respecto de una base cualquiera.

Primero veremos en la Figura 1, la rutina que presenta la función que creamos “`cbase2(A,B)`” que determina la matriz del cambio de base de la base  $A$  a la base  $B$ . Puesto que las matrices en MATLAB se introducen como vectores fila, debemos tener presente que las matrices que representan las bases serán introducidas en filas y en la rutina del programa se

convierten a columna utilizando la transpuesta de una matriz.

```
function cbase2=cbase2(A,B)
% calcula la matriz de cambio de base
A=A';
B=B';
if det(A)==0
disp('A no es una base')
elseif det(B)==0
disp('B no es una base')
elseif length(A)~=length(B)
R=[];
u=length(A);
for k=1:u
w=B(:,k);
M=[A w];
T=rref(M);
P=T(:,u+1);
R=[R P];
end
cbase2=R;
else
disp('error matrices diferente orden')
end
end
```

Figura 1

Ahora utilizando las bases del ejemplo 2 establecimos la rutina correspondiente y mostramos los resultados en MATLAB, en donde introducimos la matriz

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{denotada por } B1 \text{ y la matriz}$$

$$B_2 = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix} \text{denotada por } B2, \text{ calculamos la matriz}$$

del cambio de base de  $B_2$  a  $B_1$  denotada por  $P21$ , como se ve en la Figura 2.

```
>> B1=[2 0 1;1 2 0;1 1 1];
>> B2=[6 3 3;4 -1 3;5 5 2];
>> P21=cbase2(B1,B2);
>> v=[4;-9;5];
>> C=[B2' v];
>> C1=rref(C);
>> C2=C1(:,4);
>> E=[B1' v];
>> E1=rref(E);
>> E2=E1(:,4);
>> W=P21*C2;
>> Y=B1'*W;
```

$$P21 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} C2 = & E2 = & W=P21*C2 = & Y=B1'*W = \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix} \end{array}$$

Figura 2



Introducimos el vector  $v = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{pmatrix}$  y calculamos las com-

ponentes del vector  $v$  respecto a la base  $B_2$ ,  $(v)_{B_2}$  que denotamos por  $C_2$  y las componentes del vector  $v$  respecto a la base  $B_1$ ,  $(v)_{B_1}$  que denotamos por  $E_2$ .

Luego multiplicamos la matriz  $P_{21}$  por el vector  $C_2$  y vemos que el resultado, indicado con  $W$ , es el vector  $E_2$ , como debería de ser el resultado; de igual forma para comprobar el resultado multiplicamos la matriz de la base  $B_1$  por el vector resultante  $W$  y obtenemos nuestro vector original  $v$ .

Para mostrar la utilidad con matrices de mayor orden, consideremos las bases  $B_1$  y  $B_2$  de  $R^5$  mostradas en la Figura 3 del ejemplo 4 y calculamos la matriz de cambio de base de  $B_1$  a  $B_2$  que denotamos con  $P_{12}$ , utilizando la función desarrollada, y vemos que sin ningún problema MATLAB calcula una matriz de cambio de base  $P_{12}$  de dimensión  $5 \times 5$ .

#### Ejemplo 4

```
>> B1=[1 -1 3 5 0;2 0 -4 2 1;3 1 -1 -1 2;0 2 0 -2 1;1 1 0 -1 2];
>> B2=[0 1 0 -1 2;1 0 -2 1 1;3 1 1 0 2; -2 1 0 -1 0;2 1 1 -1 0];
>> P12=cbase2(B1,B2)
```

$$P_{12} = \begin{pmatrix} -1/20 & -1/60 & 11/30 & -1/12 & 13/60 \\ 1/10 & 8/15 & -7/30 & 1/6 & -13/30 \\ -11/20 & -11/60 & 31/30 & -11/12 & 83/60 \\ 0 & -1/6 & 1/6 & 2/3 & 2/3 \\ 3/2 & 1/2 & 0 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

Figura 3

De igual forma, vemos que la función opera con bases de números complejos, ya que MATLAB permite las operaciones con dichos números dentro de su estructura matricial.

En el ejemplo 5 consideraremos dos bases  $C_1$  y  $C_2$  con elementos dentro del campo de los números complejos ( $\mathbb{C}$ ). Calculamos la matriz de cambio de base de  $C_2$  a  $C_1$  y la denotamos por  $P_{21}$  y vemos que tenemos una matriz  $3 \times 3$  con valores complejos. Para comprobar el resultado tomamos un vector  $A$  en la base  $C_1$  y aplicamos la matriz  $P_{21}$  para obtener el vector  $K$  en la base  $C_2$ .

Luego buscamos la inversa de  $P_{21}$ , según (3), que es la matriz del cambio de base de  $C_1$  a  $C_2$  y al multiplicar la inversa por el vector  $K$  obtenemos el vector  $L$  que es el mismo vector  $A$ . Con esto se comprueba que la función “**cbase2**” también trabaja dentro del campo de los números complejos.

#### Ejemplo 5

```
>> C1=[i i-1 2i;2-i 0 1+i;0 -1-2i i];
>> C2=[0 i 1;i 1 1-i;3i -i 0];
>> P21=cbase2(C2,C1)
```

$$P_{21} = \begin{pmatrix} 1/2 + 3/2i & -7/2 - 1/2i & -3 - 4i \\ -2 - 3/2i & 2 - 5/2i & 3 + 0i \\ 1 + 1/2i & -1 + 3/2i & -1 + 0i \end{pmatrix}$$

```
>> A=[1 0 i]; % vector en la base C1
>> K=P21*A' % vector en la base C2
```

$$K = \begin{pmatrix} -3.5000 + 4.5000i \\ -2.0000 - 4.5000i \\ 1.0000 + 1.5000i \end{pmatrix}$$

```
>> L=inv(P21)*K
```

$$L = \begin{pmatrix} 1.0000 - 0.0000i \\ -0.0000 + 0.0000i \\ 0.0000 - 1.0000i \end{pmatrix}$$

Figura 4

## IV. CONCLUSIONES

Luego de realizada esta función en MATLAB, vemos que se pueden desarrollar funciones como la que hemos presentado para resolver cálculos que en Álgebra Lineal pueden ser tediosos y largos. Además, en MATLAB, la comprobación de los resultados, utilizando estas funciones, se convierte en una tarea fácil y sencilla debido a la construcción vectorial de sus componentes y la facilidad de la programación que no presenta restricciones en la dimensión que tenga el Espacio Vectorial.

Podemos señalar que la función desarrollada se utiliza para matrices de orden  $n > 3$ , como para matrices que están en el campo de los números complejos, como se muestra en los ejemplos 4 y 5. También podemos decir que, en el aula

de clase, la comprobación resulta adecuada para el estudiante por no tener que hacer unos cálculos largos y además puede realizar varios ejemplos en corto tiempo, incluso con matrices de mayor orden.

Para investigaciones futuras debo sugerir que esta función se aplique en el aula para ver la reacción de los estudiantes ante la facilidad de cálculo que se obtiene con el uso del MATLAB, así como se podría utilizar el programa de MATLAB para ver su utilidad en el aula en un curso de Álgebra Lineal.

## Referencias

1. Ausubel D, Novak J, Hanesian H. Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo. México: Trillas; 1976.
2. Chargoy RM. Dificultades asociadas al concepto de base de un espacio vectorial. [tesis doctoral], Cinvestav-IPN; 2006.
3. Dubinsky E. Some Thoughts on a First Linear Algebra Course. En D. Carlson, C.R. Johnson, D.C. Lay, R.D. Porter, A. Watkins, & W. Watkins (eds). Resources For Teaching Linear Algebra. MAA Notes, 42. 1997. p. 85-106.
4. Gallegos D, Pavon C, Trujillo X. Posibilidades de empleo de Matlab para el desarrollo del pensamiento algorítmico en la solución de problemas matemáticos. Revista Publicando [Internet]. 2017 [citado 16 de marzo de 2019]; 4(10): 420-428. Disponible en: [https://revistapublicando.org/revista/index.php/crv/article/view/444/pdf\\_285](https://revistapublicando.org/revista/index.php/crv/article/view/444/pdf_285)
5. Guzmán M. Los riesgos del ordenador en la enseñanza de la matemática. En: Abellanas M. y García A, editores. Enseñanza experimental de la matemática en la Universidad. Universidad Politécnica de Madrid. España. 1992.
6. Jerónimo G, Sabia J, Tesauri S. Álgebra Lineal. [Internet]. Departamento de Matemática de la UBA. 2008 [citado 16 de marzo 2019]. Disponible en: <http://bit.ly/2tmXPtx>.
7. Kolman B, Hill D. Álgebra Lineal. México: Pearson Educación. 2006.
8. Llorens JL. Introducción al uso de DERIVE: aplicaciones al álgebra lineal y al cálculo infinitesimal. Departamento. de Matemática Aplicada E.U.I.T.A. 1993.
9. Lopez L, Aldaz G, Chugñay M, Hidalgo C. Modelación matemática para la probabilidad de ocurrencia de un evento con Matlab. ProSciences [Internet]. 2019 [citado 16 de marzo 2019]; 3(19). Disponible en: <http://journalprosciences.com/index.php/ps/article/view/103>
10. Mosquera M, Vivas S. Análisis comparativo de software matemático para la formación de competencias de aprendizaje en cálculo diferencial. Plumilla educativa. 2017; 98-113.
11. Oktac A, Trigueros M. ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal?. Relime. 2010; 13 (4-II): 373-385.
12. Ortega P. Una estrategia didáctica para la enseñanza del álgebra lineal con el uso del sistema de cálculo algebraico DERIVE. Revista Complutense de Educación. 2002; 13(2): 645-675.
13. Ortigoza G. Animaciones en Matlab y Maple de ecuaciones diferenciales parciales de la física-matemática. Revista Mexicana de Física. 2007; 53(1): 56-66.
14. Rivera G, Echeverri D. Diseño y elaboración de un entorno computacional edumathUH para el fortalecimiento del cálculo diferencial. Itinerario educativo [Internet]. 2016 [citado 16 de marzo de 2019]; 30(68): 51-64. Disponible en <https://revistas.usb.edu.co/index.php/Itinerario/article/view/2947>
15. Rojas A, Cano A. Aplicaciones del Álgebra Lineal en la vida cotidiana. XIV JAEM Girona 2009; 2009. España.